IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van. Mindketten ráírják az összes saját autójukra a szerencseszámukat. A János autóin levő számok összege kétszer nagyobb, mint a Péter autóin található számok összege. Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóira írt számok összege. Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter autóin levő számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóin szereplő számok összege. Hány autójuk van a fiúknak külön-külön és mennyi a szerencseszámuk?

Császár Sándor, Csíkszereda

Első megoldás. Jelöljük x-szel a Péter és y-nal a János autóinak számát, illetve a-val a Péter és b-vel a János szerencseszámát. Péternek és Jánosnak összesen 40 kisautója van, ezért $x + y = 40$. A János autóin lévő számok összege $y \cdot b$, ez a szám kétszer nagyobb, mint a Péter autóin lévő számok összege, ami $x \cdot a$. Ezért

$$y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha Jánosnak annyi autója lenne, mint amennyi Péternek van, akkor az autóin található számok összege 36-tal kevesebb lenne, mint amennyi a Péter autóin levő számok összege, ezért

$$x \cdot b = x \cdot a - 36.$$

Ha Péternek lenne annyi autója, mint amennyi Jánosnak van, akkor a Péter kisautóin található számok összege 84-gyel lenne több, mint amennyi a János autóira írt számok összege, ezért

$$y \cdot a = y \cdot b + 84.$$

Az előbbi két összefüggés a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{cases} x \cdot b - x \cdot a = -36 \\ y \cdot b - y \cdot a = -84. \end{cases} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Összeadva a megfelelő oldalakat, a kapott összefüggést rendre az alábbi ekvivalens alakokba írhatjuk:

$$\begin{aligned} b \cdot (x + y) - a \cdot (x + y) &= -120, \\ (b - a)(x + y) &= -120. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $x + y = 40$, az utóbbi összefüggésből következik, hogy $a = b + 3$. **(2 pont)**
Az $a = (b + 3)$-at behelyettesítve az $x \cdot b = x \cdot a - 36$ egyenlőségbe kapjuk, hogy

$$x \cdot b = x \cdot (b + 3) - 36,$$

vagyis $3x = 36$, ahonnan Péter kisautóinak a száma $x = 12$ és János kisautóinak a száma pedig $y = 40 - 12 = 28$. **(2 pont)**
Ezeket az értéket behelyettesítve az $y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a = 2 \cdot x \cdot (b + 3)$ összefüggésbe, következik, hogy

$$28 \cdot b = 2 \cdot 12 \cdot (b + 3),$$

ahonnan $b = 18$. Tehát János szerencseszáma $b = 18$, Péteré pedig $a = b + 3 = 21$. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Az első megoldás gondolatmenetét követjük addig, ameddig eljutunk az alábbi összefüggésekig:

$$\begin{aligned} x + y &= 40, \\ y \cdot b &= 2 \cdot x \cdot a, \\ x \cdot (a - b) &= 36, \\ y \cdot (a - b) &= 84. \end{aligned}$$ **(3 pont)**

Ezek alapján $x, y, a - b \neq 0$. Elosztva az utolsó két összefüggés megfelelő oldalait, az

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$$ **(1 pont)**

összefüggéshez jutunk. Innen származtatással következik, hogy $\frac{x+y}{y} = \frac{3+7}{7}$, vagyis $\frac{40}{y} = \frac{10}{7}$, ahonnan János autóinak a száma $y = 28$ és Péter autóinak a száma pedig $x = 40 - 28 = 12$. **(3 pont)**
A kapott értékeket behelyettesítve az $x \cdot (a - b) = 36$, illetve $y \cdot b = 2 \cdot x \cdot a$ egyenlőségekbe következik, hogy $a - b = 3$ és $7b = 6a$, ahonnan $\frac{b}{a} = \frac{6}{7}$ és származtatással kapjuk, hogy

$$\frac{b}{a - b} = \frac{6}{7 - 6}.$$

Innen következik, hogy $\frac{b}{3} = 6$, tehát János szerencseszáma $b = 18$ Péteré pedig $a = b + 3 = 21$.
(2 pont)
Hivatalból **(1 pont)**

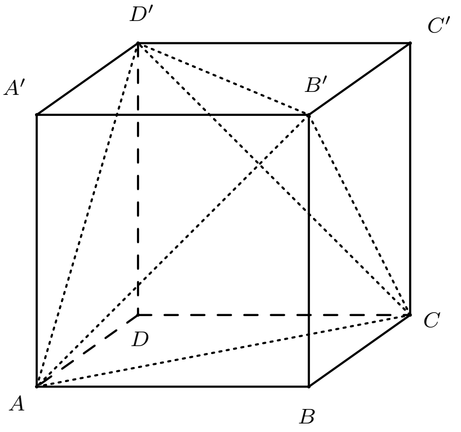
■

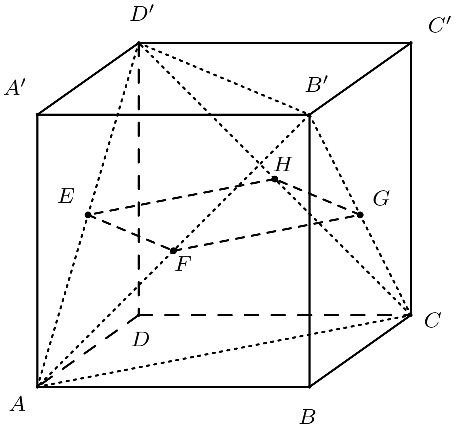
2. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDA'B'C'D'$ kockában E az AD', F az AB', G a $B'C$ és H a $D'C$ szakasz felezőpontja. Igazold, hogy

a) az $ACB'D'$ szabályos tetraéder;
b) az E, F, G és H pontok egy síkban vannak, és négyzetet alkotnak;
c) az $EFGH$ négyzet középpontja egybeesik a kocka középpontjával!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) A tetraéder minden éle a kocka valamelyik lapjának átlója, tehát a tetraéder összes éle kongruens, ezért az $ACB'D'$ szabályos tetraéder. **(2 pont)**





b) Az E és H pontok az $D'A$, illetve $D'C$ szakaszok felezőpontjai, ezért az EH szakasz a $D'AC$ háromszög középvonala, ahonnan $EH \parallel AC$ és $EH = \frac{1}{2}AC$. Az F és G pontok az $B'A$, illetve $B'C$ szakaszok felezőpontjai, ezért az FG szakasz a $B'AC$ háromszög középvonala, ahonnan $FG \parallel AC$ és $FG = \frac{1}{2}AC$. **(1 pont)**

Az $EH \parallel AC$ és $FG \parallel AC$ párhuzamosságok alapján $EH \parallel FG$, ezért az E, F, G, H pontok egy síkban vannak. **(1 pont)**

Mivel $EH \parallel FG$ és $EH = FG = \frac{1}{2}AC$, ezért az $EFGH$ négyszög paralelogramma. **(1 pont)**

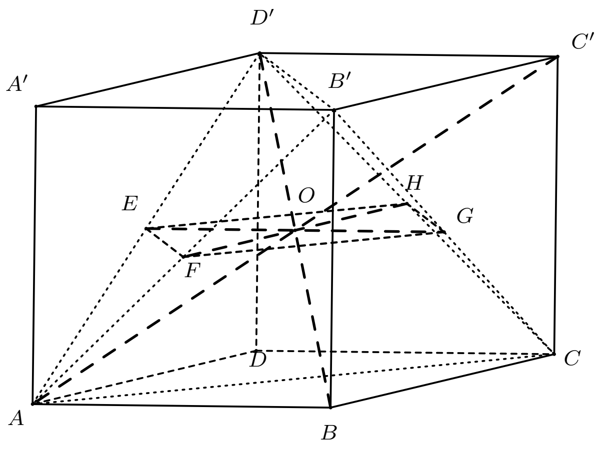
Hasonlóan EF és HG az $AD'B'$, illetve $CD'B'$ háromszögek középvonalai, ezért $EF = HG = \frac{1}{2}D'B'$. Az AC és $B'D'$ a kocka lapjainak átlói, ezért $AC = B'D'$. Tehát $FG = EF$, ezért $EFGH$ egy rombusz. **(1 pont)**

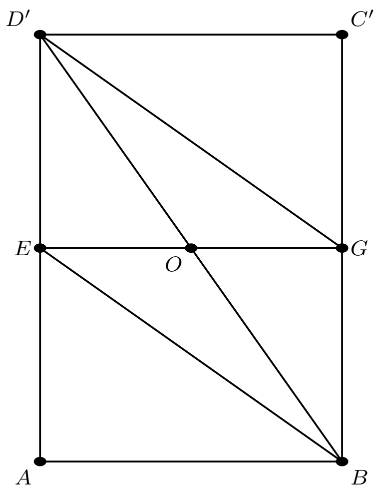
Az $AC \perp BD$ és $BD \parallel B'D' \parallel EF$, $AC \parallel FG$, ezért $EF \perp FG$, tehát $EFGH$ négyzet. **(1 pont)**

c) Jelölje O' az $EFGH$ négyzet középpontját, tehát $EG \cap FH = \{O'\}$, ahol O' az EG szakasz felezőpontja. **(1 pont)**

Az $ABC'D'$ paralelogrammában $BD' \cap AC' = \{O\}$, ahol O pont a kocka középpontja, tehát O felezi a $D'B$ szakaszt.

A $D'EBG$ paralelogrammában $D'B$ és EG átlók tehát felezik egymást, ahonnan az EG és $D'B$ felezőpontjai egybeesnek, tehát $O = O'$. **(1 pont)**





Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Az $ABCDEFGH$ téglatestben $AB = 20\,\text{cm}$, $BC = 15\,\text{cm}$ és $AE = 12\sqrt{3}\,\text{cm}$.

a) Számítsd ki az E pont távolságát a BD egyenestől!

b) Határozd meg az (EBD) és (FDB) síkok által meghatározott szög mértékét!

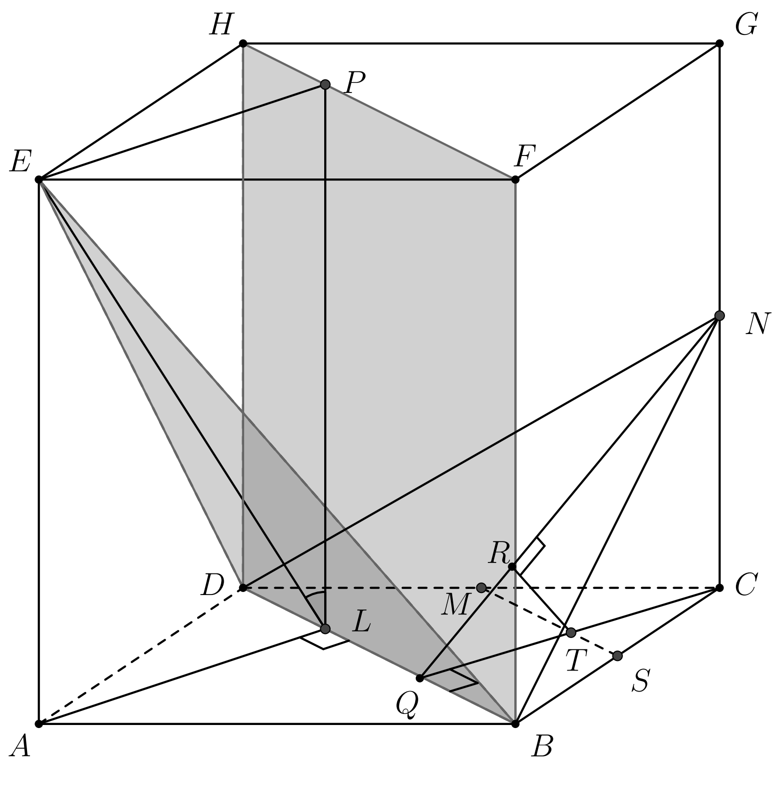
c) Ha M és N a CD, illetve CG élek felezőpontjai, akkor számítsd ki az M pont távolságát az (NDB) síktól!

Papp Ilonka, Brassó
Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Az (ABD) síkban legyen L az A pontból a BD egyenesre bocsájtott merőleges talppontja, azaz $L \in BD$ és $AL \perp BD$.
Az E pontra és az (ABD) síkban található BD egyenesre alkalmazzuk a három merőleges tételét: $EA \perp (ABD)$, $AL \perp BD$, $AL, BD \subset (ABD)$, ezért $EL \perp BD$, ahonnan az E pont távolsága a BD egyenestől $d(E, BD) = EL$. (**1 pont**)
Az ABD háromszögben $\widehat{A} = 90°$, így Pitagorász tétele alapján $BD^2 = AB^2 + AD^2$, ahonnan $BD = 25\,\text{cm}$. A fent említett háromszögben AL az átfogóhoz tartozó magasság, tehát $AL = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12\,\text{cm}$.
Az EAL háromszögben $\widehat{A} = 90°$, így Pitagorász tétele alapján $EL^2 = EA^2 + AL^2$, ahonnan

$$EL = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 12^2} = 24\,\text{cm}.$$

Tehát az E pont távolsága a BD egyenestől $d(E, BD) = EL = 24\,\text{cm}$. (**1 pont**)



b) A $H \in (FDB)$ és $DBFH$ téglalap. Az L ponton keresztül a HD-vel párhuzamosan húzott egyenes a HF egyenest a P pontban metszi, azaz $PL \parallel HD$, $P \in HF$. Ekkor $PL \perp BD$.

Mivel az (EBD) és (FDB) síkok a BD egyenesben metszik egymást, az (EBD) sík EL egyenese merőleges a BD-re és az (FDB) sík PL egyenese merőleges a BD-re, ezért az (EBD) és (FDB) síkok hajlásszöge megegyezik az EL és PL egyenesek által bezárt szöggel, vagyis az $\widehat{ELP}$-gel.

(2 pont)

Mivel $EALP$ téglalap, $\widehat{EPL} = 90°$ és $PL = EA = 12\sqrt{3}\,\text{cm}$, az EPL háromszögben $\widehat{P} = 90°$ és $PE = \frac{1}{2}EL = 12\,\text{cm}$, így az $\widehat{ELP}$ mértéke $30°$, tehát az (EBD) és (FDB) síkok hajlásszöge $30°$.

(1 pont)

c) Az M ponton keresztül párhuzamost húzunk a BD egyenessel, amely a BC egyenest az S pontban metszi. Mivel $MS \parallel BD$ és $BD \subset (NDB)$, következik, hogy $MS \parallel (NDB)$. Legyen $Q \in BD$ pont úgy, hogy $CQ \perp BD$, a CQ az MS középvonalat a T pontban metszi, tehát T egyben a CQ szakasz felezőpontja is. A fentiek alapján $d(M,(NDB)) = d(T,(NDB))$. **(1 pont)**

Az N pontra és a (DBC) síkban található BD egyenesre ($NC \perp (DBC)$, $CQ \perp BD$, $CQ, BD \subset (DBC)$) alkalmazva a három merőleges tételét kapjuk, hogy $NQ \perp BD$.

Felvesszük az $R \in NQ$ pontot úgy, hogy $TR \perp NQ$. Mivel $TR \perp NQ$, $NQ \perp BD$, $TQ \perp BD$ (mivel $CQ \perp BD$) a három merőleges (kiegészített) fordított tétele alapján $TR \perp (NDB)$, tehát a T pont távolsága az (NDB) síktól $d(T,(NDB)) = TR$. **(1 pont)**

A QRT és QCN háromszögekben $\widehat{QRT} = \widehat{QCN} = 90°$ és $\widehat{Q}$ közös szög, ezért $QRT_\triangle \sim QCN_\triangle$, ahonnan $\frac{QT}{QN} = \frac{RT}{CN}$. **(1 pont)**

Mivel $CQ = AL = 12\,\text{cm}$ és T a CQ szakasz felezőpontja, ezért $QT = TC = 6\,\text{cm}$.

Az N a CG felezőpontja, így $CN = NG = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Az NCQ háromszögben $\widehat{C} = 90°$, Pitagorász tétele alapján $NQ^2 = NC^2 + CQ^2$, ahonnan $NQ = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 12^2} = 6\sqrt{7}\,\text{cm}$.

A $\frac{QT}{QN} = \frac{RT}{CN}$ arányból kapjuk, hogy $\frac{6}{6\sqrt{7}} = \frac{RT}{6\sqrt{3}}$, következik, hogy $RT = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}\,\text{cm}$, a T pont távolsága az (NDB) síktól $d(T,(NDB)) = \frac{6\sqrt{21}}{7}\,\text{cm}$, tehát $d(M,(NDB)) = \frac{6\sqrt{21}}{7}\,\text{cm}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Adottak az $a < b < c$ prímszámok, amelyekre $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 335$.

a) Igazold, hogy $6 \leq \sqrt{a + 6 - \sqrt{8a}} + \sqrt{b + 12 - \sqrt{12b}} + \sqrt{c + 6 - \sqrt{20c}} < 337$.

b) Határozd meg az a, b, c számok értékét úgy, hogy

$$\frac{2022}{\sqrt{a + 6 - \sqrt{8a}} + \sqrt{b + 12 - \sqrt{12b}} + \sqrt{c + 6 - \sqrt{20c}}} \in \mathbb{N}.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. a) Legyen $A = \sqrt{a + 6 - \sqrt{8a}} + \sqrt{b + 12 - \sqrt{12b}} + \sqrt{c + 6 - \sqrt{20c}}$.

A gyökökben teljes négyzeteket alakítunk ki, és kapjuk, hogy

$$\sqrt{a + 6 - \sqrt{8a}} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + 4},$$
$$\sqrt{b + 12 - \sqrt{12b}} = \sqrt{(\sqrt{b} - \sqrt{3})^2 + 9},$$
$$\sqrt{c + 6 - \sqrt{20c}} = \sqrt{(\sqrt{c} - \sqrt{5})^2 + 1}.$$

(1 pont)

Ekkor

$$A = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2+4} + \sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{3})^2+9} + \sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{5})^2+1} \geq 2+3+1 = 6. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolásához felhasználjuk a $\sqrt{x^2+y^2} \leq x+y$ egyenlőtlenséget, amely teljesül minden $x, y \geq 0$ esetén. Mivel $a \geq 2$, $b \geq 3$ és $c \geq 5$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2+4} &\leq \sqrt{a}-\sqrt{2}+2 < \sqrt{a}+1,\\
\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{3})^2+9} &\leq \sqrt{b}-\sqrt{3}+3 < \sqrt{b}+2,\\
\sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{5})^2+1} &\leq \sqrt{c}-\sqrt{5}+1 < \sqrt{c}-1. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Ahonnan összegzés után kapjuk, hogy $A < \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+2 \leq 337$, tehát $6 \leq A < 337$. (**1 pont**)

b) Az előző alpontban bevezetett jelölést felhasználva $\frac{2022}{A} \in \mathbb{N}$. Ez akkor és csakis akkor teljesül, ha $A \in \{1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022\}$. (**1 pont**)
Tudjuk, hogy $6 \leq A < 337$, így $A = 6$, (**1 pont**)
vagyis

$$\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2+4} + \sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{3})^2+9} + \sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{5})^2+1} = 2+3+1,$$

tehát

$$(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{c}-\sqrt{5})^2 = 0,$$

amely pontosan akkor igaz, ha $a = 2, b = 3, c = 5$. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■