# IV. országos magyar matematikaolimpia
# XXXI. EMMV
**országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.**

## X. osztály – I. forduló

**1. feladat** (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 5x - 18 = 2(x-3)\sqrt{x-2}$$

egyenletet! *Kovács Béla, Szatmárnémeti*

*Megoldás.* Az egyenletben megjelenő kifejezések akkor értelmezettek, ha $x \in [2, \infty)$.
Rendre az alábbi ekvivalens átalakításokat végezhetjük el:

$$x^2 - 6x + 9 + x - 2 - 25 = 2(x-3)\sqrt{x-2},$$
$$(x-3)^2 - 2(x-3)\sqrt{x-2} + x - 2 = 25,$$
$$(x-3-\sqrt{x-2})^2 = 25.$$

**(4 pont)**

Két esetünk van:

$$x - 3 - \sqrt{x-2} = -5 \quad \text{vagy} \quad x - 3 - \sqrt{x-2} = 5.$$

Az első esetben az alábbi ekvivalens egyenletekhez jutunk:

$$x + 2 = \sqrt{x-2},$$
$$x^2 + 4x + 4 = x - 2,$$
$$x^2 + 3x + 6 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa kisebb, mint nulla, emiatt nincs valós megoldása.
**(2 pont)**

A második esetben azt kapjuk, hogy $x - 8 = \sqrt{x-2}$. Mivel $\sqrt{x-2} \geq 0$, ezért $x - 8 \geq 0$, vagyis $x \geq 8$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve rendre kapjuk, hogy

$$(x-8)^2 = x - 2,$$
$$x^2 - 17x + 66 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenletnek két valós gyöke van: $x_1 = 6$ és $x_2 = 11$. Az $x \geq 8$ feltétel miatt viszont csak a második gyök lesz az eredeti egyenletnek is a megoldása.
A megoldáshalmaz tehát $M = \{11\}$. **(3 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

**2. feladat** (10 pont)**.**

a) Tanulmányozd az $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$ függvény monotonitását!
b) Oldd meg a természetes számok halmazán a

$$3^{3^x} \cdot 2^{2^x} - 3^{2^x} \cdot 2^{3^x} = x \cdot 6^{2^x}$$

egyenletet! *Dávid Géza, Székelyudvarhely*

*Megoldás.*

a) Az $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ függvény átírható az

$$f(x) = 3^x \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

alakba.

Ha $0 \le x_1 < x_2$, akkor $3^{x_1} < 3^{x_2}$ és $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \le 1$, tehát $0 \le 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} < 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$. Ezen egyenlőtlenségek alapján felírhatjuk, hogy

$$f(x_1) = 3^{x_1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}\right) < 3^{x_2} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}\right) = f(x_2),$$

vagyis az $f$ függvény szigorúan növekvő. (**2 pont**)

b) Az egyenletet $6^x$-nel elosztva a $3^{3^x-2^x} - 2^{3^x-2^x} = x$ vagyis az $f(f(x)) = x$ alakba írható. (**2 pont**)

Az $f$ szigorúan növekvő, ezért ha $x < f(x)$ akkor $x < f(x) < f(f(x))$. Hasonlóan, ha $x > f(x)$ akkor $x > f(x) > f(f(x))$. Összefoglalva, $x$ pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $f(x) = x$, vagyis, ha $3^x - 2^x = x$. (**2 pont**)

Észrevesszük, hogy $x = 0$ és $x = 1$ megoldása az egyenletnek, és igazoljuk, hogy nincs több megoldás. (**1 pont**)

A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy ha $x \ge 2$ természetes szám, akkor $f(x) > x$. Ha $x = 2$, akkor $f(2) = 3^2 - 2^2 = 5 > 2$. Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz $x = n$-re és igazoljuk $x = n+1$-re. Tudjuk, hogy az $f$ függvény szigorúan növekvő ezért $f(n+1) > f(n)$. Az $f(n+1)$ és $f(n)$ természetes számok, vagyis az előző egyenlőtlenség alapján $f(n+1) \ge f(n) + 1$. Az indukciós feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f(n+1) \ge f(n) + 1 > n + 1,$$

vagyis $f(x) > x$ bármilyen $x \ge 2$ természetes szám esetén.

Az egyenletnek tehát két természetes megoldása van a 0 és az 1. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**Megjegyzés.** Az $x \ge 2$ természetes számok esetén az $f(x) > x$ kijelentés indukcióval igazolható az $f$ monotonitásának felhasználása nélkül. Egy ekvivalens formába való átalakítással az $3^x > 2^x + x$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni , ami $x = 2$-re igaz. Feltételezzük, hogy igaz $x = n$-re és igazoljuk $x = n+1$-re. A $3^n > 2^n + n$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n > 2 \cdot 2^n + n + 1 = 2^{n+1} + n + 1,$$

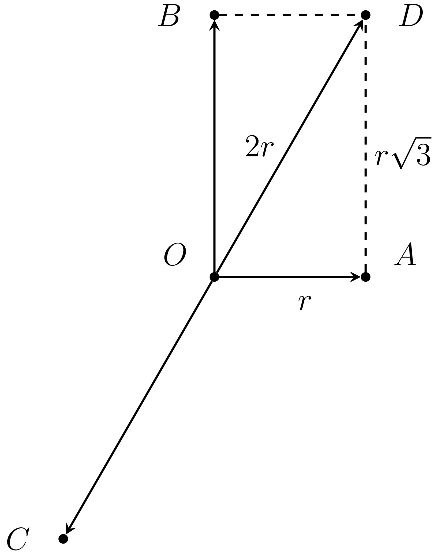
bármilyen $n \ge 2$ természetes szám esetén, vagyis a matematikai indukció elve alapján igazoltuk az egyenlőtlenséget.

**3. feladat** (10 pont)**.** A $z_1$, $z_2$, $z_3$ komplex számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \quad \text{és} \quad z_1 + \sqrt{3}z_2 + 2z_3 = 0.$$

Igazold, hogy $z_1 + z_0 \cdot z_2 + z_3 = 0$, ahol $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. *András Szilárd, Kolozsvár*

*Megoldás.* Jelöljük $r$-el a $z_1, z_2$ és $z_3$ modulusát és értelmezzük geometriailag, hogy mit jelent a megadott feltétel (ehhez tekintsük a mellékelt ábrát).




Legyen $O$ az origó, $A$ a $z_1$ képe, $B$ a $\sqrt{3}z_2$ képe és $C$ a $2z_3$ képe. A $z_1$ és $\sqrt{3}z_2$-re szerkesztett $OADB$ paralelogramma $D$ csúcsa a $C$-nek az $O$ pont szerinti szimmetrikusa. (**3 pont**)

Az $OAD$ háromszögben $m(\widehat{ODA}) = 30°$. (**1 pont**)

Ez alapján $m(\widehat{AOC}) = 120°$, tehát $z_1 + z_3$-nak az origó szerinti szimmetrikusa az $OB$-vel szintén $30°$-os szöget zár be. (**2 pont**)

Emiatt $z_0 \cdot z_2$ épp a $z_1 + z_3$ képének $O$ szerinti szimmetrikusa. (**3 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**4. feladat** (10 pont)**.** Adott az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény. Az $f_{n+1}$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $f_1 = f$ és $f_{n+1} = f \circ f_n$, minden $n \geq 1$ esetén. Igazold, hogy az $f_n$ értelmezett az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ halmazon, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és határozd meg az $f_n$ függvényt!

*Dávid Géza, Székelyudvarhely*
*Kaiser Dániel, Székelyudvarhely*

*Megoldás.* Vegyük észre, hogy

$$(x^2+2) + (2x-1) = (x+1)^2,$$
$$(x^2+2) - 2(2x-1) = (x-2)^2.$$

Ez alapján

$$(x^2+2) = \frac{2(x+1)^2 + (x-2)^2}{3},$$
$$(2x-1) = \frac{(x+1)^2 - (x-2)^2}{3},$$

vagyis

$$f_1(x) = \frac{2(x+1)^2 + (x-2)^2}{(x+1)^2 - (x-2)^2}. \qquad (\textbf{3 pont})$$

Teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{2(f_1(x)+1)^2+(f_1(x)-2)^2}{(f_1(x)+1)^2-(f_1(x)-2)^2} \\
&= \frac{2\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2}+1\right)^2+\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2}-2\right)^2}{\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2}+1\right)^2-\left(\frac{2(x+1)^2+(x-2)^2}{(x+1)^2-(x-2)^2}-2\right)^2} \\
&= \frac{2(x+1)^4+(x-2)^4}{(x+1)^4-(x-2)^4}.
\end{aligned}$$

A sejtésünk az, hogy

$$f_n(x) = \frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} \quad \text{és} \quad f_n(x) \neq \frac{1}{2},$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, amit matematikai indukcióval igazolunk. (**2 pont**)

Az $n = 1$ és az $n = 2$ esetben a kijelentés igaz. Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz $n$-re és igazoljuk $(n+1)$-re. A következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) = f \circ f_n(x) &= \frac{2(f_n(x)+1)^2+(f_n(x)-2)^2}{(f_n(x)+1)^2-(f_n(x)-2)^2} \\
&= \frac{2\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}}+1\right)^2+\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}}-2\right)^2}{\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}}+1\right)^2-\left(\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}}-2\right)^2} \\
&= \frac{2(x+1)^{2^{n+1}}+(x-2)^{2^{n+1}}}{(x+1)^{2^{n+1}}-(x-2)^{2^{n+1}}}.
\end{aligned}$$

(**2 pont**)

A fenti összetevés megvalósítható, mert $f_n(x) \neq \frac{1}{2}$, bármilyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ esetén. Valóban, ha létezik $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ úgy, hogy $f_n(x) = \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{2(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n}}{(x+1)^{2^n}-(x-2)^{2^n}} = \frac{1}{2},$$

ahonnan $(x+1)^{2^n}+(x-2)^{2^n} = 0$, ami lehetetlen. (**1 pont**)
Ugyanakkor, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, akkor $f_{n+1}$ is értelmezett, mert $(x+1)^{2^{n+1}} \neq (x-2)^{2^{n+1}}$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■