VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az összes olyan természetes számot, amelynek pontosan hat pozitív osztója van, és pozitív valódi osztóinak összege 2024-gyel egyenlő!

Kajántó Tünde, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Ha az n természetes számnak 6 osztója van, akkor $n = p^5$ vagy $n = p^2 \cdot q$, ahol p, q különböző prímek. **(1 pont)**

Ha $n = p^5$, akkor a feltétel alapján $p + p^2 + p^3 + p^4 = 2024$, ahonnan

$$p \cdot (1 + p + p^2 + p^3) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen a $p = 2$ eset behelyettesítés alapján nem jó, hisz az összeg kisebb lesz, mint 2024. A $p = 11$ vagy $p = 23$ értékek sem jók, mivel $10^4 = 10000$, vagyis az 10-nél nagyobb prímszámok esetén az összeg már meghaladja a 2024-et. Tehát n nem lehet p^5 alakú. **(2 pont)**

Ha $n = p^2q$, akkor a feltétel alapján $p + p^2 + q + pq = 2024$, ahonnan

$$(1 + p) \cdot (q + p) = 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A baloldali tényezők egyike se lehet 1 vagy 2, valamint $1 + p < q + p$. Ezt felhasználva az alábbi táblázatban vizsgáljuk a 2024 lehetséges tényezőre bontásait:

$1+p$	$q+p$	p	q
4	506	3	503
8	253	7	246 nem prím
11	184	10 nem prím	
22	92	21 nem prím	
23	88	22 nem prím	
44	46	43	3

(3 pont)

Tehát az egyik lehetséges eset a $p = 3, q = 503$, ekkor $n = 3^2 \cdot 503 = 4527$. A másik esetben $p = 43, q = 3$, ekkor $n = 43^2 \cdot 3 = 5547$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \log_5(22 + x) = \log_3(12 - y) \\ \log_5(22 + y) = \log_3(12 - z) \\ \log_5(22 + z) = \log_3(12 - x) \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel a három változó cirkulárisan permutálható, bármelyről feltételezhetjük, hogy a legnagyobb. Legyen a legnagyobb az y, azaz $z \leq y$ és $x \leq y$. **(1 pont)**

$$\log_3(12-x) = \log_5(22+z) \leq \log_5(22+y) = \log_3(12-z) \Longrightarrow 12-x \leq 12-z \Longrightarrow z \leq x.$$

(1 pont)

$$\log_3(12-x) = \log_5(22+z) \leq \log_5(22+x) = \log_3(12-y) \Longrightarrow 12-x \leq 12-y \Longrightarrow y \leq x.$$

(1 pont)
Tehát $z \leq x = y$. **(1 pont)**
Így az első egyenlet a

$$\log_5(22+x) = \log_3(12-x) \tag{1}$$

egyenlettel egyenértékű. **(1 pont)**
Az

$$f\colon (-22,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_5(22+x)$$

függvény szigorúan növekvő, a

$$g\colon (-\infty,12) \to \mathbb{R}, g(x) = \log_3(12-x)$$

függvény szigorúan csökkenő, így grafikus képeik legtöbb egy pontban metszik egymást, vagyis a (1)-es egyenletnek legtöbb egy megoldása van. **(1 pont)**
Ha $x = 3$, akkor

$$\log_5(22+3) = \log_3(12-3) \Longleftrightarrow 2 = 2 \text{ igaz.}$$

Következik, hogy $x = 3$ az egyenlet egyetlen megoldása. **(1 pont)**
A harmadik egyenletbe behelyettesítve ezt az értéket, $z = 3$ megoldást kapjuk. **(1 pont)**
Tehát az egyenletrendszer megoldása: $(x, y, z) = (3, 3, 3)$. **(1 pont)**
■

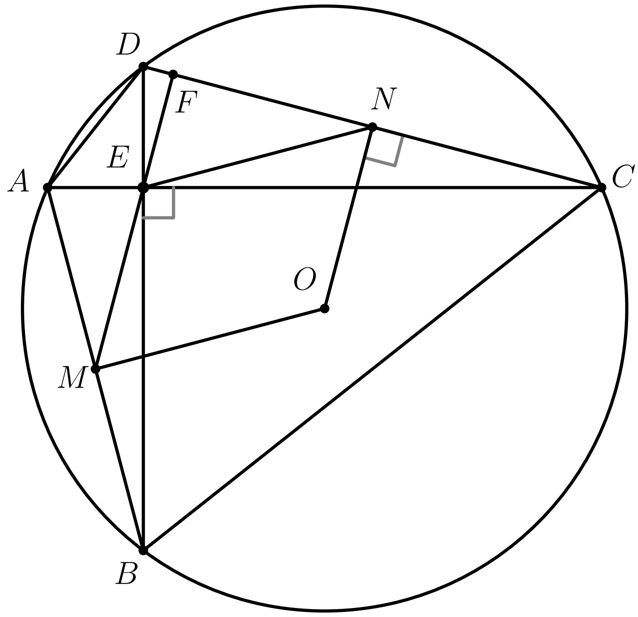
3. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, E az átlók metszéspontja. A négyszög köré írható kör középpontja O és M az AB oldal felezőpontja.

a) Igazold, hogy $EM \perp CD$!

b) Igazold, hogy $OM = \frac{CD}{2}$!

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Legyen $ME \cap DC = \{F\}$.

Az $AEB_\triangle$-ben az E derékszög és $AM \equiv MB$, tehát $AM \equiv ME$. (**1 pont**)

Ugyanakkor $\widehat{MAE} \equiv \widehat{AEM}$, mert $MAE_\triangle$ egyenlő szárú háromszög és $\widehat{AEM} \equiv \widehat{CEF}$, mert csúcsszögek, tehát $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CEF}$. (**1 pont**)

Mivel $\widehat{DCE} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ és $\widehat{ABD} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Longrightarrow \widehat{ABE} \equiv \widehat{DCE}$. (**1 pont**)

Az AEB háromszögben és az EFC háromszögben $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CEF}$ és $\widehat{ABE} \equiv \widehat{FCE}$, tehát $AEB_\triangle$ hasonló az $EFC_\triangle$ háromszöggel, azaz $\widehat{AEB} \equiv \widehat{EFC}$. (**1 pont**)

Tehát $EF \perp DC$, de $M \in EF \Longrightarrow ME \perp DC$. (**1 pont**)

b) Legyen N a DC felezőpontja. O a köré írt kör középpontja, tehát $ON \perp DC$ és $DN \equiv NC$.

Mivel $ON \perp DC$ és $ME \perp DC$ ezért $ME \parallel ON$. (**1 pont**)

Az a) alponthoz hasonlóan belátható, hogy $NE \perp AB$ ugyanakkor $OM \perp AB$,

tehát $NE \parallel OM$. (**1 pont**)

Mivel $ME \parallel ON$ és $NE \parallel OM \Longrightarrow MONE$ paralelogramma $\Longrightarrow MO \equiv NE$. (**1 pont**)

Az NE a DEC derékszögű háromszögben oldalfelező, tehát

$$NE = \frac{DC}{2} \text{ és mivel } MO \equiv NE \Longrightarrow MO = \frac{DC}{2}.$$ (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $1, 2, 3, ..., 4n$ számokat szétosztjuk n darab halmazba. Igazold, hogy bármely szétosztás esetén létezik az n darab halmaz valamelyikében három olyan szám, amely egy háromszög oldalainak mérőszáma! *(***)*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $a < b < c$ számok egy háromszög oldalainak mérőszámai legyenek, az hogy $a + b > c$. (**2 pont**)

Észrevesszük, hogy a $2n, 2n+1, ..., 4n$ számokból alkotható bármely számhármas esetén teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen a két legkisebb elem összege $4n+1$, ami nagyobb $4n$-nél, a halmaz legnagyobb eleménél. (**4 pont**)
Viszont ezek száma $2n+1$, így a skatulya elv alapján biztosan lesz köztük három, ami ugyanabba a halmazba kerül. (**2 pont**)
Tehát ebben a halmazban van három szám, amelyek egy háromszög oldalainak mérőszámai. (**1 pont**)
■

5. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszögben fennáll a

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{5}{4}$$

összefüggés. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú! *Longáver Lajos, Nagybánya*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Összeggé alakítjuk a $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ szorzatot.

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cdot \cos C =$$

$$\frac{1}{2} \cdot [\cos(\pi - C) + \cos(A-B)] \cdot \cos C = \frac{1}{2} \cdot [-\cos C + \cos(A-B)] \cdot \cos C =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[-\cos^2 C + \cos(A-B) \cdot \cos C\right] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[-\cos^2 C + \frac{\cos(A-B+C) + \cos(A-B-C)}{2}\right] =$$

$$\frac{-2\cos^2 C + \cos(\pi - 2B) + \cos(2A - \pi)}{4} =$$

$$\frac{-2\frac{1+\cos(2C)}{2} - \cos(2B) - \cos(2A)}{4}.$$

Tehát

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{4}.$$

(**2 pont**)

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4}.$$

(**2 pont**)

Felhasználva az azonosságokat, a kezdeti feltétel:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{4} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{4} = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C - \sqrt{3}\,(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + 6 = 0$$

alakba írható.
Csoportosítva a tagokat azt kapjuk, hogy:

$$(\cos 2A - \sqrt{3}\sin 2A + 2) + (\cos 2B - \sqrt{3}\sin 2B + 2) + (\cos 2C - \sqrt{3}\sin 2C + 2) = 0.$$

(**1 pont**)

Felhasználva a

$$\cos 2A - \sqrt{3}\sin 2A + 2 = \cos^2 A - \sin^2 A - 2\sqrt{3}\cdot\sin A\cdot\cos A + 2(\cos^2 A + \sin^2 A) =$$

$$= 3\cos^2 A - 2\sqrt{3}\cdot\sin A\cdot\cos A + \sin^2 A = (\sin A - \sqrt{3}\cos A)^2$$

(**2 pont**)

azonosságot kapjuk, hogy:

$$(\sin A - \sqrt{3}\cos A)^2 + (\sin B - \sqrt{3}\cos B)^2 + (\sin C - \sqrt{3}\cos C)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sin A - \sqrt{3}\cos A = \sin B - \sqrt{3}\cos B = \sin C - \sqrt{3}\cos C = 0 \Longleftrightarrow$$

(**1 pont**)

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C = \sqrt{3} \Longleftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3.}$$

Tehát a háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)

■

6. feladat (10 pont)**.** Tekintsük az $(S_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, ahol S_n az első n darab prímszám összegét jelöli ($S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, ...$). Igazold, hogy a sorozatnak nem lehet két egymás utáni tagja négyzetszám!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 10, \quad S_4 = 17, ...$$

Legyen $p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...$ a prímszámok sorozata. Feltételezzük, hogy az $(S_n)_{n\geq 1}$ sorozatban van két olyan egymásutáni tag, amely négyzetszám. Legyenek ezek S_m és S_{m+1}.
Ekkor

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = k^2 \text{ és } p_1 + p_2 + ... + p_m + p_{m+1} = l^2, \text{ ahol } k, l \in \mathbb{N} \text{ és } l > k.$$

(**1 pont**)

Innen azt kapjuk, hogy $l^2 - k^2 = p_{m+1}$, (**1 pont**)
azaz $(l-k)(l+k) = p_{m+1}$. Mivel p_{m+1} prímszám, ezért $l - k = 1$ és $l + k = p_{m+1}$, tehát

$$\begin{cases} l = \frac{p_{m+1}+1}{2} \\ k = \frac{p_{m+1}-1}{2} \end{cases} .$$

(**2 pont**)

Tehát
$$p_1 + p_2 + ... + p_m + p_{m+1} = \left(\frac{p_{m+1}+1}{2}\right)^2. \tag{2}$$

(**1 pont**)

Feltételezhetjük, hogy $m > 4$, mert S_1, S_2, S_3, S_4 nem négyzetszámok. Ugyanakkor a prímszámok összege kisebb, mint a páratlan számok összege, vagyis
$$p_1 + p_2 + ... + p_m + p_{m+1} < 1 + 3 + 5 + ... + p_{m+1} = \left(\frac{p_{m+1}+1}{2}\right)^2. \tag{3}$$

(**3 pont**)

Az (2) és (3) alapján
$$\left(\frac{p_{m+1}+1}{2}\right)^2 < \left(\frac{p_{m+1}+1}{2}\right)^2,$$
ami ellentmondás. Tehát a feltételezésünk hamis. (**1 pont**)

■