IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
megyei szakasz, 2022. március 5.

XI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2022 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix.

a) Tudva, hogy $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és $B \cdot A = A \cdot B$, igazold, hogy $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú!

b) Oldd meg az $X^{2021} + X = A$ egyenletet az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazon!

Nagy Olga, Nagyszalonta

Megoldás. a) Legyen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mivel $BA = AB$, írhatjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2022 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2022 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} 2a & 2022a + 2b \\ 2c & 2022c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2022c & 2b + 2022d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$ **(1 pont)**

Az utóbbi egyenlőség a

$$\begin{cases} 2a & = 2a + 2022c \\ 2022a + 2b & = 2b + 2022d \\ 2022c + 2d & = 2d \end{cases}$$

egyenletrendszerhez vezet, ahonnan következik, hogy $c = 0$ és $a = d$, **(1 pont)**

tehát $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. **(1 pont)**

b) Mivel $X \cdot (X^{2021} + X) = (X^{2021} + X) \cdot X$, ezért $XA = AX$, és így az a) alpont alapján $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ alakú. **(1 pont)**

Matematikai indukcióval igazolható, hogy

$$X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$ **(2 pont)**

Innen következik, hogy

$$X^{2021} + X = \begin{pmatrix} a^{2021} & 2021 \cdot a^{2020}b \\ 0 & a^{2021} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2022 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A,$$

tehát az

$$\begin{cases} a^{2021} + a & = 2 \\ 2021 \cdot a^{2020}b + b & = 2022 \end{cases}$$

rendszerhez jutunk. **(1 pont)**

Mivel az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2021} + x$ függvény szigorúan növekvő, ezért a rendszer első egyenletének

legfennebb egy megoldása lehet. Könnyű észrevenni, hogy $a = 1$ megoldás. **(1 pont)**
Innen viszont a második egyenlet alapján következik, hogy $2021b + b = 2022$, tehát $b = 1$. Összefoglalva a kapott eredményeket, következik, hogy $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, és könnyen ellenőrizhető, hogy ez a mátrix valóban teljesíti a megadott egyenletet. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat minden tagja pozitív és

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \ln \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!
b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n$ határértéket! *Zákány Mónika, Nagybánya*

Megoldás. a) Felírva a megadott rekurziót n-re és $(n+1)$-re, majd kivonva egymásból a kapott két összefüggést, következik, hogy

$$x_{n+1} = \ln \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Tehát $e^{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}$ minden $n \geq 1$ esetén, vagyis

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{x_n}, \quad \forall n \geq 2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $x_n > 0$ minden $n \geq 2$ esetén, innen következik, hogy $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$, minden $n \geq 2$ esetén, tehát az $(x_n)_{n\geq 2}$ sorozat szigorúan csökkenő. **(1 pont)**
Mivel 0 alsó korlátja a sorozatnak, ezért az konvergens is. **(1 pont)**
Legyen $L \in [0, +\infty)$ a sorozat határértéke. Mivel $x_n = x_{n+1}e^{x_n}$, minden $n \geq 2$ esetén, határértékre térhetünk ebben az összefüggésben. Így az $L = Le^L$ összefüggéshez jutunk, ahonnan következik, hogy $L(e^L - 1) = 0$, tehát $L = 0$. **(2 pont)**

b) Az $y_n = \frac{1}{x_n}$ képlettel értelmezett sorozat szigorúan növekvő és $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, tehát a Cesàro–Stolz-tétel alapján **(1 pont)**

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{x_n}}{x_n} - \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n}} = 1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** A z_1, z_2, z_3 olyan páronként különböző komplex számok, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, valamint

$$\begin{vmatrix} \overline{z_1} & z_1^3 & z_1 \\ \overline{z_2} & z_2^3 & z_2 \\ \overline{z_3} & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Igazold, hogy z_1, z_2, z_3 egy derékszögű háromszög csúcsainak affixumai! *Tóth Csongor, Szováta*
Matlap 1/2022 L:3395

Megoldás. Mivel $z_k \cdot \overline{z_k} = |z_k|^2 = 1$, ezért $\overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$, minden $k \in \{1, 2, 3\}$ esetén. **(2 pont)**
A következő átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{vmatrix} \overline{z_1} & z_1^3 & z_1 \\ \overline{z_2} & z_2^3 & z_2 \\ \overline{z_3} & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z_1} & z_1^3 & z_1 \\ \frac{1}{z_2} & z_2^3 & z_2 \\ \frac{1}{z_3} & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{z_1z_2z_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1^4 & z_1^2 \\ 1 & z_2^4 & z_2^2 \\ 1 & z_3^4 & z_3^2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= -\frac{1}{z_1z_2z_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^4 \\ 1 & z_2^2 & z_2^4 \\ 1 & z_3^2 & z_3^4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{z_1z_2z_3}(z_2^2 - z_1^2)(z_3^2 - z_1^2)(z_3^2 - z_2^2) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= -\frac{1}{z_1z_2z_3}(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $\frac{1}{z_1z_2z_3} \neq 0$ és z_1, z_2, z_3 páronként különböző komplex számok, ezért az előbbi összefüggések alapján $\begin{vmatrix} \overline{z_1} & z_1^3 & z_1 \\ \overline{z_2} & z_2^3 & z_2 \\ \overline{z_3} & z_3^3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ pontosan akkor teljesülhet, ha $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3) = 0$. **(1 pont)**
Ebben az esetben viszont a z_1, z_2, z_3 számok közül van kettő, melyek egymás ellentettjei, **(1 pont)**
így ezek geometriai képe átmérősen ellentett pontok, a harmadik pedig rajta van ugyanazon az egység sugarú körön. **(1 pont)**
Ez pontosan azt jelenti, hogy a z_1, z_2, z_3 affixumú pontok egy félkörbe írt, tehát derékszögű háromszög csúcsai. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az Országos Diákszínjátszó Fesztivál versenyprogramjában tizenkét előadás ötféle díjért verseng: legjobb előadás, legjobb rendezés, legjobb alakítás, legjobb látványvilág, illetve a közönségdíj. Egy előadás akár mind az öt kategóriában nyerhet, viszont minden kategóriában csak egy előadás győz.

a) Hányféleképpen ítélheti oda a zsűri a díjakat?

b) Hányféleképpen ítélheti oda a zsűri a díjakat, ha a díjak között nem teszünk különbséget, csak azt vesszük figyelembe, hogy az előadások hány díjat kaptak? *Nagy Örs, Kolozsvár*

Megoldás. a) Mivel az 5 díj mindegyikét egymástól függetlenül a 12 előadás bármelyike egymástól függetlenül megnyerheti, ezért $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5$-féle díjkiosztási lehetőség van. **(2 pont)**

Megjegyzés. Tulajdonképpen a díjak 5 elemű halmazának olyan, ismétlődő elemeket is tartalmazó, 12 elemű részmultihalmazait képezzük, amelyekben az elemek sorrendje számít. Ezek éppen 5 elem 12-ed osztályú ismétléses variációi, melyek száma $\overline{V}_5^{12} = 12^5$.

b) Mivel csak a díjak számának alakulása érdekel, az ötféle díj, kategóriájától függetlenül, azonosnak tekinthető, így tulajdonképpen 5 elismerést kell 12 produkció között szétosztani úgy, hogy egy előadás több, akár mind az 5 elismerést is megszerezheti.

I. módszer. Esetszétválasztással. Mivel az 5 partíciói

$$\begin{aligned}&5;\\&4+1;\\&3+2;\\&3+1+1;\\&2+2+1;\\&2+1+1+1;\\&1+1+1+1+1,\end{aligned}$$

ezért vagy mind az öt díjat ugyanaz az előadás, vagy négyet az egyik és egyet egy másik előadás, vagy hármat az egyik és kettőt egy másik előadás, vagy hármat az egyik és még egyet-egyet egy-egy másik előadás, vagy $2-2-1$ díjat egy-egy előadás, vagy $2-1-1-1$ díjat egy-egy előadás, vagy az öt díjat öt különböző előadás kapja. Sorra vesszük az összes lehetőséget, majd a kapott értékeket összeadjuk. **(1 pont)**

Ha mind az 5 elismerést ugyanaz az előadás kapja, akkor a 12-ből egyet kell kiválasztani, amit 12-féle módon tehetünk meg. **(1 pont)**

Ha 4 díjat az egyik és egyet egy másik előadás kap, akkor tulajdonképpen két előadást kell rendezett sorrendben kiválasztani, amit $V_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132$-féle módon tehetünk meg. Ugyanezt kapjuk, ha 3 díjat az egyik és 2-t egy másik előadás kap, hiszen ismét két előadást kell rendezett sorrendben kiválasztani, amit szintén 132-féle módon tehetünk meg. **(1 pont)**

Ha 3 díjat kap az egyik és egyet-egyet egy-egy másik előadás, akkor kiválasztunk a 12 produkcióból egyet (ez 12 lehetőség), majd ettől függetlenül a maradék 11-ből még kettőt, nem rendezett, tetszőleges sorrendben (ez $C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$ lehetőség), így erre összesen $12 \cdot 55 = 660$ lehetőség van. Hasonlóan járunk el a $2+2+1$ esetben is, így ismét 660 lehetőséget kapunk. **(1 pont)**

Ha 2 díjat kap egy előadás és még 3 produkció egyet-egyet, akkor kiválasztunk a 12-ből egyet, majd a maradék 11-ből hármat, tetszőleges sorrendben ($C_{11}^3 = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{2\cdot 3} = 165$). Ez összesen $12 \cdot 165 = 1980$-féle lehetőség. **(1 pont)**

Ha az 5 elismerést 5 különböző előadás kapja, akkor ezeket $C_{12}^5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$-féle módon választhatjuk ki. **(1 pont)**

Így összesen $12 + 2 \cdot 132 + 2 \cdot 660 + 1980 + 792 = 4368$ díjszétosztási lehetőség van, ha csupán az odaítélt díjak számát nézzük, a kategóriákat pedig nem. **(1 pont)**

II. módszer. Kódolással. Jelöljük a díjakat D-vel, az előadásokat pedig E-vel. Ekkor minden díjszétosztás csupa D és E betűkből álló olyan sorozattal kódolható, amelyben az adott előadás után annyi D-t írunk, ahány díjat kapott.

Például, ha az 1. előadás 3 díjat, a 4. és 7. előadás pedig egy-egy díjat kapott, akkor ezt a díjkiosztást az $EDDDEEEDEEEDEEEEE$ karaktersorozat kódolja. **(2 pont)**

Az ilyen 17 karakteres sorozatok egyértelműen kódolják a különböző díjkiosztásokat (ha a díjak kategóriája nem számít). Sőt, mivel bármely kiosztás esetén az első karakter mindig E, fölösleges a kódolásban. Így minden olyan 16 hosszú kódnak, amely 5 D betűt és 11 E betűt tartalmaz egyértelműen megfelel egy díjkiosztás, és fordítva, minden díjkiosztásnak pontosan egy ilyen 16 karakteres kód. Tehát annyiféle módon lehet odaítélni az 5 díjat a 12 előadásnak, ahányféle ilyen kód van. **(3 pont)**

Az ilyen kódok száma viszont egy $5 + 11 = 16$ elemű halmaz 5-öd osztályú kombinációinak számával egyenlő, hiszen elég kiválasztani pl. a D betűk összes lehetséges helyét. Erre $C_{16}^5 = \frac{16!}{11!\cdot 5!} = 4368$ lehetőség van. **(2 pont)**

Megjegyzés. A különböző kódok összeszámlálásakor gondolhatunk egy 16 elemű, ismétlődő elemeket is tartalmazó multihalmaz olyan ismétléses permutációira is, amelyekben 11, ill. 5 elem ismétlődik. Ezek száma $P_{16}^{11,5} = \frac{16!}{11! \cdot 5!} = 4368$.

III. módszer. Kombinatorikus modell direkt alkalmazásával. Mivel 12 előadás között úgy kell 5 díjat szétosztani, hogy egy előadás akár több díjat is kaphat, tulajdonképpen egy 12 elemű halmazból úgy kell kiválasztani valahány elemet, hogy azok sorrendje nem számít, és egy elem akár többször is kiválasztható. Tehát egy 12 elemű halmaz 5 elemű, nem rendezett, ismétlődő elemeket is tartalmazó részmultihalmazait képezzük. (**3 pont**)

Ezek száma egy 12 elemű halmaz 5-öd osztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő, ami

$$\overline{C}_{12}^{5} = C_{12+5-1}^{5} = \frac{16!}{11! \cdot 5!} = 4368. \qquad (\textbf{4 pont})$$

Hivatalból (**1 pont**)

■