XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

X. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyek esetén

$$[2x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]$$

prímszám, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli! *(***)*

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Legyen $[x] = t$ és jelölje $\{x\}$ az x törtrészét. Két esetet különböztetünk meg.
Ha $\{x\} \in [0, \frac{1}{2})$, akkor

$$[2x] = 2t \quad \text{és} \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = t,$$

ahonnan

$$[2x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = 4t^2 + t + t = 2t(2t + 1). \qquad \textbf{(2,5 pont)}$$

A fenti kifejezés két egymás utáni egész szám szorzata, ami pontosan akkor lehet prím, ha közülük a kisebb -2 vagy 1. Ha $2t = -2$, akkor $t = -1$, innen az $x \in [-1, -\frac{1}{2})$ megoldásokhoz jutunk. A $2t = 1$ eset nem lehetséges, mivel t egész szám. (**2 pont**)
Ha $\{x\} \in [\frac{1}{2}, 1)$, akkor

$$[2x] = 2t + 1 \quad \text{és} \quad \left[x + \frac{1}{2}\right] = t + 1,$$

ahonnan

$$[2x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = (2t + 1)^2 + t + 1 + t = (2t + 1)(2t + 2). \qquad \textbf{(2,5 pont)}$$

A fenti kifejezés pontosan akkor prímszám, ha a két egymásutáni egész szám közül a kisebb -2 vagy 1. A $2t + 1 = -2$ eset nem lehetséges. Ha $2t + 1 = 1$, akkor $t = 0$ vagyis az $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ megoldásokhoz jutunk. (**2 pont**)
Tehát a megadott egyenlőség az

$$M = \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

halmaz elemeire teljesül. ■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A Hermite-azonosság alapján

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$[2x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = [2x]^2 + [2x] = [2x]([2x] + 1). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A fenti kifejezés két egymás utáni szám egész szám szorzata, ami pontosan akkor lehet prím, ha közülük a kisebb -2 vagy 1 kell, hogy legyen.

Ha $[2x] = -2$, akkor $x \in [-1, -\frac{1}{2})$, ha pedig $[2x] = 1$, akkor $x \in [\frac{1}{2}, 1)$. Tehát a megoldáshalmaz

$$M = \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right). \qquad \textbf{(4 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont)**.** Felbontható-e az $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 3n\}$ számhalmaz n darab diszjunkt, háromelemű részhalmazra úgy, hogy mindegyik ilyen részhalmazban az egyik elem háromszorosa egyenlő legyen a másik két elem összegével, ha

a) $n = 5$;

b) $n = 10$?

Béres Zoltán, Palics

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tegyük fel, hogy lehetséges a kért felbontás, vagyis az $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x_2, y_2, z_2\}$, …, $\{x_n, y_n, z_n\}$ diszjunkt részhalmazok elemeire rendre teljesül az $x_k + y_k = 3z_k$ feltétel minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. Összeadva ezeket az összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = 3(z_1 + z_2 + \cdots + z_n). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor az x_k, y_k és z_k számok valamilyen sorrendben rendre felveszik az $1, 2, 3, \ldots, 3n$ értékeket, tehát

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)+(z_1+z_2+\cdots+z_n) = 1+2+\cdots+3n = \frac{3n(3n+1)}{2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az előző két összefüggés alapján

$$3(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = 4(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \frac{3n(3n+1)}{2}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

tehát a $\frac{3n(3n+1)}{2}$ természetes szám osztható kell legyen 4-gyel. **(1 pont)**
Ha $n = 10$, akkor $\frac{3n(3n+1)}{2} = 465$, tehát nem lehetséges a kért felbontás. **(1 pont)**
Ha $n = 5$, akkor $\frac{3n(3n+1)}{2} = 120$, tehát ebben az esetben létezhet az elvárásoknak megfelelő felbontás. Mivel például az

$$\{1, 14, 5\}, \{2, 10, 4\}, \{3, 15, 6\}, \{9, 12, 7\}, \{11, 13, 8\}$$

felbontás megfelel a feltételeknek, ezért valóban létezik ilyen felbontás $n = 5$ esetén. **(3 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Aprajafalván törpök és tündék élnek, közülük 15 bányász. A falu közelében található aranybányába a bányászok párokban járnak le, felváltva. A törpök gyorsan bányásznak, a tündék gyorsan rakodnak. Egy törpe–törpe párosnak egy út 3 napba, egy tünde–tünde párosnak 5 napba, míg egy törpe–tünde párosnak 2 napba kerül. Minden út után a zsákmány kipakolása egy napot vesz igénybe, a következő páros a kipakolás után azonnal indul bányászni. Egy szezon alatt minden bányász minden másikkal pontosan egyszer bányászik. Minden szezon végén a bányászok cserélődnek. Határozd meg, hogy legkevesebb, illetve legtöbb mennyi ideig tarthat egy szezon (az első csapat indulásától az utolsó csapat zsákmányának kipakolásáig)!

Kaiser Dániel, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel a bányászok száma 15, és egy szezon alatt alatt minden bányász minden másikkal pontosan egyszer bányászik, ezért egy szezon alatt a kibányászott arany kipakolása

$$P = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

napot vesz igénybe. **(2 pont)**
Jelölje a bányászok közül x a törpök és y a tündék számát egy szezon alatt, ahol $x + y = 15$. Ekkor a képezhető törpe–törpe párok száma $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$, tünde–tünde párok száma $\frac{y\cdot(y-1)}{2}$, törpe–tünde párok száma pedig $x \cdot y$.
A szezon alatt a bányászathoz szükséges napok száma

$$B(x, y) = 3 \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{2} + 5 \cdot \frac{y \cdot (y-1)}{2} + 2 \cdot (x \cdot y).$$

Felhasználva, hogy $y = 15 - x$, a szezon

$$S(x) = P + B(x, 15 - x) = 105 + 2x^2 - 44x + 525 = 2x^2 - 44x + 630$$

napból áll. **(4 pont)**
Az S egy másodfokú kifejezés x-ben. Mivel az x^2 együtthatója pozitív, emiatt $S(x)$ konvex, így

$$\max_{0\leq x\leq 15} S(x) = \max\{S(0), S(15)\} = \max\{630, 420\} = 630.$$

Másrészt, a másodfokú függvény tulajdonságai alapján $S(x)$ minimális, ha $x = \frac{44}{4} = 11$, vagyis

$$\min_{0\leq x\leq 15} S(x) = S(11) = 388.$$

Azt kaptuk, tehát hogy a szezon legalább 388, legfeljebb 630 napot tart. **(3 pont)**
■

4. feladat (10 pont)**.** Egy 200 résztvevős matematikaversenyen 6 feladat volt kitűzve. Mindegyik feladat esetén legalább 101 diák oldotta meg helyesen az adott feladatot. Bizonyítsd be, hogy létezik két diák úgy, hogy bármelyik feladatra a 6-ból legalább az egyikük helyes megoldást adott!

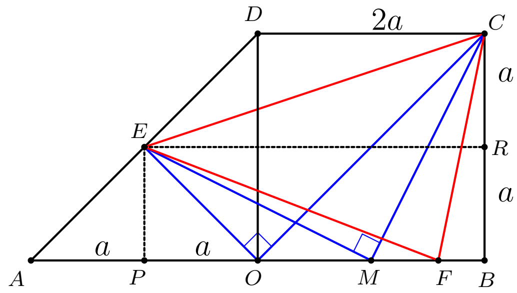
Bálint Béla, Zsolna

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha van olyan diák, aki mind a 6 darab feladatot megoldotta, akkor készen vagyunk, mert ehhez a diákhoz bármely másik diákot hozzávéve ők ketten együtt minden feladatot megoldottak. **(2 pont)**
Ha van olyan diák, aki pontosan 5 darab feladatot oldott meg (például nem oldotta meg a 6-dik feladatot), akkor ezen diák mellé olyan diákot kell találni, aki megoldotta ezt a feladatot. Ilyen diák biztosan van, mivel a 6-dik feladatot is legalább 101 diák megoldotta a feltevés szerint. **(2 pont)**
Ha van olyan diák, aki pontosan 4 darab feladatot oldott meg (például nem oldotta meg az 5-dik és a 6-dik feladatokat), akkor emellé a diák mellé elég olyan diákot találni, aki az 5-dik és 6-dik feladatokat megoldotta. Ha nincs olyan diák, aki az 5-dik és 6-dik feladatokat megoldotta, akkor a fennmaradó 199 diák a két feladat közül legfeljebb csak az egyiket oldotta meg, így erre a két feladatra legfeljebb 199 megoldás született, ami ellentmond a feltevésnek, hogy minden feladatot legalább 101 diák megoldott. **(3 pont)**
Ha a 200 diák mindegyike legfeljebb 3 feladatot oldott meg, akkor legfeljebb $3 \cdot 200 = 600$ megoldás született összesen. De ez ellentmond a feltevésnek, miszerint a 6 feladat mindegyikét legalább 101 diák oldotta meg, mivel ekkor legalább $6 \cdot 101 = 606$ megoldás kellett szülessen összesen. Tehát van olyan diák, aki legalább 4 feladatot oldott meg. **(2 pont)**
■

5. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, az ABC szög mértéke $90°$ és $AB = 2CD = 2BC$. Legyen E az AD oldal felezőpontja és F egy tetszőleges pont az AB egyenesen. Határozd meg a BF szakasz lehetséges hosszát az AB szakasz hosszának függvényében úgy, hogy az EFC háromszög derékszögű legyen!

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen O és R az AB, illetve BC szakasz felezőpontja, valamint P az AO szakasz felezőpontja. Vezessük be az $AP = a$ jelölést.
Három esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy az ECF háromszög melyik szöge derékszög.
Első eset: $\widehat{EFC} = 90°$.
Legfennebb két megfelelő F pont létezhet, mivel minden ilyen pontnak az EC átmérőjű körön kell feküdnie, és ez a kör legfennebb két pontban metszheti az AB egyenest.



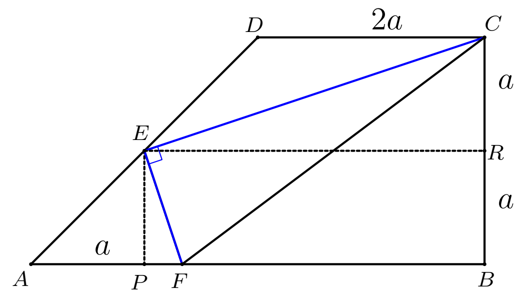
Tegyük fel, hogy az F pont az AB szakaszon helyezkedik el, megfelel a követelményeknek és jelöljük a BF szakasz hosszát x-szel. Az EFC háromszög pontosan akkor derékszögű az F csúcsban, ha $EF^2 + FC^2 = EC^2$.
Az EPF, BFC és ERC derékszögű háromszögekben Pitagorasz tételével kifejezhetjük az EF^2, FC^2 és EC^2 értékeit:

$$\begin{aligned} EP^2 + PF^2 &= EF^2, \quad \text{vagyis} \quad a^2 + |3a - x|^2 = EF^2; \\ BF^2 + BC^2 &= FC^2, \quad \text{vagyis} \quad x^2 + 4a^2 = FC^2; \\ ER^2 + RC^2 &= EC^2, \quad \text{vagyis} \quad 9a^2 + a^2 = EC^2. \end{aligned}$$

Mivel $EF^2 + FC^2 = EC^2$, ezért az előbbi összefüggésekből következik, hogy

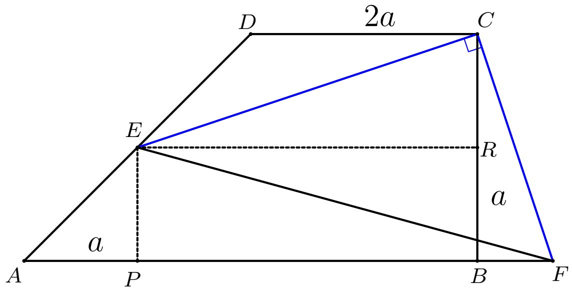
$$a^2 + |3a - x|^2 + x^2 + 4a^2 = 9a^2 + a^2.$$

Innen az $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek a megoldásai $x_1 = a$ és $x_2 = \frac{a}{2}$. Ez azt jelenti, hogy pontosan két olyan pont létezik az AB szakaszon, amely megfelel a követelménynek, és ezek az O és M, ahol M az OB szakasz felezőpontja. **(3 pont)**
Második eset: $\widehat{FEC} = 90°$.



Az EC egyenes E pontjába állított merőleges legfennebb egy pontban metszi az AB egyenest, ezért legfennebb egy megoldás van. Belátjuk, hogy valóban van ilyen pont az AB szakaszon. Ha $BF = x$, akkor most az $FE^2 + EC^2 = FC^2$ összefüggés a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\widehat{FEC} = 90°$. Ez egyenértékű az $a^2 + |3a - x|^2 + 9a^2 + a^2 = x^2 + 4a^2$ összefüggéssel, ahonnan $16a^2 = 6ax$, vagyis $x = \frac{8}{3}a = \frac{2}{3}AB$. **(3 pont)**

Harmadik eset: $\widehat{ECF} = 90°$.



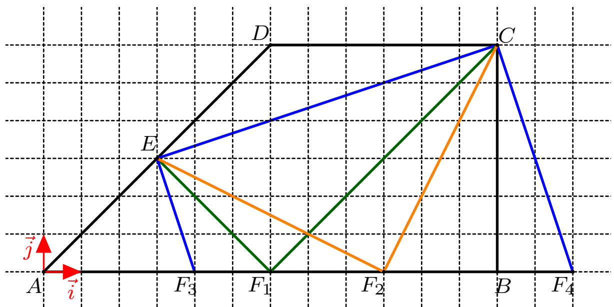
Az EC egyenes C pontjába állított merőleges legfennebb egy pontban metszi az AB egyenest, ezért legfennebb egy megoldás van. Ez esetben nyilvánvaló, hogy a megfelelő F pont az AB szakaszon kívül esik (lásd a mellékelt ábrát). Ha $BF = x$, akkor az $EC^2 + CF^2 = EF^2$ összefüggés most az $a^2 + 9a^2 + x^2 + 4a^2 = a^2 + (3a + x)^2$ összefüggéssel ekvivalens, ahonnan $4a^2 = 6ax$, vagyis $x = \frac{2}{3}a = \frac{1}{6}AB$. **(3 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az AB egyenesen legfennebb két olyan F pont létezhet, amelyre $\widehat{EFC} = 90°$ (mivel az EC átmérőjű kör az AB egyenest legfennebb két pontban metszheti). Másrészt, legfennebb egy-egy olyan F pont létezhet, amelyre a keletkezett háromszög derékszögű E-ben, illetve C-ben (mivel az EC egyenesre állított merőlegesek az E-ben, illetve C-ben az AB egyenest legfennebb egy-egy pontban metszik). **(2 pont)**

Tekintsük az ábrán megadott négyzetrácsot az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ irányvektorokkal, és a benne elhelyezett $ABCD$ trapézt ($\overrightarrow{AB} = 12\vec{i}$, $\overrightarrow{BC} = 6\vec{j}$ és $\overrightarrow{CD} = -6\vec{i}$). **(3 pont)**



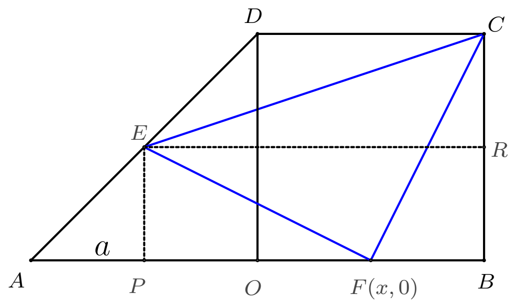
Az ábra jelöléseit használva rendre kifejezhetjük a releváns vektorokat az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ függvényében és levonhatjuk az alábbi következtetéseket:

- $\overrightarrow{EF_1} = 3(\vec{i} - \vec{j})$ és $\overrightarrow{F_1C} = 6 \cdot (\vec{i} + \vec{j})$, ahonnan következik, hogy $EF_1 \perp F_1C$;
- $\overrightarrow{EF_2} = 3(2\vec{i} - \vec{j})$ és $\overrightarrow{F_2C} = 3 \cdot (\vec{i} + 2\vec{j})$, ahonnan következik, hogy $EF_2 \perp F_2C$;
- $\overrightarrow{EF_3} = \vec{i} - 3\vec{j}$ és $\overrightarrow{EC} = 3 \cdot (3\vec{i} + \vec{j})$, ahonnan következik, hogy $EF_3 \perp EC$;
- $\overrightarrow{EC} = 3 \cdot (3\vec{i} + \vec{j})$ és $\overrightarrow{CF_4} = 2 \cdot (\vec{i} - 3\vec{j})$, ahonnan következik, hogy $EC \perp CF_4$. **(3 pont)**

Ez viszont azt jelenti, hogy meghatároztuk az összes megfelelő F pont helyzetét az AB egyenesen. (A kért szakaszhosszúságok pedig rendre $BF_1 = \frac{AB}{2}$, $BF_2 = \frac{AB}{4}$, $BF_3 = \frac{2AB}{3}$ és $BF_4 = \frac{AB}{6}$.) **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen O és R az AB, illetve BC szakasz felezőpontja, valamint P az AO szakasz felezőpontja. Tekintsük O-t a koordináta-rendszer kezdőpontjának, az OB, illetve OD koordináta-tengelyekkel. Legyen $AP = a$, valamint $(x, 0)$ az F pont koordinátája. Így $x > 0$ esetén az F pont az $(OB$ félegyenesen, $x < 0$ esetén az $(OA$ félegyenesen helyezkedik el. **(3 pont)**



Az ECR, CBF, illetve EPF derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel alapján rendre

$$EC^2 = 10a^2,$$
$$FC^2 = 4a^2 + |2a - x|^2,$$
$$EF^2 = a^2 + |a + x|^2.$$
(3 pont)

Az EFC háromszög pontosan akkor derékszögű, ha két oldalhosszának négyzetét összeadva a harmadik oldalhossz négyzetét kapjuk, tehát a következő három egyenletet kell megoldani:

$$EC^2 = FC^2 + EF^2 \Leftrightarrow 10a^2 = 2a^2 + x^2 - 4ax + 2a^2 + x^2 + 2a \Leftrightarrow x \in \{0, a\},$$
$$EF^2 = EC^2 + FC^2 \Leftrightarrow 2a^2 + x^2 + 2ax = 10a^2 + 8a^2 + x^2 - 4ax \Leftrightarrow x = \frac{8a}{3},$$
$$FC^2 = EF^2 + EC^2 \Leftrightarrow 8a^2 + x^2 - 4ax = 2a^2 + x^2 + 2ax + 10a^2 \Leftrightarrow x = -\frac{2a}{3}.$$

Az AB hosszával kifejezve a BF szakasz hosszára az $\frac{AB}{2}$, $\frac{AB}{4}$, $\frac{2AB}{3}$ és $\frac{AB}{6}$ lehetséges értékeket kapjuk. **(3 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** a) Igazold, hogy három egymásutáni egész szám köbeinek összege osztható 3-mal!

b) Igazold, hogy ha $k \geq 3$ és k egy páratlan természetes szám, akkor nem létezik k darab olyan egymást követő egész szám, amelyek köbeinek összege 2^{2024}.

Molnár István, Gyula

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A megoldás során a maradékos osztás tételének azt a változatát használjuk, amelyben a maradékok negatív számok is lehetnek.

a) Három egymásutáni egész számnak a 3-mal való osztásai maradékai rendre valamilyen sorrendben -1, 0 és 1. **(2 pont)**
Innen következik, hogy a három egymásutáni egész szám köbeinek összege 3-mal osztva ugyanannyit ad maradékul, mint a $(-1)^3 + 0^3 + 1^3 = 0$ szám, azaz 3-mal osztható. **(1 pont)**

b) Az előző alpont megoldásának ötletét általánosabban is használhatjuk: ha $k = 2l + 1$, ahol $l \geq 1$ egész szám, akkor k darab egymásutáni egész számnak a k-val való osztási maradékai felveszik rendre valamilyen sorrendben a $-(l-1)$, $-(l-2)$, $\ldots$, 0, $\ldots$, $l-2$, $l-1$ maradékok mindegyikét. **(2 pont)**
Ez viszont azt jelenti, hogy a kiinduló számok köbeinek összegének a maradéka k-val osztva ugyanannyi, mint a

$$(-(l-1))^3 + (-(l-2))^3 + \cdots + (l-2)^3 + (l-1)^3 = 0$$

számé, vagyis az összeg k-val osztható. **(2 pont)**
A 2^{2024} szám viszont nem osztható a $k \geq 3$ páratlan számmal, így nem létezhet a feltételnek megfelelő k darab egymásutáni szám. **(2 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha az egymásutáni egész számok $x-1$, x és $x+1$, akkor a köbeik összege

$$S = (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 3(x^3 + 2x),$$

tehát S osztható 3-mal. **(3 pont)**

b) Legyen $k = 2l+1$, ahol $l \geq 1$ egész szám. Ha a k darab egymásutáni egész szám közül a középsőt x-el jelöljük, akkor a számok növekvő sorrendben

$$x-l, x-l+1, \ldots, x-1, x, x+1, \ldots, x+l-1, x+l,$$

a köbeik összege pedig

$$S = (x-l)^3 + (x-l+1)^3 + \cdots + (x+l-1)^3 + (x+l)^3.$$ **(2 pont)**

Csoportosítással az S-et a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned}
S &= \big((x-l)^3 + (x+l)^3\big) + \big((x-(l-1))^3 + (x+(l-1))^3\big) + \cdots + \big((x-1)^3 + (x+1)^3\big) + x^3 \\
&= (2x^3 + 6x \cdot l^2) + \big(2x^3 + 6x \cdot (l-1)^2\big) + \cdots + (2x^3 + 6x \cdot 2^2) + (2x^3 + 6x \cdot 1^2) + x^3 \\
&= (2l+1)x + 6x\left(l^2 + (l-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right) \\
&= (2l+1)x + 6x \cdot \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \\
&= k\left(x + l(l+1)\right).
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Az előbbi összefüggés alapján S osztható k-val és a megoldást be tudjuk fejezni az első megoldáshoz hasonlóan. **(2 pont)**

■

A b) alpont harmadik megoldása. Az állítás akkor is igaz, ha $k \geq 2$ tetszőleges pozitív egész. Vegyük észre, hogy feltételezhetjük, hogy az egymásutáni számok közül a legkisebb is legalább 1. **(1 pont)**
Felhasználva az

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ **(1 pont)**

azonosságot, ha az egymásutáni számok $x+1, x+2\ldots, x+k$, ahol $x \geq 0$, akkor a köbeik összege

$$\begin{aligned}
S &= \left(1^3+2^3+\cdots+(x+k)^3\right)-\left(1^3+2^3+\cdots+x^3\right) \\
&= \left(\frac{(x+k)(x+k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2 && (\mathbf{2\ pont}) \\
&= \frac{1}{4}\left((x+k)(x+k+1)+x(x+1)\right)\left((x+k)(x+k+1)-x(x+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2x^2+2(k+1)x+k^2+k\right)\left(k+k^2+2kx\right) \\
&= \frac{1}{4}k\left(1+k+2x\right)\left(2x^2+2(k+1)x+k^2+k\right). && (\mathbf{1\ pont})
\end{aligned}$$

Mivel a k és $(1+k+2x)$ számok közül az egyik biztosan 1-nél nagyobb páratlan szám, ezért S nem lehet 2 hatványa. (**1 pont**)

■