Országos Magyar Matematikaolimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
X. osztály

1. Feladat (10 pont)

a) Tudva, hogy $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ca)$, $z=\log_c(ab)$, $a, b, c\in(0,1)\cup(1,\infty)$, igazold, hogy $x+y+z+2=x\cdot y\cdot z$.

b) Adj példát olyan a, b és c páronként különböző természetes számokra, amelyekre az x, y és z is természetes számok!

2. Feladat (10 pont)

Legyen $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Igazold, hogy $\omega=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha $|z|=1$.

3. Feladat (10 pont)

Az ABC háromszögben $\dfrac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ és a C szög mértéke 60°.

a) Igazold, hogy $1+tgAtgB=0$.

b) Számítsd ki az A és a B szög mértékét!

4. Feladat (10 pont)

Oldd meg a $2^{[4x-1]}=\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.