XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

XII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amelynek az átlói egyenlő hosszúak?

Szabó Magda, Szabadka

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Négyzetben, illetve szabályos ötszögben az átlók azonos hosszúságúak, tehát az adott tulajdonsággal rendelkező sokszög lehet négyoldalú és lehet ötoldalú. (**3 pont**)
A továbbiakban a lehetetlenre való visszavezetés módszerével igazoljuk, hogy $n \geq 6$ esetén nem létezik olyan n oldalú konvex sokszög, amelyben minden átló ugyanolyan hosszú lenne. Jelölje a sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és tegyük fel, hogy az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögben az átlók azonos hosszúságúak. Mivel a sokszög konvex és $n \geq 6$, az $A_1A_2A_4A_5$ négyszög konvex és az $A_1A_5, A_2A_4, A_1A_4, A_2A_5$ szakaszok az eredeti sokszögben átlók és létezik az $\{X\} = A_1A_4 \cap A_2A_5$ metszéspont. (**2 pont**)
A feltételezés alapján az $A_1A_5, A_2A_4, A_1A_4, A_2A_5$ szakaszok azonos hosszúságúak, tehát

$$A_1A_4 + A_2A_5 = A_1A_5 + A_2A_4.$$

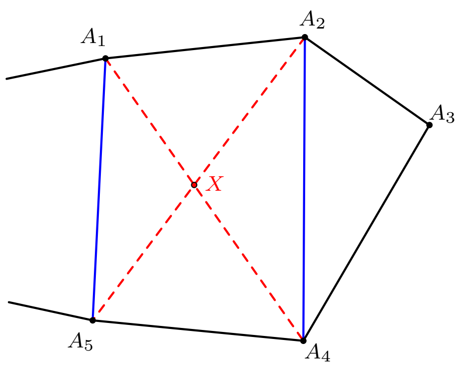
Másrészt az A_1XA_5, illetve A_2XA_4 háromszögekben a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$A_1X + XA_5 > A_1A_5 \quad \text{és} \quad A_2X + XA_4 > A_2A_4,$$

tehát

$$A_1A_4 + A_2A_5 > A_1A_5 + A_2A_4.$$

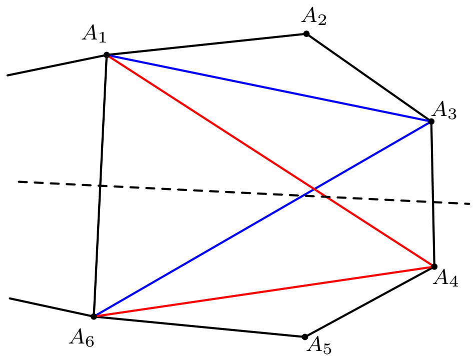
Ez ellentmondás, tehát $n \geq 6$ esetén nem létezik olyan n oldalú konvex sokszög, amelyben minden átló ugyanolyan hosszú. (**4 pont**)



■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Négyzetben, illetve szabályos ötszögben az átlók azonos hosszúságúak, tehát az adott tulajdonsággal rendelkező sokszög lehet négyoldalú és lehet ötoldalú. (**3 pont**)
A továbbiakban a lehetetlenre való visszavezetés módszerével igazoljuk, hogy $n \geq 6$ esetén nem létezik olyan n oldalú konvex sokszög, amelyben minden átló ugyanolyan hosszú. Jelölje a sokszög csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_n$ és tegyük fel, hogy az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögben az átlók azonos hosszúságúak. Mivel a sokszög konvex és $n \geq 6$, az $A_1A_3A_4A_6$ négyszög konvex. Másrészt az $A_1A_3, A_3A_6, A_1A_4, A_4A_6$

szakaszok az eredeti sokszögben átlók, tehát a feltétel alapján azonos hosszúságúak. Ez alapján $A_1A_3 = A_3A_6$ és $A_1A_4 = A_4A_6$, tehát A_3 és A_4 rajta van az A_1A_6 szakasz felező merőlegesén. Így viszont az A_3 és A_4 közül az A_1A_6-hoz közelebb eső pont a többi három által meghatározott háromszög belsejében van, vagyis $A_1A_3A_4A_6$ nem lehet konvex négyszög. **(6 pont)**



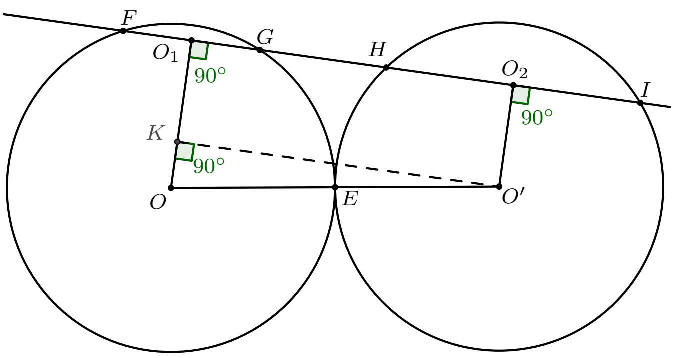
■

2. feladat (10 pont)**.** Két azonos sugarú egy pontban érintkező gömböt elmetszünk egy síkkal. A keletkezett metszetek olyan körök, amelyek sugarai 1 cm, illetve 2 cm, és a középpontjaik közötti távolság 7 cm. Határozd meg a gömbök sugarát!

Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük a két gömböt elmetsző síkot α-val, a két gömb középpontját O, illetve O'-tel. Tekintjük azt a síkmetszetet, amely áthalad az eredeti két gömb középpontján és merőleges az α síkra. Ez a metszet tartalmazni fogja a két körnek az O_1, illetve O_2 középpontját és az eredeti gömbökből főköröket metsz ki. **(2 pont)**
Ha FG és HI azok a gömböknek azok a húrjai, amelyek az előbbi metszetben és az α síkban is benne vannak (lásd az ábrát), akkor a feladat adatai alapján

$$O_1F = O_1G = 1, \quad O_2H = O_2I = 2, \quad O_1O_2 = 7. \qquad \textbf{(2 pont)}$$



Ha a gömbök sugarát R-el jelöljük, akkor, akkor az OO_1F, illetve $O'O_2I$ derékszögű háromszögekben $OO_1 = \sqrt{R^2-1}$ és $O'O_2 = \sqrt{R^2-4}$. **(1 pont)**
Tehát ha K az O'-ből az OO_1-re bocsájtott merőleges talppontja, akkor az $OO'K$ derékszögű háromszögben

$$(2R)^2 = 7^2 + \left(\sqrt{R^2-1} - \sqrt{R^2-4}\right)^2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Négyzetre emelés és átrendezés után a

$$\sqrt{(R^2-1)(R^2-4)} = 22 - R^2 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ekvivalens alakhoz jutunk, ahonnan újabb négyzetre emelés és egyszerűsítés után adódik, hogy $R^2 = \frac{20 \cdot 24}{39}$, tehát a gömbök sugara

$$R = 4 \cdot \sqrt{\frac{30}{39}}\text{cm} \sim 3,5\text{cm}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^3 + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^3 = 3^5.$$

Kovács Béla, Szatmárnámeti

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\left(x + \frac{2x}{x-2}\right)\left(x^2 - \frac{2x^2}{x-2} + \left(\frac{2x}{x-2}\right)^2\right) = 3^5. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel

$$x + \frac{2x}{x-2} = \frac{x^2}{x-2},$$

a $t = \frac{x^2}{x-2}$ jelöléssel az egyenlet

$$t^3 - 6t^2 - 3^5 = 0$$

alakba írható. (**3 pont**)
Ennek az egyik megoldása $t = 9$ és az egyenlet

$$(t-9)(t^2 - 3t + 27) = 0$$

alakba írható. A $t^2 - 3t + 27 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása (mert $\Delta = 9 - 4 \cdot 27 < 0$), tehát az egyedüli lehetséges érték a $t = 9$. (**2 pont**)
Másrészt az

$$\frac{x^2}{x-2} = 9$$

egyenlet két megoldása az $x_1 = 3$ és az $x = 6$, tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{3, 6\}$.
(**3 pont**)

■

Megjegyzés. Ha az $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ azonosságból indulunk ki és mindkét oldalhoz hozzáadunk $3x \cdot \frac{2x}{x-2}\left(x + \frac{2x}{x-2}\right)$-t, akkor is a $t^3 - 6t^2 - 3^5 = 0$ egyenlethez jutunk a $t = \frac{x^2}{x-2}$ jelöléssel.

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Vegyük észre, hogy az $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x}{x-2}=2+\dfrac{4}{x-2}$ függvényre teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. $f(f(x))=x, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, tehát x_0 pontosan akkor megoldása az $x^3+(f(x))^3=3^5$ egyenletnek, ha $f(x_0)$ is megoldása az egyenletnek; **(2 pont)**
2. Ha $x<2$, akkor $f(x)<2$, tehát $x^3+(f(x))^3<16<3^5$. Emiatt az egyenlet valós megoldásai a $(2,\infty)$ intervallumban kell legyenek. **(2 pont)**
3. $f(4)=4$ és a $(2,4)$ intervallumot a függvény a $(4,\infty)$ intervallumba transzformálja és fordítva, tehát az 1-es észrevétel alapján elégséges megtalálni a $(4,\infty)$ intervallumban levő megoldásokat. **(2 pont)**
4. A $(4,\infty)$ intervallumon a $g(x)=x^3+(f^3(x))$ függvény szigorúan növekvő, mert

$$g'(x)=3x^2+3f^2(x)f'(x)=3x^2\left(1-\frac{16}{(x-2)^4}\right)>0.$$

(2 pont)

Tehát a $3^5=6^3+(f(6))^3$ egyenlőség miatt az egyenletnek csak az $x=6$ megoldása van a $(4,\infty)$ intervallumban és emiatt csak a 6 és a $3=f(6)$ valós megoldásai lehetségesek. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $f\colon\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^3+\left(\frac{2x}{x-2}\right)^3-3^5.$$

Mivel $f(3)=f(6)=0$, ezért $x=3$ és $x=6$ megoldások. **(3 pont)**

Vizsgáljuk az f deriváltját:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=3x^2+3\left(\frac{2x}{x-2}\right)^2\cdot\frac{2}{(x-2)^2}=3x^2\left(1-\frac{16}{(x-2)^4}\right)\\
&=\frac{3x^2}{(x-2)^4}\left((x-2)^4-2^4\right)=\frac{3x^2}{(x-2)^4}\left((x-2)^2-2^2\right)\left((x-2)^2+2^2\right)\\
&=\frac{3x^2}{(x-2)^4}(x-4)(x^2-4x+8).
\end{aligned}$$

Az f' zérushelyei 0 és 4, valamint f' pozitív a $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ halmazon és negatív a $(0,2)\cup(2,4)$ halmazon. Innen következik, hogy f növekvő a $(-\infty,0)$ és $(4,+\infty)$ intervallumokon, valamint csökkenő a $(0,2)$ és $(2,4)$ intervallumokon. **(3 pont)**

Mivel $f(0)=-3^5$, következik, hogy f-nek nincs gyöke a $(-\infty,2)$-n. Másrészt, a $(2,4$ intervallumon f szigorúan csökken, a $4,+\infty)$ intervallumon pedig szigorúan növekszik ezért ezeken az intervallumokon legfennebb egy-egy gyöke lehet, ezek a gyökök pedig az $x=3$ és $x=6$. **(3 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjaira teljesül, hogy

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{4}{3}\quad \text{és}\quad a_{n+1}=\sqrt{1+a_na_{n-1}},\quad \forall n\geq 2.$$

a) Igazold, hogy $a_{n+1}^2-a_n^2>\dfrac{1}{2}$, minden $n\geq 1$ esetén!

b) Igazold, hogy $1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>2a_n$, minden $n\geq 2$ esetén!

Vistan Laura, Kassa
Kekeňák Tamás, Kassa

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
a) Teljes indukció segítségével igazoljuk, hogy minden $n\geq 1$ természetes számra igaz, hogy:

$$a_{n+1}^2-a_n^2>\frac{1}{2}.$$

$n=1$ és $n=2$-re a feltétel igaz. Tegyük fel, hogy valamilyen m-re igaz az

$$a_{m+1}^2-a_m^2>\frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség. Bizonyítjuk, hogy $m+2$-re is igaz az állítás, vagyis

$$a_{m+3}^2-a_{m+2}^2>\frac{1}{2}.$$

A rekurzió alapján ez ekvivalens a következőkkel:

$$1+a_{m+2}\cdot a_{m+1}-1-a_{m+1}\cdot a_m>\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad a_{m+2}a_{m+1}>\frac{1}{2}+a_{m+1}\cdot a_m.$$

Négyzetre emelve (mindkét oldal pozitív) a rekurzió alapján további ekvivalens átalakításokat végzünk:

$$\begin{aligned}a_{m+2}^2\,a_{m+1}^2&>\frac{1}{4}+a_{m+1}\,a_m+a_{m+1}^2\,a_m^2,\\(1+a_{m+1}\,a_m)a_{m+1}^2&>\frac{1}{4}+a_{m+1}\,a_m+a_{m+1}^2\,a_m^2,\\a_{m+1}^2+a_{m+1}^3\,a_m&>\frac{1}{4}+a_{m+1}\,a_m+a_{m+1}^2\,a_m^2,\\a_{m+1}^2a_m(a_{m+1}-a_m)+a_{m+1}^2-a_{m+1}\,a_m-\frac{1}{4}&>0.\end{aligned}$$ (**2 pont**)

Ahhoz, hogy ezt belássuk a következő két észrevételre van szükségünk:
1. a rekurzió alapján a sorozat minden tagja pozitív;
2. a sorozat növekvő mivel $a_{m+2}^2-a_{m+1}^2=a_{m+1}a_m-a_ma_{m-1}=a_m(a_{m+1}-a_{m-1})$, tehát ha $a_1<a_2<\ldots a_{m-1}<a_m<a_{m+1}$, akkor $a_{m+2}>a_{m+1}$, tehát a matematikai indukció elve alapján a sorozat szigorúan növekvő.
Ez alapján elégséges igazolni, hogy

$$a_{m+1}^2-a_{m+1}\,a_m-\frac{1}{4}\geq 0.$$

Másrészt az indukciós feltevés alapján

$$a_{m+1}^2\geq\frac{1}{2}a_{m+1}^2+\frac{1}{2}a_m^2+\frac{1}{4}\geq a_{m+1}a_m+\frac{1}{4},$$

tehát a matematikai indukció elve alapján a bizonyítás teljes. (**2 pont**)

b) Az egyenlőtlenséget teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$ esetén

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{11}{4} > \frac{8}{3} = 2a_2,$$

tehát ebben az esetben teljesül az egyenlőtlenség. **(1 pont)**
Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz valamilyen n-re, tehát igaz, hogy:

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} > 2a_n.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadunk $\frac{1}{a_{n+1}}$-et:

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} > 2a_n + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Így az indukciós lépéshez elégséges megmutatnunk, hogy:

$$2a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \geq 2a_{n+1}.$$ **(2 pont)**

Ezt az egyenlőtlenséget ekvivalens lépésekkel (kihasználva, hogy a sorozat tagjai pozitív számok) átalakítva rendre kapjuk, hogy:

$$2a_n \cdot a_{n+1} + 1 \geq 2a_{n+1}^2$$
$$2a_n\ a_{n+1} + 2 \geq 2a_{n+1}^2 + 1$$
$$2(a_n a_{n+1} + 1) \geq 2a_{n+1}^2 + 1$$
$$2a_{n+2}^2 \geq 2a_{n+1}^2 + 1$$
$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Ez viszont az a) alpont alapján teljesül, tehát a matematikai indukció elve alapján a kért egyenlőtlenség igaz minden $n \geq 1$ természetes számra. **(2 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Első lépésben a matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagja 1-nél nem kisebb és a sorozat növekvő. Valóban, ha egy rögzített n esetén minden $1 \leq k \leq n$-re teljesül az $a_k \geq 1$ egyenlőtlenség, akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n a_{n+1}} \geq \sqrt{1+1} > 1.$$

Tehát mivel $a_1 \geq 1$ és $a_2 \geq 1$, a matematikai indukció elve alapján következik, hogy $a_n \geq 1$, bármely $n \geq 1$ esetén. **(1 pont)**
Hasonlóan ha $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n a_{n-1}} > \sqrt{1 + a_{n-1}a_{n-2}} = a_n,$$

tehát az $a_1 < a_2 < a_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}$ egyenlőtlenségek és a matematikai indukció elve alapján következik, hogy a sorozat szigorúan növekvő. **(1 pont)**

a) A matematikai indukció módszerét alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy az

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség teljesül minden $1 \leq k \leq n$ esetén és igazoljuk, hogy teljesül $n+1$-re is. A rekurzió alapján az

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$a_n^2 - \frac{1}{2} \leq a_n a_{n-1}$$

vagyis az

$$a_n - \frac{1}{2a_n} \leq a_{n-1}$$

egyenlőtlenséggel. Mivel a sorozat tagjai 1-nél nem kisebbek, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, tehát ez ekvivalens az

$$a_n^2 + \frac{1}{4a_n^2} - 1 \leq a_{n-1}^2$$

vagyis az

$$a_{n-1}a_{n-2} + \frac{1}{4a_n^2} \leq a_{n-1}^2$$

Másrészt az indukciós feltevés és a sorozat monotonitása alapján írhatjuk, hogy

$$a_{n-1}a_{n-2} + \frac{1}{4a_n^2} \leq a_{n-1}a_{n-2} + \frac{1}{2(2a_{n-1}^2+1)} \leq a_{n-1}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2(2a_{n-1}^2+1)},$$

tehát elégséges igazolni, hogy

$$a_{n-1}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2(2a_{n-1}^2+1)} \leq a_{n-1}^2.$$

Igazoljuk, hogy ez teljesül. Pontosabban minden $t \geq 1$ esetén igaz, hogy

$$t\sqrt{t^2 - \frac{1}{2}} \leq t^2 - \frac{1}{2(2t^2+1)}.$$

Ez az alábbi ekvivalens alakokba írható

$$t^4 - \frac{t^2}{2} \leq t^4 - \frac{t^2}{2t^2+1} + \frac{1}{4(2t^2+1)^2}.$$

$$\frac{t^2}{2t^2+1} \leq \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4(2t^2+1)^2}.$$

Ez igaz minden $t \geq 1$ esetén, mert

$$\frac{t^2}{2t^2+1} \leq \frac{t^2}{2} < \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4(2t^2+1)^2}.$$

(2 pont)

b) A rekurzió alapján írhatjuk, hogy

$$a_{n+1}^2 = 1 + a_n a_{n-1} \leq 1 + \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2}{2},$$

tehát az $(a_n^2)_{n\geq 1}$ sorozat majorálható azzal az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozattal, amelyre teljesül az

$$2x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + 2$$

lineáris és inhomogén rekurzió. Ennek egy sajátos megoldása a $\frac{2}{3}n$ sorozat, a hozzárendelt homogén rekurzió általános megoldása $c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ezért a sorozat általános tagja $x_n = \frac{2}{3}n + c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Az $x_1 = 1, x_2 = \frac{16}{9}$ értékekből indulva $c_1 = \frac{11}{27}$ és $c_2 = \frac{4}{27}$ adódik, tehát

$$a_n^2 \leq \frac{2}{3}n + \frac{11}{27} + \frac{4}{27}\left(-\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{3}(n+1).$$

(**2 pont**)

Megjegyzés. Ez az egyenlőtlenség direktben is igazolható a matematikai indukció módszerével.

Ez alapján írhatjuk, hogy

$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} > 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Ugyanakkor az

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

egyenlőtlenséget összegezve $2 \leq k \leq n$-re azt kapjuk, hogy

$$1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) > 1 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}).$$

Így elégséges igazolni, hogy

$$1 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) > 2\sqrt{\frac{2}{3}(n+1)}.$$

Ez $n \geq 5$ esetén teljesül és $n \in \{2, 3, 4\}$ esetén a kitűzött egyenlőtlenség direkt számolással igazolható. Ezeket a számolásokat nem részletezzük. (**3 pont**)

■

5. feladat (10 pont)**.** Az alábbi ábra minden sorának szélein 1-es áll, a közbeeső számokat pedig úgy képeztük, hogy a felette átlósan elhelyezkedő két szomszédos szám összegéhez 1-et adtunk.

a) Határozd meg az n-edik sorban lévő számok összegét, minden $n \geq 1$ esetén!

b) Határozd meg az n-edik sorban lévő k-adik számot, minden $n \geq 1$ és $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 11 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 19 & & 19 & & 9 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
a) Jelölje S_n a táblázat n-edik sorában az elemek összegét. Látható, hogy $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 5, S_4 = 12, S_5 = 27$, tehát a növekmények 1-gyel kisebbek, mint a kettőhatványok. Ez alapján megsejthető, hogy

$$S_n = 2^n - n. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ezt matematikai indukcióval igazoljuk. $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ esetén láttuk, hogy a tulajdonság igaz. Másrészt az n-edik sorban n elem van, tehát a következő sor képzése során $(n-1)$-szer adunk 1-et hozzá és az n-edik sor minden eleme az $(n+1)$-edik sor két elemében számolódik bele, tehát

$$S_{n+1} = 2S_n + (n-1), \forall n \geq 1.$$

Ez alapján, ha $S_n = 2^n - n$, akkor $S_{n+1} = 2(2^n - n) + n - 1 = 2^{n+1} - (n+1)$, tehát a matematikai indukció elve alapján

$$S_n = 2^n - n, \forall n \geq 1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b) Az n-edik sor k-adik elemét jelöljük $d_{n,k}$-val. A táblázat képzési szabálya alapján

$$d_{n,k} = d_{n-1,k-1} + d_{n-1,k} + 1,$$

tehát mindkét oldalhoz 1-et adva

$$(d_{n,k} + 1) = (d_{n-1,k-1} + 1) + (d_{n-1,k} + 1).$$

Eszerint az $x_{n,k} = d_{n,k} + 1$ sorozatra ugyanaz a rekurzió teljesül, mint a kombinatorikus együtthatókra, csak az $x_{n,1} = x_{n,n} = 2$ értékek vannak a háromszög két oldalán. Az $x_{n,k}$ értékeket az alábbi táblázat tartalmazza:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 2 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 2 & & 4 & & 2 & & & \\
 & & 2 & & 6 & & 6 & & 2 & & \\
 & 2 & & 8 & & 12 & & 8 & & 2 & \\
2 & & 10 & & 20 & & 20 & & 10 & & 2 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Ezt a Pascal-háromszög elemeivel összsehasonlítva láthatjuk, hogy $x_{n,k} = 2 \cdot C_{n-1}^{k-1}, \forall n \geq 1$ és $\forall 1 \leq k \leq n$. Ezt n szerinti matematikai indukcióval igazolhatjuk.[1] (**2 pont**)
Valóban, a táblázat alapján látható, hogy $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ esetén teljesül. Másrészt ha egy rögzített n-re igaz, akkor a rekurzió alapján

$$x_{n+1,k} = x_{n,k-1} + x_{n,k} = 2C_{n-1}^{k-2} + 2C_{n-1}^{k-1} = 2C_n^{k-1},$$

vagyis teljesül n-re és minden $k \in \{1,2,3,\ldots,n\}$. $k = n+1$ esetén is látható, hogy az állítás igaz. Így a matematikai indukció elve alapján $x_{n,k} = 2 \cdot C_{n-1}^{k-1}, \forall n \geq 1$ és $\forall 1 \leq k \leq n$, tehát $d_{n,k} = 2 \cdot C_{n-1}^{k-1} - 1, \forall n \geq 1$ és $\forall 1 \leq k \leq n$. (**3 pont**)
■

[1] C_n^k-val a kombinációs együtthatókat jelöljük, tehát $C_n^k = \binom{n}{k}$

Megjegyzés. Vonjuk ki a feladatban szereplő táblázat elemeiből a Pascal-háromszög megfelelő elemeit:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 11 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 19 & & 19 & & 9 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad - \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 2 & & 2 & & 0 & & \\
 & 0 & & 3 & & 5 & & 3 & & 0 & \\
0 & & 4 & & 9 & & 9 & & 4 & & 0 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Észrevehető, hogy a táblázat minden eleméhez 1-et hozzáadva visszakapjuk az eredeti Pascal-háromszöget, tehát

$$d_{n,k} - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1} - 1,$$

vagyis megkapjuk a $d_{n,k} = 2C_{n-1}^{k-1} - 1, \forall n \geq 1, 1 \leq k \leq n$ képletet.

6. feladat (10 pont)**.** Adott két darab 2024 egység kerületű kör. Az első körön felveszünk 2024 tetszőleges pontot, a második körön pedig megjelölünk tetszőleges számú ívet úgy, hogy együttes hosszuk kisebb legyen mint 1. Rá lehet-e helyezni az első kört a másodikra úgy, hogy az első kör egyik kijelölt pontja se essen a második kör valamely kijelölt ívére, viszont a két kör teljesen fedje egymást?

Béres Zoltán, Palics

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Rögzítsük a második kört, majd helyezzük rá valahogyan az elsőt (úgy, hogy az teljesen fedje a másodikat). Az első kör kijelölt pontjai közül válasszunk ki egy P pontot és forgassuk tejesen körbe az első kört. A forgatás alatt, ha az első kör valamelyik kijelölt pontja a második kör valamelyik megjelölt ívében helyezkedik el, akkor a második körön színezzük ki a P pontnak megfelelő pontot. Mivel a megjelölt ívek hosszainak összege 1-nél kisebb, így a beszínezett pontok által alkotott körívek összhossza kisebb, mint $2024 \times 1 = 2024$. Ezek alapján létezik olyan pont a második körön, ami nincs beszínezve. Ha az első kört elforgatjuk úgy, hogy a P pont ebbe a pontba kerüljön, akkor egyik kijelölt pont sem fog megjelölt körívre esni. **(9 pont)**

■