VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Ha az a, b és c pozitív valós számok szorzata 1, igazold, hogy

$$\frac{a^{2025}+a^{2024}}{1+bc}+\frac{b^{2025}+b^{2024}}{1+ac}+\frac{c^{2025}+c^{2024}}{1+ab}\geq 3.$$

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$\frac{a^{2025}+a^{2024}}{1+bc}=\frac{a^{2025}+a^{2024}}{1+\frac{1}{a}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\frac{a^{2024}(a+1)}{\frac{a+1}{a}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=a^{2025} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan $\frac{b^{2025}+b^{2024}}{1+ac}=b^{2025}$ és $\frac{c^{2025}+c^{2024}}{1+ab}=c^{2025}$. **(1 pont)**

A feladatbeli egyenlőtlenség egyenértékű az $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}\geq 3$ **(1)** egyenlőtlenséggel. **(1 pont)**

$a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}=\left(a^{675}\right)^3+\left(b^{675}\right)^3+\left(c^{675}\right)^3$ **(1 pont)**

Az $x=a^{675}$, $y=b^{675}$ és $z=c^{675}$ jelölésekkel $xyz=1$ és $x,y,z>0$

$x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=$ **(1 pont)**

$=3xyz+(x+y+z)\cdot\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2)$ **(1 pont)**

$x+y+z>0$ és $((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2)\geq 0$

Tehát $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz=3$, azaz $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}\geq 3$ **(1 pont)**

Megjegyzés. Bizonyítás nélkül is ismertnek tekintjük az $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$ egyenlőtlenséget.

Megjegyzés. Az $a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}\geq 3$ egyenlőtlenség bizonyítható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is: **(1 pont)**

$\frac{a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}}{3}\geq\sqrt[3]{a^{2025}\cdot b^{2025}\cdot c^{2025}}\Leftrightarrow$ **(1 pont)**

$\frac{a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}}{3}\geq\sqrt[3]{(abc)^{2025}}\Leftrightarrow$ **(1 pont)**

$a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}\geq 3.$ **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy tetszőleges a és b valós számok esetén a következő egyenletek közül legalább egynek van valós megoldása:

$$x^2+2ax+2b=0;$$

$$x^2+2bx+2a=0;$$

$$x^2+4x-ab=0.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A Reductio ad absurdum módszerét használjuk. Feltételezzük, hogy egyik egyenletnek sincs valós megoldása. **(1 pont)**

Az $x^2 + 2ax + 2b = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_1 = 4a^2 - 8b < 0$. **(1 pont)**

Az $x^2 + 2bx + 2a = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_2 = 4b^2 - 8a < 0$. **(1 pont)**

Az $x^2 + 4ax - 2ab = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós megoldása, ha $\Delta_3 = 16 + 4ab < 0$. **(1 pont)**

A fentiek alapján $S = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0$. **(1)** **(1 pont)**

Ugyanakkor $S = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 = 4a^2-8b+4b^2-8a+16+4ab = 2(a^2+2ab+b^2+a^2-4a+4+b^2-4b+4) = 2\left((a+b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2\right)$ **(2 pont)**

Tehát mivel $(a+b)^2 \geq 0, (a-2)^2 \geq 0$ és $(b-2)^2 \geq 0$, következik, hogy $S \geq 0$ **(2)**. **(1 pont)**

Az **(1)** és **(2)** ellentmond egymásnak, tehát legalább az egyik egyenletnek van valós megoldása. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$. A trapéz kör köré írható, és jelölje E, F, G és H rendre a trapézba írt kör és az AB, BC, CD valamint DA oldalak érintési pontjait. Legyen J, K, L és M rendre az EGH, EFH, EFG és FGH háromszög súlypontja.

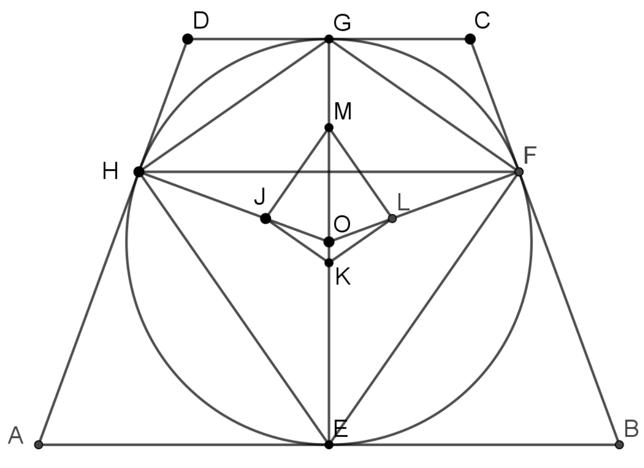
a) Igazold, hogy $JK \parallel GF$!

b) Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $JKLM$ négyszögek súlypontjai egybeesnek! (Egy négyszög súlypontja az átlói felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja.)

c) Legyen N a KL és MJ egyenesek metszéspontja. Ha J az NM szakasz felezőpontja és $AB = 4$, számítsd ki a $JKLM$ négyszög területét!

Mészár Julianna, Nagyszalonta
Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{r_K} - \overrightarrow{r_J} =$ **(1 pont)**

$= \dfrac{\overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F} + \overrightarrow{r_H}}{3} - \dfrac{\overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_G} + \overrightarrow{r_H}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{r_F} - \overrightarrow{r_G}}{3} =$ **(1 pont)**

$= \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{GF}$. Tehát $JK \parallel GF$. **(1 pont)**

b) Ha T Az $EFGH$ négyszög súlypontja, akkor $\overrightarrow{r_T} = \dfrac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_F}+\overrightarrow{r_G}+\overrightarrow{r_H}}{4}$ (**1 pont**)

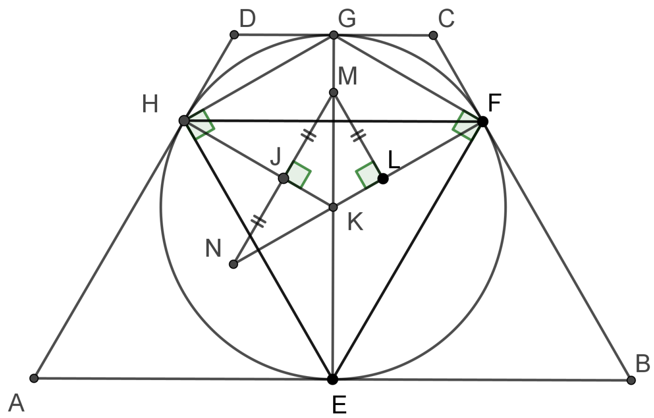
A $JKLM$ négyszög S súlypontjára pedig

$$\overrightarrow{r_S} = \frac{\overrightarrow{r_J}+\overrightarrow{r_K}+\overrightarrow{r_L}+\overrightarrow{r_M}}{4} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_H}+\overrightarrow{r_G}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_H}+\overrightarrow{r_F}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_F}+\overrightarrow{r_G}}{3}+\dfrac{\overrightarrow{r_F}+\overrightarrow{r_H}+\overrightarrow{r_G}}{3}}{4} =$$

(**1 pont**)

$$= \frac{\overrightarrow{r_E}+\overrightarrow{r_F}+\overrightarrow{r_G}+\overrightarrow{r_H}}{4} = \overrightarrow{r_T} \Rightarrow S = T$$

(**1 pont**)



c) Az a) alpont alapján $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{GF}$, hasonlóan igazolható, hogy $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{HE}$ és $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{FE}$.

Tehát az $EFGH$ és $MJKL$ deltoid hasonló egymással és a hasonlósági arány $\frac{1}{3}$, így a területek aránya $\frac{1}{9}$. (**1 pont**)

Az egyenlő szárú trapéz szimmetriája miatt GE a beírt kör átmérője, tehát $\widehat{GFE} = \widehat{GHE} = 90° \Rightarrow \widehat{MJK} = \widehat{MLK} = 90°$

Az NLM derékszögű háromszögben $ML = \frac{MN}{2}$, tehát $\widehat{NML} = 60°$ De $\widehat{NML} = \widehat{FEH}$, tehát az FEH háromszög egyenlő oldalú. (**1 pont**)

A külső pontból húzott érintők egyenlősége miatt az AHE és BEF háromszögek is egyenlő oldalúak, tehát $EF = FH = EH = AE = 2$ és $EG = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Az előzőek alapján $T_{EFGH} = \dfrac{FH\cdot EG}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow T_{JKLM} = \dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ konvex négyszögben E és F rendre az AC és BD átlók felezőpontja, G és H rendre az AD és BC oldalak felezőpontja, illetve fennáll a $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}$ egyenlőség.

a) Bizonyítsd be, hogy az E és F pontok egybeesnek!

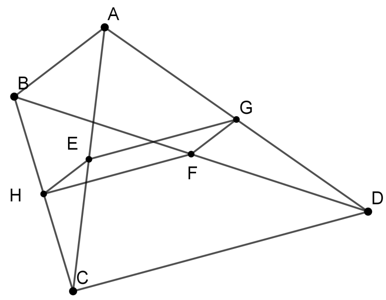
b) Bizonyítsd be, hogy a G, E és H pontok kollineárisak!

c) Ha M a CD egyenes azon pontja, amelyre $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ és P az AH és BM egyenesek metszéspontja, akkor határozd meg az $\frac{AP}{PH}$ és $\frac{BP}{PM}$ arányok értékét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) *Első megoldás*



A feladat feltételei alapján az EH szakasz az ABC háromszög középvonala, tehát $EH \parallel AB$ és $EH = \frac{AB}{2}$, hasonlóan a GF szakasz az ABD háromszög középvonala, tehát $GF \parallel AB$ és $GF = \frac{AB}{2}$.
A fentiek alapján $EH \parallel GF$ és $EH = GF$, tehát $EHGF$ paralelogramma. **(1 pont)**
A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:
$\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow$ **(1 pont)**
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EH} - (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF}) = 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}$ **(1 pont)**
(Használtuk, hogy $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF}$, mert $EHGF$ paralelogramma)
Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. **(1 pont)**
Második megoldás
Írjuk fel a pontok helyzetvektorait!
$\overrightarrow{r_E} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2}$, $\overrightarrow{r_F} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2}$, $\overrightarrow{r_H} = \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2}$, $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_D}}{2}$. **(1 pont)**
A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:
$\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_G} - \overrightarrow{r_H} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_F} - \overrightarrow{r_E} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\overrightarrow{r_D} + \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_D}}{2} - \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{2} = -\overrightarrow{r_C} + \frac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2} - \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2} \Leftrightarrow$ **(1 pont)**
$\Leftrightarrow -\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_A} = -\overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$ **(1 pont)**
Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. **(1 pont)**
Harmadik megoldás

A feladatbeli egyenlőség egyenértékű a következő egyenlőségekkel:

$\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$**(1)** (**1 pont**)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \Rightarrow 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. **(2)** (**1 pont**)

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH} \Rightarrow 2\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. **(3)** (**1 pont**)

A **(2)** és **(3)** összefüggéseket összeadva kapjuk, hogy $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}$ **(4).**

Az **(1)** és **(4)** összefüggések alapján $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

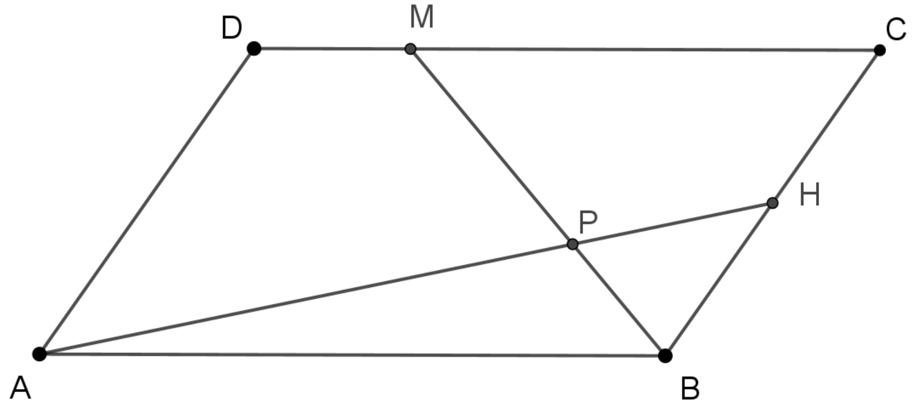
Tehát $ABCD$ paralelogramma, amiből következik, hogy átlói felezik egymást, tehát $E = F$. (**1 pont**)

b) Mivel az a) alpont alapján $ABCD$ paralelogramma, következik, hogy E mindkét átló felezőpontja.

EH az ABC háromszög középvonala, tehát $EH \parallel AB$, GE az ABD háromszög középvonala, tehát $GE \parallel AB$, (**1 pont**)

de az E ponton át az AB egyeneshez csak egy párhuzamos húzható, tehát a G, E és H pontok kollineárisak. (**1 pont**)

c) *Első megoldás*



Legyen $\dfrac{AP}{AH} = x$ és $\dfrac{BP}{BM} = y$.

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (**1 pont**)

$\overrightarrow{PH} = (1-x)\overrightarrow{AH} = (1-x)\overrightarrow{AB} + \dfrac{1-x}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BP} = y\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BC} - \dfrac{3y}{4}\overrightarrow{AB}$ (**1 pont**)

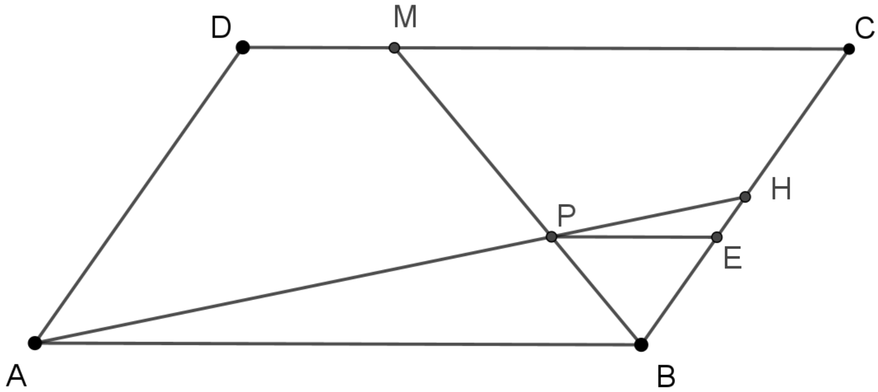
$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{BH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PH} = \left(1 - x - \dfrac{3y}{4}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\dfrac{1-x}{2} + y\right)\overrightarrow{BC}$

Tehát $1 - x - \dfrac{3y}{4} = 0$ és $\dfrac{1-x}{2} + y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{11}, y = \dfrac{4}{11}$

Ahonnan $\dfrac{AP}{PH} = \dfrac{8}{3}$ és $\dfrac{BP}{PM} = \dfrac{4}{7}$. (**1 pont**)

Második megoldás



A P ponton keresztül párhuzamost húzunk az AB-vel, ami a BC oldalt az E pontban metszi.

Az ABH háromszögben a hasonlóság alaptételéből

$$x = \frac{PH}{AH} = \frac{PE}{AB} = \frac{HE}{BH} = \frac{BH - BE}{BH} = \frac{\frac{1}{2}BC - BE}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BC - 2BE}{BC} = 1 - 2 \cdot \frac{BE}{BC}$$ (**1 pont**)

A BMC háromszögben a hasonlóság alaptételéből

$$y = \frac{BP}{BM} = \frac{BE}{BC} = \frac{PE}{MC} = \frac{PE}{\frac{3}{4}CD} = \frac{4}{3} \cdot \frac{PE}{AB} = \frac{4}{3} \cdot x$$ (**1 pont**)

A fentiek alapján $y = \frac{4}{3} \cdot x$ és $x = 1 - 2y$, ahonnan $x = \frac{8}{11}$ és $y = \frac{4}{11}$, azaz $\frac{AP}{PH} = \frac{8}{3}$ és $\frac{BP}{PM} = \frac{4}{7}$. (**1 pont**)

■