



XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

X. osztály

1. feladat. Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyek esetén

$$[2x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x]$$

prímszám, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli!

2. feladat. Felbontható-e az $\{1, 2, 3, 4, \dots, 3n\}$ számhalmaz n darab diszjunkt, háromelemű részhalmazra úgy, hogy mindegyik ilyen részhalmazban az egyik elem háromszorosa egyenlő legyen a másik két elem összegével, ha

a) $n = 5$;

b) $n = 10$?

3. feladat. Aprajafalván törpök és tündék élnek, közülük 15 bányász. A falu közelében található aranybányába a bányászok párokban járnak le, felváltva. A törpök gyorsan bányásznak, a tündék gyorsan rakodnak. Egy törpe–törpe párosnak egy út 3 napba, egy tünde–tünde párosnak 5 napba, míg egy törpe–tünde párosnak 2 napba kerül. Minden út után a zsákmány kipakolása egy napot vesz igénybe, a következő páros a kipakolás után azonnal indul bányászni. Egy szezon alatt minden bányász minden másikkal pontosan egyszer bányászik. Minden szezon végén a bányászok cserélődnek. Határozd meg, hogy legkevesebb, illetve legtöbb mennyi ideig tarthat egy szezon (az első csapat indulásától az utolsó csapat zsákmányának kipakolásáig)!

4. feladat. Egy 200 résztvevős matematikaversenyen 6 feladat volt kitűzve. Mindegyik feladat esetén legalább 101 diák oldotta meg helyesen az adott feladatot. Bizonyítsd be, hogy létezik két diák úgy, hogy bármelyik feladatra a 6-ból legalább az egyikük helyes megoldást adott!

5. feladat. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, az ABC szög mértéke 90° és $AB = 2CD = 2BC$. Legyen E az AD oldal felezőpontja és F egy tetszőleges pont az AB egyenesen. Határozd meg a BF szakasz lehetséges hosszát az AB szakasz hosszának függvényében úgy, hogy az EFC háromszög derékszögű legyen!

6. feladat. a) Igazold, hogy három egymásutáni egész szám köbeinek összege osztható 3-mal!

b) Igazold, hogy ha $k \geq 3$ és k egy páratlan természetes szám, akkor nem létezik k darab olyan egymást követő egész szám, amelyek köbeinek összege 2^{2024} .

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok általánosítására, illetve az első helyes megoldástól lényegesen különböző további megoldásokra feladatonként maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.