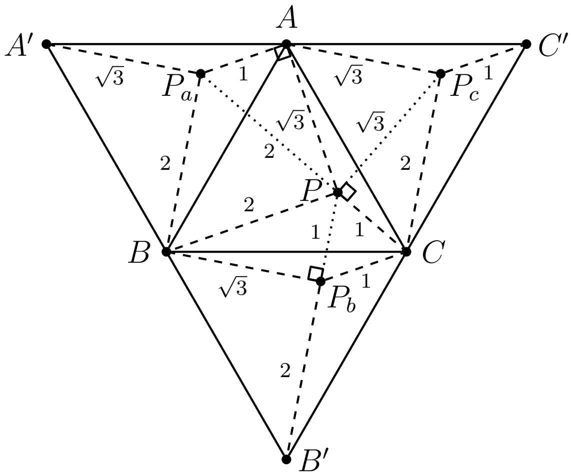
IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Az ABC szabályos háromszög belsejében adott egy P pont, melyre $PA = \sqrt{3}$, $PB = 2$ és $PC = 1$. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát! *(***)*

Első megoldás. Az ABC háromszöget elforgatjuk $60°$-kal trigonometriai irányban a B, C, illetve az A csúcs körül. **(2 pont)**



Használjuk az ábra jelöléseit. Így az $AP_aBP_bCP_c$ hatszög területe kétféleképpen írható fel:

$$2 \cdot T_{ABC} = T_{AP_aBP_bCP_c} = T_{PP_aB} + T_{PP_bC} + T_{PP_cA} + T_{PAP_a} + T_{PBP_b} + T_{PCP_c}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, vagyis $AP_a^2 + AP^2 = PP_a^2$, ezért a PAP_a háromszög derékszögű. Hasonlóan a PBP_b és a PCP_c háromszög is derékszögű. Így mindhárom háromszög területe $\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}$. **(1 pont)**

A $60°$-os forgatások miatt a PP_cA, PP_bC, PP_aB háromszögek egyenlő oldalúak. **(1 pont)**

Ha a-val jelöljük az ABC háromszög oldalhosszát, akkor

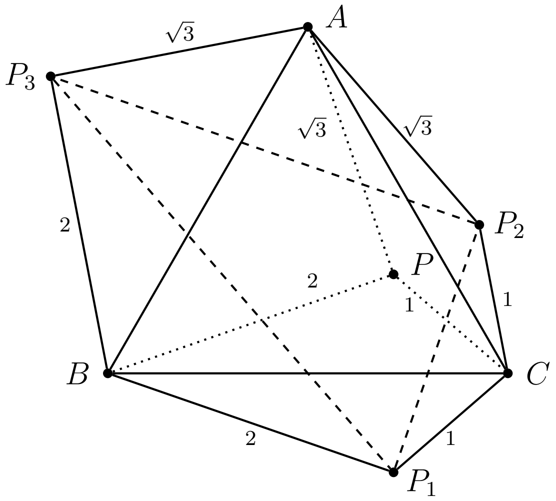
$$2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan $2a^2 = 4 + 1 + 3 + 6$, vagyis $a^2 = 7$. Tehát $a = \sqrt{7}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Jelöljük a P pont szimmetrikusait a BC, CA és AC oldalakra nézve rendre P_1-gyel, P_2-vel és P_3-mal.



(2 pont)

Ekkor $BPC_\Delta \equiv BP_1C_\Delta$, $CPA_\Delta \equiv CP_2A_\Delta$, $APB_\Delta \equiv AP_3B_\Delta$ és így $T_{AP_2CP_1BP_3} = 2 \cdot T_{ABC}$, valamint

$$\widehat{P_1CP_2} = \widehat{P_2AP_3} = \widehat{P_3BP_1} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Így a P_1CP_2, P_2AP_3, P_3BP_1 háromszögekben a koszinusz-tétel alapján

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= 1^2 + 1^2 - 2\cos 120^\circ = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \\ P_2P_3^2 &= 3 + 3 - 2 \cdot 3 \cos 120^\circ = 6 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9, \\ P_3P_1^2 &= 4 + 4 - 2 \cdot 4 \cos 120^\circ = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 = P_3P_1^2$, ezért a $P_1P_2P_3$ háromszög derékszögű. Így

$$T_{P_1P_2P_3} = \frac{P_1P_2 \cdot P_2P_3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} T_{P_1CP_2} + T_{P_2AP_3} + T_{P_3BP_1} &= \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ}{2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2}\right) \sin 120^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

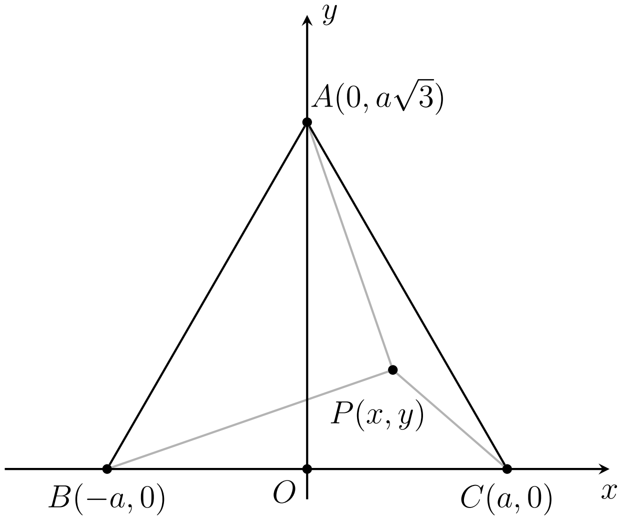
Ezeket felhasználva, az $AP_2CP_1BP_3$ hatszög területe

$$T_{AP_2CP_1BP_3} = T_{P_1P_2P_3} + T_{P_1CP_2} + T_{P_2AP_3} + T_{P_3BP_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen kapjuk, hogy $T_{ABC} = \frac{7}{4}\sqrt{3}$. Mivel $T_{ABC} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, ahol $AB = a$, ezért $a = \sqrt{7}$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Helyezzünk el egy xOy derékszögű koordináta-rendszert a mellékelt ábra szerint, és vegyük fel a $P(x, y)$ pontot a háromszög belsejében. (**1 pont**)



A BP szakasz hossza $BP = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2$, (**1 pont**)
a PC szakasz hossza $PC = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = 1$, (**1 pont**)
illetve az AP szakasz hossza $AP = \sqrt{x^2 + (y - a\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$. (**1 pont**)
Így négyzetreemelés után felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 4 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2 \\ 3 = 3a^2 - 2ay\sqrt{3} + y^2 + x^2 \\ 1 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2. \end{cases}$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\begin{cases} 3 = 4ax, \\ \frac{5}{2} = a^2 + x^2 + y^2, \\ 1 = 4a^2 - 4ay\sqrt{3}. \end{cases}$$ (**3 pont**)

Az első egyenletből az $x = \frac{3}{4a}$, a harmadikból pedig az $y = \frac{4a^2-1}{4a\sqrt{3}}$ kifejezést kapjuk. Innen, a második egyenlet alapján

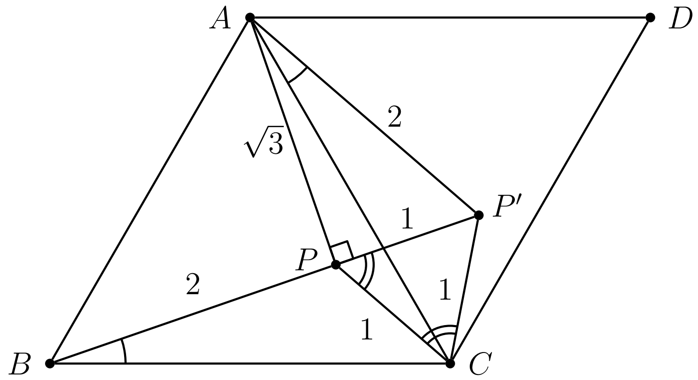
$$\frac{5}{2} = a^2 + \frac{9}{16a^2} + \frac{(4a^2-1)^2}{48a^2}.$$

Beszorozva $48a^2$-tel, majd mindent egy oldalra rendezve, kapjuk, hogy

$$16a^4 - 32a^2 + 7 = 0.$$ (**1 pont**)

Ennek az a^2-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai $a^2 = \frac{7}{4}$, vagy $a^2 = \frac{1}{4}$. Azaz $AB = \sqrt{7}$ vagy $AB = 1$. Az utóbbi nem lehetséges, mert az APB háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség alapján $AB > 1$. Így $AB = \sqrt{7}$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)
■

Negyedik megoldás. Az ABC háromszöget elforgatjuk a C pont körül $60°$-os szöggel úgy, hogy a B pont az A pontba kerüljön. (**2 pont**)
Legyen D és P' az A-nak, illetve a P-nek a forgatás szerinti képe.



A $PP'C$ háromszög egyenlő oldalú, így $PP' = 1$. (**1 pont**)
Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, ezért $P'P^2 + PA^2 = P'A^2$, vagyis az APP' háromszög derékszögű. (**2 pont**)
Ekkor

$$\widehat{APC} = \widehat{APP'} + \widehat{P'PC} = 90° + 60° = 150°. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az APC háromszögben a koszinusz-tétel alapján

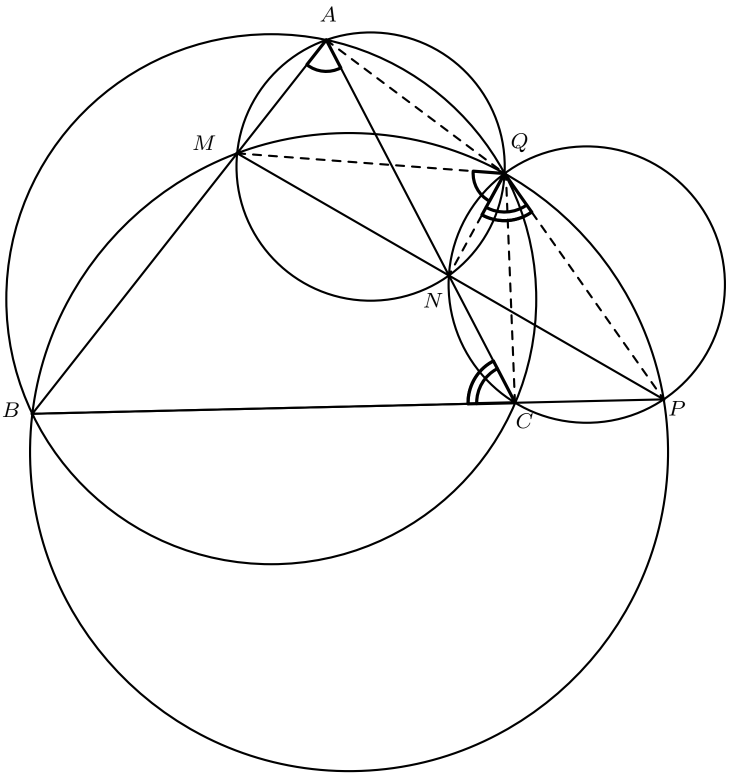
$$\begin{aligned} AC^2 &= PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC \cdot \cos\widehat{APC} \quad \textbf{(1 pont)} \\ &= 3 + 1 - 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos 150° \\ &= 4 - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7. \end{aligned}$$

Tehát $AB = \sqrt{7}$. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Adott az ABC háromszög, valamint az $M \in (AB)$ és az $N \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MN \nparallel BC$. Legyen $MN \cap BC = \{P\}$. Igazold, hogy az ABC, BMP, AMN és NCP háromszögek köré írt körök egy ponton mennek át! *(***)*

Megoldás. Az AMN és NCP háromszögek köré írt körök egyik metszéspontja N. Ha ezek a körök N-ben érintenék egymást, akkor azt kapnánk, hogy $AM \parallel PC$, ami nem igaz. Ezért a két körnek mindig lesz egy második metszéspontja, jelöljük ezt Q-val. (**2 pont**)



Mivel $AMNQ$ körbeírható négyszög, ezért $\widehat{MAN} \equiv \widehat{MQN}$. **(1 pont)**
Az $NCPQ$ négyszög szintén körbeírható, ami alapján $\widehat{NQP}+\widehat{NCP} = 180°$, amiből következik, hogy $\widehat{NQP} \equiv \widehat{ACB}$. **(1 pont)**
Az előző két összefüggés alapján az $MBPQ$ négyszögben

$$\widehat{MBP} + \widehat{MQP} = \widehat{ABC} + \left(\widehat{MQN} + \widehat{NQP}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°,$$

tehát az $MBPQ$ négyszög körbeírható. **(1 pont)**
Az $MBPQ$ négyszög köré írt kör megegyezik a BMP háromszög köré írt körrel, ezért a BMP háromszög köré írt kör átmegy a Q ponton. **(1 pont)**
Hasonlóan igazolható, hogy az $ABCQ$ négyszög is körbeírható:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AQC} = \widehat{ABC} + \left(\widehat{AQN} + \widehat{NQC}\right) = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} + \widehat{MPB} = 180°. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Így az ABC háromszög köré írt kör is átmegy a Q-n. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

3. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán az $x^6 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^6 = 65$ egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. A $\frac{2x}{x+2}$ törtet y-nal jelölve azt kapjuk, hogy

$$x - y = \frac{x^2}{x+2} \quad \text{és} \quad xy = \frac{2x^2}{x+2} = 2(x-y). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A továbbiakban az $x^6+y^6=65$ egyenletet fogjuk megoldani, a $t=x-y$ jelölés és az $xy=2t$ összefüggés segítségével.
Észrevesszük, hogy

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=t^2+4t. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan az $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$ összefüggésből következik, hogy

$$x^4+y^4=t^4+8t^3+8t^2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Analóg módon az

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4+y^4-x^2y^2)=(t^2+4t)(t^4+8t^3+4t^2) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

eredményhez jutunk, tehát az eredeti egyenlet a

$$(t^2+4t)(t^4+8t^3+4t^2)=65 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

alakba írható. Ennek az egyenletnek csak a $t=\frac{x^2}{x+2}$ alakú megoldásai keressük, ahol x egy valós szám. Az x-et a t függvényében kifejezve, az $x^2-tx-2t=0$ összefüggéshez jutunk. Ennek a diszkriminánsa $\Delta=t^2+8t$, ami akkor nem negatív, ha $t\geq 0$ vagy $t\leq -8$. **(1 pont)**
Ha $t\leq -8$, akkor a másodfokú függvények tulajdonságai alapján

$$(t^2+4t)(t^4+8t^3+4t^2)=t^2\left((t+2)^2-4\right)\left((t+4)^2-12\right)\geq 64\cdot 32\cdot 4>65,$$

vagyis ebben az esetben nem jutunk megoldáshoz. **(1 pont)**
Ha $t\geq 0$, akkor az $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=(t^2+4t)(t^4+8t^3+4t^2)$ függvény szigorúan növekvő és ezért ebben az esetben legfeljebb egy megoldásunk lehet. Észrevesszük, hogy $t=1$ megoldás. Összefoglalva az $x^6+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^6=65$ egyenletnek pontosan azok az x-ek a megoldásai, amelyekre $\frac{x^2}{x+2}=1$, vagyis $x=-1$ és $x=2$. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

Második megoldás. Értelmezzük az $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^6-65$ folytonos és deriválható függvényt. Ekkor $f'(x)=6x^5\left(1+2^7(x+2)^{-7}\right)$, vagyis $f'(x)$ pontosan akkor 0, ha $x=0$ vagy $x=-4$. **(2 pont)**
Ezek alapján elkészítjük az f függvény változási táblázatát.

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty \mid -\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$2^{13}-65>0$	$+\infty \mid +\infty$	-65	$+\infty$

(5 pont)

Ennek alapján az $f(x)=0$ egyenletnek pontosan két valós gyöke van, egy a $(-2,0)$ intervallumban, egy pedig a $(0,\infty)$ intervallumban.
Észrevesszük, hogy $x=-1$ és $x=2$ megoldás és az eddigiek alapján pontosan ez a két valós megoldása van ennek az egyenletnek. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**
■

4. feladat (10 pont)**.** Legyenek $a,b,c\in(0,\infty)$ valós számok úgy, hogy $abc=1$. Igazold a

$$9a^3+9b^3+9c^3\geq 9a^2+9b^2+9c^2-4a-4b-4c+12$$

egyenlőtlenséget!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.
(1 pont)
Az igazolandó egyenlőtlenség szimmetrikus, ezért feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c > 0$. Ekkor a rendezési tétel alapján felírhatjuk az

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ba^2 + cb^2 + ac^2$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ca^2 + ab^2 + bc^2$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq aa^2 + bb^2 + cc^2 \qquad \textbf{(3 pont)}$$

egyenlőtlenségeket. Ezen egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2), \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Innen a

$$9(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a + b + c) \geq 9(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

eredményhez jutunk. Mivel

$$4(a + b + c) \geq 4 \cdot 3 = 12, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért a tagok átrendezése után a

$$9a^3 + 9b^3 + 9c^3 \geq 9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 4a - 4b - 4c + 12 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

igaz egyenlőtlenséget kapjuk.
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Tekintsük az $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - e^{2x} + \frac{4}{9}e^x$ függvényt. **(2 pont)**
Ekkor

$$f'(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x} + \frac{4}{9}e^x \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és

$$f''(x) = 9e^{3x} - 4e^{2x} + \frac{4}{9}e^x = e^x\left(3e^x - \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

vagyis az f függvény konvex. Az $x = \ln a$, $y = \ln b$ és $z = \ln c$ valós számokra alkalmazva a Jensen-féle egyenlőtlenséget, az

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = f\left(\frac{\ln(abc)}{3}\right) = f(0) = \frac{4}{9}, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

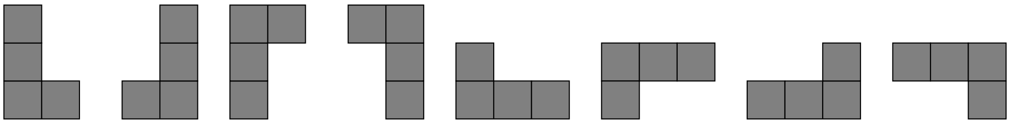
eredményhez jutunk, vagyis $f(x) + f(y) + f(z) \geq \frac{4}{3}$. **(1 pont)**
Az $f(x) = e^{3\ln a} - e^{2\ln a} + \frac{4}{9}e^{\ln a} = a^3 - a^2 + \frac{4}{9}a$ összefüggés és ennek analógjai alapján írhatjuk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2 - b^2 - c^2 - \frac{4}{9}(a + b + c) \geq \frac{4}{3}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan következik a kért egyenlőtlenség.
Hivatalból **(1 pont)**

■

5. feladat (10 pont). Egy 8×8-as sakktáblán L alakú résznek (tetraminónak) nevezzük az alábbi ábrán látható alakzatokat:



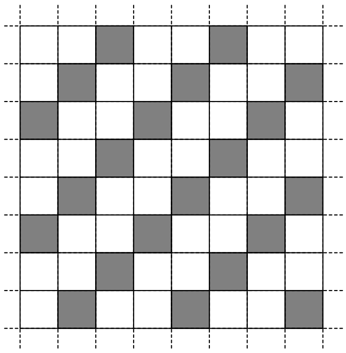
a) Jelölj meg a sakktáblán 21 mezőt úgy, hogy a sakktábla minden L alakú részén legyen legalább egy megjelölt mező!

b) Bizonyítsd be, hogy ha csak 20 mezőt jelölünk meg a sakktáblán, akkor ez a tábla biztosan tartalmaz egy olyan L alakú részt, amelyen nincs egyetlen megjelölt mező sem!

Tőtős György, Kolozsvár
András Szilárd, Kolozsvár

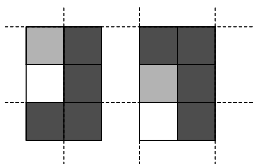
Megoldás.

a) Az alábbi ábrán megjelölt 21 mező teljesíti a kért feltételeket.

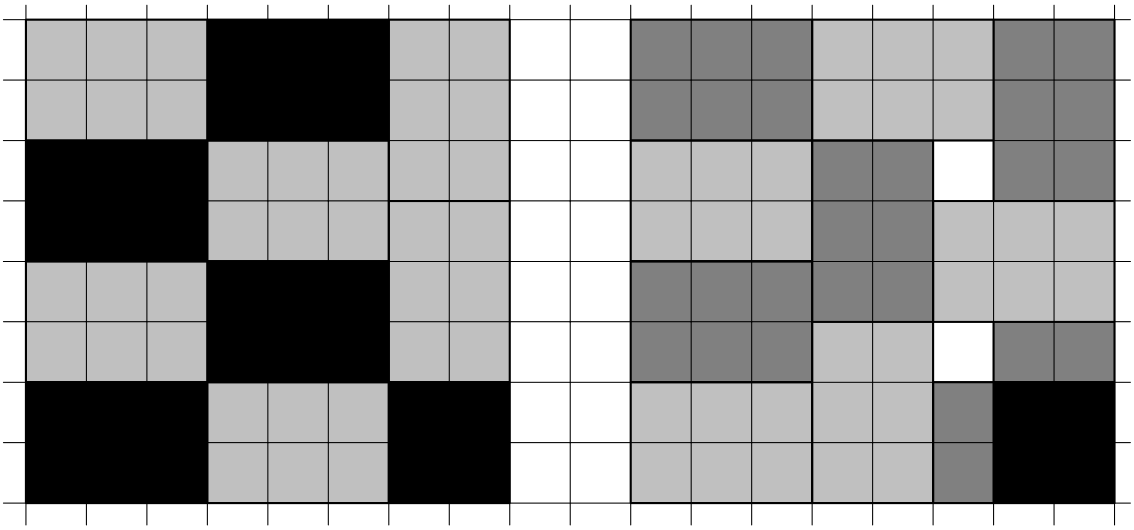


(4 pont)

b) Vegyük észre, hogy egy 3×2-es részen, ha nem jelölünk ki legalább két mezőt, akkor van azon a 3×2-es részen egy üres L alakzat. Valóban, ha csak egy mezőt jelölünk meg, akkor az vagy sarokmező (a 2×3-as részben) vagy nem. A mellékelt ábra mutatja, hogy mindkét esetben van olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt.



Az eredeti tábla felbontható 10 diszjunkt 3×2-es részre és egy 2×2-es részre. Tehát, ha 20 mezőt jelöltünk meg, akkor két eset lehetséges: vagy üres a 2×2-es és minden 3×2-es részen van pontosan 2 megjelölt mező, vagy van olyan 3×2-es rész, amelyen legfeljebb egy mezőt jelöltünk meg. A második esetben az első észrevétel alapján van a táblán olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt (az egy megjelölt mezőt tartalmazó 3×2-es részen). Az első esetben a 2×2-es részt 3×3-asra kiegészítve, ennek a darabnak 3 megjelölt mezőt kell tartalmaznia. Ennek a belátásához vegyünk két 2×3-as részt, amely közös része 2×2-es. Ha a közös rész üres, vagy egy megjelölt részt tartalmaz, akkor a közös részen kívüli 1×2-es részek mindegyike egy vagy két megjelölt mezőt kell tartalmazzon, vagyis összesen legalább hármat tartalmaz a 3×3-as rész. Ha a közös részen két megjelölt mező van akkor 3×3-as rész megmaradt része (egy egyenlő szárú L alak), kell tartalmazzon legalább egy megjelölt mezőt. Így ebben az esetben is legalább 3 megjelölt mező van. A maradék táblán viszont további 9 darab páronként diszjunkt 3×2-es részt lehet beazonosítani, ezért ezek legalább további 18 megjelölt mezőt kellene tartalmazzanak ahhoz, hogy ne legyen olyan L alakzat, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. Ez nem lehetséges mivel összesen csak 20 mező van megjelölve és $18 + 3 = 21 > 20$. Tehát a 20 megjelölt mező esetén biztosan van olyan L alakzat a táblán, amely nem tartalmaz megjelölt mezőt. A következő két ábra szemlélteti a gondolatmenetnek ezt a részét.



(5 pont)

Hivatalból **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** A sík koordináta-rendszerének rácspontjaiból rácspontjaiba lépegetünk. Az $O(a_0, b_0)$ pontból indulunk, ahol $a_0 = b_0 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az n-edik lépés azt jelenti, hogy az $(a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontról átlépünk egy tőle pontosan 13 egység távolságra lévő $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pontra. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok monoton növekvők. Határozd meg, hogy legkevesebb hány lépéssel juthatunk el a $(2022, 2022)$ pontba!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy
Zsombori Gabriella, Csíkszereda

Megoldás. Minden lépésben a jelenlegi helyzetünkhöz a $(0, 13)$, $(13, 0)$, $(5, 12)$, $(12, 5)$ vektorok valamelyikét adjuk hozzá. **(1 pont)**

A vektorokból rendre a, b, c és d darabot felhasználva az

$$a \cdot (0, 13) + b \cdot (13, 0) + c \cdot (5, 12) + d \cdot (12, 5)$$

pontba jutunk. Akkor jutunk el a $(2022, 2022)$ pontba, ha teljesül a

$$(2022, 2022) = a \cdot (0, 13) + b \cdot (13, 0) + c \cdot (5, 12) + d \cdot (12, 5)$$

összefüggés, ahol a megtett lépések száma $(a + b + c + d)$, aminek keressük a minimumát. **(1 pont)**

Az előbbi egyenlőség azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} 13b + 5c + 12d = 2022, \\ 13a + 12c + 5d = 2022. \end{cases}$$ **(2 pont)**

Az előbbi egyenletek megfelelő oldalait összeadva kapjuk, hogy

$$13(a+b)+17(c+d)=4044. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen $p=a+b$ és $q=c+d$, tehát p és q természetes számok. A $p+q$ összeg minimumát keressük úgy, hogy a $13p+17q=4044$ feltétel is teljesüljön. Mivel

$$4044=13p+17q=13(p+q)+4q,$$

ezért $p+q$ akkor minimális, ha q maximális. (**1 pont**)
A $13p+17q=4044$ diofantikus egyenlet megoldásai közül a feltételeknek megfelelő legnagyobb q a 231 és ekkor $p=9$. Tehát $p+q=a+b+c+d$ minimuma $231+9=240$. (**1 pont**)
Ez a minimális lépés szám meg is valósítható, például ha a

$$(2022,2022)=1\cdot(0,13)+8\cdot(13,0)+122\cdot(5,12)+109\cdot(12,5)$$

felbontást tekintjük. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. A $13p+17q=4044$ diofantikus egyenlet általánlnos megoldása

$$p=9+17t,\quad q=231-13t,\quad t\in\mathbb{Z}.$$

Annak a feltétele, hogy p,q természetes számok legyenek az, hogy $0\le t\le 17$. Így a

$$p+q=240+4t$$

kifejezés minimuma 240. Az a,b,c,d számok meghatározásához meg kell oldjuk a

$$\begin{cases} 13b+5c+12d=2022,\\ 13a+12c+5d=2022,\\ a+b=9,\\ c+d=231. \end{cases}$$

diofantikus egyenletrendszert a természetes számok halmazán. Két megoldás van, ezek

$$(1,8,122,109) \quad \text{és} \quad (8,1,109,122).$$