VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}}$$

függvény primitív függvényeit!

Turdean Katalin, Zilah
Forgács István, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$I = \int f(x)dx = \int \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}} dx = -\int \frac{1}{e^x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{e^{-2x}+e^{-x}+1} \cdot \frac{-1}{e^x} dx.$$

(1 pont)

Az $e^{-x} = u$ változócserét használva azt kapjuk, hogy

$$I = -\int u \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} du.$$

(1 pont)

Használjuk a parciális integrálás módszerét.

$$I = -\left[\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} + \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{(2u+1)}{(u^2+u+1)^2+1} du\right] =$$

$$-\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2u^3+u^2}{1+(1+u+u^2)^2} du.$$

(1 pont)

Az integrálban szereplő tört nevezője

$$1+(1+u+u^2)^2 = (u^2+1)^2 + 2(u^2+1)u + u^2 + 1 = (u^2+1)(u^2+2u+2)$$

alakba írható. **(1 pont)**

Ezt felhasználva, a törtet elemi törtek összegére bontjuk.

$$\frac{2u^3+u^2}{1+(1+u+u^2)^2} = \frac{2u^3+u^2}{(u^2+1)(u^2+2u+2)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{Cu+D}{u^2+2u+2}, \text{ ahol} A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

Közös nevezőre hozva a két elemi törtet, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} A+C=2 \\ 2A+B+D=1 \\ 2A+2B+C=0 \\ 2B+D=0 \end{cases}.$$

(1 pont)

Megoldva az egyenletrendszert: $A = 0, B = -1, C = 2, D = 2.$ **(1 pont)**
Tehát

$$I = -\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} - \frac{1}{2} \int \left[\frac{-1}{u^2+1} + \frac{2u+2}{u^2+2u+2} \right] du =$$

$$-\frac{u^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(u^2+2u+2) + C.$$

(1 pont)

Ahonnan az f függvény, primitív függvényei a következők:

$$F_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_k(x) = -\frac{1}{2e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e^x+2e^{2x}}{e^{2x}} + k, \text{ ahol } k \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

$$I = \int f(x)dx = \int \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}} dx = -\int \frac{1}{e^x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{e^{-2x}+e^{-x}+1} \cdot \frac{-1}{e^x} dx.$$

(1 pont)

Az $e^{-x} = u$ változócserét használva azt kapjuk, hogy

$$I = -\int u \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} du.$$

(1 pont)

Használjuk az

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1+u+u^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u+1}, \forall u \in (0, +\infty)$$

(1 pont)

és

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}, \forall u \in (0, +\infty)$$

(1 pont)

azonosságokat.
Ekkor

$$I = -\int u \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{u} - \operatorname{arctg} \frac{1}{u+1} \right) du =$$

$$= -\int u \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(u+1) \right) du =$$

$$= \int u \operatorname{arctg} u du - \int u \cdot \operatorname{arctg}(u+1) du =$$

(1 pont)

$$= \frac{u^2}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{1+u^2} du - \frac{u^2}{2} \operatorname{arctg}(u+1) + \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{1+(u+1)^2} du =$$

(1 pont)

$$= \frac{u^2}{2}\left(\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)\right) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du + \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{2u+2}{u^2+2u+2}\right) du =$$

(**1 pont**)

$$= \frac{u^2}{2}\left(\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)\right) - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2) + C =$$

$$= \frac{u^2}{2}\left(\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}(u+1)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2) + C.$$

(**1 pont**)

Ahonnan az f függvény, primitív függvényei a következők:

$$F_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_k(x) = \frac{1}{2e^{2x}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{e^x} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e^x+2e^{2x}}{e^{2x}} + k$$

ahol $k \in \mathbb{R}$. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Adott a $(G, \cdot)$ csoport és az $f\colon G \to G$ függvény úgy, hogy

$$f(xf(y)) = f(x) \cdot y, \text{ bármely } x, y \in G \text{ esetén.}$$

a) Igazold, hogy f csoportautomorfizmus!

b) Határozd meg az f függvényt, ha a G csoportnak öt eleme van!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Jelölje e a csoport semleges elemét. A megadott feltételbe, ha $x = e$, akkor

$$f(f(y)) = f(e) \cdot y, \text{ bármely } y \in G \text{ esetén.} \tag{1}$$

Ha a (1) egyenletbe $y = e$, akkor $f(f(e)) = f(e)e$. Innen következik, hogy

$$f(f(e)) = f(e). \tag{2}$$

(**1 pont**)

Legyen $x_1, x_2 \in G$ úgy, hogy $f(x_1) = f(x_2)$, ahonnan következik, hogy $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$.
Ekkor az (1) összefüggés alapján

$$\begin{cases} f(f(x_1)) = f(e) \cdot x_1, \\ f(f(x_2)) = f(e) \cdot x_2 \end{cases} \Longrightarrow f(e)x_1 = f(e)x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow$$

f injektív. (**1 pont**)

Mivel f injektív a (2) $\Longrightarrow f(e) = e$. Felhasználva a (1) összefüggést és, hogy $f(e) = e$ következik, hogy $f(f(y)) = y$, bármely $y \in G$ esetén.

Tehát $(f \circ f)(y) = y$ bármely $y \in G$ esetén. Innen következik, hogy $f \circ f = 1_G \Longrightarrow$ f szürjektív és $f^{-1} = f$ **(1 pont)**

Bizonyítjuk, hogy f morfizmus.

Az f morfizmus $\Longleftrightarrow f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in G$. Legyen $x, y \in G$. Az $y \in G$ esetén, létezik egyetlen egy $z \in G$ úgy, hogy $f(z) = y$.

$$f(xy) = f(x \cdot f(z)) = f(x)z = f(x) \cdot f^{-1}(y) = f(x) \cdot f(y).$$

Tehát f morfizmus.

Mivel f morfizmus és bijektív, az f automorfizmus. **(1 pont)**

b) Ha a G-nek öt eleme van, akkor a $(G, \cdot)$ ciklikus csoport. Tehát a $G = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$ alakú, ahol $a^5 = e$. **(1 pont)**

Az a) alpontban beláttuk, hogy $(fof)(x) = x, \forall x \in G$, tehát az f bijektív és $f^{-1} = f$. Mivel f csoportautomorfizmus ezért $f(e) = e$. Mivel $f^{-1}(x) = f(x), \forall x \in G$, ezért ha $f(x) = y$, akkor $f(y) = x$. Az $f_1 \colon G \to G, f_1(x) = x$ függvény teljesíti a megadott feltételt. **(1 pont)**

Ha $f \neq f_1$, akkor vizsgáljuk meg, hogy $f(a)$ mivel lehet egyenlő.

Az $f(a) \neq e$, mert az f injektív.

Ha $f(a) = a$, akkor $f(a^k) = (f(a))^k = a^k \Longrightarrow f(x) = x, \forall x \in G$. **(1 pont)**

Ha $f(a) \neq a$, akkor a következő esetek lehetnek:

1. $f(a) = a^2$, ekkor $f(a^2) = a \Longrightarrow (f(a))^2 = a \Longrightarrow a^4 = a \Longrightarrow a^3 = e$, ami ellentmondás.
2. $f(a) = a^3$, ekkor $f(a^3) = a \Longrightarrow (f(a))^3 = a \Longrightarrow a^9 = a \Longrightarrow a^4 = a \Longrightarrow a^3 = e$, ami ellentmondás.
3. $f(a) = a^4$, ekkor $f(a^4) = a \Longrightarrow (f(a))^4 = a \Longrightarrow a^{16} = a \Longrightarrow a = a$, ami lehetséges.

Tehát $f(a) = a^4$. Mivel f bijektív, akkor $f(a^2) = a^3$ és $f(a^3) = a^2$. Ekkor $(f(a))^2 = a^3$, ahonnan azt kapjuk, hogy $(a^4)^2 = a^3 \Longleftrightarrow a^3 = a^3$, ami lehetséges. **(1 pont)**

Az $f(xf(y)) = f(x) \cdot y$, bármely $x, y \in G$ feltétel ekvivalens az $f(x) \cdot f(f(y)) = f(x) \cdot y$, bármely $x, y \in G$ feltétellel vagyis azzal, hogy $f(f(y)) = y, \forall y \in G$. Ezt a feltételt két függvény teljesíti: az

x	e	a	a^2	a^3	a^4
f(x)	e	a	a^2	a^3	a^4

és

x	e	a	a^2	a^3	a^4
f(x)	e	a^4	a^3	a^2	a

. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az $f \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ és $g \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvényeket, amelyek egyszerre teljesítik a következő feltételeket:

a) az $F \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty), F(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ függvény a g függvény primitív függvénye;

b) a $G \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty), G(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ függvény az f függvény primitív függvénye;

c) $f(x) > g(x)$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az $a)$ feltétel szerint F deriválható, tehát $f:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ és $f(x)=F(x)\cdot e^x$ is deriválható.
Ugyanígy a $b)$ feltételből azt kapjuk, hogy a g is deriválható. **(1 pont)**
$a)\Longrightarrow F^{'}(x)=g(x),\forall x\in(0,+\infty)$ és $b)\Longrightarrow G^{'}(x)=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$.

$$\begin{cases}G^{'}(x)+F^{'}(x)=f(x)+g(x),\forall x\in(0,+\infty)\\ G^{'}(x)-F^{'}(x)=f(x)-g(x),\forall x\in(0,+\infty)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(G(x)+F(x))^{'}=f(x)+g(x),\forall x\in(0,+\infty)\\ (G(x)-F(x))^{'}=f(x)-g(x),\forall x\in(0,+\infty)\end{cases}.$$

$$\begin{cases}((g(x)+f(x))e^{-x})^{'}=f(x)+g(x),\forall x\in(0,+\infty)\\ ((g(x)-f(x))e^{-x})^{'}=f(x)-g(x),\forall x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

(1 pont)
Tekintsük az $u:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty),u(x)=f(x)+g(x)$ és a $v:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty),v(x)=f(x)-g(x)$ függvényeket. Az u és v deriválhatóak és $(u(x)\cdot e^{-x})^{'}=u(x),\forall x>0$ és $-(v(x)\cdot e^{-x})^{'}=v(x),\forall x>0.$ **(1 pont)**
Rendre meghatározzuk az u és v függvényeket:
$(u(x)\cdot e^{-x})^{'}=u(x)\Longleftrightarrow u^{'}(x)\cdot e^{-x}-u(x)e^{-x}=u(x)\Longleftrightarrow u^{'}(x)=u(x)(1+e^x),\forall x>0.$ **(1 pont)**
Az $u(x)=f(x)+g(x)>0,\forall x>0$, tehát $u(x)\neq 0,\forall x>0$.
Igy $\frac{u^{'}(x)}{u(x)}=1+e^x$, azaz $(\ln u(x))^{'}=1+e^x,\forall x>0$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy $\ln u(x)=x+e^x+k_1$, ahol $k_1\in\mathbb{R}$, vagyis $u(x)=e^{x+e^x+k_1}=e^{k_1}\cdot e^{x+e^x}=ae^{x+e^x}$, ahol $a>0$ tetszőleges valós szám. Tehát $f(x)+g(x)=a\cdot e^{x+e^x},\forall x>0$.
A $-(v(x)\cdot e^{-x})^{'}=v(x)\Longleftrightarrow -v^{'}(x)\cdot e^{-x}+v(x)e^{-x}=v(x)\Longleftrightarrow v^{'}(x)=v(x)(1-e^x),\forall x>0.$
A $v(x)=f(x)-g(x)>0,\forall x>0$, tehát $v(x)\neq 0,\forall x>0$.
Igy $\frac{v^{'}(x)}{v(x)}=1-e^x$, azaz $(\ln v(x))^{'}=1-e^x,\forall x>0$. **(1 pont)**
Innen következik, hogy $\ln v(x)=x-e^x+k_2$, ahol $k_2\in\mathbb{R}$, vagyis $v(x)=b\cdot e^{x-e^x},\forall x>0$, ahol $b>0$ tetszőleges valós szám. Tehát $f(x)-g(x)=b\cdot e^{x-e^x},\forall x>0$. **(1 pont)**
Tehát

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=a\cdot e^{x+e^x},\forall x\in(0,+\infty)\\ f(x)-g(x)=b\cdot e^{x-e^x},\forall x\in(0,+\infty)\end{cases}.$$

(1 pont)

Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{2}\left(a\cdot e^{x+e^x}+b\cdot e^{x-e^x}\right),\forall x\in(0,+\infty)\\ g(x)=\frac{1}{2}\left(a\cdot e^{x+e^x}-b\cdot e^{x-e^x}\right),\forall x\in(0,+\infty)\end{cases}.$$

Mivel a és b pozitívak, ezért $f(x)>0,\forall x>0$. Ahhoz, hogy $g(x)>0,\forall x>0$ teljesüljön az szükséges, hogy $a\cdot e^{x+e^x}>b\cdot e^{x-e^x},\forall x>0$ vagyis, hogy $a\cdot e^{e^x}>be^{-e^{-x}},\forall x>0$. Innen azt kapjuk, hogy $e^{2e^x}>\frac{b}{a},\forall x>0$. A $h(x)=e^{2e^x},\forall x>0$ függvény szigorúan növekvő és folytonos. Tehát $\inf_{x>0}h(x)=\lim_{x\searrow 0}h(x)=e^2$. Tehát $\frac{b}{a}\leq e^2$, azaz $b\leq e^2\cdot a$.
A kapott függvények teljesítik a feladat mindhárom feltételét. **(1 pont)**
■

4. feladat (10 pont)**.** A $(G,\cdot)$ véges csoportnak $2n$ eleme van. Legyen $H=\{x\in G\mid x^2=e\}$, ahol e a $(G,\cdot)$ csoport semleges eleme. Jelölje $|H|$ a H halmaz számosságát.

a) Igazold, hogy ha $|H|\geq n+1$ és $x\cdot y\in H$, bármely $x,y\in H$ esetén, akkor a $(G,\cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $|H| \leq n+1$.

(***)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen x és y a H két tetszőleges eleme. Ezért $x^2 = e$ és $y^2 = e$, és $(xy)^2 = e$,mert $xy \in H$. Innen azt kapjuk, hogy $x^2y^2 = e \cdot e = e = (xy)^2 \Longrightarrow x^2y^2 = (xy)^2 \Longrightarrow xxyy = xyxy$, ahonnan következik, hogy $xy = yx$. Tehát $xy = yx, \forall x, y \in H$ esetén. **(1 pont)**

$x^2 = e \Longrightarrow x^{-1} = x \Longrightarrow (x^{-1})^2 = x^2 = e \Longrightarrow x^{-1} \in H$. Tehát a $(H, \cdot)$ részcsoportja a $(G, \cdot)$ csoportnak. **(1 pont)**

Lagrange tétele alapján a H rendje osztója a G rendjének. Mivel $|H| \geq n+1$ és $|G| = 2n$ ezért $|H| = 2n$, mert ha egy természetes szám osztója nagyobb a szám felénél, akkor az maga a szám. Tehát $H = G$. **(2 pont)**

Mivel $xy = yx, \forall x, y \in H$ ezért $xy = yx, \forall x, y \in G$, tehát a $(G, \cdot)$ Abel- féle csoport. **(1 pont)**

b) Legyen $H = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_k\}$. Feltételezzük, hogy $k > n$ vagyis $k \geq n+1$.

Mivel $e^2 = e$, az $e \in H$, és feltételezhetjük, hogy $a_0 = e$. **(1 pont)**

Ha $a_i, a_j \in H, i \neq j$ és $a_i \neq e, a_j \neq e$, akkor $a_i a_j \notin H$. Valóban, ha $a_i \cdot a_j \in H$, akkor a $H_1 = \{e, a_i, a_j, a_i a_j\}$ részcsoportja lenne a G-nek.

A H_1- nek négy különböző eleme van, mert $a_i \cdot a_j \neq a_i, a_i \cdot a_j \neq a_j$ és $a_i \cdot a_j \neq e$, ugyanis, ha $a_i \cdot a_j = e$, akkor $a_i \cdot a_j = e = a_i \cdot a_i$, ahonnan $a_j = a_i$ következne. **(1 pont)**

Tehát H_1-nek négy eleme van. Mivel $(H_1, \cdot)$ részcsoportja a $(G, \cdot)$ csoportnak, következik, hogy $4|2n$ vagyis $2|n$, ami ellentmondás, mert n páratlan. **(1 pont)**

Ha $i, j > 0$ és $i \neq j$ akkor az $a_1a_2, a_1a_3, ..., a_1a_k$ elemek egyike sem e és mind benne vannak a $G \setminus H$ halmazban. Ezen elemek száma $k-1$. Ez viszont lehetetlen, mivel a

$$2n = |G| = |H| + |G \setminus H| \geq k + 1 + k - 1 \geq 2(n+1) > 2n$$

ellentmondáshoz vezet. **(1 pont)**

■