III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.
IX. osztály

1. feladat. Adott egy négyzet, amely egységnyi négyzetekre van felosztva. A bal felső sarkából kiindulva az első sor és az első oszlop mindegyik négyzetébe írjuk az 1 számot, majd a második sor és második oszlop mindegyik négyzetébe a 2 számot, felülírva az eredetileg már létező számokat. Az eljárást folytatjuk, amíg minden sor és minden oszlop négyzetei kitöltődnek valamelyik számmal. Hány egység a négyzet oldala, ha a benne levő számok összege 372?

Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. A táblázatban a számok elrendezése az alábbi:

1	2	3	$\dots$	n
2	2	3	$\dots$	n
3	3	3	$\dots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	n	n	$\dots$	n

(3 pont)

Legyen S a négyzethálóban lévő számok összege és n a négyzet oldalának hossza. Ekkor

$$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 + 7\cdot 4 + \dots + (2n-1)\cdot n \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Azt kaptuk, hogy $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = 372$, vagyis $n(n+1)(4n-1) = 2^3\cdot 3^2\cdot 31$, ahonnan $n = 8$. Tehát a négyzet oldalának hossza 8 egység. **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat.

a) Igazold, hogy $(x+2)(x^2-6x+16) \geq 32$, bármely $x \in [0,\infty)$ esetén.

b) Ha $x, y, z \in [0,\infty)$ és $x+y+z=6$, bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{3}{8}.$$

Matlap

Megoldás. Mivel

$$(x+2)(x^2-6x+16) = x^3-4x^2+4x+32 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= x(x-2)^2+32 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért ha $x \geq 0$, akkor $x(x-2)^2 \geq 0$ és így

$$(x+2)(x^2-6x+16) = x(x-2)^2 + 32 \geq 32.$$ **(2 pont)**

(1 pont)

b) Ha $x \geq 0$, akkor $x+2>0$.
Az a) alpont alapján

$$x^2-6x+16 \geq \frac{32}{x+2} \implies \frac{1}{x^2-6x+16} \leq \frac{x+2}{32}.$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{y^2-6y+16} \leq \frac{y+2}{32} \quad \text{és} \quad \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{z+2}{32}.$$ **(2 pont)**

Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket és felhasználva, hogy $x+y+z=6$, kapjuk hogy

$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{x+y+z+6}{32} = \frac{6+6}{32} = \frac{3}{8},$$

ha $x, y, z \in [0, \infty)$ és $x+y+z=6$. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:
a) $x + ([x]-2020)^{2020} = [x]$;
b) $x^2 - 6[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 9$.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. a) Tudjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, $[x] \in \mathbb{Z}$, innen következik, hogy $([x]-2020)^{2020} \in \mathbb{Z}$, ahonnan figyelembe véve az egyenlőséget következik, hogy $x \in \mathbb{Z}$, ezért $[x]=x$. **(2 pont)**

Ennek alapján az egyenlet a következőképpen alakul:

$$x + (x-2020)^{2020} = x \iff (x-2020)^{2020} = 0 \iff x = 2020.$$ **(1 pont)**

b) Használva az $[x] = a \in \mathbb{Z}$ és $\{x\} = b \in [0,1)$ jelöléseket az egyenlet a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - 6ab + 3b^2 &= 9 \\ a^2 - 4ab + 4b^2 &= 9 \\ (a-2b)^2 &= 9 \\ a - 2b &= \pm 3. \end{aligned}$$ **(2 pont)**

I. eset. Ha $a-2b=3$, akkor $a-3=2b$ és mivel $a-3 \in \mathbb{Z}$, ezért $2b \in \mathbb{Z}$. Másrészt $b \in [0,1)$, így $2b \in [0,2)$, vagyis $2b \in \{0,1\}$, ahonnan $b \in \{0, \frac{1}{2}\}$.
Ha $b=0$, akkor $a=3$, tehát $x=a+b=3$.
Ha $b=\frac{1}{2}$, akkor $a = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$, tehát $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. **(2 pont)**

II. eset. Ha $a-2b=-3$, akkor $a+3=2b$ és mivel $a+3 \in \mathbb{Z}$, ezért $2b \in \mathbb{Z}$. Másrészt $b \in [0,1)$, így $2b \in [0,2)$, vagyis $2b \in \{0,1\}$, ahonnan $b \in \{0, \frac{1}{2}\}$.
Ha $b=0$, akkor $a=-3$, tehát $x=-3$.

Ha $b = \frac{1}{2}$, akkor $a = -3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2$, tehát $x = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

$$M = \left\{3, \frac{9}{2}, -3, -\frac{3}{2}\right\}.$$ **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Az O középpontú, R sugarú körbe írt $M_1M_2M_3M_4$ négyszög esetén teljesül az

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{0}$$

feltétel.

a) Milyen négyszög az $M_1M_2M_3M_4$?

b) Tudva, hogy $M_1M_2M_3M_4$ téglalap, igazold, hogy

$$|\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_3}|^2 + |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_4}|^2 + |\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_3}|^2 + \\ + |\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_4}|^2 + |\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4}|^2 = 16R^2.$$

Tóth Csongor, Szováta
Betuker Enikő, Margitta

Megoldás. Legyen P_1 az M_1M_2 szakasz felezőpontja, P_2 pedig az M_3M_4 szakasz felezőpontja. Ekkor

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}}{2}.$$ **(1 pont)**

Figyelembe véve a $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{0}$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = -(\overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}).$$

Innen $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OP_2}$, vagyis O, P_1, P_2 kollineárisak és $OP_1 = OP_2$ **(2 pont)**

Az OM_1M_2 egyenlő szárú háromszögben OP_1 oldalfelező, így $OP_1 \perp M_1M_2$. Hasonlóan $OP_2 \perp M_3M_4$. Következik, hogy $M_1M_2 \parallel M_3M_4$. **(1 pont)**

A P_1OM_1 és P_2OM_3 háromszögben

$$OP_1 = OP_2, \quad OM_1 = OM_3, \quad \widehat{P_1} \equiv \widehat{P_2},$$

így $P_1M_1 = P_2M_3$. Tehát $M_1M_2 = M_3M_4$. **(2 pont)**

Mivel $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ és $M_1M_2 = M_3M_4$ ezért $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, és mivel $M_1M_2M_3M_4$ körbeírt négyszög, ezért $M_1M_2M_3M_4$ téglalap. **(1 pont)**

b) A következőket írhatjuk:

$$|\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}|^2 = |\overrightarrow{M_2M_1}|^2 = M_2M_1^2$$

$$\vdots$$

$$|\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4}|^2 = |\overrightarrow{M_4M_3}|^2 = M_4M_3^2$$

Összeadva az egyenlőségeket és figyelembe véve, hogy $M_1M_2M_3M_4$ téglalap kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
S &= M_2M_1^2 + M_3M_1^2 + M_4M_1^2 + M_3M_2^2 + M_4M_2^2 + M_4M_3^2 \\
&= (M_2M_1^2 + M_4M_1^2) + (M_3M_2^2 + M_4M_3^2) + M_3M_1^2 + M_4M_2^2 \\
&= M_4M_2^2 + M_4M_2^2 + M_3M_1^2 + M_4M_2^2 \\
&= 4 \cdot 4R^2 = 16R^2
\end{aligned}$$

(2 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.
X. osztály

1. feladat.
a) Bizonyítsd be, hogy a $\log_2 3 + \log_3 2$ szám egész része 2.
b) Igazold, hogy
$$\frac{\log_a x}{\log_{bc} x} + \frac{\log_b x}{\log_{ac} x} + \frac{\log_c x}{\log_{ab} x} \geq 6$$
bármely $a, b, c, x > 1$ valós szám esetén.

Matlap

Megoldás. a) Legyen $A = \log_2 3 + \log_3 2$. Mivel $\log_2 3 > 0$ és $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} > 0$, így **(1 pont)**
$$A = \log_2 3 + \log_3 2 = \log_2 3 + \frac{1}{\log_2 3} > 2.$$ **(2 pont)**

De $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$ és $\log_2 3 < \log_2 4 = 2$, így $A = \log_3 2 + \log_2 3 < 3$, tehát $A \in (2, 3)$, ahonnan $[A] = 2$. **(2 pont)**

b) Teljesülnek a következő egyenlőségek:
$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}; \quad \log_b x = \frac{1}{\log_x b}; \quad \log_c x = \frac{1}{\log_x c}$$
$$\log_{bc} x = \frac{1}{\log_x bc}; \quad \log_{ac} x = \frac{1}{\log_x ac}; \quad \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab}.$$ **(1 pont)**

Ezek alapján az adott egyenlőtlenség a következőképpen írható fel:
$$\frac{\log_x bc}{\log_x a} + \frac{\log_x ac}{\log_x b} + \frac{\log_x ab}{\log_x c} \geq 6,$$
vagyis
$$\frac{\log_x b + \log_x c}{\log_x a} + \frac{\log_x a + \log_x c}{\log_x b} + \frac{\log_x a + \log_x b}{\log_x c} \geq 6.$$ **(1 pont)**

Legyen $\log_x a = p$, $\log_x b = q$ és $\log_x c = r$, $p, q, r > 0$, mivel $a, b, c, x > 1$. Ez alapján az igazolandó egyenlőtlenség
$$\frac{q+r}{p} + \frac{p+r}{q} + \frac{p+q}{r} \geq 6 \iff \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + \left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + \left(\frac{r}{q} + \frac{q}{r}\right) \geq 6,$$ **(2 pont)**

ami igaz, mert $y + \frac{1}{y} \geq 2$, minden $y > 0$ esetén.
Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat. Adottak az $a = \sqrt[3]{22 + 10\sqrt{7}}$ és $b = \sqrt[3]{22 - 10\sqrt{7}}$ valós számok.
a) Bizonyítsd, hogy $a + b \in \mathbb{N}$.
b) Igazold, hogy $a^{2n} + b^{2n}$ osztható 8-cal, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. a) Mivel

$$a \cdot b = \sqrt[3]{22+10\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{22-10\sqrt{7}} = \sqrt[3]{-216} = -6,$$ (1 pont)

(1 pont)

legyen $x = a + b$, de $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.
Innen $x^3 = 44 - 18x$, ahonnan

(1 pont)

$$x^3 + 18x - 44 = 0$$
$$x^3 - 8 + 18x - 36 = 0$$
$$(x-2)(x^2+2x+22) = 0.$$ (1 pont)

Mivel $x^2 + 2x + 22 > 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, kapjuk, hogy $x = 2$, vagyis $a + b = 2 \in \mathbb{N}$. (1 pont)

b) A következőket írhatjuk

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \implies a^2 + b^2 = 16 \vdots 8$$
$$a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 \implies a^4 + b^4 = 23 \cdot 8 \vdots 8$$ (1 pont)

Legyen $S_n = a^{2n} + b^{2n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva a matematikai indukció módszerét igazoljuk, hogy $S_n \vdots 8$, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$-re. (1 pont)

$$P(n): \quad S_n \vdots 8, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

A fenti számítások alapján $P(1)$ és $P(2)$ igaz.

Feltételezzük, hogy $S_{k-1} \vdots 8$ és $S_k \vdots 8$, igazoljuk, hogy $S_{k+1} \vdots 8$.
Mivel

$$S_k \cdot (a^2 + b^2) = S_{k+1} + a^2b^2 \cdot S_{k-1}$$ (1 pont)

következik, hogy $S_{k+1} = (a^2+b^2)S_k - a^2b^2S_{k-1}$. Felhasználva, hogy $S_{k-1} \vdots 8$ és $S_k \vdots 8$, kapjuk, hogy $S_{k+1} \vdots 8$. Tehát $S_n \vdots 8$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. (1 pont)
Hivatalból (1 pont)

■

3. feladat. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{a^{2x}}{a^{2x} + a}$ függvény, ahol a pozitív valós szám.

a) Bizonyítsd be, hogy $f(x) + f(1-x) = 1$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Számítsd ki az $f\left(\dfrac{1}{2020}\right) + f\left(\dfrac{2}{2020}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2019}{2020}\right)$ összeget!

Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Teljesül, hogy

$$f(1-x) = \frac{a^{2(1-x)}}{a^{2(1-x)} + a} = \frac{\frac{a^2}{a^{2x}}}{\frac{a^2}{a^{2x}} + a} = \frac{a^2}{a^{2x}} \cdot \frac{a^{2x}}{a^2 + a \cdot a^{2x}} = \frac{a^2}{a(a + a^{2x})} = \frac{a}{a + a^{2x}},$$ (3 pont)

és így

$$f(x) + f(1-x) = \frac{a^{2x}}{a^{2x} + a} + \frac{a}{a^{2x} + a} = \frac{a^{2x} + a}{a^{2x} + a} = 1,$$ (2 pont)

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

b) Csoportosítva a függvényértékeket és alkalmazva az a) pont eredményeit, a következőket kapjuk:

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(1-\frac{1}{2020}\right)=f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=1$$
$$f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(1-\frac{2}{2020}\right)=f\left(\frac{2}{2020}\right)+f\left(\frac{2018}{2020}\right)=1$$
$$\vdots$$
$$f\left(\frac{1009}{2020}\right)+f\left(1-\frac{1009}{2020}\right)=f\left(\frac{1009}{2020}\right)+f\left(\frac{1011}{2020}\right)=1, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

valamint

$$f\left(\frac{1010}{2020}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a^{2\cdot\frac{1}{2}}}{a^{2\cdot\frac{1}{2}}+a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{1009 darab 1-es}}+\frac{1}{2}=1009+\frac{1}{2}=\frac{2019}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat.

a) Adottak a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ számok úgy, hogy $|z_1|=|z_2|=1$ és $\lambda z_1 z_2 \neq -1$, ahol $\lambda \in \{-1,1\}$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda z_1 z_2}\in\mathbb{R}.$$

b) Igazold, hogy bármely a valós szám esetén léteznek olyan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ komplex számok, amelyekre $|z_1|=|z_2|$, valamint $\lambda z_1 z_2 \neq -1$ úgy, hogy az a szám felírható legyen

$$\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda z_1 z_2}$$

alakban, ahol $\lambda \in \{-1,1\}$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ismert, hogy $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, illetve, ha $z=\overline{z}$, akkor $z\in\mathbb{R}$. **(2 pont)**

a) Ha $\lambda=1$

$$\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1z_2}}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1},$$

ahonnan $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$. **(2 pont)**

Ha $\lambda=-1$, akkor

$$\overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{1-\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}{1-\frac{1}{z_1z_2}}=\frac{z_2-z_1}{z_1z_2-1}=\frac{z_1-z_2}{1-z_1z_2},$$

ahonnan $\dfrac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} \in \mathbb{R}$. **(2 pont)**

b) I. eset: $\lambda = 1$. Tekintsük a

$$z_1 = i \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{1+ai}{a+i}$$

számokat, ahol $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $|z_1| = |z_2| = 1$ és $z_1 \cdot z_2 = \frac{i-a}{a+i} \neq -1$.

Innen következik, hogy

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2} = \frac{i + \frac{1+ai}{a+i}}{1 + \frac{i-a}{a+i}} = \frac{ai - 1 + 1 + ai}{a + i + i - a} = \frac{2ai}{2i} = a \in \mathbb{R}.$$ **(2 pont)**

II. eset: $\lambda = -1$. Ha

$$z_1 = i \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{a-i}{ai-1},$$

akkor $|z_1| = |z_2| = 1$ és $z_1 \cdot z_2 = \frac{ai+1}{ai-1} \neq 1$, valamint

$$\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} = \frac{i - \frac{a-i}{ai-1}}{1 - \frac{ai+1}{ai-1}} = \frac{-a - i - a + i}{ai - 1 - ai - 1} = \frac{-2a}{-2} = a \in \mathbb{R}.$$ **(1 pont)**

Hivatalból

(1 pont)

■

ommo EMMV

Centrul Național
de Evaluare și Examinare

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Jelöljük a_n-nel az A^n mátrix elemeinek összegét, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy $a_n = 4n^2 + 5n + 3$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

b) Határozd meg az $\alpha \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} - \alpha n) = \frac{5}{4}.$$

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Kiszámoljuk az első néhány hatványt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 14 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 33 & 12 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 60 & 16 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Sejtés: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix}$ **(2 pont)**

Teljesül, hogy

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 4n^2 - n + 8n + 3 & 4n+4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 4(n+1)^2 - (n+1) & 4(n+1) & 1 \end{pmatrix}$$

A matematikai indukció alapján következik, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 4n^2 - n & 4n & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{a_n} - \alpha n) = \lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} - \alpha \right) \overset{\infty(2-\alpha)}{=} \begin{cases} \infty & \text{ha } \alpha < 2 \\ -\infty & \text{ha } \alpha > 2 \\ \infty \cdot 0 & \text{ha } \alpha = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+3}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{4n^2+5n+3}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+2}=\frac{5}{4}.$$ **(1 pont)**

(1 pont)

Tehát $\alpha=2$.

(1 pont)

Hivatalból

■

2. feladat. Adott az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgy, hogy $a_0>0$ és

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n^2+a_n+1},$$

bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén.

a) Mutasd ki, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan növekvő és nem korlátos!

b) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

c) Számítsd ki: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n}$ értékét!

Matlap

Megoldás. a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n^2+a_n+1}=\frac{1}{\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}>0$, bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén, tehát az (a_n) sorozat szigorúan növekvő.

(2 pont)

Feltételezzük, hogy a sorozat korlátos. Mivel szigorúan növekvő is, a sorozat konvergens, vagyis létezik $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l\in\mathbb{R}$. Határértékre térve a rekurziós összefüggésben az $l=l+\frac{1}{l^2+l+1}$ összefüggéshez jutunk, ahonnan az $\frac{1}{l^2+l+1}=0$ bármely $l\in\mathbb{R}$ esetén hamis egyenlőséget kapjuk. Tehát a feltételezésünk hamis volt, vagyis az (a_n) sorozat nem korlátos. **(2 pont)**

b) Mivel az (a_n) sorozat szigorúan növekvő és nem korlátos, a határértéke $+\infty$. **(1 pont)**

A rekurziós összefüggés mindkét oldalát elosztjuk $a_n>0$-val, így az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{a_n^3+a_n^2+a_n}$$

összefüggést kapjuk. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^3+a_n^2+a_n}=0$, így a fenti kifejezésben határértékre térve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^3+a_n^2+a_n}=1+0=1.$$ **(1 pont)**

c) Kiszámítjuk a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^3-a_n^3}{(n+1)-n}$ határértéket.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^3-a_n^3)&=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2+a_n+1}(a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n+a_n^2)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\frac{a_{n+1}}{a_n}+1}{1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}}=\frac{1+1+1}{1+0+0}=3.\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Mivel a $b_n = n$ sorozat szigorúan növekvő és nem korlátos és létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1-n} = 3$, a Cesaro-Stolz kritérium alapján az $\frac{a_n^3}{n}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{n} = 3$. **(1 pont)**

(1 pont)

Hivatalból ■

3. feladat. Két játékos a következő játékot játssza: egy 5×5-ös „sakktábla" minden mezőjére felváltva, egy-egy számkártyát helyeznek el az 1-től 25-ig számozott számkártyák közül. A játék akkor ér véget, mikor mind a 25 számkártyát elhelyezték a táblán. A játékot a kezdő játékos nyeri meg, ha a tábla négy szimmetriatengelyének mindegyikén az őket fedő számkártyák összege (ez négy darab összeget jelent) osztható 13-mal, ellenkező esetben a második játékos nyer. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája és mi a nyerőstratégia?

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. A tábla szimmetriaközéppontjában lévő mezőt nevezzük a tábla centrumának. A többi mezőt a centrumra vonatkozóan 12 darab szimmetrikus mezőpárba lehet rendezni.

Az első játékosnak van nyerő stratégiája és ez a következő: a 13-as számú kártyát a centrumba helyezi. **(2 pont)**

A megmaradt kártyákat olyan $(i, 26-i)$ párokba lehet rendezni, amelyek összege 26. Így, ha a második játékos letesz egy i kártyát a tábla bármilyen mezőjére, az első játékos ennek a szimmetrikusára helyezi a $26-i$ kártyát. A játék végén a 4 szimmetriatengely bármelyike mentén a 13 és két $(i, 26-i)$, illetve $(j, 26-j)$ alakú pár áll, amelyek összege $13 + 2 \cdot 26$, ami osztható 13-mal. **(7 pont)**

Hivatalból **(1 pont)** ■

4. feladat. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ két olyan mátrix, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$AB = BA, \quad \det(A^2 - B^2) > 0, \quad \det A > 0 \quad \text{és} \quad \det B > 0.$$

Igazold, hogy

a) $\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det A + \det B)$;

b) $\dfrac{1}{\det(A+B)} + \dfrac{1}{\det(A-B)} \geq \dfrac{2}{\det A + \det B}$.

Ványi Emese, Szatmárnémeti

Megoldás. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ekkor

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix},$$

innen pedig

$$\begin{aligned} \det(A+B) + \det(A-B) &= a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} \\ &\quad + a_{11}a_{22} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}b_{21} + b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} \\ &= 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= 2(\det(A) + \det(B)) \end{aligned}$$

(5 pont)

b) Mivel $AB = BA$ ezért $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ és

$$\det(A^2 - B^2) = \det((A+B)(A-B)) = \det(A+B)\det(A-B).$$ **(1 pont)**

De $\det A > 0$ és $\det B > 0$, így az a) alpont alapján

$$\det(A+B) + \det(A-B) = 2(\det A + \det B) > 0$$

$$\det(A+B) \cdot \det(A-B) = \det(A^2 - B^2) > 0,$$

ahonnan $\det(A+B) > 0$ és $\det(A-B) > 0$. **(1 pont)**

Felírjuk a középarányosok közti egyenlőtlenséget a $\det(A+B)$ és $\det(A-B)$ pozitív számokra:

$$\frac{2}{\frac{1}{\det(A+B)} + \frac{1}{\det(A-B)}} \leq \frac{\det(A+B) + \det(A-B)}{2} = \det(A) + \det(B),$$

innen következik, hogy

$$\frac{1}{\det(A+B)} + \frac{1}{\det(A-B)} \geq \frac{2}{\det A + \det B}.$$ **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.
XII. osztály

1. feladat. Adott az $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \ln^2 x$ függvény, ahol $n \in \mathbb{N}$.

a) Határozd meg f_n-nek azt az F_n primitív függvényét, amelyre $F_n(1) = 0$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n(e)}{e^n}$ határértéket!

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás.

a) Mivel f_n folytonos a $(0,+\infty)$ intervallumon, ezért létezik az F_n primitív függvénye. **(1 pont)**
A következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\int f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot \ln^2 x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - \frac{2}{n+1}\cdot \int x^n \cdot \ln x\,\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2 pont)}\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - \frac{2}{n+1}\cdot \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot \ln x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - \frac{2}{n+1}\cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot \ln x + \frac{2}{(n+1)^2}\cdot \int x^n\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot \ln x + \frac{2}{(n+1)^2}\cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot \ln x + 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3} + c. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Mivel $F_n(1) = 0$, ezért $F_n(1) = \frac{2}{(n+1)^3} + c = 0$, tehát $c = \frac{-2}{(n+1)^3}$. **(1 pont)**
A keresett primitív tehát

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln^2 x - 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot \ln x + 2\cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^3}.$$

b) Írhatjuk, hogy $F_n(e) = \frac{e^{n+1}}{n+1} - 2\cdot \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + 2\cdot \frac{e^{n+1}}{(n+1)^3} - \frac{2}{(n+1)^3}$, ahonnan **(1 pont)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n(e)}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{n+1} - \frac{2\cdot e}{(n+1)^2} + \frac{2\cdot e}{(n+1)^3} - \frac{2}{e^n(n+1)^3}\right) = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

(1 pont)

Hivatalból ∎

2. feladat. Értelmezzük a $G = (0,1)$ halmazon a következő műveletet

$$x * y = \frac{xy}{2xy + 1 - (x+y)},$$

bármely $x, y \in G$ estén.

a) Igazold, hogy a G halmaz zárt a „$*$” műveletre nézve!

b) Határozd meg az $f\colon G \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{ax}{bx-b}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ képlettel értelmezett függvényt úgy, hogy teljesüljön

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y),$$

bármely $x, y \in G$ esetén!

c) Számítsd ki az $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{n+1}$ kifejezés értékét, tudva azt, hogy a „$*$” művelet asszociatív!

Cziprok András, Szatmárnémeti
Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás.

a) Mivel $x, y \in (0,1)$, ezért $xy \in (0,1)$, $1-x \in (0,1)$ és $1-y \in (0,1)$. Így $(1-x)\cdot(1-y) \in (0,1)$. Innen következik, hogy

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} > 0, \quad \forall x, y \in (0,1) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és $xy < xy + (1-x)(1-y)$, tehát $\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} < 1$, $\forall x, y \in (0,1)$. **(1 pont)**
Az előbbiek alapján $x * y \in (0,1)$, $\forall x, y \in (0,1)$.

b) Az a) alpont alapján $x * y \in (0,1)$, $\forall x, y \in (0,1)$, tehát $f(x * y)$ értelmezett. **(1 pont)**
Írhatjuk, hogy

$$f(x*y) = \frac{a\cdot(x*y)}{b\cdot(x*y-1)} = \frac{a \cdot \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}}{b \cdot \left(\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} - 1\right)} = \frac{axy}{-b(1-x)(1-y)}, \quad \forall x, y, \in (0,1), \quad (1)$$

valamint

$$f(x)f(y) = \frac{ax}{bx-b} \cdot \frac{ay}{by-b} = \frac{a^2xy}{b^2(1-x)(1-y)}, \quad \forall x, y \in (0,1). \qquad (2)$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggések alapján

$$\frac{axy}{-b(1-x)(1-y)} = \frac{a^2xy}{b^2(1-x)(1-y)}, \quad \forall x, y \in (0,1),$$

tehát $-\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$. Mivel $a, b \in \mathbb{R}^*$, ezért $\frac{a}{b} = -1$, vagyis $a = -b$. Innen következik, hogy

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad \forall x \in (0,1) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $x \in (0,1)$, ezért $f(x) > 0$, tehát f jól értelmezett. **(1 pont)**

c) Mivel a művelet asszociatív és $f(x*y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in (0,1)$ ezért matematikai indukcióval belátható, hogy

$$f(x_1 * x_2 * \ldots * x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot \ldots \cdot f(x_n), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1).$$ **(1 pont)**

Megjegyzés. Ha a versenyző nem végzi el az indukcióval való bizonyítást, de utal rá, akkor is jár a pont.

Legyen $a = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{n+1}$. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \cdots * \frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

(2 pont)

Ez alapján $\frac{a}{1-a} = \frac{1}{n!}$, tehát $a = \frac{1}{n!+1}$.

(1 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat. Ha egy valós számokból álló véges számsorozatban bármely 7 egymást követő tag összege negatív és bármely 11 egymást követő tag összege pozitív, akkor határozd meg a sorozatban a tagok számának a maximumát.

Matlap

Megoldás. Legyen a sorozat $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tekintsük a következő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{11,7}(\mathbb{R}).$$

Ekkor a mátrix minden sorában az elemek összege negatív, tehát a mátrix elemeinek összege negatív. Ugyanakkor a mátrix minden oszlopában az elemek összege pozitív, azaz a mátrix elemeinek összege pozitív, ellentmondás.

Tehát a sorozatnak nem lehet 17 vagy annál több eleme. **(5 pont)**

Szerkesztést 16 tagú sorozatra tudunk adni, például

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5 - 13, 5, 5$$ **(4 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat.

a) Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ deriválható függvényeket, amelyekre

$$2020 f(x) + f'(x) = 0,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

b) Adottak az $a < b$ valós számok és az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely deriválható az (a,b) intervallumon és amelyre $f(a) = f(b) = 0$. Igazold, hogy létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy

$$2020f(c) + f'(c) = 0.$$

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás.

a) A $2020f(x) + f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ összefüggést az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2020, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alakba írhatjuk, mert $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(2 pont)**
Innen következik, hogy

$$\left(\ln f(x)\right)' = -2020,$$

vagyis $\ln f(x) = -2020x + c_1$, ahonnan az

$$f(x) = e^{-2020x+c_1} = e^{c_1} \cdot e^{-2020x} = c \cdot e^{-2020x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

eredményhez jutunk, ahol $c \in (0, +\infty)$ tetszőleges konstans. **(2 pont)**

b) Tekintsük a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2020x} \cdot f(x)$ függvényt. **(3 pont)**
Mivel f folytonos az $[a,b]$-n és deriválható az (a,b)-n, ugyanez g-ről is elmondható. Tehát g Rolle-tulajdonságú. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $g(a) = g(b) = 0$ teljesül, így alkalmazhatjuk a Rolle-tételt (vagy az utóbbi észrevétel nélkül egyből a Lagrange-tételt), amely szerint létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy $g'(c) = 0$. **(1 pont)**
Mivel

$$g'(x) = (e^{2020x}f(x))' = e^{2020x}(2020f(x) + f'(x)),$$

ezért a $g'(c) = 0$ összefüggés rendre ekvivalens az alábbiakkal:

$$e^{2020c}(2020f(c) + f'(c)) = 0,$$
$$2020f(c) + f'(c) = 0.$$

(1 pont)

Hivatalból

(1 pont)

■