Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences Appliqués, Ait-Melloul
Filière SMP(S3)

Notes de cours d'Analyse Numérique

Pr. BOUYOULI.R

Filière: SMP(S3)

Année Universitaire : 2019-2020

CONTENTS

CHAPTER 1

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES $F(X) = 0$

1.1 Introduction

Toute valeur de x qui satisfait $f(x) = 0$ est appelée zéro de la fonction. Souvent dans la pratique, soit il n'existe pas de solution analytique à ce problème, soit son obtention est très laborieuse. Remarquons que toute égalité peut être mise sous la forme $f(x) = 0$.
Le problème de la recherche des zéros d'une fonction est fréquemment rencontré.

Dans ce chapitre nous allons appliquer toutes les notions précédentes sur les suites et les fonctions, à la recherche des zéros des fonctions. Plus précisément, nous allons voir quatres méthodes afin de trouver des approximations des solutions d'une équation du type ($f(x) = 0$).

1.2 La dichotomie

1.2.1 Principe de la dichotomie

Le principe de dichotomie repose sur la version suivante du théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème. *Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Si $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors il existe $\alpha \in [a,\ b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

La condition $f(a) \times f(b) \leq 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle !

Principe de la méthode de dichotomie On suppose que que f est continue dans $[a,\ b]$ et que $f(a) \times f(b) < 0$

- on pose $c = \frac{a+b}{2}$,
  - si $f(c) = 0$ Alors c est la solution approchée.
  - si $f(a) \times f(c) < 0$ on remplace b par c
  - sinon on remplace a par c;
- on continue cette opération jusqu'à ce qu'on trouve la valeur approchée p avec la précision demandée.

En effet

- **A l'étape 0:**
  On pose $a_0 = a,\ b_0 = b$. Il existe une solution α de l'équation ($f(\alpha) = 0$) dans l'intervalle $[a_0,\ b_0]$.

- **A l'étape 1:**

  - $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ Si $f(a_0) \times f(c) \leq 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$
  - sinon on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.
  - Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation ($f(x) = 0$) dans l'intervalle $[a_1,\ b_1]$.

- $\cdots$

- **A l'étape** n: supposons construit un intervalle $[a_n,\ b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2n}$, et contenant une solution ($f(x) = 0$).

  - $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ Si $f(a_n) \times f(c_n) \leq 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$
  - sinon on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  - Dans les deux cas, la solution approchée de l'équation de ($f(x) = 0$) dans l'intervalle $[a_{n+1},\ b_{n+1}]$.

  On arrête le processus dès que $|f(c_n)| \leq \epsilon$.

1.2.2 Algorithme de Dichotomie (bissection)

Algorithme:

1. Saisir a , b , ϵ
2. $c = \frac{a+b}{2}$
3. Tant que $|f(c)| \geq \epsilon$ faire
   - Si $f(a) \times f(c) \leq 0$
   - Alors b prend la valeur c
   - Sinon a prend la valeur c
   - Fin Si
4. Fin Tant que
5. Afficher a ,b

Exemple. *(Résultats numériques pour $x = \sqrt{2}$)*

Nous allons calculer une approximation de $x = \sqrt{2}$. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - 2,$$

c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x = +_-\sqrt{2}$. après 7 itérations, on trouve l'approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2}.

k	$[a,\ b]$	c	$f(c)$
1	$[1,\ 2]$	*1.5*	*0.2500*
2	$[1,\ 1.5]$	*1.25*	*-0.4375*
3	$[1.25,\ 1.5]$	*1375*	*-0.1080*
4	$[1.3755,\ 1.5]$	*1.4377*	*0.0671*
5	$[1.3755,\ 1.4377]$	*1.4066*	*-0.0215*
6	$[1.4066,\ 1.4377]$	*1.4222*	*0.0225*
7	$[1.4066,\ 1.4222]$	*1.4144*	$5.2736.10^{-4}$

Remarque. *L'algorithme de dichotomie:*

- *Il construit une suite de segments emboîtés contenant tous α.*
- *A chaque passage dans la boucle: une évaluation de f.*

1.2.3 Convergence de Dichotomie

Théorème.

- *La méthode de dichotomie converge toujours, mais la convergence est linéaire: l'erreur à chaque pas est divisée par 2.*
- *Le nombre nécessaire pour avoir cette convergence est donnée par*

$$n \geq \frac{ln(\frac{(b-a)}{\epsilon})}{ln(2)}.$$

ou ϵ la précision de l'erreur.

Exercice 1.

- *Si $a = 1,\ b = 2$ et $\epsilon = 10^{-4}$, alors $n = 14$ itérations sont suffisantes pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4}.*
- *Si $a = 1,\ b = 2$ et $\epsilon = 10^{-2}$, alors le nombre d'itération pour Dichotomie est $n = 7$.*

1.3 La méthode de Newton-Raphson

1.3.1 Principe de La méthode de Newton-Raphson

Le principe consiste à construire une suite $(x_k)_k$; telle que x_{k+1} soit l'intersection de la tangente à la courbe de f au point $(x_k,\ f(x_k))$ avec l'axe horizontal.
A létape 1; on part de x_0 L'équation de la tangente au point $(x_0,\ f(x_0))$ est donnée par

$$(D) \qquad y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

On a: $B = (x_1; 0) \in axe(OX)\ et\ B \in (D)$, donc

$$\begin{cases} 0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) \\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{cases}$$

Si $f(x_1)$ s'approche de zéro alors x_1 est la solution sinon on refait le meme processus précédent jusqu'à la solution. Ainsi à l'étape k, la méthode de Newton consiste à construire une suite (x_k) qui vérifie la relation réccurente suivante

$$Pour\ x_0 \text{ donnée} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

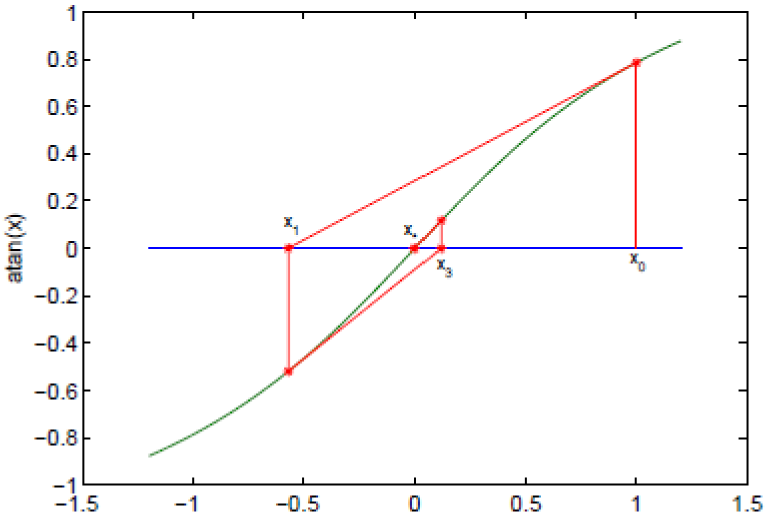

Figure 1.1: image

1.3.2 Algorithme de Newton-Raphson

Algorithme:

x_0: approximation initiale,
ϵ: tolérance souhaitée,
itemax: nombre maximal d'itérations

- Etant donnés un point initial x_0 et une tolérance ϵ,
- **Tant que** $|f(x_k)| > \epsilon$ et $k \leq itemax$, **faire**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- **Fin**

Remarque.

- *la fonction f doit être dérivable. x_{k+1} peut ne pas être calculable si $f'(x_k) = 0$ ou si x_k n'est pas dans le domaine de définition de f.*
- *chaque itération nécessite une évaluation de f et une évaluation de f'.*
- *cette méthode est souvent appelée aussi méthode de Newton-Raphson.*

Exemple. *Soit l'équation non linéaire $f(x) = x^2 - 2 = 0$, nous allons appliquer la méthode de Newton avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$ à la fonction f. Nous aurons la relation reccurente suivante*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{2}{x_k}).$$

k	x_k	$\lvert f(x_k)\rvert$
0	*1*	*1.5*
1	*1.5*	*0.25*
2	*1.42*	*0.01*
3	*1.4142*	*0.000038*

donc l'approchée de $\sqrt{2}$ est 1.42 à 10^{-2}. La méthode de newton converge en 3 itérations.

1.4 Méthode de la sécante

1.4.1 Principe de la Méthode de la sécante

Bien que la méthode de Newton est très utilisée dans la pratique, son principal inconvénient vient du fait de l'utilisation à chaque itération de la dérivée. Quand la fonction f n'est pas définie explicitement, on n' pas toujours accés Ã sa dérivée.
C'est pourquoi nous allons voir maintanant la méthode de la sécante qui n'utilise pas la dérivée de f.
L'idée de cette méthode est d'approcher la dérivé de $f'(x_k)$ par une différence dévisée.

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

La méthode de Newton-Raphson suppose le calcul de $f'(x_k)$. On remplace dans la méthode de Newton $f'(x_k)$ par

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}:$$

L'équation de la sécante s'écrit:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

1.4.2 Algorithme de Méthode de la sécante

Algorithme:
x_0, x_1: approximations initiales,
ϵ: tolérance souhaitée,
itemax: nombre maximal d'itérations
f: La fonction $f(x)$

- **Tant que** $|f(x_k)| > \epsilon$ et $k \leq itemax$, **faire**

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

- **Fin**

Exercice 2. *La méthode de la sécante pour l'équation $x^2 - 2 = 0$ consiste à construire une suite d'aaprochée (x_k) par la relation*

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_k - (x_k^2 - 2)\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k^2 - x_{k-1}^2}$$

on prend $x_0 = 1,\ x_1 = 1.5$

k	x_k	$\lvert f(x_k)\rvert$
0	*1*	*1*
1	*1.5*	*0.2500*
2	*1.40*	*0.04*
3	*1.4138*	*0.0012*

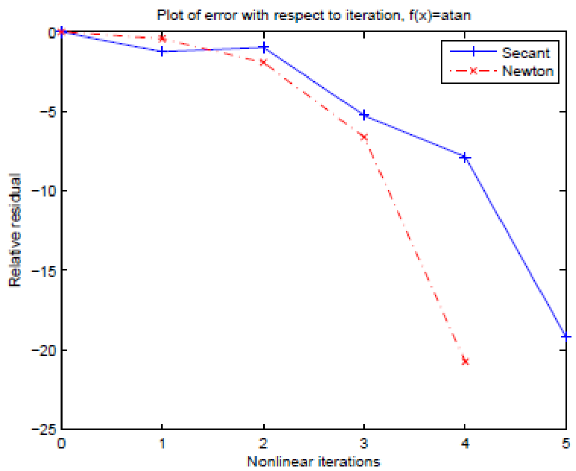

Figure 1.2: Comparaison entre les Méthodes de Newton et de la sécante

Donc l'approchée de $\sqrt{2}$ *par la sécante à* 10^{-2} *est* 1.4138.

1.5 Méthode de point fixe

1.5.1 Principe de la Méthode de point fixe

Le principe consiste à transformer l'équation

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$$

chercher la solution de $f(x) = 0$ revient à trouver $g(x) = x$. Si la fonction $g(x)$ est continue et si l'algorithme converge (c. à.d. $x_k \to x$). Alors

$$x_{k+1} = g(x_k).$$

Remarque. *Nous pouvons observer que la méthode de Newton peut s'interpréter comme méthode de point fixe où*

$$x_{k+1} = g(x_k) \text{ où } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1.5.2 Algorithme de la méthode de point fixe

Algorithme:
x_0, ϵ, $g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$.

- $x_1 = g(x_0)$
- $k \leftarrow 0$
- tant que $|x_{k+1} - x_k| > \epsilon$ faire
  - $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  - $k \leftarrow k + 1$
  - Fin tant que.
- Fin

1.5.3 Convergence et ordre de convergence.

Définition. *Soit D une partie de R et F une application de D dans D: On dit que la fonction F est contractante si*

$$\forall\ x,\ y \in D,\ \exists\ k \in [0,\ 1[\ \textit{tel que}\ |F(x) - F(y)| \leq k|x - y|\ :$$

k est le coefficient de contraction ou de Lipschitz de F:

Théorème. *Si F est dérivable au voisinage d'un point fixe x et si*

$$|F'(x)| < 1$$

Alors:
$\exists V$ voisinage de x tels que $x_0 \in V$ et $x_{k+1} = F(x_k)$ converge vers x.

Exemple. *Soit l'équation non linéaire $f(x) = x^2 - 2 = 0$, nous allons appliquer la méthode de point fixe avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$ à la fonction f. Il faut trouver une fonction g pour laquelle la méthode converge sur $[1,\ 2]$.*

- *Pour $g(x) = \frac{2}{x}$ la méthode ne converge pas(diverge), en effet $|g'(x)| \geq 1$.*
- *Pour $g(x) = \frac{1}{1+x} + 1$ la méthode converge vers la solution exacte, en effet $|g'(x)| \leq 1$.*

L'approchée de $\sqrt{2}$ par la méthode de point fixe est 1.4149 à 10^{-2} après 3 itérations (pour Pour $g(x) = \frac{1}{1+x} + 1$.

k	x_k	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	*1*	*1.5*	*0.5*
1	*1.5*	*1.40*	*0.1*
2	*1.40*	*1.41*	*0.01*
3	*1.41*	*1.4149*	*0.004*

Définition. *(Ordre de convergence.) Considérons une suite $\{x_k\}$ convergeant vers x^* (la solution exacte de $f(x) = 0$.) et posons $e_k = x_k - x^*$.*

- *Si* $|\frac{e_k}{e_{k-1}}| \leq c$ *converge vers* 0*, on dit que la suite* x_k *converge linéairement vers* x *ou encore que la méthode est du premier ordre.*

- *Si on a* $\frac{|e_k|}{|e_{k-1}|^p} \leq c$ *converge, alors la convergence est dite d'ordre* p *(*p *le plus grand possible.)*

- *Si* $p = 2$*, on dit que la convergence est quadratique.*

TD1: Résolution Numérique des Equations

$f(x) = 0$

SMP(S3)

Exercice 3.
Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$ *pour* $x \in [0,\ 1]$. *Justifier que l'équation* $f(x) = 0$ *a une solution unique* α *dans* $\mathbb{R}$, *montrer que* $\alpha \in [0,\ 1]$. *Donner en appliquant la méthode de dichotomie pour* $\epsilon = 10^{-2}$, *une approximation du zéro de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0,\ 1]$.

Exercice 4.
Donner en appliquant la méthode de Newton pour $\epsilon = 0.5 \times 10^{-2}$, *une approximation du zéro de la fonction definie sur l'intervalle* $[1,\ 2]$ *par* $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$. *Preciser le nombre d'itérations nécessaieres.*

Exercice 5.
Le polynôme $x^3 + x^2 - 2$ *possède une seule racine réelle* $r = 1$. *Pour trouver une approximation de cette racine, on se propose d'utiliser une méthode de point fixe avec l'une des 3 fonctions suivantes:*

- $g_1(x) = x^3 - x^2 + 5x + 2.$
- $g_2(x) = \sqrt{2 - x^3}.$
- $g_3(x) = \sqrt{\frac{2}{x+1}}.$

Laquelle des fonctions serait la plus adéquate? Pourquoi?

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que L'équation* (1) $\quad f(x) = e^x - 4x^2 = 0$ *a une racine dans* $[4,\ 5]$.

1. *Trouver une fonction* $h(x)$ *qui vous donnera une méthode de point fixe* $x = h(x)$ *qui converge linéairement vers la racine de* $f(x) = 0$.
2. *Calculer la solution approchée à* 10^{-2} *par la méthode de point fixe.*
3. *Utiliser la méthode de Newton pour trouver la solution approchée à* 10^{-2}.

Exercice 7. *On propose la méthode numérique*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad avec \quad x_0 > 0 \; et \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

où $\varphi(x) = x + \alpha(x^2 - 2)$.

1. *Montrer que la méthode ne peut converger que si* $\alpha < 0$.
2. *Sur l'intervalle* $[1,\ 2]$, *pour* $\alpha = -\frac{1}{3}$. *Calculer la solution approchée par cette méthode à* 10^{-2}*(La solution initial* $x_0 = 1$*).*

CHAPTER 2

LES SYSTÈMES LINÉAIRES $AX = B$

2.1 Les Systèmes linéaires

2.1.1 Introduction

Soit le système linéaire

$$Ax = b \tag{2.1}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Nous avons deux types de méthodes de l'équation (2.4),

- Les méthodes directes: celles où on obtient la valeur exacte de la solution (aux erreurs d'arrondi près) en un nombre fini d'opérations.
- Les méthodes itératives: elles consistent à construire une suite de vecteurs $(x^k) \in \mathbb{R}^n$ convergeant vers la solution exacte x^*. On s'arrête bien sûr au bout d'un nombre fini k d'itérations choisi pour que $(x^k)_k$ soit suffisamment voisin de la solution exacte $x^* = A^{-1}b$

2.2 Les méthodes directes

Idée des méthodes directes: se ramener à la résolution d'1 (ou 2) système triangulaire, puisque ces systèmes sont faciles à résoudre.

2.2.1 Matrice triangulaire supérieure (ou inférieure)

Soit A la matrice triangulaire supérieur définie sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ldots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le système linéaire s'écrit

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on commence par résoudre la dernière équation; on substitue le résultat obtenu pour x_n dans la précédente, ce qui permet de calculer x_{n-1}, etc..

$$\begin{cases} x_n = b_n \setminus a_{n,n} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) \setminus a_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ x_i = (b_i - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}) \setminus a_{i,i} \\ \vdots \end{cases}$$

Remarque. *(Coût de calcul)*
Le calcul de x_i nécessite: 1 division, $n-i$ multiplications, $n-i$ additions. Il faut donc au total n divisions, $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications et $\frac{n(n-1)}{2}$ additions.

2.2.2 Méthode de Gauss sans(avec) pivot

a. L'idée de Gauss

La méthode de gauss consiste à transformer la matrice du système A a une matrice trinagulaire supérieur.

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \longrightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

- Description de la méthode de Gauss: Etape 1

- Soit le système (S): $Ax = b$ avec A inversible.

Etape 1

- On suppose que $a_{1,1} \neq 0$, C'est le premier pivot de l'élimination de Gauss.
- Pour $i = 2, \cdots, n$, on remplace L_i par

$$L_i = L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1. \qquad L_i \text{ est le ième ligne du système (S).}$$

On obtient

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a^{(1)}_{2,2} & \cdots & a^{(1)}_{2,n} \\ 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}_{n,2} & \cdots & a^{(1)}_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} b^{(1)}_1 \\ b^{(1)}_2 \\ \vdots \\ b^{(1)}_n \end{pmatrix}$$

Avec

$$a^{(1)}_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} a_{1,j}, \qquad b^{(1)}_i = b_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} b_1.$$

- Description Méthode de Gauss: Etape 2

- $(S^{(1)}): \quad A^{(1)}x = b^{(1)}$.

Etape 2

- On suppose que $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$, C'est le deuxième pivot de l'élimination de Gauss.
- Pour $i = 3, \cdots, n$, on remplace L_i par

$$L_i = L_i - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} L_2, \qquad L_i \text{ est le ième ligne du système } (S^{(1)}).$$

On obtient

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \cdots & a_{3,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}. \qquad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Pour $i = 3, \cdots, n$, on a

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} a_{2,j}^{(1)}, \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} b_2^{(1)}.$$

- Méthode de Gauss: description: Etape $n-1$

- $(S^{(n-2)}), \quad A^{(n-2)}x = b^{(n-2)}$ avec A inversible.

Etape $n-1$

- On suppose que $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$, C'est le deuxième pivot de l'élimination de Gauss.
- Pour $i = 3, \cdots, n$, on remplace L_i par

$$L_i = L_i - \frac{a_{i,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} L_{n-1}, \qquad L_i \text{ est le ième ligne du système } (S^{(1)}).$$

On obtient

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \cdots & a_{3,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \; b^{(n-1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Avec

$$a_{n,n}^{(n-1)} = a_{n,n}^{(n-2)} - \frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} a_{n-1,n}^{(n-2)},$$

$$b_n^{(n-1)} = b_n^{(n-2)} - \frac{a_{n,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} b_{n-1}^{(n-2)}.$$

Exercice 8. *Soit le système linéaire suivant:*

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 & \to & L_1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 & \to & L_2 \\ & & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \to & L_3 \end{array}\right.$$

- *Le premier pivot de l'élimination de Gauss est donc* $a_{1,1} = 1 \neq 0$

$$L_2 = L_2 - \frac{3}{1}L_1, \qquad L_3 = L_3 - \frac{0}{1}L_1 = L_3$$

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 & \to & L_1 \\ & - & 4x_2 & - & 16x_3 & = & 9 & \to & L_2 \\ & & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \to & L_3 \end{array}\right.$$

- *Le second pivot de l'élimination de Gauss est donc* $a_{2,2}^{(1)} = -4$,

$$L_2 = L_2, \qquad L_3 = L_3 + \frac{5}{4}L_2.$$

On obtient donc le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 16x_3 & = & -9 \\ & & & & -17x_3 & = & \frac{49}{4} \end{array}\right.$$

- *La solution du système* (S) *est:* $x_1 = \frac{227}{68}$, $x_2 = \frac{-43}{68}$, $x_3 = -\frac{49}{68}$.

b. Point de vue numérique: stratégie de choix du pivot

- Si un pivot est nul, alors on permute la ligne en question avec une ligne en dessous pour se ramener à un pivot non nul.

Exercice 9. *Soit le système linéaire suivant:* $(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} & & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \to & L_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 & \to & L_2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 & \to & L_3 \end{array}\right.$

- *Dans cette exemple, on* $a_{1,1} = 0$. *Dans ce cas on permute la ligne* 1 *avec la ligne* 3 *ou* 2.

2.2.3 La décomposition LU

a. La décomposition LU

Définition. *On appelle factorisation* LU *de* A *une factoristaion* $A = LU$ *avec* L *triangulaire inférieur et* U *triangulaire supérieur.*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$. *On fait la première étape de Gauss. Avec*

$$L_2 = L_2 - 2l_1,\ L_3 = L_3 + l_1.$$

On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

On fait la deuxème étape de Gauss. Avec

$$L_2 = L_2,\ L_3 = L_3 - 3l_2.$$

On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Corollaire. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible. Si tous les mineurs fondamentaux de A sont non nuls, alors avec les notations précédentes, l'élimination de Gauss fournit la factorisation LU de A suivante:*

$$\begin{cases} L_{1,1} = 1 \\ L_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(j)}}{a_{j,j}^{(j)}} \quad si\ i \leq j \\ L_{i,j} = 0 \quad si\ j > i \end{cases}, \qquad \begin{cases} U_{i,j} = a_{i,j}^{(j)} & si\ j \geq i \\ U_{i,j} = 0 & si\ i < j \end{cases}$$

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible admettant une factorisation LU. Alors il existe une unique factorisation LU de A avec L à diagonale unité.*

- *Lorsque A admet une factorisation LU, la résolution du système d'équations linéaires (S): $Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes linéaires triangulaires. En effet:*

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly &= b \\ Ux &= y \end{cases}$$

- *En pratique, on résout donc d'abord $Ly = b$ puis connaissant y on résout $Ux = y$.*

Exercice 11. (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 & \to L_1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 & \to L_2 \\ \quad\quad 5x_2 + 3x_3 = 1 & \to L_3 \end{cases}$

Matriciellement le système s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition LU de la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}}_{U}$$

Résoudre (S) revient à résoudre $\left\{ \begin{array}{lcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y \end{array} \right.$ Ainsi,

$$Ly = b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ \frac{49}{4} \end{pmatrix},$$

Alors

$$Ux = y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{227}{68} \\ \frac{43}{68} \\ -\frac{49}{68} \end{pmatrix}$$

2.3 Les méthodes itératives

2.3.1 Rappel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. *(Normes vectorielles)*
On appelle norme sur E une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que:

- $\forall\, x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ x \in E,\ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\forall\, x\, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Remarque. *Normes classiques sur $\mathbb{R}^n$:$\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ définies par:*

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *(la norme 1)*
- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ *(la norme euclidienne).*
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *(la norme 1)*

2.3.2 Les méthodes itératives

On souhaite déterminer la solution x du système linéaire $Ax = b$ par une méthode itérative:

- on réécrit sous forme de point fixe
$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + c;$$
où B et c seront "convenablement" définis à partir de A et b.
- le choix d'une méthode est le choix d'une telle réécriture!
- la suite $(x^k)_{k \geq 0}$ est définie récursivement par
$$\left\{ \begin{array}{l} x^{k+1} = Bx^k + c; \quad k \geq 0 \\ x^0 \quad \text{vecteur donnée} \end{array} \right.$$
- on veut que la suite $(x^k)_{k \geq 0}$ converge et ait pour limite u la solution de notre système linéaire.

2.3.3 Quelques généralités sur les méthodes itératives

Définition. *On dit que la méthode itérative est convergente si la suite* $(x^k)_{k\geq 0}$ *converge vers* u *pour tout vecteur initial* x^0*. On a alors le critère fondamental de convergence*

Théorème. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- *la méthode itérative* $x^{k+1} = Bx^k + c$ *est convergente.*
- *Le rayon spectral* $\rho(B) < 1$ $(\rho(B) = \max 1 \leq i \leq n\lambda_i(A),\ \lambda_i(A)$ *les valeurs propres dA).*
- $\|B\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée.*

2.4 Méthodes itératives classiques

2.4.1 Méthode de Jacobi

Soit A une matrice d'ordre n telle que $a_{ii} \neq 0, i = 1, ...n$. On décompose A sous la forme

$$A = D - E - F$$

avec

- D la diagonale de A
- E la partie inférieure stricte
- F la partie supérieure stricte.
- **Méthode de Jacobi**. Résoudre $Ax = b$ est équivalent à

$$Dx = (E + F)x + b.$$

La méthode de Jacobi est basée sur la décomposition précédente et elle s'écrit

$$x_0 \text{ arbitraire} \qquad Dx^{k+1} = (E + F)x^k + b \tag{2.2}$$

Il est facile à chaque itération de calculer x^{k+1} en fonction de x^k car la matrice diagonale D est inversible. Les composantes du vecteur x^{k+1} vérifient

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1, j\neq i} a_{ij}x_j^k) \setminus a_{i,i}, \qquad \textit{pour } i \in \{1; \cdots, n\}$$

Proposition.

- *la matrice* $B_J = D^{-1}(E + F)$ *est la matrice d'itération de Jacobi.*
- *La méthode de Jacobi converge ssi* $\rho(B_J) < 1$.

Remarque.

Pour programmer cette méthode, on a besoin de stocker les vecteurs x^k *et* x^{k+1}.

Algorithme de Jacobi

- x^0 choisi
- pour tous les k de 0 à $\cdots$ (test d'arrêt) faire
- pour tous les i de 1 à n faire

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_j^k \right) \setminus a_{i,i}$$

- si $\|Ax^{k+1} - b\| \leq \epsilon$, Stop x^{+1} est solution.
  Sinon $k \leftarrow k+1$
- Fin Pour i
- Fin pour k

2.4.2 Méthode de Gauss-Seidel

. Résoudre $Ax = b$ est équivalent à

$$(D - E)x = Fx + b.$$

La méthode de de Gauss-Seidel est basée sur la décomposition précédente et elle s'écrit

$$x_0\text{arbitraire} \qquad (D - E)x^{k+1} = Fx^k + b \tag{2.3}$$

Il est facile à chaque itération de calculer x^{k+1} en fonction de x^k car la matrice triangulaire inferieure D est inversible. Les composantes du vecteur x^{k+1} vérifient

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^k - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+1}) \setminus a_{i,i}, \qquad \textit{pour } i \in \{1; \cdots, n\}$$

Proposition.

- *la matrice $B_L = (D - E)^{-1}F$ est la matrice d'itération de Gauss-Seidel.*
- *La méthode de Gauss-Seidel converge ssi $\rho(B_L) < 1$.*

Algorithme de Gauss-Seidel

- x^0 , A, b, n, ϵ
  pour tous les k de 0 à $\cdots$ (test d'arrêt) faire
  pour tous les i de 1 à n faire

$$x_i^{k+1} = \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{i,j} x_j^k \right) \setminus a_{i,i}$$

- si $\|Ax^{k+1} - b\| \leq \epsilon$, Stop x^{+1} est solution.
  Sinon $k \leftarrow k+1$
- Fin Pour i.
- Fin pour k.

2.4.3 Méthode de Relaxation

. Résoudre $Ax = b$ est équivalent à

$$(\frac{1}{\omega} D - E)x = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)x + b.$$

La méthode de Relaxation est basée sur la décomposition précédente et elle s'écrit

$$x_0 \text{arbitraire} \qquad (\frac{1}{\omega} D - E)x^{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)x^k + b \tag{2.4}$$

Il est facile à chaque itération de calculer x^{k+1} en fonction de x^k car la matrice triangulaire inférieure D est inversible. Les composantes du vecteur x^{k+1} vérifient

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{i,i}}(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^k - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+1}),$$

la matrice $B_\omega = (\frac{1}{\omega} D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega} D + F)$ est la matrice d'itération de Relaxation. La méthode de Relaxation converge ssi $\rho(B_\omega) < 1$.

Proposition. *Si la méthode de ralaxation converge, alors*

$$|1-\omega| \leq \rho(B_\omega) < 1.$$

Remarque. *Si $\omega \notin]0,\ 2[$ la méthode de relaxation ne converge pas.*

Algorithme de Relaxation

- x^0 , A, b, n, ϵ
  pour tous les k de 0 à $\cdots$ (test d'arrêt) faire
  pour tous les i de 1 à n faire

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{i,j} x_j^k \right)$$

- si $\|Ax^{k+1} - b\| \leq \epsilon$, Stop x^{+1} est solution.
  Sinon $k \leftarrow k+1$
- Fin Pour i.
- Fin pour k.

Théorème. *Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes càd*

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

alors les méthodes de(jacobi- Gauss-Seidel-relaxation) convergent.

Remarque. *Si A n'est pas une matrice à diagonale strictement dominante, ca n'entraine pas que les 3 méthodes divergent.*

TD2: Résolution Numérique des systèmes linéaires

$Ax = b$

SMP(S3)

Exercice 12. *Soit le système linéaire suivant:*

$$(S)\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + x_3 = 3; \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 9; \end{cases}$$

1. *résoudre par la méthode de Gauss.*
2. *Faire 2 itérations de la méthode de Jacobi en partant du point* $x^0 = (0,\ 0,\ 0)^T$.
3. *Faire 1 itération de la méthode de Gauss-Seidel en partant du point* $x^0 = (0,\ 0,\ 0)^T$..
4. *Réordonner les équations de façon à assurer la convergence des deux méthodes.*
5. *Soit le système linéaire* $Ax = b$ *suivant:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice d'itérations B_J *de la méthode de Jacobi et en déduire son rayon spectral. Est-ce que la méthode Jacobi converge pour ce système linéaire?*

Exercice 13. *Soit le système d'équations algébriques suivant:*

$$(S)\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 8x_4 = -11 \\ 2x_1 - x_2 - 10x_3 = -11 \\ 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \\ -x_1 - 11x_2 - x_3 - 3x_4 = 25 \end{cases}$$

1. *Résoudre le système (S) par la dćomposition LU.*
2. *Pourquoi ne peut-on pas utiliser directement les méthodes de Jacobi et de Gauss- Seidel avec ce système linéaire?*
3. *Réordonner les équations de telle sorte que la matrice associée soit à diagonale strictement dominante.*
4. *Calculer une itération des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, en partant du point* $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$.

Exercice 14. *Soit A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $\rho(A_J) < 1 < \rho(A_{GS})$. *Que peut-on en déduire concernant la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel?*
2. *Calculer la solution approchée du système* $Ax = b$ *par Jacobi à* 10^{-2}. *On prend*

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CHAPTER 3

INTEGRATION NUMÉRIQUES

3.1 Introduction

Dans le calcul d'intégrales, on n'est pas toujours en mesure d'obtenir des expressions exactes. Il se peut que l'obtention d'une primitive soit impossible ou trop compliquée.
Pour pallier à ce problème, on cherche une approximation de l'integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

par une somme de surfaces de rectangles, de trapèzes ou d'autres formes géométriques dont on sait calculer l'aire.
Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a,\ b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1},\ x_i],\ i = 1, \cdots, n$ de même longueur $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ On a donc:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b, \quad ou\ x_i = a + ih,\ pouri = 0, 1, \cdots, n$$

, en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$ Soit f_i la restriction de la fonction f à chaque sous intervalle $[x_i,\ x_{i+1}]$. En écrivant

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

on obtient alors des approximations de l'intégrale $I(f)$ en remplaç ant $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par l'aire d'une forme gemoétrique facile à calculer.

3.1.1 La méthode des rectangles à gauche

On partage l'intervalle $[a,\ b]$ en n parties de longueur $\frac{b-a}{n}$ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. On approxime l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la surface du rectangle de largeur $x_{i+1} - x_i$ et langeur $f(x_i)$, en effet:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$$

Si bien que l'intégrale totale vaut:

$$I_{Rg} = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Exercice 15. *Soit l'integral à calculer par la méthodes des rectangles.*

$$I = \int_0^1 (x+1)dx.$$

On a la valeur exacte de $I = 1.5$.

- *Méthodes des rectangles à droite pour $n = 4$, alors: $h = 0.25$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$. et*

$$I_{Rd} = h\sum_{i=0}^{3} f(x_{i+1}) = h(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) = 1.625$$

Proposition. *Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ alors:*

1. *La suite (I_{Rg}) converge vers $I(f)$.*
2. *Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a,\ b]$ alors*

$$|I_{Rg} - I| \leq \sup_{\epsilon\in[a,\ b]} |f'(\epsilon)|\frac{(b-a)^2}{2n} = M\frac{(b-a)^2}{2n}$$

Remarque. *Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ϵ , il suffit de prendre $M\frac{(b-a)^2}{2n} < \epsilon$ où l'indice n_0 est tel que*

$$M\frac{(b-a)^2}{2\epsilon} < n_0$$

3.1.2 La méthode des rectangles à droite

On partage l'intervalle $[a,\ b]$ en n parties de longueur $\frac{b-a}{n}$ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. On approxime l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par la surface du rectangle de largeur $x_{i+1} - x_i$ et langeur $f(x_i)$, en effet:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq (x_{i+1} - x_i)f(x_{i+1})$$

Si bien que l'intégrale totale vaut:

$$I_{Rd} = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots (x_n - x_{n-1})f(x_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Proposition. *Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ alors:*

1. *La suite (I_{Rd}) converge vers $I(f)$.*
2. *Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a,\ b]$ alors*

$$|I_{Rd} - I| \leq \sup_{\epsilon\in[a,\ b]} |f'(\epsilon)|\frac{(b-a)^2}{2n} = M\frac{(b-a)^2}{2n}$$

3.1.3 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à décomposé la surafce $\int_a^b f(x)dx$ sous forme des n trapèze. Le nombre total de sous-intervalles est n. Chaque intégrale vaut:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

Si bien que l'intégrale totale vaut:

$$I_{Trapze} = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Proposition. *L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis on trouve alors pour* $h = \frac{b-a}{n}$*:*

$$|I - \tilde{I}| \leq \sup_{\epsilon\in[a,\, b]} |f''(\epsilon)|\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Exercice 16. *Soit l'integral à calculer par la méthodes de trapèze.*

$$I = \int_0^1 (x+1)dx.$$

On a la valeur exacte de $I = 1.5$*.*

- *la méthodes de trapèze pour* $n = 4$*, alors:* $h = 0.25,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1.$ *et*

$$I_{Trapeze} = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) + f(x_4)) = 1.5$$

3.1.4 Méthode de Simpson

Le nombre total de sous-intervalles est donc cette fois-ci n = 2m (il est forcément pair. La méthode de Simpson consiste a approché la fonction $f(x)$ sur chaque un interval $[x_{2k},\ x_{2k+1}]$ par un arc. Chaque intégrale vaut:

$$\tilde{I}_k = (x_{2k+2} - x_{2k})\left(\frac{f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})}{6}\right).$$

Si bien que (pour un nombre d'intervalles n pair) l'intégrale totale vaut:

$$I_{Simpson} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i\ impair} f(x_i) + 2\sum_{i\ pair} f(x_i)\right)$$

Proposition. *L'erreur peut être estimée en utilisant les développements en série de Taylor ou le théorème des accroissements finis on trouve alors pour* $h = \frac{b-a}{n}$*:*

$$|I - I_{Simpson}| \leq \sup_{\epsilon\in[a,\, b]} |f^{(4)}(\epsilon)|\frac{(b-a)^5}{180n^4}.$$

Exercice 17. *Soit l'integral à calculer par la méthodes de Simpson.*

$$I = \int_0^1 (x+1)dx.$$

On a la valeur exacte de $I = 1.5$.

- *la méthodes de Simpson pour* $n = 4$, *alors:* $h = 0.25,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 0.75,\ x_4 = 1.$ *et*

$$I_{Simpson} = \frac{h}{6}(f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)) = 1.5$$

TD3: Calcul Numérique des intégrales

$$f(x) = \int_a^b f(x)dx$$

SMP(S3)

Exercice 18. *On considère l'intégrale suivante,*

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}$$

1. *Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas* $h = \frac{1}{3}$.
2. *Calculer la valeur exacte de* I.
3. (a) *Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question 1. est-elle supérieure à ln(2) ?*
   (b) *Est-ce vrai quelque soit* h*?*
   (c) *Proposer une autre fonction dont la valeur de l'intégrale évaluée par la méthode des trapèzes est toujours supérieure à la valeur exacte de l'intégrale.*
4. *Si on souhaite évaluer* I *avec la méthode de Simpson, quel pas faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à* 10^{-4}. *?*

Exercice 19. *Soit l'intégrale* $I = \int_0^{\pi/2} sin(x)^2 dx$.

1. *Calculer la valeur exacte de* I.
2. *En utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de simpson pour* $h = \frac{\pi}{4}$.
   (a) *Calculer* I.
   (b) *Majorer l'erreur*
   (c) *Evaluer l'erreur.*
3. *Donner la valeur du pas* h *et le nombre de subdivision de l'intervalle* $[0,\ \pi]$ *pour que l'erreur obtenue par la méthodegénéralisée des trapèzes (resp. de Simpson) soit plus petite que* 5×10^{-4}.

Exercice 20. *Évaluer à l'aide de la méthode des trapèzes , l'intégrale:*

$$\int_0^{\pi} \frac{sin(x)}{x} dx,$$

avec une erreur inférieure à 10^{-2}.

CHAPTER 4

INTERPOLATION ET APPROXIMATION

4.1 Motivations

En analyse numérique, une fonction f inconnue explicitement est souvent

- connue seulement en certains points $x_0,\ x_1, \cdots,\ x_d$.
- ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux. Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f.

On cherche donc à reconstruire f par une autre fonction f_r simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f. On espère que le modèle f_r ne sera pas trop éloigné de la fonction f aux autres points.
On se donne un ensemble de points $(x_i,\ f_i)$ obtenus suite à une mesure expérimentale (f_i représente la température, pression, débit,...) pour connaître la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction f par un polynôme.

Définition. *(Interpolant)*
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,\ b]$ contenant $n+1$ points distincts $x_0,\ x_1, \cdots, x_n$. Soit P_n un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
On dit que P_n est un interpolant de f ou interpole f en $x_0,\ x_1, \cdots, x_n$ si :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \textit{pour } 0 \leq i \leq n$$

4.2 Interpolation de Lagrange

Définition. *(Interpolants de base de Lagrange)*
Soient $x_0,\ x_1, \cdots, x_n$ $(n+1)$ points deux à deux distincts d'un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ On appelle interpolants de base de Lagrange, les polynômes L_i définis pour $i = 0, \cdots, n$ par:

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad l_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

En particulier:

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}, \qquad L_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$$

Les l_i pour $i, \cdots, n$ sont appelées polynômes de lagrange

Exercice 21. *Si $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, on obtient*

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0,2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0}^{1} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Donc

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

On vérifie facilement que:

$$P_2(x_0) = P_2(-1) = 2 = f(x_0)$$
$$P_2(x_1) = P_2(-1) = 1 = f(x_1)$$
$$P_2(x_1) = P_2(-1) = -1 = f(x_2)$$

Proposition. *Pour $n \in \mathbb{N}$, les $(L_j(x))_{0 \leq j \leq n}$ forment une base de l'espace vectoriel P_n que l'on appelle base de Lagrange.*

Proposition. *Les polynômes de Lagrange vérifient les propriétés suivantes:*

1. *$L_j(x)$ est un polynôme de degré n ; $\forall\, j = 0, \cdots, n$.*
2. *$L_j(x_j) = 1$ $\forall\, j = 0, \cdots, n$ et $L_j(x_i) = 0$ pour tout $j \neq i$.*
3. *la famille $\{L_0(x),\ L_1(x), \cdots L_n(x)\}$ est une base de $P_n(x)$.*

La méthode d'interpolation de Lagrange consiste à écrire le polynôme d'interpolation sur la base de Lagrange.

Théorème. *Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ et $n + 1$ noeuds $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux à deux distincts. Le polynôme d'interpolation de f aux noeuds $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'écrit alors:*

$$P_n(x,\ f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_j)L_j(x).$$

Exemple. *soit f une fonction continue et les noeuds $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$, le polynome d'interpolation de lagrange est donnée par*

$$\begin{aligned} P_2(x, f) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= f(-1)\tfrac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(0)\tfrac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + f(1)\tfrac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} \\ &= \tfrac{f(-1)-2f(0)+f(1)}{2}x^2 + \tfrac{f(1)-f(-1)}{2}x + f(0) \end{aligned}$$

4.3 Polynôme d'interpolation de Newton

Une autre façon de construire $p \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $p(x_i) = f_i$ est d'utiliser la formule de Taylor et d'introduire les différences divisées.

Définition. *(Differences divisées)*
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,\ b]$ contenant $n+1$ points distincts $x_0,\ x_1, \cdots, x_n$.
On définit les differences divisées d'ordre i de f aux points (x_k) comme suit:

$$[f(x_0)] = f(x_0)$$

$$[f(x_0),\ f(x_1)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$[f(x_0),\ f(x_1), \cdots\ f(x_i)] = \frac{[f(x_1),\ f(x_2), \cdots\ f(x_i)] - [f(x_0),\ f(x_1), \cdots\ f(x_{i-1})]}{x_i - x_0} \qquad \text{pour } i \geq 2.$$

Exemple. *Si $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, $f(x_0) = 2$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, on obtient*

$$[f(x_0)] = f(x_0) = 2$$

$$[f(x_0),\ f(x_1)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1-2}{0+1} = -1$$

$$[f(x_0),\ f(x_1), f(x_2)] = \frac{[f(x_1),\ f(x_2)] - [f(x_0),\ f(x_1)]}{x_2 - x_0} = \frac{-1}{2}$$

Définition. *(Interpolant de Newton):*
On appelle interpolant de Newton le polynôme Pn donné par :

$$P_n(x) = f(x_0) + [f(x_0),\ f(x_1)](x - x_0) + \cdots + [f(x_0),\ f(x_1), \cdots\ f(x_n)](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Exemple. *Pour l'exemple précédent; l'interpolant de Newton*

$$P_2(x) = f(x_0) + [f(x_0),\ f(x_1)](x - x_0) + [f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2)](x - x_0)(x - x_1) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

Définition. *(Base de Newton)*
Soient $x_0,\ x_1, \cdots, x_n$ $(n+1)$ points deux à deux distincts d'un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ et les polynômes N_i définis pour $i = 0, \cdots, n$ par:

- $N_0(x) = 1.$
- $N_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})$ *pour* $j = 1, \cdots, n.$

On a en particulier

- $N_1(x) = (x - x_0).$
- $N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$

Proposition. *Les polynômes N_i ont les propriétés suivantes:*

1. *$N_i(x)$ est un polynôme de degré i.*

2. *Pour* $i \geq 1$, $N_i(x)$ *admet* $x_0,\ x_1, \cdots, x_{i-1}$ *comme racines.*

3. *la famille* $\{N_0(x),\ N_1(x), \cdots N_n(x)\}$ *est une base de* $P_n(x)$ *dite base de Newton*

Exercice 22. *Soit la fonction* f *telle que*

X_k	*0.15*	*2.30*	*3.15*	*4.85*	*6.25*	*7.95*
$f(x)$	*4.79867*	*4.49013*	*4.2243*	*3.47313*	*2.66674*	*1.51909*

Donc Les Coefficients du polynôme d'interpolation de f *dans la base de newton sont:*

$[f(x_0)] = 4.798670,$

$[f(x_0),\ f(x_1)] = -0.143507$

$[f(x_0),\ f(x_1), f(x_2)] = -0.056411,$

$[f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)] = 0.001229,$

$[f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)\ f(x_4)] = 0.000104,$

$[f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3)\ f(x_4)\ f(x_5)] = -0.000002.$

Algorithme de calcul des différences divisées

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f[x_0] & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] \\
\vdots & & & \\
\vdots & & & \\
\vdots & &] & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
x_{k-2} & f[x_{k-2}] & & & & & \\
x_{k-1} & f[x_{k-1}] & f[x_{k-2}, x_{k-1}] & & \cdots\ \ \cdots & f[x_0, x_1, \cdots\ \ x_{k-1}] & \\
x_k & f[x_k] & f[x_{k-1}, x_k] & f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] & \cdots\ \ \cdots & f[x_1, x_2, \cdots\ \ x_k] & f[x_0, x_1, \cdots\ \ x_k]
\end{array}$$

Théorème. *Il existe un polynôme* P_n *unique de degré* $\geq n$*, interpolant* f *en* $(n+1)$ *points, tel que :*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad x_i = 0,\ 1, \cdots, n$$

TD4: Interpolation numérique SMP(S3)

Exercice 23. *L'espŕance de vie dans un pays a v́oluée dans le temps selon le tableau suivant :*

Année	*1975*	*1980*	*1985*	*1990*
Espérance	*72,8*	*74,2*	*75,2*	*76,4*

Utiliser l'interpolation de Lagrange pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988

Exercice 24. *La courbe des puissances classées d'un service d'électricité représente la proportion de l'année o'u la demande d'électricité atteint ou dépasse un niveau de puissance donné. Plus la puissance est grande, plus petite est la proportion de l'année o'u la demande dépasse cette valeur. Cette courbe est donc par définition décroissante.*
Pour une année donnée, on dispose des données et de la table de différences divisées suivantes:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i-1}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]$	$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}]$
0	0,0	30,0			
			-10		
1	0,1	29,0		-200,0	
			-50		566,667
2	0,2	24,0		83,33	
			-16,67		-87,30
3	0,5	19,0		22,22	
			-3,33		-91,27
4	0,8	18,0		41,67	
			-20,0		-1316,67
5	0,9	16,0		-700,0	
			-160,0		
6	1,0	0,0			

1. *Donnez une approximation de $f(0,3)$ à l'aide du polynôme d'interpolation de Newton de degré 3 passant par les 4 premiers points. Est-ce que cette approximation vous semble acceptable? Justifiez votre réponse.*

2. *Donnez une approximation de l'erreur d'interpolation commise à la question 1). et indiquez les chiffres significatifs de l'approximation de $f(0,3)$ obtenue à la question 1..*

3. *Donnez les expressions des polynômes de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ et $L_3(x)$ de degré 3 qui permettent de calculer une approximation de $f(0,3)$. Cette approximation doit être la plus précise possible. (On ne calculera pas cette approximation).*