VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** a) Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelynek 350 átlója van?

b) Van-e olyan konvex sokszög amelynek $2024^m + 2$ átlója van, ahol $m \in \mathbb{N}$?

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Egy n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$. (**1 pont**)

$\frac{n(n-3)}{2} = 350 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 700 = 0$, melynek megoldásai $n_1 = 28$ és $n_2 = -25$. (**1 pont**)

Utóbbi nem lehet egy sokszög oldalainak száma, így a sokszög 28 oldalú. (**1 pont**)

b) *Első megoldás.* Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ahol m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel. (**1 pont**)

A bal oldalon szereplő kifejezés utolsó számjegye a $0\cdot3$, $1\cdot4$, $2\cdot5$, $3\cdot6$, $4\cdot7$, $5\cdot8$, $6\cdot9$, $7\cdot0$, $8\cdot1$, $9\cdot2$ szorzatok utolsó számjegyéből származhat, tehát csak 0, 4 vagy 8 lehet. (**2 pont**)

A jobb oldali kifejezés utolsó számjegye $m = 0$ esetén $2 + 4 = 6$, más esetben 2 vagy 6 lehet, mivel $2 \cdot \overline{\ldots 4} + 4 = \overline{\ldots 2}$ és $2 \cdot \overline{\ldots 6} + 4 = \overline{\ldots 6}$. (**2 pont**)

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$. (**1 pont**)

Második megoldás. Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ahol m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel. (**1 pont**)

Ha $n = 3k$, akkor a bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal viszont nem. (**2 pont**)

Ha $n = 3k \pm 1$, akkor a bal oldal 3-mal való osztási maradéka 1, míg a jobb oldalé 0 vagy 2. (**2 pont**)

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$. (**1 pont**)

Harmadik megoldás. Kérdés, hogy van-e megoldása a természetes számok halmazán az $\frac{n(n-3)}{2} = 2024^m + 2$ egyenletnek, ha m természetes szám.

Ez egyenértékű az $n(n-3) = 2 \cdot 2024^m + 4$ egyenlettel, amit (**1 pont**)

$n^2 - 3n - 4 = 2 \cdot 2024^m \iff (n-4)(n+1) = 2^{3m+1} \cdot 11^m \cdot 23^m \iff (n-4)(n+1) = 2 \cdot 8^m \cdot 11^m \cdot 23^m$ formába hozhatunk. (**1 pont**)

Ha d az $n-4$ és $n+1$ közös osztója, akkor d osztja a különbségüket, azaz 5-öt, de a jobb oldal nem többszöröse 5-nek, ebből következik, hogy $n-4$ és $n+1$ relatív prímek, ezért (**1 pont**)

a jobb oldalt két olyan relatív prím tényező szorzatára kell bontani, amelyek különbsége 5. (**1 pont**)

Ha $m \geq 1$, akkor $2 \cdot 8^m \cdot 11^m \cdot 23^m - 1 > 5$, ugyanakkor $2 \cdot 88^m - 23^m > 88^m - 23^m \geq 88 - 23 > 5$ és $2 \cdot 184^m - 11^m > 184^m - 11^m \geq 184 - 23 > 5$, valamint $253^m - 2 \cdot 8^m \geq 253^m - 16^m \geq 253 - 16 > 5$. **(1 pont)**

Ha $m = 0$, akkor az egyenlet $n^2 - 3n - 6 = 0$ alakú, aminek nincs természetes szám megoldása.

Tehát egyetlen $m \in \mathbb{N}$ esetén sincs olyan n oldalú sokszög, amely átlóinak száma $2024^m + 2$. **(1 pont)**

■

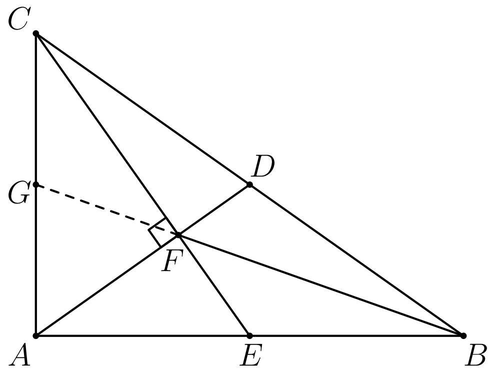
2. feladat (10 pont). Az A-ban derékszögű ABC háromszögben $AB = \sqrt{2}$, E és D rendre az AB és BC oldal felezőpontja. Az AD és CE egyenesek merőlegesek egymásra és az F pontban metszik egymást.

a) Igazold, hogy az AFC háromszög területe egyenlő a $BDFE$ négyszög területével!

b) Számítsd ki a BF szakasz hosszát!

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a)

$$T_{ACE} = T_{CEB} = \frac{1}{2} \cdot T_{ABC}$$ **(1 pont)**

$$T_{AFE} = T_{CFD} = \frac{1}{6} \cdot T_{ABC}$$ **(1 pont)**

A fenti összefüggések megfelelő oldalait kivonjuk egymásból, így kapjuk, hogy

$$T_{AFC} = T_{BDFE}$$ **(1 pont)**

b) Jelöljük x-szel az FD szakasz hosszát, innen kapjuk, hogy

$$AF = 2x, \quad AD = BD = DC = 3x.$$ **(1 pont)**

A CFD_Δ-ben $\widehat{F} = 90°$, így a Pitagorasz-tétel alapján $CF = 2\sqrt{2}x$.
Mivel az ABC_Δ-ben F súlypont, kapjuk, hogy $FE = \sqrt{2}x$. **(1 pont)**

Az AFE_Δ-ben $\widehat{F} = 90°$, így a Pitagorasz-tétel alapján $AE = x\sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **(1 pont)**

Az ABC_Δ-ben $\widehat{A} = 90°$, ezért a Pitagorasz-tétel alapján $AC = x\sqrt{12} = 2\sqrt{3}x = 1$. **(1 pont)**

Jelöljük G-vel a BF és AC egyenesek metszéspontját. Ekkor a CFA_Δ-ben FG az átfogóhoz tartozó oldalfelező, ahonnan következik, hogy $FG = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2}$. **(1 pont)**

Mivel az ABC_Δ-ben F súlypont, a fentiek alapján következik, hogy

$$BF = 2 \cdot FG = 1.$$ **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Az $(a_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, és teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagját!

b) Bizonyítsd be, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Igazold, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Feltétel szerint $a_1 = 1 = 1^2$, és a megadott összefüggés

$n = 1$ esetén $\dfrac{3}{a_1 a_2} = 1 - \dfrac{1}{a_2}$, ahonnan $a_2 = 4 = 2^2$, és

$n = 2$ esetén $\dfrac{3}{a_1 a_2} + \dfrac{5}{a_2 a_3} = 1 - \dfrac{1}{a_3}$, ahonnan $a_3 = 9 = 3^2$. **(1 pont)**

Feltételezzük, hogy $a_n = n^2$, és bizonyítjuk, hogy $a_{n+1} = (n+1)^2$.

Ekkor

$$\frac{3}{a_1 a_2} + \frac{5}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{2n+1}{a_n a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}},$$ **(1 pont)**

$$1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2 \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}},$$ **(1 pont)**

$$-a_{n+1} + 2n + 1 = -n^2,$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2.$$ **(1 pont)**

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, **(1 pont)**

így $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3+3k^2+2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+1)^2(k+2)^2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ **(1 pont)**

Ugyanakkor $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ miatt **(1 pont)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3+3k^2+2k} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sum_{k=1}^{n+2} k = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyekre

$$(x-2y-3)^2 + (x+y-z)^2 + (2x-y-z)^2 = 3.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az $a = x+y-z$ és $b = 2x-y-z$ jelölést használva **(1 pont)**
$b - a = x - 2y$, **(1 pont)**
és az egyenlet $(b-a-3)^2 + a^2 + b^2 = 3$ alakú lesz. **(1 pont)**
A számításokat elvégezve és balra rendezve $2a^2 + 2b^2 - 2ab + 6a - 6b + 6 = 0$, **(1 pont)**
majd teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$(a-b+2)^2 + (a+1)^2 + (b-1)^2 = 0,$$ **(3 pont)**

ahonnan $a = -1$ és $b = 1$. **(1 pont)**
Ekkor a megoldások $x = 2y + 2$, $y \in \mathbb{R}$ és $z = 3y + 3$.
Tehát $M = \{(2\alpha+2, \alpha, 3\alpha+3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A tagokat négyzetre emelve, balra rendezve, majd 2-vel elosztva az egyenlet

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 3xy - 3xz - 3x + 6y + 3 = 0$$ **(2 pont)**

alakú lesz. Az egyik ismeretlen szerint rendezve a tagokat kapjuk, hogy

$$z^2 - 3xz + 3\left[x^2 - x(y+1) + (y+1)^2\right] = 0,$$ **(2 pont)**

melynek diszkriminánsa $\Delta = 9x^2 - 12x^2 + 12x(y+1) - 12(y+1)^2$, **(1 pont)**
ahonnan $\Delta = -3(x-2y-2)^2 \leq 0$. **(2 pont)**
Az egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nem negatív, ezért $x - 2y - 2 = 0$. **(1 pont)**
Ekkor az egyenlet megoldása: $z = \dfrac{3x}{2}$. Innen $x = \dfrac{2z}{3}$, $y = \dfrac{z}{2} - 1$ és $z \in \mathbb{R}$. **(1 pont)**
$z = 2\alpha + 2$ esetén $x = 2\alpha + 2$ és $y = \alpha$, így $M = \{(2\alpha+2, \alpha, 3\alpha+3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. ■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\left[(-x+2y+3)^2+(-x-y+z)^2+(2x-y-z)^2\right]\cdot\left[1^1+1^1+1^1\right]\geq$$

$$\geq(-x+2y+3-x-y+z+2x-y-z)^2=9.$$

(4 pont)

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\frac{-x+2y+3}{1}=\frac{-x-y+z}{1}=\frac{2x-y-z}{1},$$ **(2 pont)**

ahonnan $M=\{(2\alpha+2,\alpha,3\alpha+3)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$. **(3 pont)**

■

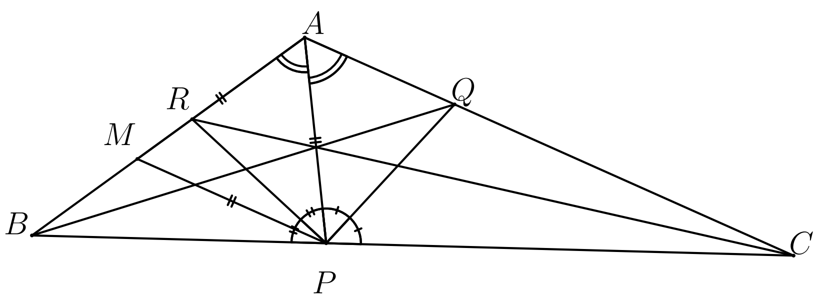
5. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben a BAC szög mértéke $120°$ és AP, BQ, CR az ABC háromszög szögfelezői, $P\in BC$, $Q\in CA$, $R\in AB$.

a) Igazold, hogy $AP=\dfrac{bc}{b+c}$, ahol $b=AC$ és $c=AB$.

b) Bizonyítsd be, hogy $QP\perp PR$.

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) A P pontból párhuzamost húzunk az AC egyenessel, ami az AB oldalt az M pontban metszi. Ekkor $\widehat{MPA}=\widehat{PAC}=60°$, mert belső váltószögek, tehát az AMP háromszög egyenlő oldalú. Innen $MP=AP$. **(1 pont)**

A hasonlóság alaptételéből $\dfrac{MP}{AC}=\dfrac{BP}{BC}$. **(1 pont)**

Az ABC háromszögben az AP szögfelezőre felírt szögfelezőtétel alapján

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BP}{BC}=\frac{c}{b+c}$$

(1 pont)

Tehát $\dfrac{MP}{b}=\dfrac{c}{b+c}$, ahonnan $MP=\dfrac{bc}{b+c}$, így $AP=\dfrac{bc}{b+c}$. **(1 pont)**

b) *Első megoldás*

Az ABP háromszögben $AP = \dfrac{bc}{b+c}$ és $BP = \dfrac{ac}{b+c}$, a $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{c}{b+c}$ összefüggés alapján.

(1 pont)

Tehát $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{b}{a}$. **(1 pont)**

Ugyanakkor az ABC háromszögben az CR szögfelezőre felírt szögfelezőtétel alapján

$\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$. **(1 pont)**

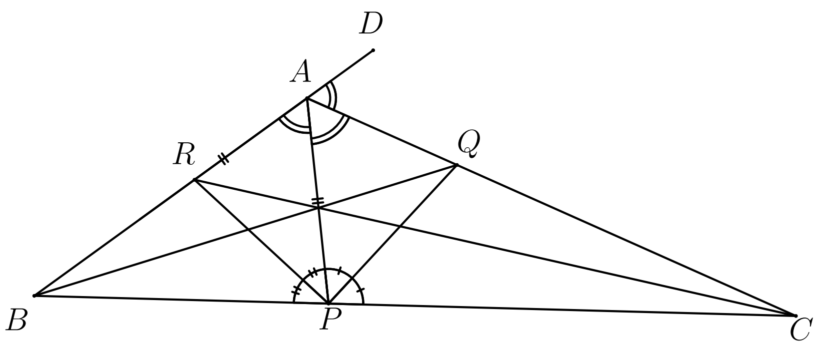
A fentiek alapján $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{AP}{BP}$, így a szögfelező tételének fordított tétele alapján PR az APB szög szögfelezője.

Hasonlóan PQ az APC szög szögfelezője. **(1 pont)**

Tehát PR és PQ két egymás melletti kiegészítő szög szögfelezője, így $PR \perp PQ$.

(1 pont)

Második megoldás



Az ABP háromszögben BQ belső szögfelező, AQ pedig külső szögfelező, **(1 pont)**

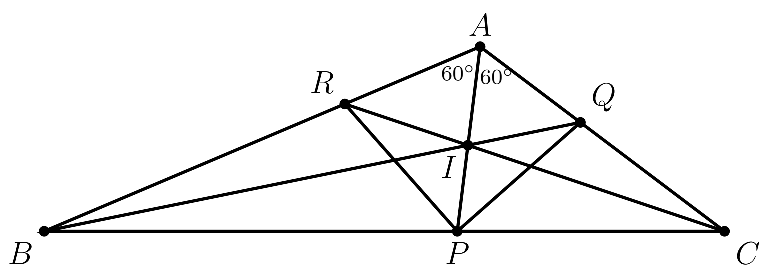
ahonnan következik, hogy PQ szintén külső szögfelező. **(1 pont)**

Innen kapjuk, hogy $\widehat{APQ} = \widehat{CPQ}$. **(1 pont)**

Teljesen hasonlóan $\widehat{APR} = \widehat{BPR}$. **(1 pont)**

Mindezekből következik, hogy $\widehat{RPQ} = 90°$, azaz $PR \perp PQ$. **(1 pont)**

Harmadik megoldás



Jelölje a, b, c rendre az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak hosszát. Az ABC háromszög AP szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$, ahonnan $\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{BP}{BP+PC} = \dfrac{c}{b+c}$ és $\dfrac{BC}{PC} = \dfrac{BP+PC}{PC} = \dfrac{c+b}{b}$. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CP} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

(**1 pont**)

Az ABC háromszög CR szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\dfrac{BR}{RA} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$, így $\dfrac{BR}{BA} = \dfrac{a}{a+b}$, ezért

$$\overrightarrow{BR} = \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Hasonlóan az ABC háromszög BQ szögfelezőjére felírva a szögfelezőtételt $\dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c}$, ahonnan $\dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{a}{a+c}$, így

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

(**1 pont**)

Tehát

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BR} &= -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{BA} \\
&= -\frac{c}{b+c} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{a}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{a}{a+b}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= -\frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{b(c-a)}{(b+c)(a+b)} \cdot \overrightarrow{AB}, \\
\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} &= \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{CA} \\
&= \frac{b}{b+c} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{a}{a+c} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)} \cdot \overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

(**1 pont**)

Megjegyezzük, hogy

$$\overrightarrow{AB}^2 = c^2, \quad \overrightarrow{AC}^2 = b^2, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc\cos(\widehat{BAC}) = bc\cos 120^\circ = -\frac{bc}{2}.$$

Végül

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ} &= \left[-\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{b(c-a)}{(b+c)(a+b)}\cdot\overrightarrow{AB}\right]\cdot\left[-\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)}\cdot\overrightarrow{AC}\right]\\
&= \frac{cb}{(b+c)^2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{b^2(c-a)}{(b+c)^2(a+b)}\overrightarrow{AB}^2-\frac{c^2(b-a)}{(b+c)^2(a+c)}\overrightarrow{AC}^2\\
&\quad+\frac{bc(c-a)(b-a)}{(b+c)^2(a+b)(a+c)}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \qquad \textbf{(1 pont)}\\
&= -\frac{(cb)^2}{2(b+c)^2}-\frac{(cb)^2(c-a)}{(b+c)^2(a+b)}-\frac{(cb)^2(b-a)}{(b+c)^2(a+c)}-\frac{(bc)^2(c-a)(b-a)}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)}\\
&= \frac{-(cb)^2}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)}\left[(a+b)(a+c)+2(c-a)(c+a)+2(b-a)(b+a)+(c-a)(b-a)\right]\\
&= \frac{-(cb)^2}{2(b+c)^2(a+b)(a+c)}\left[2bc+2c^2+2b^2-2a^2\right]
\end{aligned}$$

Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(120^\circ)=b^2+c^2+bc,$$

tehát $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$, amiből következik, hogy $PR\perp PQ$. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** Lúdas Matyinak van 31 lúdja, 33 kacsája és 35 tyúkja.Találkozik a vásárban Döbrögivel, akinek 27 lúdja, 33 kacsája és 39 tyúkja van. Megegyeznek, hogy cserélni fognak a következő szabály szerint: két darab, különböző fajtájú szárnyasért cserébe a másik ad két szárnyast a harmadik fajtából, vagy fordítva, két ugyanolyan szárnyasért egy-egy darabot a másik két fajtából.

a) Sikerülhet-e Döbröginek úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

b) Sikerülhet-e Lúdas Matyinak úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

Kocsis Attila-Levente, Déva

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Igen, sikerülhet. A (ludak száma, kacsák száma, tyúkok száma) hármas a következőképpen alakul $(27,33,39)\to(29,32,38)\to(31,31,37)\to(30,33,36)\to(32,32,35)\to(31,34,34)\to(33,33,33)$. **(3 pont)**

b) Egy csere után két fajta szárnyas száma eggyel csökken, a harmadik fajtáé pedig 2-vel nő. (Például, ha csere előtt van L lúdja, T tyúkja és K kacsája, akkor ha egy ludat és egy kacsát cserél két tyúkra, akkor az új számok $L-1$, $K-1$ és $T+2$, vagy ha két tyúkot cserél egy lúdra és egy kacsára, akkor az új számok $L+1$, $K+1$ és $T-2$.) **(2 pont)**

Egy ilyen cserével a különféle szárnyasok száma közti különbség vagy nem változik, vagy hárommal változik. (A fenti példában az új különbségek $L-K$, $L-T-3$ és $K-T-3$ vagy $L-K$, $L-T+3$ és $K-T+3$) **(1 pont)**

Egyik esetben sem változik a különbségek 3-mal való osztási maradéka. (**1 pont**)

Az eredeti különbségek 2, 2 és 4, tehát ugyanebben a sorrendben végzett különbségek maradékai 2, 2 és 1 lesznek. (**1 pont**)

Ha minden fajta szárnyasból ugyanannyi lenne, akkor ezek a különbségek nullák lennének, ami a fentiek alapján nem érhető el. (**1 pont**)

■