IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy $2^{n^2}+13$ osztható 15-tel, bármely n páratlan természetes szám esetén! *(***)*

Megoldás. Matematikai indukcióval igazoljuk az oszthatóságot. Ehhez ellenőrizzük az oszthatóságot $n=1$, illetve $n=3$ esetén.

$$n=1: \quad 2^{1^2}+13=2+13=15, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$n=2: \quad 2^{3^2}+13=512+13=525=35\cdot 15.$$

Mindkét esetben a kapott szám osztható 15-tel.
Feltételezzük, hogy $2^{(2k+1)^2}+13$ osztható 15-tel, és igazoljuk, hogy $2^{(2k+3)^2}+13$ osztható 15-tel. **(1 pont)**
Feltevés szerint $2^{(2k+1)^2}+13=15l$, ahol $l\in\mathbb{N}^*$, vagyis $2^{(2k+1)^2}=15l-13$. **(1 pont)**
Ekkor

$$\begin{aligned}
2^{(2k+3)^2}+13 &= 2^{(2k+1)^2+4(2k+1)+4}+13=2^{(2k+1)^2}\cdot 2^{8k+8}+13\\
&=(15l-13)\cdot 2^{8k+8}+13=2^{8k+8}\cdot l\cdot 15-13\cdot(2^{8k+8}-1) && \textbf{(1 pont)}\\
&=2^{8k+8}\cdot l\cdot 15-13\cdot(256^{k+1}-1) && \textbf{(1 pont)}\\
&=2^{8k+8}\cdot l\cdot 15-13\cdot(256-1)(256^k+256^{k-1}+\ldots+256+1) && \textbf{(1 pont)}\\
&=2^{8k+8}\cdot l\cdot 15-13\cdot 15\cdot 17\cdot(256^k+256^{k-1}+\ldots+256+1) && \textbf{(1 pont)}\\
&=[2^{8k+8}\cdot l-13\cdot 17\cdot(256^k+256^{k-1}+\ldots+256+1)]\cdot 15. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Tehát $2^{(2k+3)^2}+13$ is osztható 15-tel.
Következésképpen $2^{n^2}+13$ osztható 15-tel, minden n páratlan természetes szám esetén. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Írhatjuk, hogy

$$2^{n^2}+13=15+2\cdot(2^{n^2-1}-1)=15+2\cdot\left((2^4)^{\frac{(n-1)(n+1)}{4}}-1\right). \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Ha n páratlan, akkor $\frac{(n-1)(n+1)}{4}=m\in\mathbb{N}$, és ezért

$$\begin{aligned}
2^{n^2}+13 &= 15+2\cdot(16^m-1)=15+2\cdot(16-1)\cdot(16^{m-1}+\ldots+16+1)\\
&=15[1+2(16^{m-1}+\ldots+16+1)].
\end{aligned}$$

Tehát $2^{n^2}+13$ osztható 15-tel. **(5 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy akárhogy választunk ki 26 számot a $2, 3, 4, \ldots, 100$ természetes számok közül, lesz két olyan, amely nem relatív prím! *(***)*

Megoldás. 1 és 100 között összesen 25 prím van, amelyek a következők:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Képezzünk 25 skatulyát és címkézzük fel őket ezekkel a prímekkel. (**3 pont**)
A kiválasztott 26 szám mindegyikét abba a skatulyába helyezzük, amelynek a címkéje az adott szám legkisebb prímosztója. (**3 pont**)
Mivel 26 számot helyeztünk el a 25 skatulyába, ezért van olyan skatulya, amely legalább két számot tartalmaz. (**2 pont**)
Ezek a számok nem relatív prímek, mert a skatulya címkéje (amely egy prímszám) mindkét számot osztja. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott $a, b, c > 0$ valós számok esetén léteznek-e olyan x, y, z valós számok, amelyekre

$$|x+a+b| + |y+b+c| + |z+c+a| + |x-a-b| + |y-b-c| + |z-c-a| = 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac})?$$

(***)

Megoldás. Tételezzük fel, hogy léteznek a feladat feltételeit teljesítő valós számok. Ekkor a modulusz tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} |x+a+b| + |x-a-b| &= |x+a+b| + |-x+a+b| \\ &\geq |x+a+b-x+a+b| \\ &= |2a+2b| = 2a+2b. \end{aligned}$$ (**2 pont**)

Hasonlóan

$$|y+b+c| + |y-b-c| \geq 2b+2c,$$ (**1 pont**)

$$|z+c+a| + |z-c-a| \geq 2a+2c.$$ (**1 pont**)

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$S = |x+a+b| + |y+b+c| + |z+c+a| + |x-a-b| + |y-b-c| + |z-c-a| \geq 4(a+b+c).$$ (**1 pont**)

Másrészt a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$S = 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) \leq 3\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = 3(a+b+c).$$ (**2 pont**)

Az előbbi két észrevétel alapján

$$3(a+b+c) \geq 4(a+b+c),$$

ami lehetetlen, mivel $a, b, c > 0$. **(1 pont)**
Tehát nem léteznek olyan x, y, z valós számok, amelyekre fennáll a kért összefüggés. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Megjegyzés. Indoklás nélküli nemleges válaszra nem jár pont.

4. feladat (10 pont)**.** Az $a_1 = 2$ számból kiindulva minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén képezzük az a_n valós számot, a következő szabály szerint:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(n+2)a_n}{3}.$$

Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}]$ összeg értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli! *(***)*

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az első $(n+1)$ szám összegére teljesül, hogy

$$\frac{(n+3)a_{n+1}}{3} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n}{3} + a_{n+1}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan következik, hogy $n \cdot a_{n+1} = (n+2) \cdot a_n$, vagyis $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**
Ezért

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{n\cdot(n-1)} a_{n-1} = \ldots = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 3}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2} a_1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

vagyis

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1,$$

tehát $a_n = n(n+1)$, mert $a_1 = 2$. **(1 pont)**
Vegyük észre, hogy minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$k^2 \leq k^2 + k < (k+1)^2, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

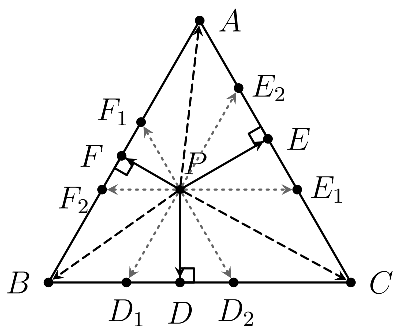
ezért $k \leq \sqrt{a_k} < k+1$, ahonnan $[\sqrt{a_k}] = k$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{2022} [\sqrt{a_k}] = \sum_{k=1}^{2022} k = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**
■

5. feladat (10 pont)**.** Az ABC egyenlő oldalú háromszög P belső pontjából merőlegeseket húzunk az oldalakra, ezek talppontjai D, E és F. Legyen X az a pont a síkban, amelyre $\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PX}$. Igazold, hogy az X pont nem függ a P pont megválasztásától! *(***)*

Megoldás. A P ponton át párhuzamosokat húzunk az ABC háromszög oldalaival, **(1 pont)**
felvesszük a $D, E, F, D_1, E_1, F_1, D_2, E_2, F_2$ pontokat az alábbi ábra szerint. (Mivel a $\overrightarrow{PX}$-ra megadott feltétel szimmetrikus, ezért mindegy, hogy a D, E, F pontokat melyik oldalakon vesszük fel.)



Az így keletkezett PD_1D_2 egyenlő oldalú háromszögben felírhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PD_2}). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PE_2}) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}). \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A kapott összefüggéseket összeadva, és a vektorokat újracsoportosítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} &= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{PD_1} + \overrightarrow{PF_2}) + (\overrightarrow{PE_1} + \overrightarrow{PD_2}) + (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PE_2})\right] \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA}), \qquad \textbf{(1 pont)}\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a paralelogramma-szabályt a PF_2BD_1, PD_2CE_1, PE_2AF_1 paralelogrammákban. **(1 pont)**

Innen következik, hogy

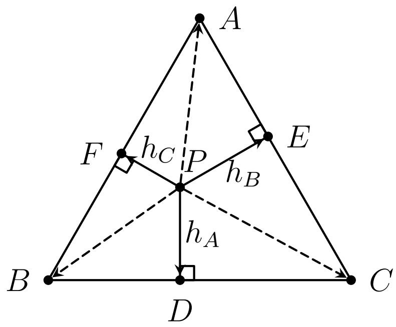
$$\overrightarrow{PX} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}), \qquad \textbf{(1 pont)}$$

vagyis X az ABC háromszög súlypontja. Tehát az X pont független a P pont megválasztásától. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Tekintsük a következő ábrát, és használjuk a jelöléseit.



Tudjuk, hogy

$$\overrightarrow{r_P} = \frac{T_{BPC}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{T_{CPA}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{T_{APB}}{T_{ABC}} \cdot \overrightarrow{r_C} = \frac{h_A \cdot \overrightarrow{r_A} + h_B \cdot \overrightarrow{r_B} + h_C \cdot \overrightarrow{r_C}}{h},$$

ahol $h = h_A + h_B + h_C$ a háromszög magassága. (**1 pont**)
Továbbá
$$BD \cdot BC = BP \cdot BC \cdot \cos(\widehat{PBD}) = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (\textbf{1 pont})$$
Tehát
$$\overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC^2} \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (\textbf{1 pont})$$
A P pont helyzetvektorának ismeretében, a számolások elvégzése után, felírhatjuk, hogy
$$\overrightarrow{r_D} = \frac{2h_C + h_B}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C} + \frac{2h_A + h_B}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A}. \quad (\textbf{1 pont})$$
Hasonlóan
$$\overrightarrow{r_E} = \frac{2h_A + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{2h_B + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{r_F} = \frac{2h_B + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{2h_C + h_A}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C}. \quad (\textbf{1 pont})$$
Ekkor
$$\begin{aligned}\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} &= \frac{4h_A + h_B + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_A} + \frac{h_A + 4h_B + h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_B} + \frac{h_A + h_B + 4h_C}{2h} \cdot \overrightarrow{r_C} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_A \cdot \overrightarrow{r_A} + h_B \cdot \overrightarrow{r_B} + h_C \cdot \overrightarrow{r_C}}{h} = \frac{3}{2} \cdot (\overrightarrow{r_G} + \overrightarrow{r_P}), \quad (\textbf{2 pont})\end{aligned}$$
ahol G az ABC háromszög súlypontja.
Tehát $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{PG}$, vagyis $\frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) = \overrightarrow{PG}$. (**1 pont**)
Ebből következik, hogy $X = G$, azaz független a P pont megválasztásától. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)
■

6. feladat (10 pont)**.** Egy táblára felírunk legalább öt nemnulla természetes számot egy sorba. Egy lépésben a két szélső szám minimumát levonjuk a szélső számokból, és hozzáadjuk a második, illetve az utolsó előtti számhoz. Ha a felírt számok között megjelenik a 0, azt letöröljük. Így egy vagy két számmal kevesebb marad a táblán. Ezt a lépést mindaddig ismételjük, amíg a táblán egy vagy két szám marad. Mitől függ az, hogy a végén egy szám marad vagy kettő? Az alábbi két példa mutatja, hogy mindkét eset lehetséges.

3	4	7	8	2	1	2
1	6	7	8	2	3	
	7	7	8	3	2	
	5	9	8	5		
		14	13			

3	15	6	8	1	1	2
1	17	6	8	1	3	
	18	6	8	2	2	
	16	8	8	4		
	12	12	12			
		36				

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. A megoldás kulcsötlete az, hogy amennyiben a sorban levő számokat tömegeknek fogjuk fel, a rendszer tömegközéppontja nem változik az átalakítások során, tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont egész szám. A formális leírás a következő: ha a számok rendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, és tekintjük az $S = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_n$ összeget, akkor ez az összeg nem változik. Valóban, egy lépés elvégzése után vagy az
$$S' = 1 \cdot (x_1 - x_n) + 2 \cdot (x_2 + x_n) + 3 \cdot x_3 + \ldots + (n-1) \cdot (x_{n-1} + x_n) = S$$

összeget kapjuk, ha az utolsó szám volt a kisebb; vagy az

$$S'' = 2 \cdot (x_2 + x_1) + 3 \cdot x_3 + \ldots + (n-1) \cdot (x_{n-1} + x_1) + n \cdot (x_n - x_1) = S$$

összeget kapjuk, ha az első szám volt a kisebb (egyenlőség esetén mindegy). (**4 pont**)
Hasonló meggondolás alapján a számok

$$S_1 = x_1 + \ldots + x_n$$

összege sem változik lépésről lépésre. (**3 pont**)
Így a tömegközéppont, vagyis az $\frac{S}{S_1}$ arány invariáns. Ha a végén egy szám marad (a k-ik oszlopban, az első sorhoz viszonyítva), akkor a tömegközéppont $\frac{S}{S_1} = \frac{k \cdot S_1}{S_1} = k$. Ha a végén két szám marad, ezek x és y (a k-ik, illetve $(k+1)$-ik oszlopban), akkor a tömegközéppont

$$\frac{kx + (k+1)y}{x+y} = k + \frac{y}{x+y},$$

ami nem egész szám, mert x és y nemnulla természetes számok. Tehát pontosan akkor marad egy szám a végén, ha a tömegközéppont, azaz $\frac{S}{S_1}$ egy egész szám. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■