IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

VI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg, minden alpont esetén, azokat az $\overline{abc}$ alakú természetes számokat, amelyekre teljesül az adott feltétel:

a) $abc = 24$;

b) $(a+1)(b+2)(c+3) = 1320$;

c) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) Mivel $abc = 24$, ezért írjuk fel 24-et, mint három számjegy szorzata, az összes lehetséges módon:

$$24 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4.$$ **(2 pont)**

Ha $abc = 1 \cdot 3 \cdot 8$, akkor $\overline{abc} \in \{138, 183, 318, 381, 813, 831\}$. **(0.5 pont)**
Ha $abc = 1 \cdot 4 \cdot 6$, akkor $\overline{abc} \in \{146, 164, 416, 461, 614, 641\}$. **(0.5 pont)**
Ha $abc = 2 \cdot 2 \cdot 6$, akkor $\overline{abc} \in \{226, 262, 622\}$. **(0.5 pont)**
Ha $abc = 2 \cdot 3 \cdot 4$, akkor $\overline{abc} \in \{234, 243, 324, 342, 423, 432\}$. **(0.5 pont)**

b) Az $(a+1)(b+2)(c+3)$ szorzat lehető legnagyobb értéke $(9+1)(9+2)(9+3) = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$. **(1 pont)**
A feltétel szerint a szorzat 1320, ez pontosan akkor lehetséges ha $a = b = c = 9$. Tehát $\overline{abc} = 999$. **(1 pont)**

c) Az egyenlő arányok sorozatának tulajdonságai alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2a+2b+2c} = \frac{1}{2}.$$ **(1 pont)**

Átalakítva a fenti egyenleteket kapjuk, hogy

$$a = \frac{b+c}{2}, \quad b = \frac{c+a}{2}, \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

Az első két összefüggés alapján

$$a = \frac{\frac{c+a}{2} + c}{2} = \frac{a+3c}{4}.$$

Keresztbe szorozva, következik, hogy $4a = a + 3c$, azaz $3a = 3c$, vagyis $a = c$. Hasonlóan

$$b = \frac{\frac{a+b}{2} + a}{2} = \frac{b+3a}{4},$$

azaz $4b = b + 3a$, tehát $a = b$. Összegezve $a = b = c$. **(1 pont)**
Tehát $\overline{abc} \in \{111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999\}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Az a, b, c számjegyek egyenlőségét másképpen is lehet indokolni. Mivel $a = \frac{b+c}{2}$ ezért az a szám a b és c között helyezkedik el. Hasonlóan b az a és c között, illetve c az a és b között. Ez pontosan akkor lehetséges ha $a = b = c$.

2. feladat (10 pont)**.** A számjegyek közül nyolcat felhasználva, mindegyiket csak egyszer, alkotunk négy darab kétjegyű számot. Ezek mindegyikének fordítottja is kétjegyű szám. A négy szám és fordítottjainak összege egy olyan szám, melynek 37-tel való osztási maradéka 11. Mely számjegyeket nem használtuk fel? *Zajzon Csaba, Barót*

Megoldás. Az alkotott kétjegyű természetes szám nem kezdődhet 0-val, valamint az egyesek helyén sem lehet 0, mert akkor a fordított számok valamelyikének első számjegye 0 lenne. Ezért az egyik számjegy, amit nem használtunk fel a 0. **(1 pont)**
Jelölje a négy számot $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}, \overline{gh}$. Ekkor a fordítottjaik $\overline{ba}, \overline{dc}, \overline{fe}, \overline{hg}$. Ha S-sel jelöljük a nyolc szám összegét, akkor

$$S = \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} + \overline{gh} + \overline{ba} + \overline{dc} + \overline{fe} + \overline{hg}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A számok 10-es alapú számrendszerben vannak, ezért

$$\begin{aligned} S &= 10a + b + 10c + d + 10e + f + 10g + h + 10b + a + 10d + c + 10f + e + 10h + g \\ &= 11a + 11b + 11c + 11d + 11e + 11f + 11g + 11h \\ &= 11(a + b + c + d + e + f + g + h) \qquad \textbf{(1 pont)} \end{aligned}$$

A feltétel szerint $S = 37k + 11$, ahol k egy természetes szám, **(1 pont)**
vagyis $S - 11 = 37k$. **(1 pont)**
Ekkor

$$11(a + b + c + d + e + f + g + h - 1) = 37k.$$

Figyelembe véve, hogy 11 és 37 relatív prímek, kapjuk, hogy $(a + b + c + d + e + f + g + h - 1) \vdots 37$. **(1 pont)**

Tudjuk, hogy

$$36 \leq a + b + c + d + e + f + g + h \leq 44, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így $a + b + c + d + e + f + g + h - 1 = 37$, **(1 pont)**
azaz $a + b + c + d + e + f + g + h = 38$. A kilenc számjegy összege 45, tehát a hiányzó számjegy $45 - 38 = 7$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Az első megoldást követjük addig, hogy $S = 37k + 11$, ahol k egy természetes szám. **(4 pont)**

Továbbá $S \vdots 11$, vagyis $37k + 11 \vdots 11$, tehát $37k \vdots 11$. Figyelembe véve, hogy 11 és 37 relatív prímek, írhatjuk, hogy $k \vdots 11$. **(1 pont)**
Tudjuk, hogy

$$1 + 2 + \ldots + 8 \leq a + b + \ldots + g \leq 2 + 3 + \cdots + 9.$$

Beszorozva 11-gyel kapjuk, hogy

$$\frac{8 \cdot 9}{2} \cdot 11 \leq S \leq \left(\frac{9 \cdot 10}{2} - 1 \right) \cdot 11,$$

azaz $396 \leq S \leq 484$. (**1 pont**)
Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} 396 &\leq 37k + 11 \leq 484, \\ 385 &\leq 37k \leq 473, \\ 10 + \frac{15}{37} &\leq k \leq 12 + \frac{29}{37}, \end{aligned}$$

Tehát $k \in \{11, 12\}$. Figyelembe véve, hogy $k \vdots 11$, kapjuk, hogy $k = 11$. (**1 pont**)
Következésképpen $S = 37 \cdot 11 + 11 = 38 \cdot 11$, ebből $a + b + c + d + e + f + g + h = 38$. (**1 pont**)
A kilenc számjegy összege 45, így a hiányzó számjegy $45 - 38 = 7$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

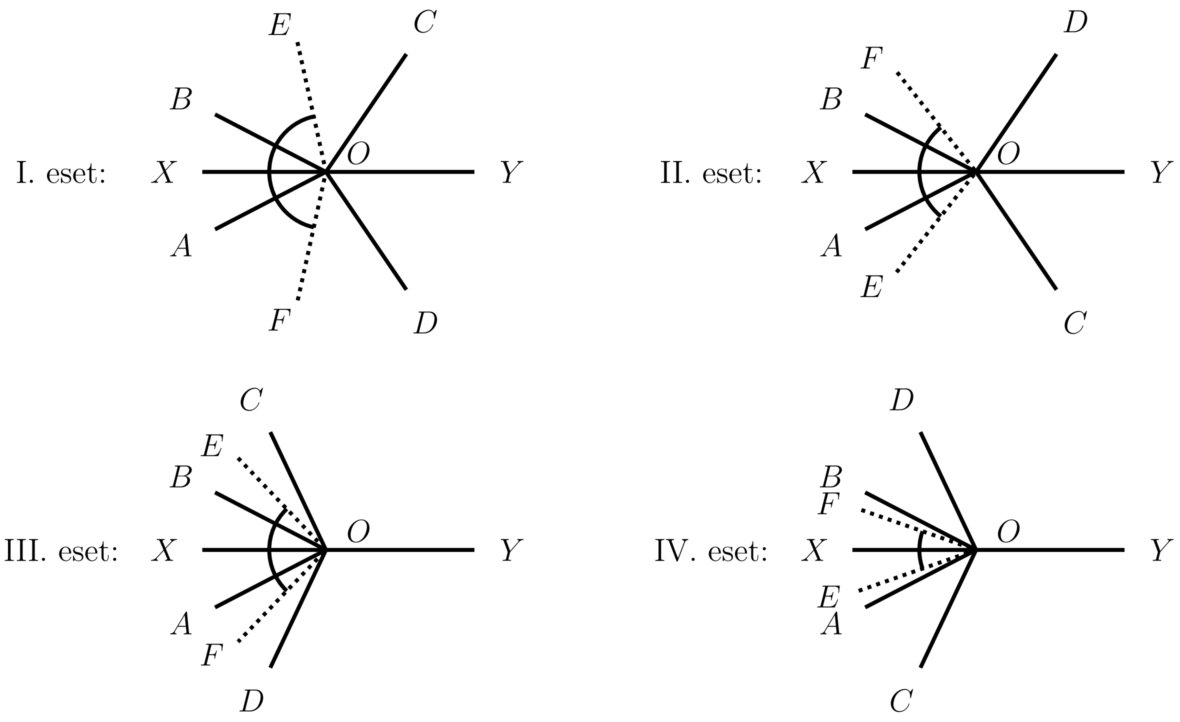
3. feladat (10 pont)**.** Adottak a síkban az $\widehat{AOB} = 50^\circ$ és $\widehat{COD} = 120^\circ$ szögek, amelyeknek a szögfelezői egy egyenesen vannak.

a) Határozd meg a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek mértékét! Hány eset lehetséges?

b) Számítsd ki a $\widehat{BOC}$ és $\widehat{AOD}$ szögek szögfelezői által bezárt szög mértékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Legyen OX az $\widehat{AOB}$ szögfelelője, és OY az ellentétes félegyenese. Ekkor két eset lehetséges: a $\widehat{COD}$ szögfelejőze egybeesik OX-el, vagy OY-nal. Mindkét esetben a C pont az OX átlal meghatározott két félsík bármelyikében lehet: az A pontot tartalmazó félsíkban, vagy a B pontot tartalmazó félsíkban. Tehát összesen négy esetünk van (lásd az ábrát). (**1 pont**)



Megjegyzés. Az XY egyenesre nézve az OA és OC szimmetrikusa rendre OB, valamint OD. Ezért $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$.

Legyen OE a $\widehat{BOC}$ szögfelezője, illetve OF az $\widehat{AOD}$ szögfelezője.

I. eset.

a) Feltétel szerint $\widehat{XOB} = 25°$ és $\widehat{YOC} = 60°$, ezért $\widehat{BOC} = 180° - \widehat{YOC} - \widehat{BOC} = 95°$; valamint $\widehat{AOD} = 95°$. **(1 pont)**

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{BOA} + \widehat{AOF}$. Tudjuk, hogy $\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) + \widehat{AOB} = \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 145°$. **(1 pont)**

II. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 145°$; valamint $\widehat{AOD} = 145°$. **(1 pont)**

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{AOF} + \widehat{BOE} - \widehat{AOB}$. Tudjuk, hogy $\widehat{AOF} = \widehat{BOE} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) - \widehat{AOB} = \widehat{BOC} - \widehat{AOB} = 95°$. **(1 pont)**

III. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{XOC} - \widehat{XOB} = 35°$; valamint $\widehat{AOD} = 35°$. **(1 pont)**

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{BOA} + \widehat{AOF}$. Tudjuk, hogy $\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = 2(\widehat{BOC} : 2) + \widehat{AOB} = \widehat{BOC} + \widehat{AOB} = 85°$. **(1 pont)**

IV. eset.

a) Az ábra alapján $\widehat{BOC} = \widehat{BOX} + \widehat{XOC} = 85°$; valamint $\widehat{AOD} = 85°$. **(1 pont)**

b) Az ábra alapján $\widehat{EOF} = \widehat{COD} - \widehat{FOD} - \widehat{COE}$. Tudjuk, hogy $\widehat{FOD} = \widehat{COE} = \widehat{BOC} : 2$. Tehát $\widehat{EOF} = \widehat{COD} - 2(\widehat{BOC} : 2) = \widehat{COD} - \widehat{BOC} = 35°$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az erdei tisztáson húsvét reggelén az ötven tagú nyuszicsapat 50 darab sorba állított tojásautomatát talált. Mindegyik automata a tojásokat piros–sárga–zöld–kék–piros–sárga–zöld–kék–piros–... sorrendben adagolja (a tojások színei ebben a sorrendben ismétlődnek és mindegyik automatában az első tojás piros). A nyuszik egymásután feltöltik a puttonyaikat és indulnak a gyerekekhez: az első nyuszi mindegyik automatából kivesz egy-egy tojást; a második nyuszi a második automatával kezdődően minden másodikból egyet-egyet; a harmadik a harmadik automatával kezdődően minden harmadikból egyet-egyet, és így tovább. Így az utolsó nyuszi csak az ötvenedik automatából vesz ki egy tojást.

a) Összesen hány tojást szereztek be a nyuszik az automatákból?

b) Az első nyuszi után leghamarabb melyik nyuszi fog piros tojást kivenni?

c) A nyuszik hány automatából vettek ki páratlan számú tojást?

Hodgyai Edit, Micske
Zajzon Csaba, Barót

Faluvégi Melánia, Zilah

Megoldás. a) Az 1. nyuszi minden automatából kivesz egy-egy tojást, így 50 tojással távozik. A 2. nyuszi a második automatától számítva minden másodikból, vagyis a páros sorszámúakból vesz ki egy-egy tojást, így $50 : 2 = 25$ tojást szállít. A harmadik nyuszi a harmadik automatától kezdődően, minden harmadikból vesz ki tojást, azaz a három többszöröse sorszámú automatákból. A legnagyobb három többszörös, ami kisebb mint 50 a 48. Tehát $48 : 3 = 16$ darab három többszörös van 1-től 50-ig. Vagyis 16 tojást vesz ki a harmadik nyuszi. (**1 pont**)
A negyedik nyuszi a fenti gondolatmenet szerint 12 tojást kap. Hasonló gondolatmenet alapján kitölthetjük az alábbi táblázatot, ahol az első sor tartalmazza a nyuszik sorszámát, és alatta a második sor pedig általuk beszerzett tojások számát.

Nyuszi sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13–16	17–25	26–50
Tojások száma	50	25	16	12	10	8	7	6	5	5	4	4	3	2	1

(**1 pont**)

Így összesen

$$50 + 25 + 16 + 12 + 10 + 8 + 7 + 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 25 \cdot 1 = 207$$

tojást vittek el. (**1 pont**)

b) Az első nyuszi után minden automata sárga tojást fog adni. A második nyuszi után a páros sorszámú automaták zöld színűt, míg a páratlan sorszámú automaták sárga tojást fognak adni. (**1 pont**)
A harmadik nyuszi után az automatákban soron következő tojások színei rendje: sárga, zöld, zöld, zöld, sárga, kék, sárga, ... Vagyis minden hatodik automatában a soron következő tojás színe kék, az összes többiben sárga, vagy zöld.
A gondolatmenetet folytatva, a negyedik nyuszi után minden tizenkettedik automatában lesz a soron következő tojás piros, az összes többiben sárga, zöld vagy kék. (**1 pont**)
Mivel 1 és 50 között nincs 5-tel és 12-vel egyszerre osztható szám, így az ötödik nyuszi biztosan nem vesz ki piros tojást. Tehát a hatodik nyuszi fog először piros tojást kivenni az első nyuszi után, mégpedig a 12-ik automatából. (**1 pont**)

Második megoldás a b) alpontra. Piros tojás leghamarabb azokból az automatákból lesz kivehető, amelyekből már négy tojást kivettek. Ez leghamarabb az első négy nyuszi után történhet meg. (**1 pont**)
Ezért nézzük meg hol lesznek piros tojások az első négy nyuszi után! Az első nyuszi kivesz minden automatából; a második nyuszi kivesz minden páros sorszámú automatából; a harmadik minden három többszörös sorszámú automatából; illetve a negyedik nyuszi minden négy többszörösű sorszámú automatából. Így azoknak az automatáknak, amelyekből az első négy nyuszi tojást vett ki a sorszáma többszöröse kell legyen $1, 2, 3$ és 4-nek. Ezen számok legkisebb közös többszöröse 12, azaz minden tizenkettedik automata ad piros tojást az első négy nyuszi után, és más nem. (**1 pont**)
Az előző megoldás gondolatmente alapján nem az ötötdik, hanem a hatodik nyuszi fog először piros tojást kivenni az automatákból az első nyuszi után, mégpedig a a 12-ik automatából. (**1 pont**)

c) Egy automatából pontosan akkor vehet ki egy tojást egy adott nyuszi, ha annak a nyuszinak a sorszáma osztja az automata sorszámát. Tehát mindegyik automatából annyi tojás lesz kiszedve, ahány osztója van az illető sorszámának. Így a feladatunk az, hogy számoljuk meg, hogy 1 és 50 között hány számnak van páratlan sok osztója. (**1 pont**)

Ha n nem négyzetszám és d osztja az n-et, akkor $\frac{n}{d} \neq d$ is osztja az n-et, tehát az osztók párba állíthatók, és ezért páros sokan vannak.
Ha $n = k^2$ négyzetszám, akkor az előbbi gondolatnak megfelelően az n osztói közül mindegyiknek van párja, kivéve a k-t. Ez azt jelenti, hogy a négyzetszámoknak páratlan sok osztója van. (**1 pont**)

Összegezve, azon automatákból vettek ki páratlan sok tojást, amelyek sorszáma teljes négyzet. Egy és ötven között a teljes négyzetek $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$. Azaz hét darab automatából vettek ki páratlan sok tojást. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■