Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
VII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adottak az $x = 2+4+6+...+4036$ és $y = 2018\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2019}\right)$ számok.

a) Igazold, hogy $a = x - 2019\cdot y$ teljes négyzet.

b) Igazold, hogy $a = 2019 - \frac{1+2+3+...+2017}{\sqrt{1+3+5+...+2017}} \in N$.

2. Feladat (10 pont)

a) Oldd meg a természetes számok halmazán következő egyenletet:
$\left|1-\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3}-\sqrt{4}\right| + ... + \left|\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right| = 2$.

b) Oldd meg a valós számok halmazán következő egyenletet:
$$\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| - \left|4\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right| = \frac{x+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2}$$

3. Feladat (10 pont)

Az $ABCD$ négyzet oldalának hossza 7 cm. Legyen $M \in (BC)$ és $N \in (CD)$ két pont, amelyekre $m(MAN\sphericalangle) = 45°$. Ha tudjuk, hogy a CMN háromszög területe 3 cm^2, határozd meg az AMN háromszög területét.

Matlap

4. Feladat (10 pont)

Matematikaórán négy tanuló felel egyszerre. A tanáruk így szól: - Itt van 20 darab kártyalap 1-től 20-ig megszámozva. Ki kell választanotok ezek közül 5-5 lapot, majd a kártyalapokon levő számokkal számpárokat képeznetek. (Jelöljük a számpárt (a,b)-vel, ahol a és b különböző természetes számok, valamint (a,b) és (b,a) alatt ugyanazt a számpárt értjük). Ezek olyan számpárok legyenek, melyek tagjainak különbsége, a nagyobbikból a kisebbik számot kivonva, néggyel osztható szám. Minden ilyen számpár 1 pontot ér. A kapott jegyed a pontjaid összege. Ezzel szétterítette a kártyákat számokkal felfele, majd adott sorrendbe a tanulók húztak öt-öt lapot.

a) Legtöbb hányast érdemel az a tanuló, akinek a kártyáin a 20,17,16,10,8 számok vannak?
b) Kaphatott mind a négy tanuló 10-est? Válaszodat indokold!
c) Peti 10 számpárt alkotott, de csak 6 pontot tudott szerezni. Legtöbb mennyi lehet a másik három tanuló által kapott jegyek összege?

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.