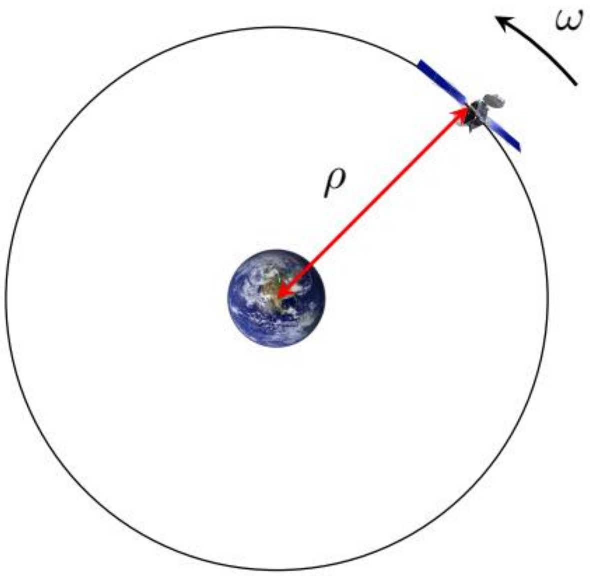
Progetto di *Controlli Automatici – T*, tipologia B3, gruppo M

Controllo satellite in orbita intorno alla Terra



A cura di:

Laghi Umberto, Missiroli Marco

Indice

1. Introduzione

Lo scopo del progetto è quello di creare una rete di controllo tale da garantire il rispetto delle specifiche date.

Il procedimento consisterà nel riportare il sistema in forma di stato, per poi andare a linearizzare il sistema non lineare nell'equilibrio, calcolare la funzione di trasferimento *G(s)* e infine sviluppare la rete di controllo attraverso un regolatore, rispettando le specifiche imposte di:

1) Errore a regime nullo con riferimento a gradino.

2) Avere un margine di fase $M_f \geq 55°$.

3) La sovraelongazione percentuale massima può essere al massimo dell'1: $S\% \leq 1\%$.

4) Tempo di assestamento all'e%=5% deve essere inferiore a 0.05s.

5) Disturbo sull'uscita d(t), con banda limitata nel range [0,0.5], deve essere abbattuto di almeno 35db.

6) Rumore di misura n(t), con banda limitata nel range $[2.5 \times 10^4, 10^5]$, deve essere abbattuto di almeno 70db.

2. Sistema in forma di stato

Per questo progetto abbiamo scelto lo stato

$$x = \begin{bmatrix} \rho \\ \dot{\rho} \\ \omega \end{bmatrix}$$

l'ingresso $u(t) = \tau(t)$ e l'uscita $y(t) = \omega(t)$.

In base all'equazioni fornite abbiamo ottenuto la seguente forma di stato

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ f_3(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta_2 x_2}{m} + (k-1)\left(\frac{k\omega M}{x_1^2} - x_1 x_3^2\right) \\ -\frac{2x_2 x_3}{x_1} - \frac{\beta_2 x_3}{m} + \frac{u}{m x_1} \end{bmatrix}$$

$$y = h(x,u) = x_3$$

A questo punto abbiamo trovato la coppia di equilibrio (x_e, u_e) ponendo le componenti di $f(x,u)=0$

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \\ x_{3e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_e \\ 0 \\ \sqrt{\frac{k_G \cdot M}{\rho_e^3}} \end{bmatrix} \quad u_e = \beta_2 \sqrt{\frac{k_G \cdot M}{\rho_e}}$$

3. Linearizzazione del sistema non lineare

Con la linearizzazione si vuole ottenere il sistema rappresentato con le seguenti equazioni

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u$$

Per fare ciò dobbiamo prima calcolare le matrici A, B, C, D, ognuna della quali è una matrice jacobiana ottenuta dalle derivate parziali delle due funzioni non lineari *f(x, u)* e *h(x, u)*.

$$A = \frac{\partial}{\partial x} f(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (k-1)\left(-\frac{2k_G M}{x_1^3} - x_3^2\right) & -\frac{\beta_1}{m} & (k-1)(-2x_1x_3) \\ \frac{2x_2x_3}{x_1^2} - \frac{u}{mx_1^2} & -\frac{2x_3}{x_1} & -\frac{2x_2}{x_1} - \frac{\beta_2}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial n} f(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial n} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial n} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mx_1} \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial}{\partial x} h(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial n} h(x,u) = 0$$

Calcolate le matrici jacobiane, andiamo a sostituire i valori della coppia d’equilibrio, ottenendo così le matrici per la linearizzazione del sistema non lineare

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (k-1)\left(-\frac{3k_G M}{\rho_e^3}\right) & -\frac{\beta_1}{m} & (k-1)\left(-2\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e}}\right) \\ -\frac{\beta_2}{m\rho_e^2}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e}} & -\frac{2}{\rho_e}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}} & -\frac{\beta_2}{m} \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m\rho_e} \end{bmatrix} \qquad C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_e = 0$$

4. Calcolo funzione di trasferimento

Passiamo ora al calcolo della funzione di trasferimento *G(s)*, la cui formula generale per sistemi LTI è

$$G(s) = \frac{Cadj(sI - A)B + Ddet(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Ma nel nostro caso, dato che la matrice *D* è nulla, la formula si riduce a

$$G(s) = \frac{Cadj(sI - A)B}{\det(sI - A)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Il calcolo della matrice aggiunta *adj(sI - A)* prevede diversi passaggi:

trovare la matrice *sI - A*

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ (k-1)\left(-\frac{3k_G M}{\rho_e^3}\right) & s + \frac{\beta_1}{m} & 2(k-1)\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e}} \\ \frac{\beta_2}{m\rho_e^2}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e}} & \frac{2}{p_e}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho e^3}} & s + \frac{\beta_2}{m} \end{bmatrix}$$

di questa matrice calcoliamo il determinante:

$$det\ (sI - A) = s^3 + s^2\left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{m}\right] + s\left[\frac{\beta_1\beta_2\rho_e - (k-1)K_G M m^2}{m^2\rho_e^3}\right] + \frac{(k-1)k_G M\beta_2}{m\rho_e^3}$$

Ora si calcola la matrice dei cofattori di *sI-A*:

$$cof(sI-A)_{11} = (-1)^2\left[\left(s+\frac{\beta_1}{m}\right)\left(s+\frac{\beta_2}{m}\right)-\frac{4(k-1)k_G M}{\rho_e^3}\right]$$

$$cof(sI-A)_{12} = (-1)^3\left[\frac{(k-1)3k_G M}{\rho_e^3}\left(s+\frac{\beta_2}{m}\right)-\frac{2(k-1)\beta_2 k_G M}{m\rho_e^3}\right]$$

$$cof(sI-A)_{13} = (-1)^4\left[\frac{(k-1)6k_G M}{\rho_e^4}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}-\left(s+\frac{\beta_1}{m}\right)\frac{\beta_2}{m\rho_e}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}\right]$$

$$cof(sI-A)_{21} = s+\frac{\beta_2}{m}$$

$$cof(sI-A)_{22} = s\left(s+\frac{\beta_2}{m}\right)$$

$$cof(sI-A)_{23} = (-1)^5\left[s\frac{2}{\rho_e}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}-\frac{\beta_2}{m\rho_e}\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}\right]$$

$$cof(sI-A)_{31} = (-1)^4\left[-2(k-1)\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}\right]$$

$$cof(sI-A)_{32} = (-1)^5\left[2s(k-1)\sqrt{\frac{k_G M}{\rho_e^3}}\right]$$

$$cof(sI-A)_{33} = (-1)^6\left[s\left(s+\frac{\beta_1}{m}\right)+\frac{3(k-1)k_G M}{\rho_e^3}\right]$$

La matrice aggiunta *adj(sI-A)* è la trasposta della matrice dei cofattori

$$adj(sI-A)=\begin{bmatrix} cof(sI-A)_{11} & cof(sI-A)_{21} & cof(sI-A)_{31} \\ cof(sI-A)_{12} & cof(sI-A)_{22} & cof(sI-A)_{32} \\ cof(sI-A)_{13} & cof(sI-A)_{23} & cof(sI-A)_{33} \end{bmatrix}$$

Si passi al calcolo del numeratore della funzione di trasferimento

$$N(s)=C\cdot adj(sI-A)\cdot B$$

Le matrici *C* e *adj(sI-A)* hanno dimensioni rispettivamente 1x3 e 3x3, per cui il loro prodotto genera una matrice riga con dimensione 1x3 che chiameremo *E*

$$E=[a\,dj(sI-A)_{31} \quad a\,dj(sI-A)_{32} \quad a\,dj(sI-A)_{33}]$$

Rimane il prodotto tra le matrici E e B, con dimensioni rispettivamente 1x3 e 3x1, il cui prodotto genera una matrice 1x1 che altro non è che uno scalare

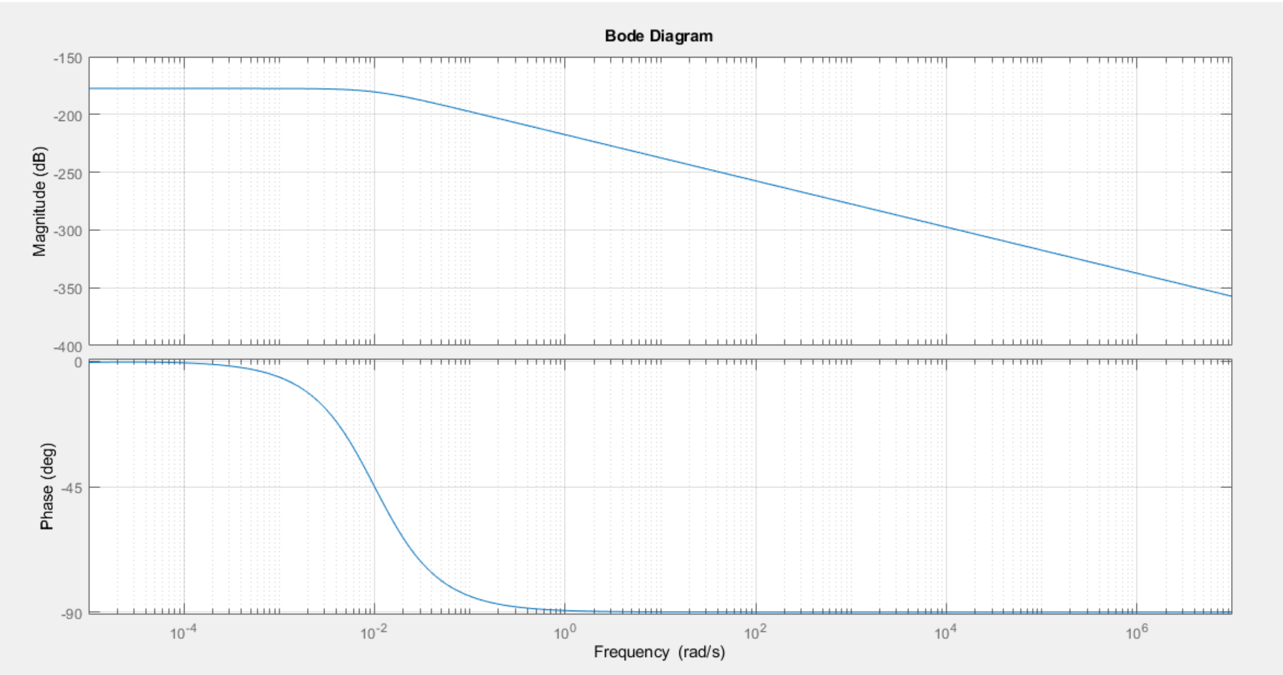
$$E\cdot B=\frac{a\,dj(sI-A)_{33}}{m\rho_e}=N(s)$$

Così si ottiene

$$G(s)=\frac{Cadj(sI-A)B}{\det(sI-A)}=\frac{N(s)}{\mathrm{D}(s)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{m\rho_e}\left[s^2+\frac{s\beta_1}{m}+\frac{3(k-1)k_G M}{m\rho_e 3}\right]}{s^3+s^2\left[\frac{\beta_1+\beta_2}{m}\right]+s\,\frac{\beta_1\beta_2\rho_e^3-(k-1)k_G M m^2}{m^2\rho_e^3}+\frac{(k-1)k_G M\beta_2}{m\rho_e^3}}$$

con i diagrammi di Bode di modulo ed ampiezza



5. Progettazione di L

La funzione di trasferimento in anello aperto, definita come

$$L(s) = R(s)G(s)$$

Verrà ricavata mediante il calcolo e l'applicazione del regolatore R(s). Quest'ultimo sarà costituito da regolatore statico $R_s(s)$ e da quello dinamico $R_d(s)$, che faranno sì che le specifiche statiche e dinamiche vengano rispettate.

5.1. Prestazioni statiche

Per ottenere un errore a regime nullo si impiega un semplice regolatore statico con un solo polo all'origine e guadagno statico libero μ_s, che potrà essere usato per fare modifiche sul guadagno di L(s).

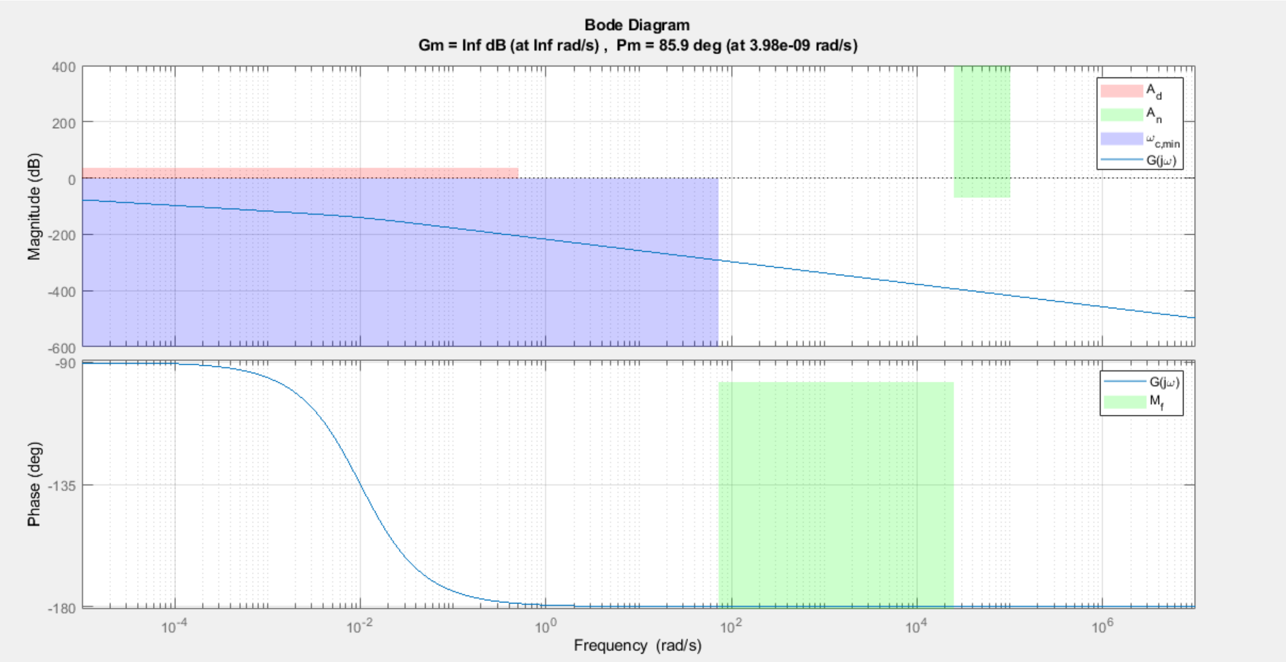
$$R_s(s) = \mu_s/s$$

Con μ_s=1

Così si ottiene una nuova funzione di trasferimento $G_e(s)$, che chiameremo estesa

$$G_e(s)=R_s(s)G(s)$$

Diagrammi di Bode di $G_e(s)$ con le specifiche da rispettare



5.2 Prestazioni dinamiche

Dalla specifica sulla sovraelongazione otteniamo che il Mf deve essere maggiore di 82.6°.

$$s = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 \rightarrow \frac{1}{100} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \ln(1 / 100) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow$$

$$\xi^2(\pi^2 + \ln^2(0.01)) = \ln^2(0.01) \rightarrow \xi = \frac{\ln(0.01)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.01)}} \cong 0.826$$

Applicando la formula $M_f \geq \xi' \cdot 100$ otteniamo $M_f \geq 82.6°$.

Dato che il margine di fase ottenuto è più stringente rispetto a quello dato come specifica (55°), d'ora in avanti considereremo il nuovo margine ottenuto come termine da rispettare.

In base alla specifica sul tempo di assestamento al 5%, otteniamo che ω_c debba essere maggiore di 73 rad/s. ($\omega_c \geq 73$ rad/s).

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_c} \rightarrow \frac{3}{\xi\omega_c} \leq T' \rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{T'\xi} = \frac{300}{T'M_f} \rightarrow \omega_c \geq 73 \text{ rad/s}$$

In base alle specifiche di attenuazione del disturbo sull'uscita (almeno 35db in banda [0, 0.5]) e del rumore di sistema (70db in banda [2.5×10^4, 10^5], andiamo a tracciare nel diagramma di Bode del modulo le zone di interdizione.

Ci si trova così nello scenario B ed è quindi necessario sviluppare una rete anticipatrice, per fare in modo di aumentare la fase e farla uscire dalla zona d'interdizione dovuta alla specifica sul margine di fase.

Come ω_C^* abbiamo trovato lo sweet spot a 150 rad/s, da qui con le formule di inversione abbiamo trovato τ e $\alpha\tau$

$$\tau = \frac{M_R^* - \cos\varphi_R^*}{\omega_C^* \sin\varphi_R^*} = 1.1345 \cdot 10^{13} \quad \alpha\tau = \frac{\cos\varphi_R^* - 1/M_R^*}{\omega_C^* \sin\varphi_R^*} = 8.6630 \cdot 10^{-4}$$

Rispettando la condizioni: $\cos\varphi_R^* > \frac{1}{M_R^*}$, $\tau > 0$, $\alpha > 0$ si ottiene la rete anticipatrice:

$$R_d(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} = \frac{1+1.134\cdot 10^{13}s}{1+8.663\cdot 10^{-4}s}$$

A questo punto c'è il problema che il diagramma di Bode del modulo non rispetta l'attenuazione del rumore di misura, quindi usiamo il μ_d libero per avere un guadagno negativo e abbassare la curva. Si sceglie μ_d pari a $10^{-0.1}$ in modo da avere un guadagno negativo di 2dB, sufficienti perché sia rispettata la specifica e ω_c rientri nel range consentito.

Così abbiamo:

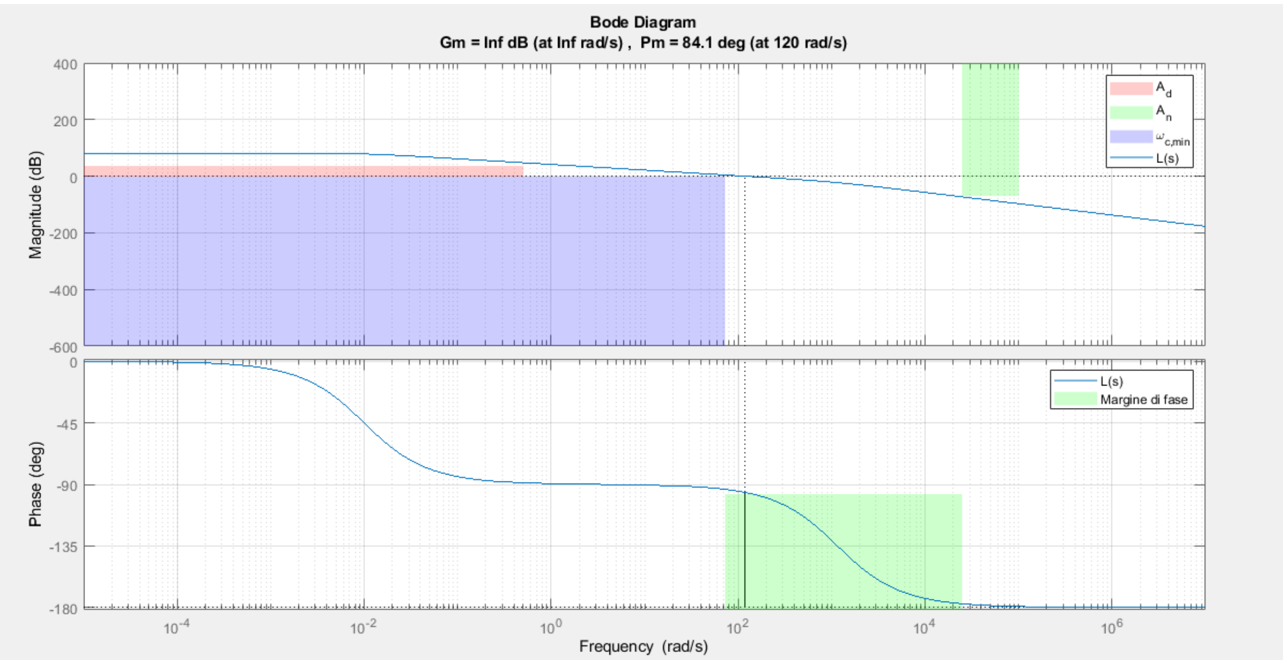
il regolatore $R(s)=R_s(s)\cdot R_d(s)=\frac{9.011\cdot 10^{12}\cdot s+0.7943}{s(1+8.663\cdot 10^{-4}\cdot s)}$

e la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R_d(s)G_e(s) = R(s)G(s) =$$

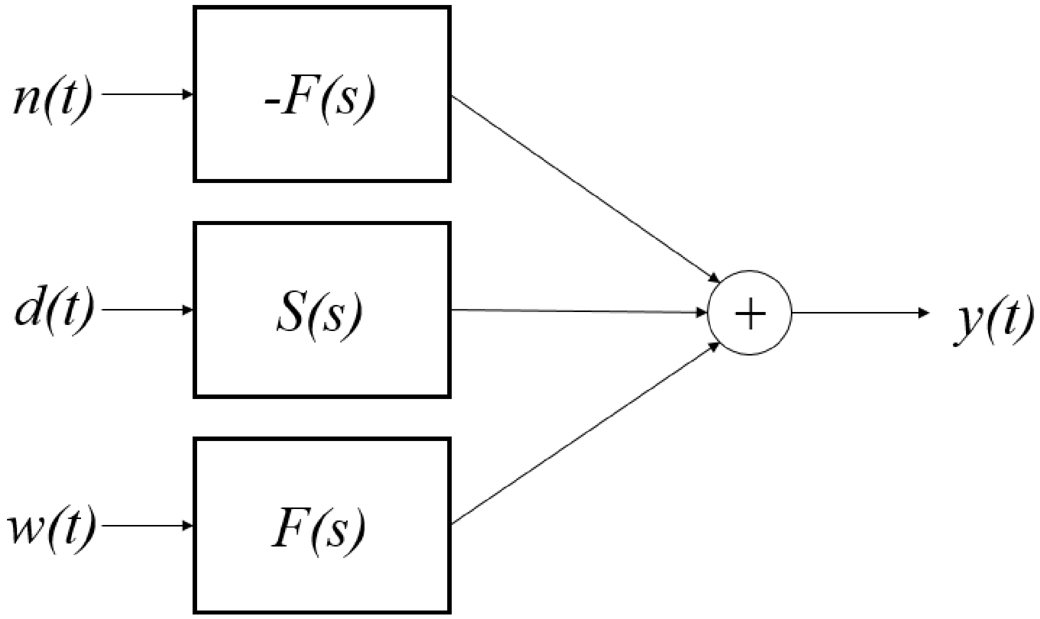
$$= \frac{120.2\cdot s^3 + 0.1202\cdot s^2 + 1.331\cdot 10^{-8}\cdot s + 1.173\cdot 10^{-21}}{s(8.663\cdot 10^{-4}\cdot s^4 + s^3 + 0.011\cdot s^2 + 10^{-5}\cdot s + 3.693\cdot 10^{-13})}$$

Con il diagramma di Bode

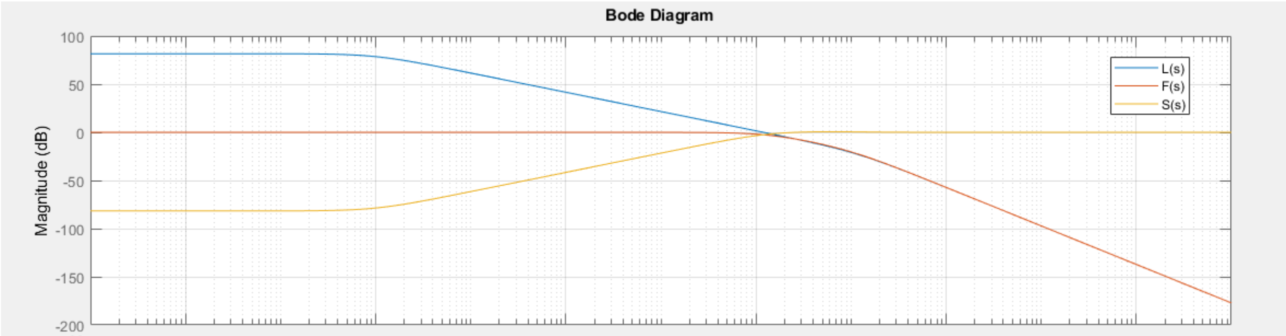


Si passi ora al testing del sistema sviluppato, prendendo come segnale in input $w(t)=-3\cdot10^{-7}\cdot1(t)$, come disturbo sull'uscita
$d(t) = \sum_{k=1}^{4} 2\cdot10^{-8} sen(0.125kt)$, come rumore di misura
$n(t) = \sum_{k=1}^{4} 3\cdot10^{8} sen(2.5\cdot10^{4}kt)$.

Per testare la risposta del sistema in anello chiuso sfruttiamo il principio di sovrapposizione e le funzioni di sensitività:

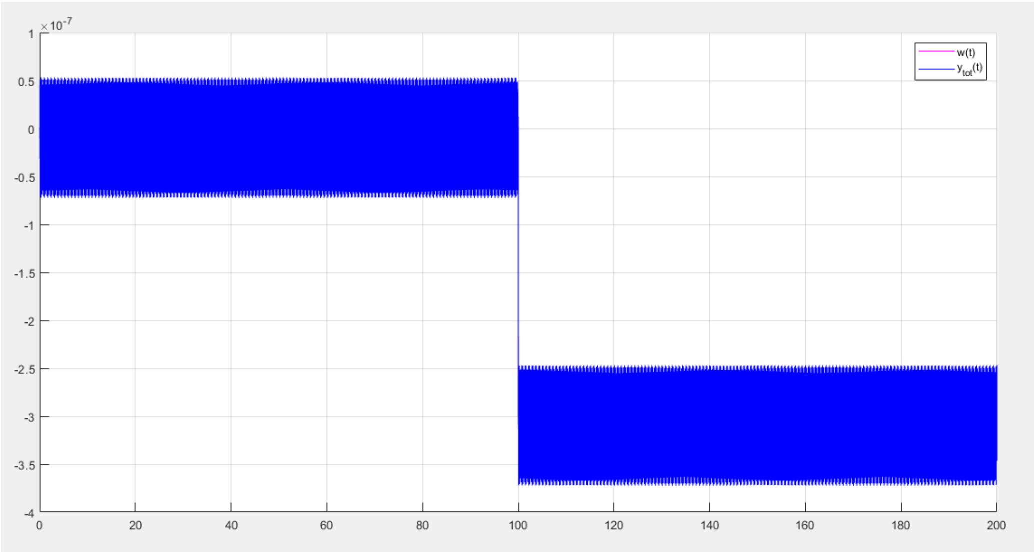


In cui $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ e $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$



Si nota che $|F(j\omega)|_{dB} \approx 0$ per $\omega \ll \omega_c$, $|F(j\omega)|_{dB} \ll 0$ per $\omega \gg \omega_c$, $|S(j\omega)|_{dB} \ll 0$ per $\omega \ll \omega_c$: in tal modo i disturbi *n(t)* e *d(t)* vengono mitigati dove le loro trasformate sono diverse da 0.

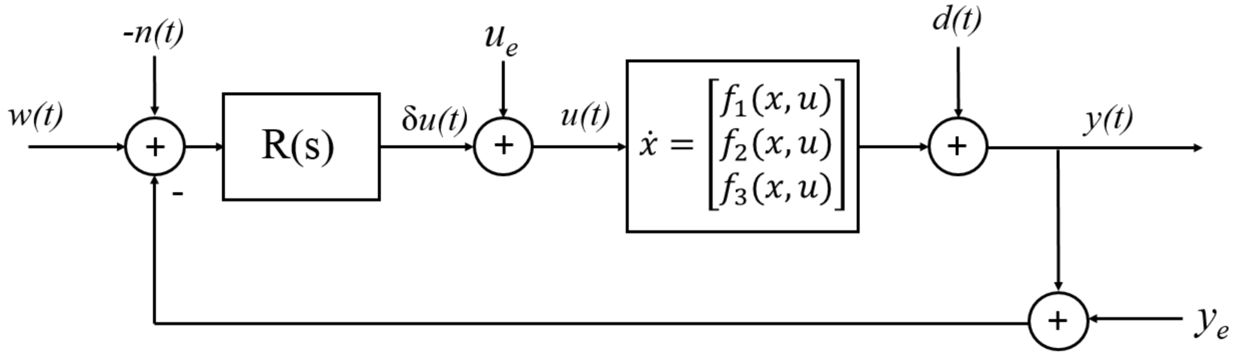
Di seguito l'andamento di $y_{tot}(t) = y_d(t)+y_n(t)+y_w(t)$



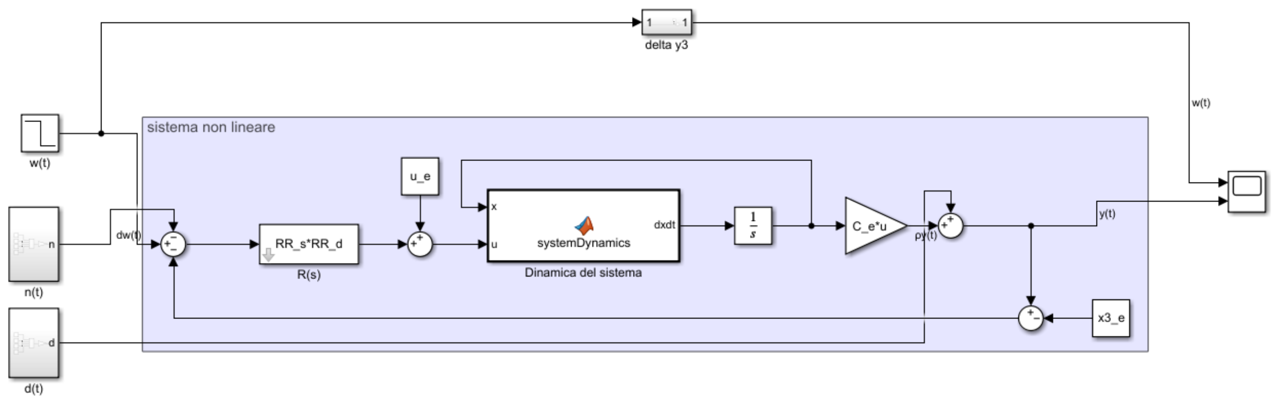
Infine la risposta della $F(s)$ al gradino $W \cdot 1(t)$ e si nota che la specifica sul tempo di assestamento al 5% e sulla sovraelongazione sono rispettati

6. Test del regolatore sul sistema non linearizzato

A partire dal modello



tramite lo strumento Simulink è stato creato



L'ingresso del sistema non lineare è stato definito come

$$u(t) = u_e + \delta u(t)$$

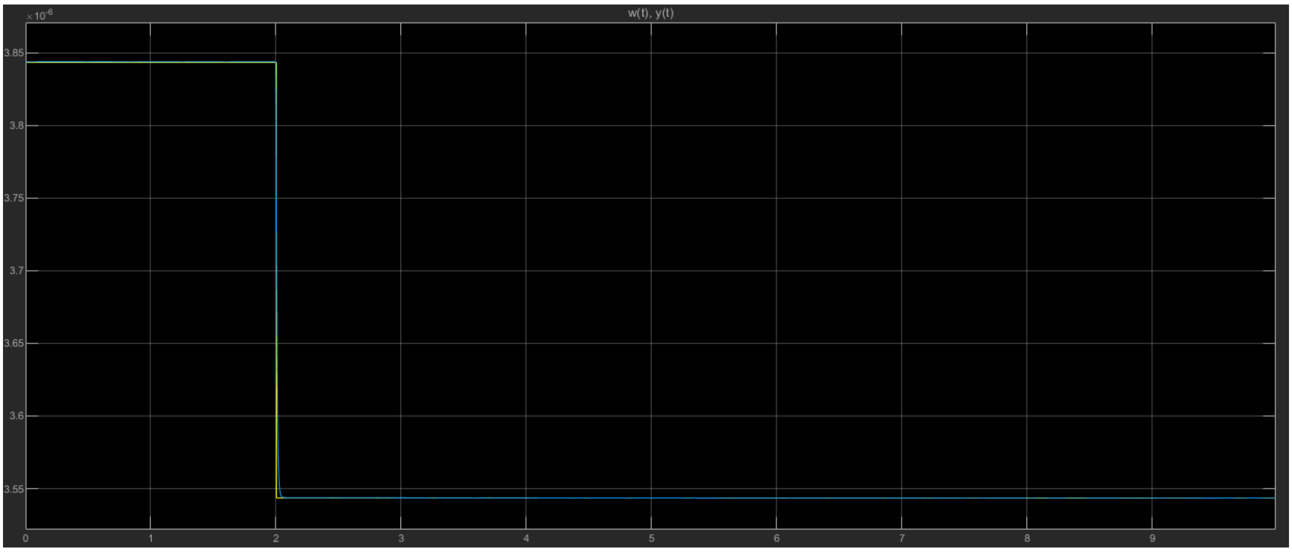
Gli stati x_1, x_2, x_3 sono stati impostati con la condizione iniziale nel punto d'equilibrio del sistema, quindi per $t=0$ il sistema si trova

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x_e, u_e) \\ f_2(x_e, u_e) \\ f_3(x_e, u_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

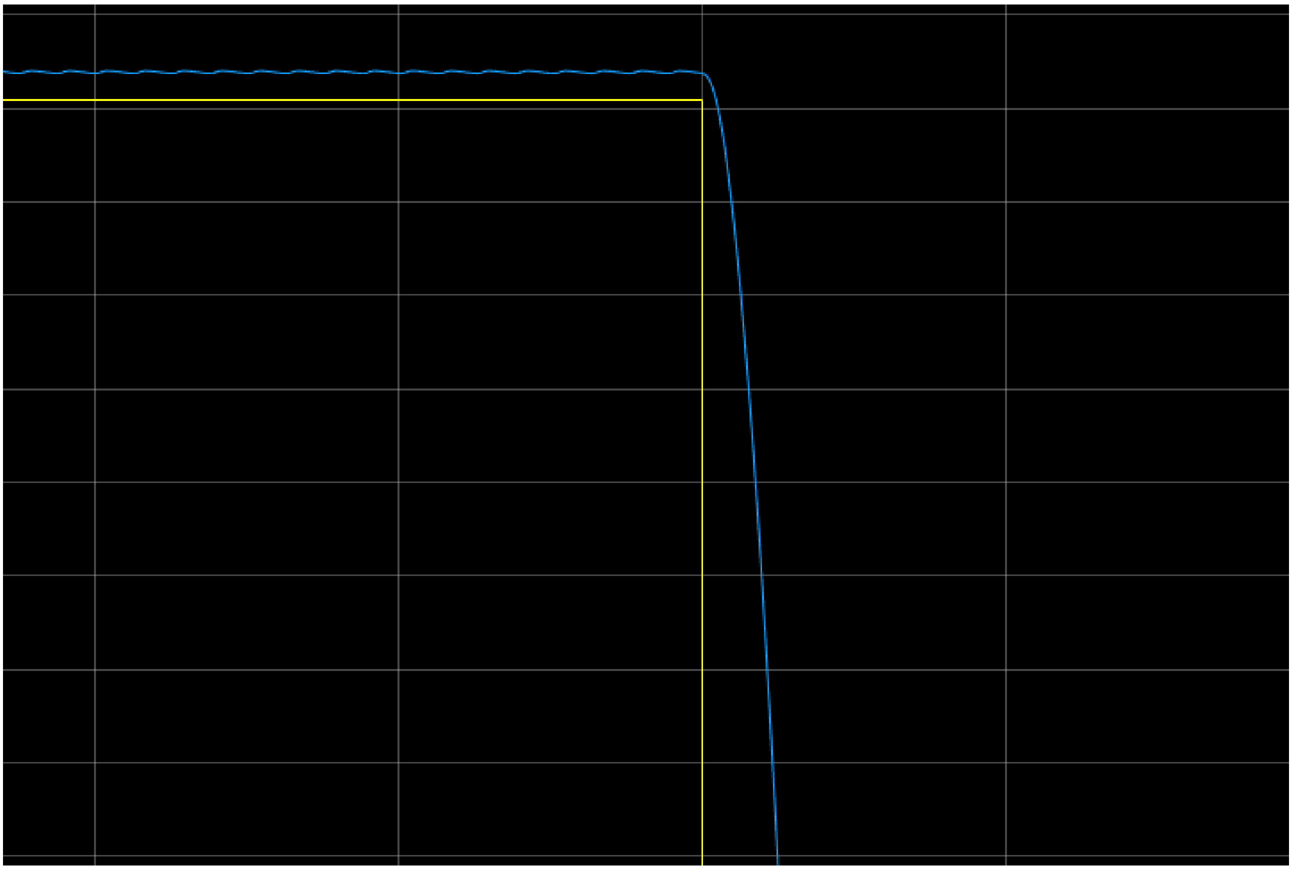
$$y = h(x_e, u_e) = y_e \; (= x_{3e})$$

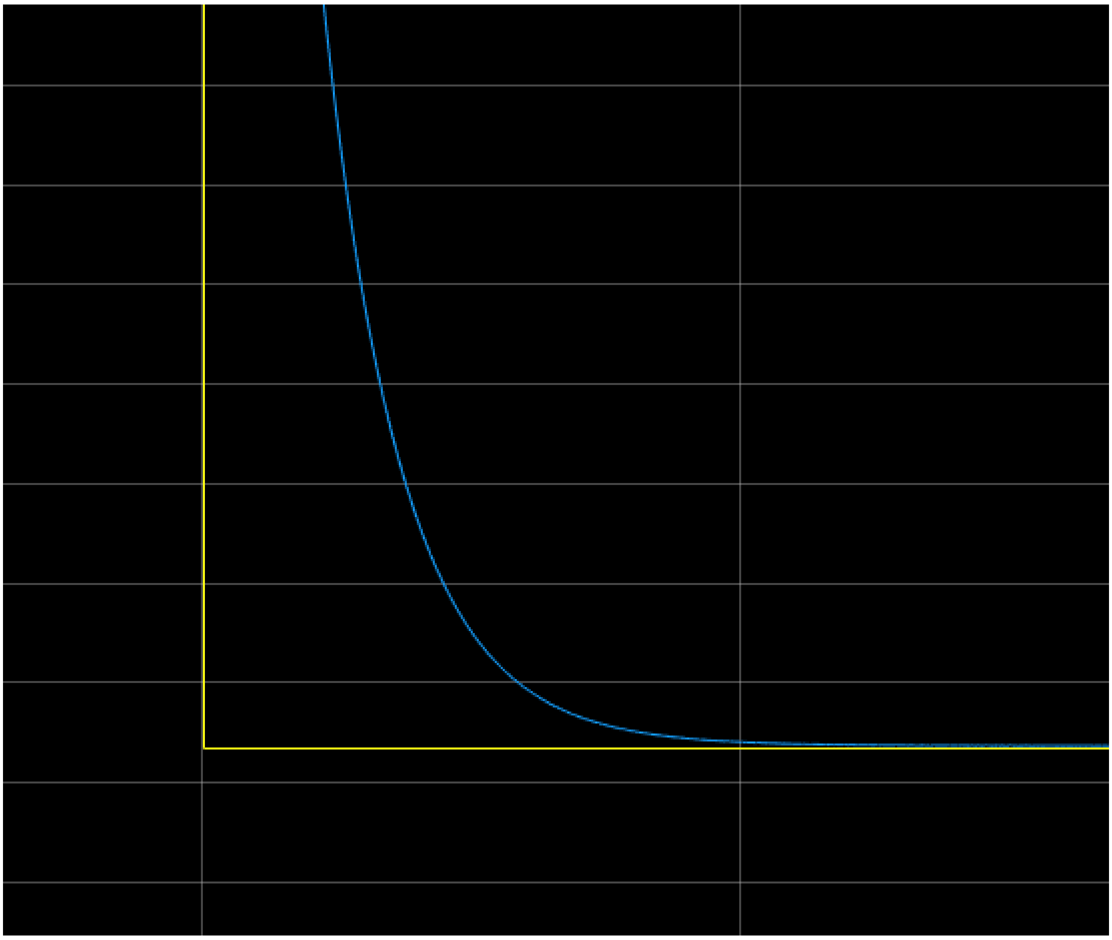
Successivamente si è aggiunto uno step di riferimento che, partendo da y_e, faceva variare questo di un certo δy nell'istante t=2.

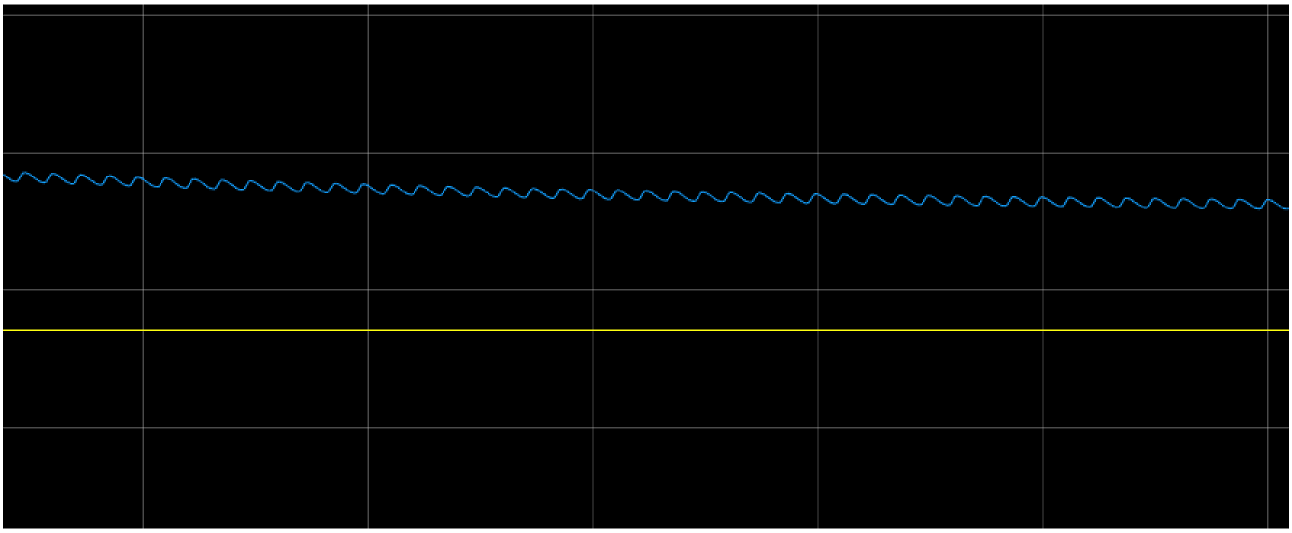
Il motivo di ciò è perturbare il sistema all'equilibrio, per vederne il comportamento. Facendo eseguire, otteniamo il seguente andamento



In giallo il segnale di riferimento $y_{rif}(t)$ o $w(t)$, mentre in blu la risposta del sistema $y(t)$.







Si nota che l’uscita del sistema oscilla in un certo intervallo limitato, dovuto alle perturbazioni esterne.