IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Egy kutyakiállításon 3 vizslát, 4 pulit és 5 kuvaszt mutattak be.

a) Az első nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *pontosan* egy kutyára. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás első napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

b) A második nap minden jelenlevő néző csak a pulik közül szavazott legalább egyre. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás második napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

c) A harmadik nap minden jelenlevő néző szavazott minden fajtából *legalább* egy kutyára. Legtöbb hány néző vett részt a kiállítás harmadik napján, ha tudjuk, hogy a szavazatok között nem volt két egyforma?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. a) A 4 puliból és 5 kuvaszból egyet-egyet $4 \cdot 5 = 20$-féle módon választhatunk ki. (**2 pont**)

A 20-féle módon kiválasztható puli és kuvasz mellé a három vizsla közül egyet választunk ki, így összesen $4 \cdot 5 \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$-féle puli, kuvasz, vizsla hármast választhatunk. Tehát legtöbb 60 látogató lehetett az első napon. (**1 pont**)

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha másik két fajta kutyából indulunk ki.

b) Ha a pulikat 1-től 4-ig számozzuk, egy néző szavazata az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz egy nemüres részhalmazának felel meg. Az részhalmazok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, mivel bármelyik elem a négy közül egymástól függetlenül vagy benne van a részhalmazban vagy nincs. Emiatt az $\{1, 2, 3, 4\}$ nem üres részhalmazainak a száma $16 - 1 = 15$. Tehát legfennebb 15 látogató lehetett a második napon. (**2 pont**)

c) Az előző alponthoz hasonlóan egy szavazat egyértelműen megfelel három nem üres halmaznak, amelyekből az első a vizslák, a második a pulik, a harmadik a kuvaszok részhalmaza.

A vizsláknak $2^3 - 1 = 7$, a puliknak $2^4 - 1 = 15$, valamint a kuvaszoknak $2^5 - 1 = 31$ nem üres részhalmaza van. Így a lehtséges különböző szavazatok száma $7 \cdot 15 \cdot 31 = 3255$. (**3 pont**)
Tehát a harmadik napon legtöbb $7 \cdot 15 \cdot 31 = 3255$ lehetett a nézők száma. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

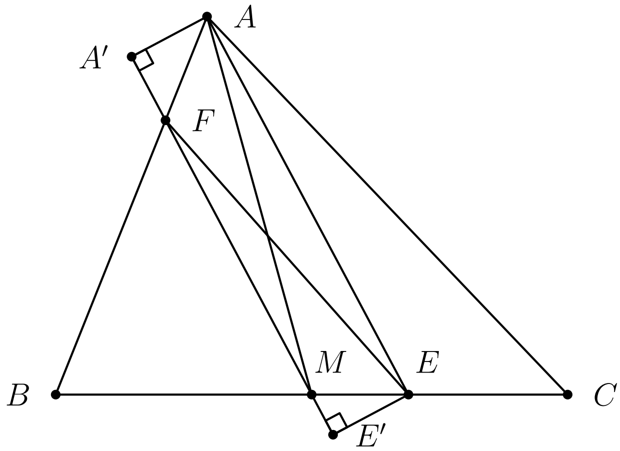
■

2. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük az E pontot. Legyen F az AB oldal belső pontja úgy, hogy az EF szakasz a háromszög területét két egyenlő részre osztja, valamint M a BC szakasz felezőpontja.

a) Igazold, hogy M a B és E pontok között van!

b) Igazold, hogy az $AEMF$ négyszög trapéz! *Szilágyi Zsolt, Kolozsvár*

Megoldás. a) Az ábra elkészítése. (**1 pont**)



A feltétel miatt $T_{EFB} = T_{EFAC} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. Mivel M a BC felezőpontja, ezért $T_{ABM} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. Az M pont a B és E pontok között van, mivel ellenkező esetben az EFB háromszög az ABM háromszög belsejében lenne, ami a $T_{EFB} < T_{ABM} = \frac{1}{2}T_{ABC}$ ellentmondáshoz vezetne.x (**1 pont**)

b) Az EFB háromszög felbontható a BMF és MEF háromszögekre, ezért $T_{EFB} = T_{BMF}+T_{MEF} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. (**1 pont**)
Az ABM háromszög is felbontható a BMF és AMF háromszögekre, ezért $T_{ABM} = T_{BMF}+T_{AMF} = \frac{1}{2}T_{ABC}$. (**1 pont**)
Ezek alapján kapjuk, hogy $T_{MEF} = T_{AMF}$. (**1 pont**)

Az AFM háromszögben legyen A' az A csúcsból húzott magasság talppontja, tehát $AA' \perp FM$. Az EFM háromszögben legyen E' az E csúcsból húzott magasság talppontja, tehát $EE' \perp FM$.

Mivel $T_{AMF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot AA' = T_{EMF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot EE'$, ezért $AA' = EE'$. (**2 pont**)
Mivel $AA' = EE'$ és $AA' \parallel EE'$, ezért $AA'E'E$ paralelogramma, ahonnan kapjuk, hogy $FM \parallel AE$, és így $AEMF$ trapéz. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

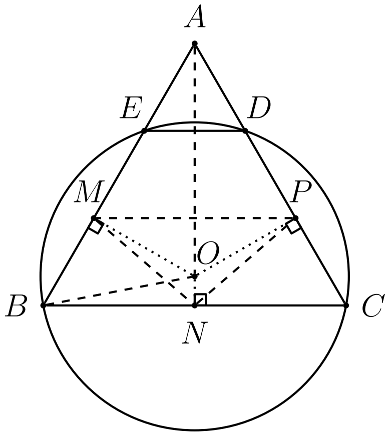
3. feladat (10 pont)**.** Az ABC egyenlő oldalú háromszög BC oldala egy O középpontú körnek egy húrja. Az O pont a háromszög belsejében található. Az AB és AC oldalak pedig a nagyobbik BC körívet az E és D pontokban metszik. Jelöljük M-mel, N-nel és P-vel az O pontnak az AB, BC és AC oldalakra húzott merőlegesek talppontját! Tudjuk, hogy $BC = 12\,\text{cm}$ és $OM = 4ON$.

a) Számítsd ki a kör középpontjának az ABC háromszög oldalaitól való távolságát!

b) Igazold, hogy $AE = EM = MB$.

c) Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{T_{MNP}}{T_{ABC}} = \frac{2}{9}$. *Simon József, Csíkszereda*

Megoldás. a) Az ábra elkészítése. (**1 pont**)



A keresett távolságok az OM, ON és OP szakaszok hosszai. A BO és OC sugarak, így a BOC háromszög egyenlő szárú, amelyben az ON magasság egyben oldalfelező. A BC szakasz ON oldalfelező merőlegese áthalad az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsán, ezért AN szögfelező is. **(1 pont)**

Az AOM derékszögű háromszögben $\widehat{OAM} = 30°$, ahonnan következik, hogy $AO = 2OM$. Tehát $AO = 8ON$, ezért $AN = 9ON$. **(1 pont)**

Mivel az AN szakasz az ABC egyenlő oldalú háromszög magassága, ezért Pitagorász-tétele alapján $AN = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Így $9ON = 6\sqrt{3}$, vagyis $ON = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}$, továbbá $OM = OP = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}$. **(1 pont)**

b) Először kiszámítjuk a kör sugarát. Az OBN derékszögű háromszögben $OB^2 = ON^2 + BN^2$, ahonnan $OB = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 36} = \frac{4}{3}\sqrt{21}\,\text{cm}$. **(1 pont)**

A BOE egyenlő szárú háromszögben az OM magasság egyben oldalfelező is, ezért $BM = ME$. A BMO háromszögben az $\widehat{M}$ derékszög, így Pitagorász-tétel alapján $BM^2 = OB^2 - OM^2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{21}\right)^2 - \left(\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{16 \cdot 21}{9} - \frac{64 \cdot 3}{9} = \frac{16}{9}(21 - 12) = 16$, tehát $BM = 4\,\text{cm}$. Így $ME = 4\,\text{cm}$ és $AE = 4\,\text{cm}$, tehát $AE = EM = MB$. **(1 pont)**

c) Mivel $BM = \frac{1}{3}AB$, ezért $T_{BMN} = \frac{1}{3}T_{BAN}$, de $T_{BAN} = \frac{1}{2}T_{ABC}$, így $T_{BMN} = \frac{1}{6}T_{ABC}$.
Ugyanígy $T_{CNP} = \frac{1}{6}T_{ABC}$. **(1 pont)**
Az $AP = \frac{2}{3}AC$, ezért $T_{ABP} = \frac{2}{3}T_{ABC}$ és $AM = \frac{2}{3}AB$, így $T_{AMP} = \frac{2}{3}T_{ABP} = \frac{4}{9}T_{ABC}$. **(1 pont)**
Az előbbi összefüggések alapján

$$\begin{aligned}\frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} &= \frac{T_{ABC} - T_{AMP} - T_{BMN} - T_{CNP}}{T_{ABC}}\\ &= 1 - \frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} - \frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} - \frac{T_{CNP}}{T_{ABC}}\\ &= 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$ **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

A c) alpont második megoldása. Az $AMP_\triangle \sim ABC_\triangle$, a hasonlósági arány $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, így $\frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} = \frac{4}{9}$. **(1 pont)**

Mivel $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{3}$ és $\frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$, így $\frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, ugyanígy $\frac{T_{CNP}}{T_{ABC}} = \frac{1}{6}$. **(1 pont)**

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{T_{MNP}}{T_{ABC}} &= \frac{T_{ABC} - T_{AMP} - T_{BMN} - T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{T_{AMP}}{T_{ABC}} - \frac{T_{BMN}}{T_{ABC}} - \frac{T_{CNP}}{T_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy gazdának van három juhásza, amelyek a gazda juhait minden reggel egy-egy nyájban terelik ki a legelőre, majd este egy-egy nyájban haza. Tereléskor bármelyik juh bármelyik nyájba kerülhet. Egyik este a juhászok beszélgetnek és a következőket állapítják meg:

- az aznap reggeli kitereléskor a nyájakban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve az 5, 6 és 7 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az aznap esti hazatereléskor a nyájakban lévő juhok számait növekvő sorrendbe rendezve a 4, 5 és 6 számokkal egyenesen arányos számokat kaptak;
- az egyik juhász este 12 juhval többet terelt haza, mint amennyit kihajtott reggel.

a) Igazold, hogy a gazda juhainak száma osztható 90-nel!

b) Hány juh volt aznap reggel a kihajtott nyájakban külön-külön? Hát este a hazahajtottakban?

Császár Sándor, Csíkszereda

Megoldás. Legyen a, b és c a juhok száma reggel a három nyájban, növekvő sorrendben, illetve legyen $k = a + b + c$ az összes juh száma. Mivel a, b, c egyenesen arányos az 5, 6, 7 számokkal, ezért

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{k}{18},$$

ahonnan

$$a = \frac{5}{18}k, \quad b = \frac{6}{18}k, \quad c = \frac{7}{18}k.$$

(1 pont)

Legyen az esti nyájakban lévő juhok száma növekvő sorrendben x, y és z. Ezek egyenesen arányosak a 4, 5, 6 számokkal, tehát

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{k}{15},$$

ahonnan

$$x = \frac{4}{15}k, \quad y = \frac{5}{15}k, \quad z = \frac{6}{15}k.$$

(1 pont)

a) Mivel $\frac{k}{18}$ és $\frac{k}{15}$ egész számok kell legyenek, ezért k a 18 és 15 többszöröse, és így k osztható $[18, 15] = 90$-nel. **(1 pont)**

b) Közös nevezőre hozva a korábban kapott kifejezéseket, írhatjuk hogy

$$a = \frac{25k}{90}, \quad b = \frac{30k}{90}, \quad c = \frac{35k}{90}, \quad x = \frac{24k}{90}, \quad y = \frac{30k}{90}, \quad z = \frac{36k}{90}.$$

Azt tudjuk, hogy az x, y, z számok közül valamelyik 12-vel nagyobb, mint az a, b, c valamelyike. Mivel $x < a < b < c$ és $y = b < c$ ezért négy esetet kell letárgyalnunk.

1. eset: $y = a + 12$. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{30k}{90} = \frac{25k}{90} + 12,$$

ahonnan következik, hogy $k = 216$, ami nem osztható 90-nel, tehát ez az eset nem lehetséges.

(**1 pont**)

2. eset: $z = a + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{25k}{90} + 12,$$

tehát $k = \frac{1080}{11}$. Mivel ez nem természetes szám, ez az eset sem állhat fent. (**1 pont**)

3. eset: $z = b + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{30k}{90} + 12,$$

innen $k = \frac{1080}{6} = 2 \cdot 90 = 180$. Ekkor $a = 50$, $b = 60$, $c = 70$ az eredeti nyájak juhainak száma, $x = 48$, $y = 60$, $z = 72$ az esti nyájak juhainak száma. (**2 pont**)

4. eset: $z = c + 12$. Ekkor

$$\frac{36k}{90} = \frac{35k}{90} + 12,$$

ahonnan $k = 12 \cdot 90 = 1080$. Ekkor $a = 300$, $b = 360$, $c = 420$ az eredeti nyájak juhainak száma, $x = 288$, $y = 360$, $z = 432$ az esti nyájak juhainak száma. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■