VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok esetén fennállnak az

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$$

egyenlőségek. Mutasd ki, hogy

a) $\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$ egyenlőségekből az aránypárok származtatási tulajdonságát használva (számlálókat hozzáadjuk a nevezőkhöz) kapjuk, hogy

$$\frac{x}{x+(y+z)} = \frac{y}{y+(x+z)} = \frac{z}{z+(x+y)}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan adódik, hogy $x = y = z$. **(1 pont)**

Innen

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} = \sqrt{\frac{2x}{6x} + \frac{2x}{6x} + \frac{2x}{6x}} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Q}.$$

(2 pont)

b) Felhasználva, hogy $x = y = z$ kapjuk:

$$\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} = \sqrt{\frac{x \cdot x}{x(2x-x)} + \frac{x \cdot x}{x(2x-x)} + \frac{x \cdot x}{x(2x-x)}} = \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az $\overline{abc}$ alakú háromjegyű természetes számokat, amelyekre egyidőben teljesül, hogy $\sqrt{\overline{a,b(bc)} + \overline{b,c(ca)} + \overline{c,a(ab)}} \in \mathbb{Q}$, illetve az a számjegy a $2b$ és $3c$ számok számtani közepe! Az a, b és c számjegyek nem feltétlen különbözőek.

Papp Ilonka, Brassó
Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Átalakítjuk az $\overline{a{,}b(bc)}$ számot:

$$\overline{a{,}b(bc)} = a + \frac{\overline{bbc} - b}{990} = \frac{990a + 109b + c}{990}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan átalakítva a $\overline{b{,}c(ca)}$ és $\overline{c{,}a(ab)}$ tizedes számokat kapjuk, hogy

$$\overline{b{,}c(ca)} = \frac{990b + 109c + a}{990} \quad \text{és} \quad \overline{c{,}a(ab)} = \frac{990c + 109a + b}{990}.$$

Tehát a három szám összege:

$$S = \frac{1}{990}(990a + 109b + c + 990b + 109c + a + 990c + 109a + b) = \frac{1100(a+b+c)}{990} = \frac{10 \cdot (a+b+c)}{9}.$$

(2 pont)

Ekkor

$$\sqrt{S} = \sqrt{\frac{10 \cdot (a+b+c)}{9}} \in \mathbb{Q} \iff a+b+c = 10p^2,$$

ahol $p \in \mathbb{N}$. **(1 pont)**
Figyelembe véve, hogy a, b, c számjegyek és $a \neq 0$, következik, hogy

$$1 \leq a+b+c \leq 27.$$

Az $a+b+c = 10p^2$ és $1 \leq a+b+c \leq 27$ alapján $p = 1$, tehát

$$a+b+c = 10. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel a feltétel szerint $a = \dfrac{2b+3c}{2}$, ezért

$$\frac{2b+3c}{2} + b + c = 10 \iff 4b + 5c = 20. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Észrevesszük, hogy $5c$ és 20 is osztható 5-tel és $(4, 5) = 1$, ezért b osztható 5-tel. Innen $b = 0$ vagy $b = 5$. **(1 pont)**

I. eset. Ha $b = 0$, akkor $c = 4$ és $a = 6$, így $\overline{abc} = 604$. **(1 pont)**

II. eset. Ha $b = 5$, akkor $c = 0$ és $a = 5$, így $\overline{abc} = 550$. **(1 pont)**

Összegezve, a keresett $\overline{abc}$ alakú számok a 604 és 550. ■

3. feladat (10 pont)**.** Egy baráti társaságban vívók, úszók és távugrók vannak. Minden személy csak egy sportot űz. Közülük egy vívó megállapítja, hogy az úszók és távugrók összesen hétszer annyian vannak, mint az ő vívó barátai. Egy úszó úgy számolja, hogy a vívók és távugrók összesen háromszor annyian vannak, mint az ő úszó barátai. Egy távugró pedig azt állítja, hogy az ő távugró barátai annyian vannak, mint a vívók és úszók összesen.
Hány vívó, hány úszó és hány távugró van a baráti társaságban?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Jelöljük a vívók számát v-vel, az úszók számát u-val és a távugrók számát pedig t-vel.

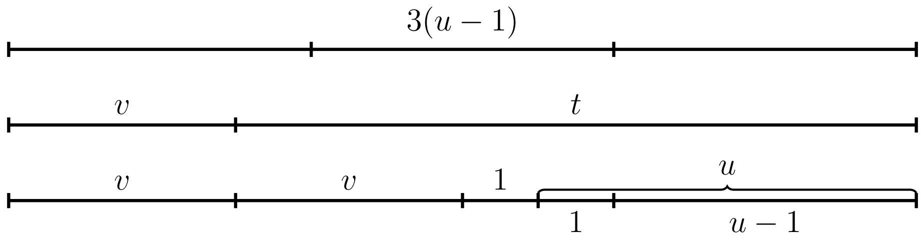
A távugrónak a távugró-barátai $(t-1)$-en vannak, mivel ő nem számolódik bele a saját barátai közé, így állítása szerint

$$u+v=t-1 \iff t=u+v+1, \quad \textbf{(1 pont)}$$

vagyis a távugrók eggyel többen vannak, mint az úszók és a vívók összesen.

Az úszónak az úszó-barátai $(u-1)$-en vannak, így állítása szerint

$$v+t=3\cdot(u-1). \quad \textbf{(1 pont)}$$



A távugrók számát behelyettesítve kapjuk, hogy

$$v+(u+v+1)=3\cdot(u-1) \iff 2v+u+1=3u-3 \iff 2v+1=2u-3 \iff$$
$$\iff 2v+4=2u \iff v+2=u, \quad \textbf{(2 pont)}$$

vagyis az úszók kettővel többen vannak, mint a vívók. Innen kapjuk, hogy a távugrók száma

$$t=u+v+1=(v+2)+v+1=2v+3. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A vívónak a vívó-barátai $(v-1)$-en vannak, így állítása szerint

$$u+t=7\cdot(v-1). \quad \textbf{(1 pont)}$$

Az úszók és vívók, illetve távugrók és vívók száma közötti összefüggéseket használva a vívók számára a következő összefüggést kapjuk:

$$(v+2)+(2v+3)=7\cdot(v-1) \iff 3v+5=7v-7 \iff 12=4v \iff 3=v, \quad \textbf{(1 pont)}$$

tehát 3 vívó van.

Az úszók száma $u=v+2=3+2=5$, **(1 pont)**

és a távugrók száma $t=2v+3=2\cdot 3+3=9$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az A csúcsában derékszögű ABC háromszög BM és CN szögfelezői az I pontban metszik egymást, $M\in AC$, $N\in AB$. Legyenek P és Q az M, illetve N pontokból a BC oldalra húzott merőlegesek talppontjai. Továbbá legyen D az MQ szakasz felezőpontja, és E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy I az APQ háromszög köréírt körének középpontja!

b) Igazold, hogy $ID\perp BC$!

c) Igazold, hogy $IPEQ$ négyzet!

Mátyás Mátyás, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A BM félegyenes az $\widehat{ABC}$ szögfelezője, tehát $\widehat{ABM} \equiv \widehat{CBM}$. Mivel $\widehat{BAM} = \widehat{BPM} = 90°$, $\widehat{ABM} = \widehat{PBM}$, MB pedig közös oldal, következik, hogy $ABM_\triangle \equiv PBM_\triangle$ (derékszögű háromszögek átfogó-hegyesszög kongruencia esete alapján). Ezért $AM \equiv PM$ és $\widehat{AMB} \equiv \widehat{PMB}$. Az $AM \equiv PM$, $\widehat{AMI} \equiv \widehat{PMI}$, MI közös oldal állítások alapján $AMI_\triangle \equiv PMI_\triangle$ (oldal-szög-oldal kongruencia eset), tehát

$$AI \equiv PI. \tag{1}$$

(1 pont)

A CN félegyenes az $\widehat{ACB}$ szögfelezője, azaz $\widehat{ACN} \equiv \widehat{BCN}$. A $\widehat{CAN} = \widehat{CQN} = 90°$, $\widehat{ACN} \equiv \widehat{QCN}$, NC közös oldal állításokból (a derékszögű háromszögek átfogó-hegyesszög kongruencia esete alapján) kapjuk, hogy $ACN_\triangle \equiv QCN_\triangle$, amiből következik, hogy $AN \equiv QN$ és $\widehat{ANC} \equiv \widehat{QNC}$. Mivel $AN \equiv QN$, $\widehat{ANI} \equiv \widehat{QNI}$, NI közös oldal, ezért $ANI_\triangle \equiv QNI_\triangle$ (oldal-szög-oldal kongruencia eset alapján), tehát

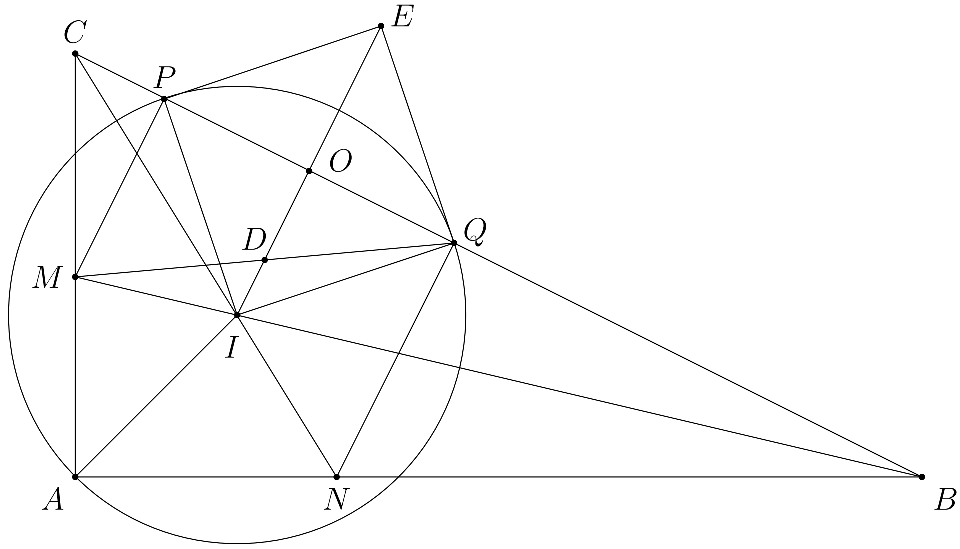
$$AI \equiv QI. \tag{2}$$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$AI \equiv PI \equiv QI,$$

tehát I az APQ háromszög köréírt körének középpontja. **(1 pont)**



b) Legyen O a PQ szakasz felezőpontja. Az IPQ egyenlő szárú háromszögben az IO oldalfelező egyben magasság is, vagyis

$$IO \perp BC. \tag{3}$$

(1 pont)

Az MPQ háromszögben DO középvonal, ezért $DO \parallel MP$, de mivel $MP \perp BC$, következik, hogy

$$DO \perp BC \tag{4}$$

(1 pont)

A (3) és (4) összefüggésekből következik, hogy I, D, O pontok kollineárisak és $ID \perp BC$. **(1 pont)**

c) Tudva, hogy E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa, és O az I pontból a BC egyenesre húzott merőleges talppontja, kapjuk, hogy $IE \perp BC$, $O \in IE$, $IO \equiv EO$. Az $IPEQ$ négyszög átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra, tehát $IPEQ$ rombusz. (**1 pont**)

Az ABC háromszögben AI szögfelező, vagyis $\widehat{IAN} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 45°$. Az ANI és QNI háromszögek kongruenciájából kapjuk, hogy $\widehat{IAN} \equiv \widehat{IQN}$, ezért $\widehat{IQN} = 45°$. De

$$\widehat{PQI} = \widehat{PQN} - \widehat{IQN} = 90° - 45° = 45°.$$

Az IPQ egyenlő szárú háromszögben $\widehat{PIQ} = 180° - 2\widehat{PQI} = 90°$. (**1 pont**)

Az $IPEQ$ rombuszban $\widehat{PIQ} = 90°$, tehát $IPEQ$ négyzet. (**1 pont**)

■