VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** a) Igazold, hogy $3^p + 2^p$ osztható 5-tel, bármely $p \geq 1$ páratlan természetes szám esetén!

b) Mutasd ki, hogy $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetén!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) *Első megoldás.* Mivel p páratlan, így $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$ vagy $p = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$ alakú. **(1 pont)**

I. eset: $p = 4k+1$ esetén

$$3^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 3^{4k+1} \equiv 3 \pmod 5$$
$$2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5$$
(1 pont)

ahonnan $3^{4k+1} + 2^{4k+1} \equiv 0 \pmod 5$. **(1 pont)**

II. eset: $p = 4k+3$ esetén az előző eset alapján

$$3^{4k+1} \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow 3^{4k+3} \equiv 2 \pmod 5$$
$$2^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+3} \equiv 3 \pmod 5$$
(1 pont)

ahonnan $3^{4k+3} + 2^{4k+3} \equiv 0 \pmod 5$, tehát a kért állítás igaz. **(1 pont)**

Második megoldás. Ellenőrizzük az állítást $p = 1$-re: $3^1 + 2^1 = 5 \,\vdots\, 5$. **(1 pont)**

Feltételezzük, hogy igaz $p = 2k+1$-re, $k \geq 1$ esetén, azaz

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} \,\vdots\, 5\,,$$

igazoljuk, hogy

$$3^{2k+3} + 2^{2k+3} \,\vdots\, 5\,.$$
(1 pont)

Ekkor $3^{2k+3} = 3^2 \cdot 3^{2k+1}$, az indukciós feltevés alapján pedig $3^{2k+1} + 2^{2k+1} = 5M$ alakú, azaz $3^{2k+1} = 5M - 2^{2k+1}$. **(1 pont)**

$$\begin{aligned} 3^{2k+3} + 2^{2k+3} &= 3^2(5M - 2^{2k+1}) + 2^{2k+3} \\ &= 5M \cdot 3^2 + 2^{2k+3} - 9 \cdot 2^{2k+1} \\ &= 5M \cdot 3^2 + 2^{2k+1}(4-9) \\ &= 5M \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^{2k+1} \,\vdots\, 5. \end{aligned}$$
(2 pont)

Harmadik megoldás. Ha $p = 2k+1$, akkor

$$3^{2k+1} + 2^{2k+1} = (3+2)(3^{2k} - 3^{2k-1} \cdot 2 + 3^{2k-2} \cdot 2^2 - \cdots + 2^{2k}),$$

vagyis a megadott kifejezés osztható 5-tel. **(5 pont)**

b) Mivel $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod 5$, ezért $3^{12} \equiv 1 \pmod 5$, vagyis $3^{12m+1} \equiv 3 \pmod 5$. (**1 pont**)

Hasonlóan, mivel $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5$, ezért $2^{12} \equiv 1 \pmod 5$, tehát $2^{12n+1} \equiv 2 \pmod 5$. (**1 pont**)

Tehát $3^{12m+1} + 2^{12n+5} \equiv 0 \pmod 5$, azaz $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetében. (**2 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Adott az $E(n) = 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2$ kifejezés, ahol $n \in \mathbb{N}$. Tanulmányozd, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre

a) $E(n)$ prímszám;

b) $E(n)$ teljes négyzet;

c) $E(n) = 210$.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az $E(n)$ kifejezést megpróbáljuk szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned} E(n) &= 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2 \\ E(n) &= (3^n)^2 + 2 \cdot 3^n \cdot 2^n + (2^n)^2 + 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n + 2 \\ E(n) &= (3^n + 2^n)^2 + 3(3^n + 2^n) + 2. \end{aligned}$$ (**1 pont**)

A $(3^n + 2^n)$-ben másodfokú $(3^n + 2^n)^2 + 3(3^n + 2^n) + 2 = 0$ egyenleteknek a gyökei -1 és -2,(**1 pont**) ezért

$$E(n) = (3^n + 2^n + 1) \cdot (3^n + 2^n + 2), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(**1 pont**)

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $E(n)$ két egymást követő, 1-nél nagyobb természetes szám szorzata, ezért nincs olyan n természetes szám, amelyre $E(n)$ prímszám. (**1 pont**)

b) Tekintettel arra, hogy $(3^n + 2^n + 1)^2 < E(n) < (3^n + 2^n + 2)^2$ és két egymást követő természetes szám négyzete között nincs egyetlen teljes négyzet sem, ezért nincs olyan n természetes szám, amelyre $E(n)$ teljes négyzet lenne. (**1 pont**)

c) Mivel

$$E(2) = (9 + 4 + 1)(9 + 4 + 2) = 14 \cdot 15 = 210,$$ (**3 pont**)

ezért a 2 teljesíti a kért feltételt. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 - 2x)(x^2 - x - 6)(x^2 - 3x - 4) + 36 = 0$$

egyenletet!

Longáver Lajos, Nagybánya

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bontsuk fel a másodfokú kifejezéseket elsőfokú kifejezések szorzatára:

$$x^2-2x=x(x-2),$$
$$x^2-x-6=x^2-3x+2x-6=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2),$$
$$x^2-3x-4=x^2-4x+x-4=x(x-4)+(x-4)=(x-4)(x+1).$$

Ekkor az egyenletünk a következőképpen alakul át:

$$x(x-2)(x-3)(x+2)(x-4)(x+1)+36=0\,.$$

Rendezzük:

$$(x-4)(x-3)(x-2)x(x+1)(x+2)+36=0\,.$$ **(1 pont)**

Észrevehetjük, hogy az $x=1$ megoldás, mert $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3+36=0$. **(1 pont)**
Az elsőfokú kifejezéseket csoportosítjuk ismét kettesével, így a következő párokat kapjuk $(x-2)\cdot x$, $(x-3)(x+1)$, illetve $(x-4)(x+2)$. Ha ezeket a szorzásokat elvégezzük, akkor az egyenlet a következő:

$$(x^2-2x)(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)+36=0\,.$$ **(1 pont)**

Ekkor legyen $y=x^2-2x$, ami alapján az $y(y-3)(y-8)+36=0 \iff y^3-11y^2+24y+36=0$ egyenletet kell megoldani. **(1 pont)**
Tudjuk, hogy $x=1$ megoldása volt az eredeti egyenletnek, így az $y=x^2-2x=1-2=-1$ megoldás. Ez alapján

$$\begin{aligned}
y^3-11y^2+24y+36&=0\\
y^3+y^2-12y^2-12y+36y+36&=0\\
y^2(y+1)-12y(y+1)+36(y+1)&=0\\
(y+1)(y^2-12y+36)&=0\\
(y+1)(y-6)^2&=0\,.
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Az $y+1=0$ esetben $x^2-2x=-1 \iff x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0$, tehát az $x_1=x_2=1$ megoldásai az eredeti egyenletnek. **(1 pont)**
Az $(y-6)^2=0$ esetben az $y=6$ kétszeres gyöke az egyenletnek.
Ha $y=6 \iff x^2-2x=6 \iff x^2-2x-6=0$, így $\Delta=4-4\cdot 1\cdot(-6)=28$, ahonnan $x_{3,4}=\dfrac{2\pm\sqrt{28}}{2}=1\pm\sqrt{7}$. De mivel $y=6$ kétszeres gyök volt, így $x_3=x_5=1+\sqrt{7}$, illetve $x_4=x_6=1-\sqrt{7}$. **(2 pont)**
Tehát az eredeti egyenlet megoldásai $x_1=x_2=1, x_3=x_5=1+\sqrt{7}, x_4=x_6=1-\sqrt{7}$.

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bontsuk fel a másodfokú kifejezéseket elsőfokú kifejezések szorzatára:

$$x^2-2x=x(x-2),$$
$$x^2-x-6=x^2-3x+2x-6=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2),$$
$$x^2-3x-4=x^2-4x+x-4=x(x-4)+(x-4)=(x-4)(x+1).$$

Ezért a megoldandó egyenletet a következő alakba írhatjuk:

$$x(x-2)(x-3)(x+2)(x-4)(x+1)+36=0\,.$$ **(1 pont)**

Ha $x-1=p$, akkor **(2 pont)**

$$\begin{aligned} x(x-2)(x-3)(x+2)(x-4)(x+1) &= (p+1)(p-1)(p-2)(p+3)(p-3)(p+2) \\ &= (p-1)(p+1)(p-2)(p+2)(p-3)(p+3). \end{aligned}$$

Tehát a megoldandó egyenlet a következő:

$$(p^2-1)(p^2-4)(p^2-9)+36=0. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Legyen $p^2=z$, ahonnan

$$(z-1)(z-4)(z-9)+36=z^3-14z^2+49z=z(z-7)^2=0. \quad \textbf{(2 pont)}$$

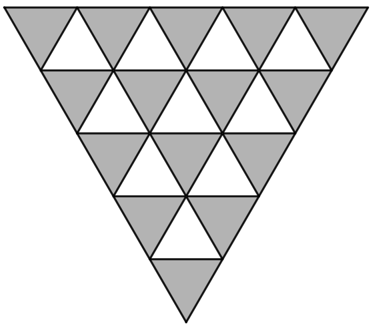
Ennek az egyenletnek a megoldásai $z_1=0$ és $z_2=z_3=7$. Mivel $x=p+1=z^2+1$, következik, hogy $x_1=x_2=1, x_3=x_5=1+\sqrt{7}, x_4=x_6=1-\sqrt{7}$. **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Egy kincskereső egy egyenlő oldalú háromszög alakú területet tár fel, amelynek oldala 5 egység. A terület fel van osztva kongruens egyenlő oldalú háromszögekre, amelyek oldalai 1 egység hosszúak és párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival. Minden egyes kis háromszögben egy kincs rejlik. A feltárást a kincskereső bármely kis háromszögben elkezdheti, ezután viszont egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet át, egy háromszögbe nem térhet vissza és nem hagyhatja el a nagy háromszög területét.
Maximálisan hány kincset gyűjthet be a kincskereső? Adj meg egy útvonalat, amely mentén haladva ez elérhető!

Kovács Melinda, Beszterce

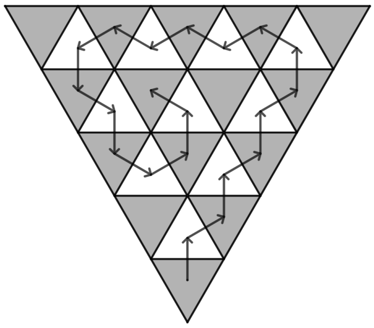
Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



1. ábra. Felosztás és színezés

Tekintve az 1. ábrát az első sorban 9, a második sorban 7, a harmadikban 5, a negyedikben 3 és az utolsó sorban 1 kis egyenlő oldalú háromszög szerepel. Így összesen $9+7+5+3+1=25$ kis háromszögre van felosztva a terület. **(1 pont)**
A kis háromszögeket színezzük be, váltakozva fekete és fehér színre, mint az 1. ábrán látható. Ekkor a fekete háromszögek száma $5+4+3+2+1=15$ lesz, míg a fehéreké $4+3+2+1=10$.
(2 pont)

Mivel a kincskereső egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet, így minden lépésben fekete színű háromszögből fehérbe, vagy fehér színűből feketébe fog menni. (**1 pont**)
A maximális útvonalat akkor érheti el a kincskereső, ha feketéből (a több) indul és bejárva az összes fehéret, fekete háromszögbe érkezik. (**2 pont**)
Mivel a fehér háromszögek száma 10, ezért egy út során legfennebb 10 darab fehér és 11 darab fekete háromszögön haladhat át a kincskereső, tehát legfennebb 21 kincset tud gyűjteni. (**1 pont**)
Ez el is érhető, egy ilyen útvonal látható a 2. ábrán. (**2 pont**)



2. ábra. Példa maximális hosszúságú útra

■

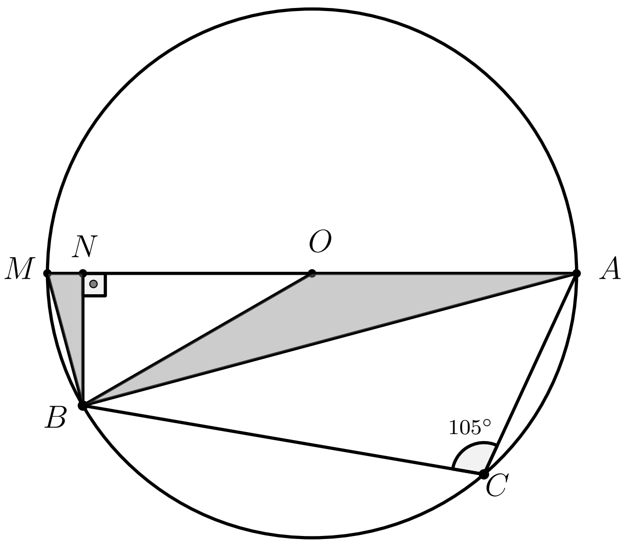
5. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszög köré írt kör középpontja O, átmérője AM és $N \in AM$ úgy, hogy $BN \perp AM$.

a) Számítsd ki az AOB és BNM háromszögek területének az arányát, ha $\widehat{C} = 105°$.

b) Mekkora az ABC háromszög C szögének a mértéke, ha $3 \cdot T_{AOB\triangle} = 2 \cdot T_{BNM\triangle}$ és $\widehat{C} > 90°$?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Mivel a $\widehat{C} = 105° \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 75°$.

Az ABC háromszög köré írt körön található $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2(\widehat{A} + \widehat{B}) = 150°$, ahonnan kapjuk, hogy $\overset{\frown}{MB} = 30° \Rightarrow \widehat{BAM} = 15°$. **(1 pont)**

$$\frac{T_{AOB\triangle}}{T_{BNM\triangle}} = \frac{OA \cdot d(B, OA)}{MN \cdot d(B, MN)} = \frac{OA}{MN}.$$

A BNM háromszögben $\widehat{NMB} = 75°$ és $\widehat{MNB} = 90°$, tehát

$$\cos \widehat{NMB} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MN = MB \cdot \cos \widehat{NMB} \Rightarrow MN = MB \cdot \cos 75°. \tag{1}$$

(1 pont)

Az ABM háromszögben $\widehat{NAB} = 15°$ és $\widehat{ABM} = 90°$, tehát

$$\sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin \widehat{MAB} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin 15°. \tag{2}$$

(1 pont)

Az (1) és (2) alapján kapjuk, hogy

$$MN = AM \cdot \sin 15° \cdot \cos 75° \Rightarrow MN = AM \cdot \sin 15° \cdot \sin 15° = AM \cdot \frac{1 - \cos 30°}{2} \Rightarrow MN = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \cdot AM,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{AOB\triangle}}{T_{BNM\triangle}} = \frac{OA}{MN} = \frac{4 \cdot OA}{(2 - \sqrt{3}) \cdot AM} = \frac{4 \cdot OA}{(2 - \sqrt{3}) \cdot 2 \cdot OA} = 2(2 + \sqrt{3}).$$ **(1 pont)**

b) Legyen $\widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \alpha$. Írhatjuk, hogy $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 2 \cdot (\widehat{A} + \widehat{B}) = 360° - 2\alpha$, ahonnan $\overset{\frown}{MB} = 2\alpha - 180°$ (mivel $\alpha > 90°$, ez a mérték pozitív). Ezért $\widehat{BAM} = \alpha - 90°$. **(1 pont)**

$$\frac{T_{AOB\triangle}}{T_{BNM\triangle}} = \frac{OA \cdot d(B, OA)}{MN \cdot d(B, MN)} = \frac{OA}{MN}.$$

A BNM háromszögben $\widehat{MBN} = \alpha - 90°$ és $\widehat{MNB} = 90°$, tehát

$$\sin \widehat{MBN} = \frac{MN}{MB} \Rightarrow MN = MB \cdot \sin \widehat{MBN} \Rightarrow MN = MB \cdot \sin(\alpha - 90°) \tag{3}$$

(1 pont)

Az ABM háromszögben $\widehat{NAB} = \alpha - 90°$ és $\widehat{ABM} = 90°$, tehát

$$\sin \widehat{MAB} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin \widehat{MAB} \Rightarrow MB = AM \cdot \sin(\alpha - 90°). \tag{4}$$

(1 pont)

A (3) és (4) alapján kapjuk, hogy $MN = MB \cdot \cos \widehat{NMB} \Rightarrow$

$$MN = AM \cdot \sin^2(\alpha - 90°)$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{T_{AOB\triangle}}{T_{BNM\triangle}} = \frac{OA}{MN} = \frac{OA}{2 \cdot OA \cdot \sin^2(\alpha - 90^\circ)} \Rightarrow \frac{T_{AOB\triangle}}{T_{BNM\triangle}} = \frac{1}{2 \cdot \sin^2(\alpha - 90^\circ)}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$3 \cdot T_{AOB\triangle} = 2 \cdot T_{BNM\triangle} \Leftrightarrow \sin^2(\alpha - 90^\circ) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2(-\alpha) = \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 150^\circ$ vagy $\alpha = 30^\circ$. Viszont a C tompaszög, ezért $\alpha = 150^\circ$. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont)**.** Robi felírt a táblára 100 darab egyest. Ezután minden lépésben letöröl egy x számot a tábláról, és helyette felírja az $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$ számokat. Dávid észrevette, hogy akárhányszor ismétli meg ezt Robi, minden lépés után kiválasztható egy olyan szám, amely legalább 34-szer szerepel a táblán. Bizonyítsd be, hogy Dávid észrevétele helyes!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Vegyük észre, hogy $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$, tehát a táblán szereplő számok összege invariáns, így az mindvégig $S = 100$ marad. **(1 pont)**
Továbbá az is látható, hogy mivel egyesekből indulunk ki, és egy új számot a régit 2-vel, 3-mal, vagy $2 \cdot 3$-mal osztva kapunk, ezért minden táblára felkerülő szám $\frac{1}{2^a \cdot 3^b}$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{N}$. **(1 pont)**
Alkalmazzuk *reductio ad absurdum* módszerét: feltételezzük, hogy létezik olyan véges lépéssorozat, amely után minden szám legfennebb 33-szor jelenik meg a táblán, n darab lépés után. **(1 pont)**
Becsüljük felülről az S összeget! Mivel n lépést végeztünk, ezért a legkisebb szám, ami a táblán szerepelhet az a $\frac{1}{2^n \cdot 3^n}$. **(1 pont)**
Mivel minden szám legfeljebb 33-szor szerepelhet, az összeg pedig állandó, így

$$S = 100 \leq 33 \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n,\\ 0 \leq j \leq n}} \frac{1}{2^i \cdot 3^j} = 33\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^1} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^2} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{3^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}\right) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$S = 100 \leq 33 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{3^j} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A mértani haladványok képletét felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2\,, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{3^j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{3}{2}\,. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen pedig $S \leq 33 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 99 \iff 100 \leq 99$, ami ellentmondás. **(1 pont)**
Tehát Dávid észrevétele helyes. ■