XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

XII. osztály

1. feladat. Hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amelynek az átlói egyenlő hosszúak?

2. feladat. Két azonos sugarú egy pontban érintkező gömböt elmetszünk egy síkkal. A keletkezett metszetek olyan körök, amelyek sugarai 1 cm, illetve 2 cm, és a középpontjaik közötti távolság 7 cm. Határozd meg a gömbök sugarát!

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^3 + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^3 = 3^5.$$

4. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjaira teljesül, hogy

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{3} \quad \text{és} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n a_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

a) Igazold, hogy $a_{n+1}^2 - a_n^2 > \frac{1}{2}$, minden $n \geq 1$ esetén!

b) Igazold, hogy $1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 2a_n$, minden $n \geq 2$ esetén!

5. feladat. Az alábbi ábra minden sorának szélein 1-es áll, a közbeeső számokat pedig úgy képeztük, hogy a felette átlósan elhelyezkedő két szomszédos szám összegéhez 1-et adtunk.

a) Határozd meg az n-edik sorban lévő számok összegét, minden $n \geq 1$ esetén!

b) Határozd meg az n-edik sorban lévő k-adik számot, minden $n \geq 1$ és $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 11 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 19 & & 19 & & 9 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

6. feladat. Adott két darab 2024 egység kerületű kör. Az első körön felveszünk 2024 tetszőleges pontot, a második körön pedig megjelölünk tetszőleges számú ívet úgy, hogy együttes hosszuk kisebb legyen mint 1. Rá lehet-e helyezni az első kört a másodikra úgy, hogy az első kör egyik kijelölt pontja se essen a második kör valamely kijelölt ívére, viszont a két kör teljesen fedje egymást?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok általánosítására, illetve az első helyes megoldástól lényegesen különböző további megoldásokra feladatonként maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.