Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
XI. osztály

1. Feladat (10 pont)

a.) Kétféleképpen kiszámítva az $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ mátrix determinánsát, igazold az alábbi egyenlőséget:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

b) Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=1$, igazold, hogy $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$.

2. Feladat (10 pont)

Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_{n+1}=x_n+\dfrac{3}{x_n}$, $x_0=1$.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{n}$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}$ határértéket!

3. Feladat (10 pont)

Adott az $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ mátrix.

a) Számítsd ki az A^n , $n\in\mathbb{N}^*$ mátrixot!

b) Számítsd ki $\det\left(A^n\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$ értékét!

(Matlap)

4. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy az 1, 2, 3, ..., 2019 számok közül nem választható ki 100 olyan szám, amelyekből bármely kettőt összeadva, az így képezhető kéttagú összegek mind különbözzenek egymástól!

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.