IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az x, y, z és t valós számokat, amelyekre

$$2x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 - 6xy - 2yz - 2zt - 2t + 2 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Az egyenlőség mindkét oldalát beszorozzuk 2-vel, majd megfelelően csoportosítva a tagokat teljes négyzeteket alakítunk ki:

$$4x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 2t^2 - 12xy - 4yz - 4zt - 4t + 4 = 0, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$(4x^2 - 12xy + 9y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (4z^2 - 4zt + t^2) + (t^2 - 4t + 4) = 0,$$
$$(2x - 3y)^2 + (y - 2z)^2 + (2z - t)^2 + (t - 2)^2 = 0. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

A teljes négyzetek összege akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha minden tag nulla, vagyis

$$(2x - 3y)^2 = 0, \quad (y - 2z)^2 = 0, \quad (2z - t)^2 = 0 \quad \text{és} \quad (t - 2)^2 = 0, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

innen pedig $2x = 3y$, $y = 2z$, $2z = t$ és $t = 2$. **(1 pont)**
Ezért $t = 2$, $z = 1$, $y = 2$ és $x = 3$ az egyetlen valós számokból álló megoldás. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a \cdot b \cdot c = 1$, akkor

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

(***)

Megoldás. Mivel $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ezért

$$a^3 + b^3 + 1 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) + abc \qquad \textbf{(3 pont)}$$
$$\geq (a + b)ab + abc = (a + b + c)ab \qquad \textbf{(2 pont)}$$
$$= \frac{a + b + c}{c}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{c}{a + b + c}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{a}{a + b + c} \quad \text{és} \quad \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{b}{a + b + c}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A kapott három egyenlőtlenséget összegezve kapjuk, hogy

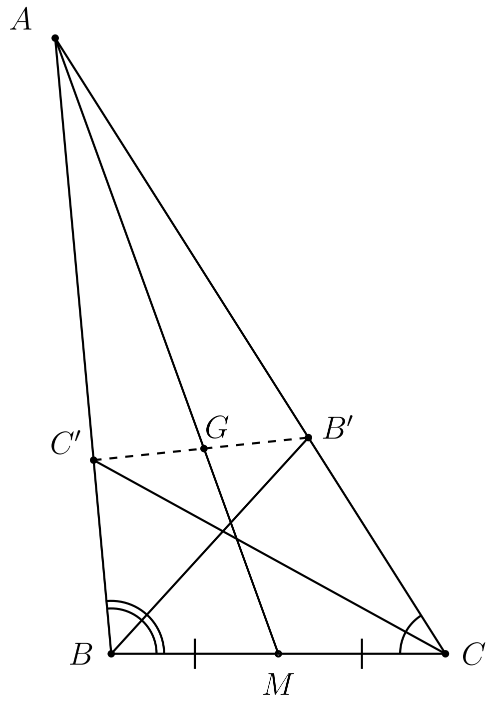
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Legyen G az ABC általános háromszög súlypontja, B' és C' pedig rendre a B és a C csúcsból kiinduló szögfelező talppontja. Igazold, hogy ha a B', G és C' pontok kollineárisak, akkor $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$. *(***)*

Első megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



Legyen $AB = c$, $AC = b$ és $BC = a$.
Az ABC háromszögben a CC'-re felírt szögfelező tétel alapján

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}, \quad \text{innen} \quad \frac{AC'}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{vagyis} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Hasonlóan a BB'-re felírt szögfelező tétel alapján

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{c}{a}, \quad \text{innen} \quad \frac{AB'}{AC} = \frac{c}{a+c}, \quad \text{vagyis} \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Legyen M a BC oldal felezőpontja, ekkor

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GC'} &= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2b-a}{3(a+b)}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad (\mathbf{1\ pont})\end{aligned}$$

és analóg módon

$$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2c-a}{3(a+c)}\overrightarrow{AC}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

A B', G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha a $\overrightarrow{GB'}$ és $\overrightarrow{GC'}$ kollineáris, vagyis ha **(1 pont)**

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2b-a}{3(a+b)}} = \frac{\frac{2c-a}{3(a+c)}}{-\frac{1}{3}}.$$

A fenti egyenlőséget rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\frac{a+b}{2b-a} = \frac{2c-a}{a+c}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$(a+b)(a+c) = (2b-a)(2c-a),$$

$$a^2+ac+ab+bc = 4bc-2ab-2ac+a^2,$$

$$3ab+3ac = 3bc.$$

Elosztva mindkét oldalt $3abc$-vel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan belátjuk, hogy

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB'} = \frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}). \qquad \textbf{(4 pont)}$$

A B', G és C' pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB'} + (1-k)\overrightarrow{AC'}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ez alapján

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = k\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC} + (1-k)\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen egyrészt $\frac{1}{3} = k\frac{c}{a+c}$, ahonnan $3k = \frac{a+c}{c} = 1+\frac{a}{c}$, **(1 pont)**
másrészt $\frac{1}{3} = (1-k)\frac{b}{a+b}$, ahonnan $3-3k = \frac{a+b}{b}$, vagyis $3k = \frac{2b-a}{b} = 2-\frac{a}{b}$. **(1 pont)**
Az előző összefüggések alapján

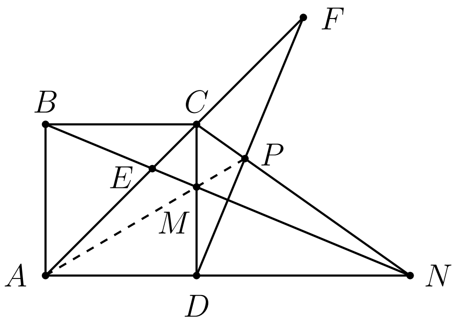
$$1+\frac{a}{c} = 2-\frac{a}{b},$$

ahonnan $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$, vagyis $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adott az $ABCD$ négyzet. Felvesszük az E pontot az AC szakaszon, valamint az F pontot az AC egyenesen a négyzet külső tartományában úgy, hogy $AE = CF = AB$. Legyen a BE egyenes és a DC szakasz metszéspontja M, a BE egyenes és az AD egyenes metszéspontja N, valamint a CN egyenes és a DF egyenes metszéspontja P. Igazold, hogy az A, M és P pontok kollineárisak. *(***)*

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát.



Az A, M és P pontok kollinearitása igazolható, ha alkalmazzuk a Meneláosz-tételt a DCF háromszögben az AP szelőre. Ehhez be kell látnunk, hogy

$$x = \frac{CA}{FA} \cdot \frac{FP}{DP} \cdot \frac{DM}{CM} = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Alkalmazva a Meneláosz-tételt a DAF háromszögben az N, P, C kollineáris pontokra kapjuk, hogy

$$\frac{AN}{DN} \cdot \frac{DP}{FP} \cdot \frac{FC}{AC} = 1, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{FP}{DP} = \frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $CD \parallel AB$, ezért a hasonlóság alaptétele szerint az ABN háromszög hasonló a DMN háromszöggel, ahonnan

$$\frac{AN}{DN} = \frac{AB}{DM}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

valamint az ABE háromszög hasonló a CME háromszöggel, ahonnan

$$\frac{AB}{CM} = \frac{AE}{CE}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fentiek alapján

$$x = \frac{AC}{AF} \cdot \left(\frac{AN}{DN} \cdot \frac{CF}{AC}\right) \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AB}{DM} \cdot \frac{DM}{CM} = \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Felhasználva, hogy $AB = AE = CF$, az $x = 1$ összefüggést rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AF \cdot CE, && \textbf{(1 pont)}\\
AB^2 &= (2 \cdot AE + CE) \cdot CE = 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2,\\
2AB^2 &= AE^2 + 2 \cdot AE \cdot CE + CE^2 = (AE + CE)^2 = AC^2,\\
AB\sqrt{2} &= AC,
\end{aligned}$$

ami igaz, mivel $ABCD$ négyzet. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■