XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

IX. osztály

1. feladat. Legyen E az $ABCD$ téglalap AB oldalának egy belső pontja és $\{F\} = AC \cap DE$. Ha az AFD háromszög területe $5\,\mathrm{cm}^2$, az AFE háromszögé pedig $4\,\mathrm{cm}^2$, számítsd ki az $EBCF$ négyszög területét!

2. feladat. Legyen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a természetes számok halmaza. Bizonyítsd be, hogy

a) a $\{6^x + 6^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \neq y\}$ halmaz egyetlen eleme sem négyzetszám;

b) a $\{3^x + 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \neq y\}$ halmazban végtelen sok négyzetszám található!

3. feladat. Hány olyan (x, y) pozitív egészekből alkotott számpár létezik, amelyek esetén

$$xy - x - y^3 = 2024?$$

4. feladat. Egy osztályban a tanulók felváltva pozitív egész számokat mondanak. A szabály az, hogy mindig n-nel nagyobb számot kell mondani, mint a legutoljára elhangzott szám, ahol $n > 0$ egy rögzített természetes szám. Eddig összesen 10 szám hangzott el, amelyek között pontosan egy összetett van, ez pedig a 35. Melyik szám hangozhat el tizenegyediknek?

5. feladat. Az ABC háromszögben az A csúcsnál $40°$-os, a B csúcsnál $20°$-os szög van. A háromszög C csúcsából induló belső szögfelező tartóegyenesén felveszünk egy D pontot, amelyre $AD = AB$. Mekkorák lehetnek az ABD háromszög szögei?

6. feladat. Legfeljebb hány bástyát lehet feltenni egy $3n \times 3n$ egységnégyzetből álló négyzet alakú táblára úgy, hogy bármely bástya legfeljebb egy másikkal legyen ütésben? (Két bástya akkor van ütésben, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban helyezkednek el.)

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok általánosítására, illetve az első helyes megoldástól lényegesen különböző további megoldásokra feladatonként maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.