IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

V. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Egy zeneiskolában az egyik osztály minden diákját tanítják zongorázni és hegedülni is, méghozzá úgy, hogy a tanár egyszerre mindig csak egy diáknak tart órát. Az osztály fel van osztva A és B csoportokra. Az A csoportba tartozó diákok mindegyike hetente 5 hegedűórára és 2 zongoraórára, a B csoportban lévők pedig 3 hegedűórára és 4 zongoraórára járnak. Így az osztály diákjai hetente 63 hegedűórán és 56 zongoraórán vesznek részt.

a) Határozd meg, hogy hány diák van az osztályban!

b) Határozd meg az A, illetve B csoportban lévő diákok számát!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás.

a) Az osztály diákjai összesen $63 + 56 = 119$ órára járnak. (**2 pont**)
Mindegyik tanulónak összesen 7 zongora- és hegedűórája van egy héten. (**1 pont**)
Így az osztálynak $119 : 7 = 17$ diákja van. (**1 pont**)

b) Feltételezzük, hogy minden diák az A csoportba tartozik. Ekkor összesen $17 \cdot 5 = 85$ hegedűórájuk lenne. (**1 pont**)
Ez $85 - 63 = 22$ órával több, mint ahány hegedűórájuk van összesen. (**1 pont**)
Ha egy diák nem az A, hanem a B csoportba járna, az $5 - 3 = 2$ hegedűórával jelentene kevesebbet. (**1 pont**)
Tehát a B csoportba $22 : 2 = 11$ diák tartozik, (**1 pont**)
az A csoportba pedig $17 - 11 = 6$ diák van. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)
■

2. feladat (10 pont)**.** a) Határozd meg azt a legkisebb m természetes számot, amelynek pontosan 2022 természetes osztója van!

b) Igazold, hogy az $n = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$ szám osztóinak összege osztható 78-cal!

Mátyás Beáta, Szatmárnémeti

Megoldás.

a) Ha az m szám prímhatványokra való felbontása

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

alakú, akkor m-nek pontosan $(1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_k)$ darab osztója van. Tehát az m számnak akkor van pontosan 2022 osztója, ha $(1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_k) = 2022$. (**1 pont**)
Ez alapján a 2022-t fel kell bontanunk az összes lehetséges módon szorzótényezőkre. Minden egyes

felbontásban, ha a tényezőkből kivonunk 1-et, megkapjuk a lehetséges $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kitevőket.
A 2022 prímtényezős felbontása $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. **(1 pont)**
A keresett számok tehát

$$p_1^{2021},\ p_1 \cdot p_2^{3\cdot 337-1},\ p_1^2 \cdot p_2^{2\cdot 337-1},\ p_1^5 \cdot p_2^{336},\ p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^{336}$$

alakúak, ahol p_1, p_2, p_3 különböző prímszámok. **(1 pont)**
Mivel a legkisebb természetes számot keressük, ezért a nagyobb hatványkitevőkhöz válasszuk a kisebb prímtényezőket, kezdve a legkisebb prímszámokkal, tehát a jelöltjeink az

$$x = 2^{2021},\ y = 2^{1010} \cdot 3,\ z = 2^{673} \cdot 3^2,\ u = 2^{336} \cdot 3^5,\ v = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$$

természetes számok. **(1 pont)**
Ezután rendre összehasonlítjuk a számokat, hogy megkapjuk a legkisebbet. Sorra végezhetjük a következő összehasonlításokat:

$$\begin{aligned}
x = 2^{2021} = 2^{1010} \cdot 2^{1011} &> 2^{1010} \cdot 3 = y,\\
y = 2^{1010} \cdot 3 = 2^{673} \cdot 2^{337} \cdot 3 &> 2^{673} \cdot 3 \cdot 3 = z,\\
z = 2^{673} \cdot 3^2 = 2^{337} \cdot 2^{336} \cdot 3^2 &> 2^{337} \cdot 3^3 \cdot 3^2 = u,\\
u = 2^{336} \cdot 3^5 = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 3^3 &> 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5 = v.
\end{aligned}$$

(1 pont)

Ezek alapján a keresett természetes szám az $m = v = 2^{336} \cdot 3^2 \cdot 5$. **(1 pont)**

b) Az n szám minden osztója felírható $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakban, ahol az a, b, c természetes számokra igaz, hogy $a \leq 336, b \leq 2$ és $c \leq 1$. **(1 pont)**
Ha az n osztóinak összegét D-vel jelöljük, akkor az összeadandókat az előbbi megjegyzés alapján a következő módon csoportosíthatjuk:

$$\begin{aligned}
D = {} & 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{336} + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^{336}\\
& + 3^2 + 3^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2^2 + \cdots + 3^2 \cdot 2^{336} + 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + 5 \cdot 2^{336}\\
& + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 5 \cdot 2^{336} + 3^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 5 \cdot 2 + 3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 + \cdots + 3^2 \cdot 5 \cdot 2^{336}.
\end{aligned}$$

Az $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{336}$ jelölés bevezetésével az előző összefüggés átírható a

$$\begin{aligned}
D &= S + 3 + 3 \cdot S + 3^2 \cdot S + 5 \cdot S + 3 \cdot 5 \cdot S + 3^2 \cdot 5 \cdot S\\
&= \left(1 + 3 + 3^2 + 5 + 3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 5\right) S = 78S
\end{aligned}$$

(1 pont)

alakba. A $D = 78 \cdot S$ szám osztható 78-cal, ezért az n szám osztóinak összege osztható 78-cal. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Gombóc Artúr gazdag nagybácsija egy játékra hívja Artúrt és barátait. A játékosok kapnak egy-egy belépőt a játékba, amellyel majd elnyerhetik a nagybácsi 2022 aranyérméből álló vagyonát, vagy annak egy részét. A játék folyamán, minden kör elején, mindenki akinek van belépője sorra elvesz egy-egy aranyérmét a gazdag nagybácsitól. Ezután a nagybácsi véletlenszerűen elveszi valamelyik játékos belépőjét, aki ezáltal kiesik a játékból, majd egy új kör kezdődik. A játék addig folytatódik, ameddig mindegyik játékos el nem veszíti a belépőjét, vagy a nagybácsi ki nem fogy az aranyérmékből.

a) Határozd meg, hogy legtöbb hány belépőt oszthat ki a nagybácsi úgy, hogy biztos maradjon neki is aranyérméje a játék végére!

b) Gombóc Artúrnak a nagynénije is rendelkezik 2022 aranyérmével és megszervez ő is egy hasonló játékot, annyi különbséggel, hogy ő körönként két játékosnak veszi el a belépőjét, vagy az utolsó egynek. Határozd meg, hogy a nagynéni legtöbb hány belépőt oszthat ki úgy, hogy a játék végére biztosan ne fogyjon ki az aranyérmékből!

Mastan Eliza, Máramaros
Baja Zsolt, Kolozsvár

Megoldás.

a) Legyen a kiosztott belépők száma n. Ekkor a nagybácsitól az első körben elvesznek n érmét, a második körben $n-1$-et, majd $n-2$-t, és így tovább. A nagybácsi akkor nem fogy ki a pénzérmékből, ha az utolsó körben több, mint egy érméje van, ekkor elvesznek tőle 1 aranyérmét, majd ő elveszi az utolsó belépőt. Ebben az esetben a játék alatt a nagybácsitól összesen

$$n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

aranyérmét vesznek el. A nagybácsinak kell pénze maradjon a játék után, ezért azt a legnagyobb n-et kell megkeresnünk amely teljesíti az

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} < 2022,$$

egyenlőtlenséget. **(1 pont)**

Mivel

$$\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 < 2022 \quad \text{és} \quad \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080 > 2022, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért a keresett n érték 63, vagyis a nagybácsi legtöbbb 63 belépőt oszthat ki úgy, hogy még neki is maradjon az aranyérmékből a játék végén. **(1 pont)**

b) Jelöljük ismét n-el a játékosok számát. A nagynéni minden kör végén 2 belépőt vesz el, ezért Artúrék rendre $n, n-2, n-4, \ldots$ aranyérmét tudnak elvenni és az utolsó körben még 1-et vagy 2-t, attól függően, hogy páros vagy páratlan a játékosok száma.

Tárgyaljunk az szerint, hogy n páros, vagy páratlan. Ha n páros, vagyis ha $n = 2k$, akkor Artúrék összesen

$$2k + 2k - 2 + \cdots + 2 = 2(k + k - 1 + \cdots + 1) = k \cdot (k+1) \qquad \textbf{(1 pont)}$$

darab aranyérmét nyernek el és a legnagyobb k természetes számot kell megkeressük, amelyre teljesül, hogy $k \cdot (k+1) < 2022$. Mivel

$$44 \cdot 45 = 1980 < 2022 < 2070 = 45 \cdot 46,$$

ezért $k = 44$, vagyis legtöbb $2 \cdot 44 = 88$ darab belépőt tud kiosztani a nagynéni ebben az esetben. **(1 pont)**

Ha n páratlan, vagyis ha $n = 2k - 1$, akkor a játékosok nyeresége összesen

$$2k - 1 + 2k - 3 + \cdots + 3 + 1 = k^2 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

darab aranyérme. A célunk annak a legnagyobb k természetes számnak a megkeresése, amelyre teljesül, hogy $k^2 < 2022$. Mivel

$$44^2 = 1980 < 2022 < 2025 = 45^2,$$

ezért $k = 44$, vagyis ebben az esetben legtöbb $2 \cdot 44 - 1 = 87$ darab belépőt tud kiosztani a nagynéni. **(1 pont)**

A két esetet összesítve azt kapjuk, hogy a nagynéni legtöbb 88 belépőt oszthat ki, ha a játék végén nem szeretne érmék nélkül maradni. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

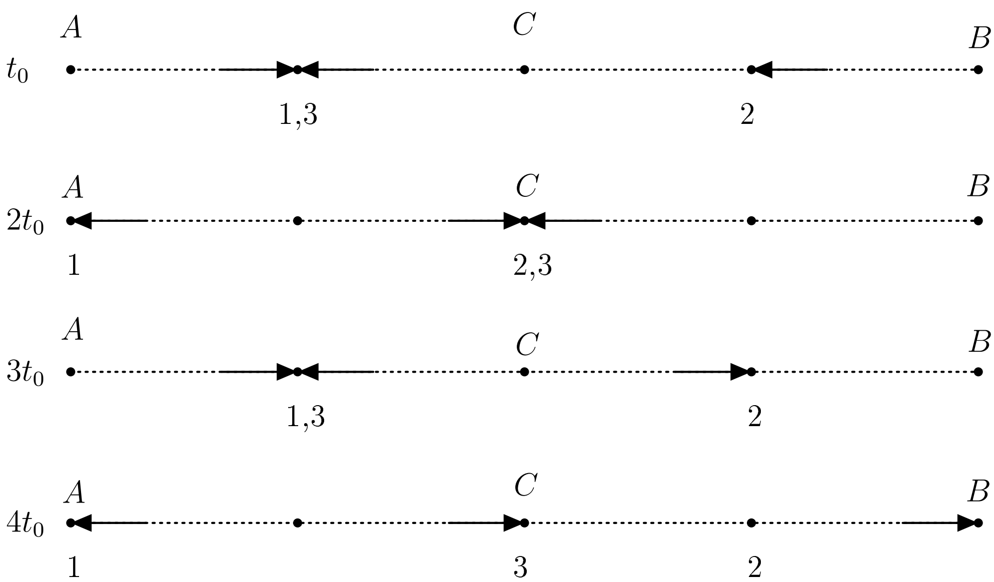
4. feladat (10 pont)**.** Az A és B város távolsága 60 km. A két várost egy kétirányú egyenes út köti össze. Ezen az úton egyszerre indul egy-egy felügyelő járőr egymással szemben azonos sebességgel. Velük egy időben a félúton levő C pontból is elindul egy járőr az egyik város felé, ugyanolyan sebességgel, mint az előző kettő. A járőrökre az a szabály vonatkozik, hogy egyenletes sebességgel kell haladniuk és ha összetalálkoznak egy másik járőrrel, akkor mindkettő visszafordul és tovább folytatja a járőrözést. Ha valamelyik járőr visszaér az A vagy a B városba, akkor szintén visszafordul és folytatja az útját.

a) Igazold, hogy van olyan t időpont, amelyben minden járőr visszakerült abba a pontba, amelyikből indult. Határozd meg az ilyen t időpontokat (a kezdéshes viszonyítva), ha a járőrök sebessége 5 km/h!

b) Igazold, hogy az előbbi állítás akkor is igaz, ha a C-ben lévő járőr helyett két másikat indítunk: az egyiket az A-tól 20 km-re levő D pontból, a másikat az A-tól 40 km-re levő E pontból, tetszőlegesen vagy az A, vagy a B irányába! *András Szilárd, Kolozsvár*

Megoldás.

a) A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy a C-ből az A felé indul a járőr. Jelöljük t_0-val azt az időt, amennyi idő alatt a járőrök megtesznek 15 km távolságot ($t_0 = 3$ óra). Az alábbi ábrán azt láthatjuk, hogy a $t_0, 2t_0, 3t_0, 4t_0$ időpontokban hol vannak a járőrök. A nyilakra írt számok a járőrök sorszámát jelölik, 1-el az A-ból induló, 2-vel a B-ből induló és 3-mal a C-ből induló járőrt jelöltük.

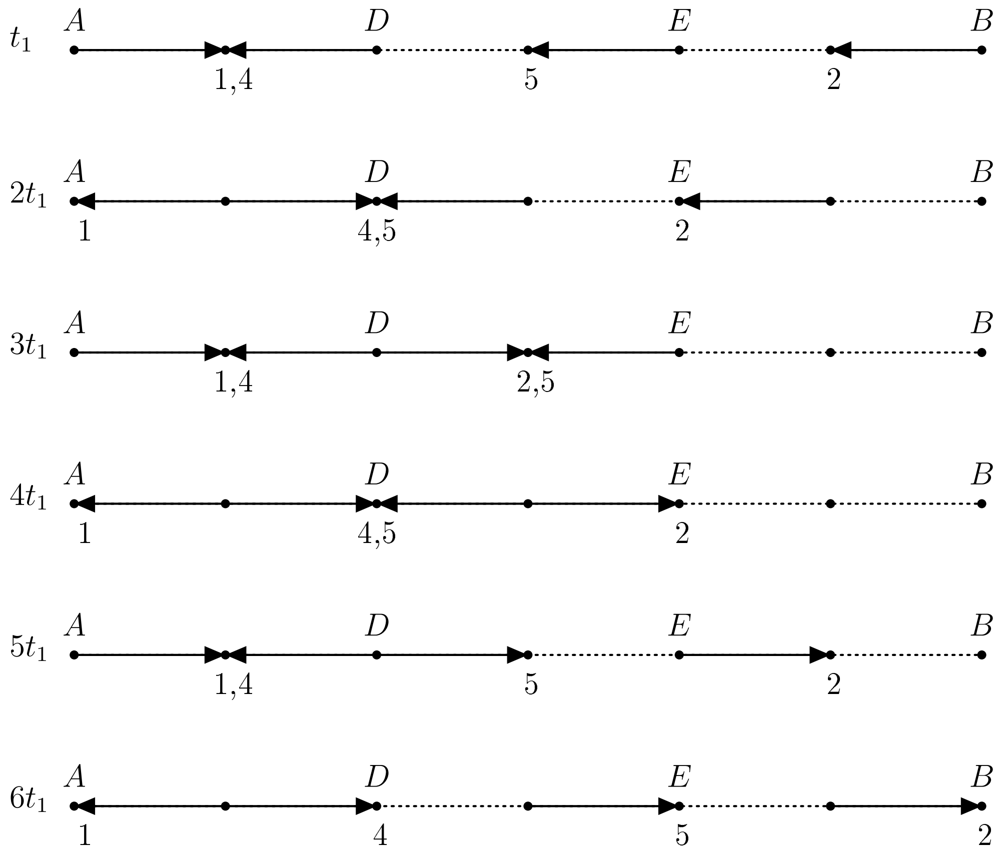


Látható, hogy $4t_0$ a legrövidebb idő, amely után minden járőr visszakerül a kiindulási helyére. A 3-as járőr ugyan a C-ben lesz, de B felé fog továbbhaladni, tehát további $4t_0$ idő múlva ismét a C-be kerül, de ezúttal az A felé fog tartani, vagyis ettől a pillanattól kezdve minden ismétlődik. (**4 pont**)

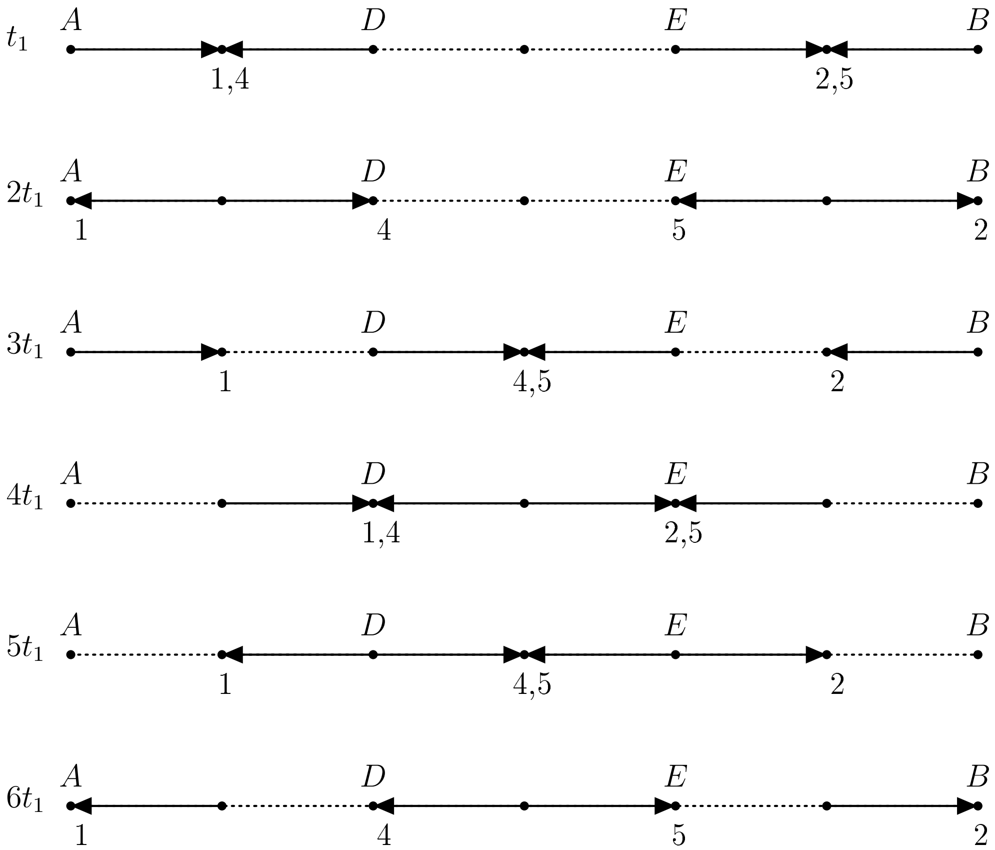
Megjegyzés. Az ábrán látható mindegyik állapot helyes feltűntetése egy pontot ér.

Ha a járőrök sebessége 5 km/h, akkor t_0 értéke 3 óra. Így a járőrök 12 óránként érkeznek vissza a kiindulási helyükre és 24 óránként ismétlődik a teljes folyamat. (**1 pont**)

b) Legyen a D-ből induló járőr sorszáma 4, az E-ből indulóé pedig 5. Mind a két járőr indulhat az A és B város felé is, vagyis $2 \cdot 2 = 4$ esetet kellene letárgyaljunk. Az a két eset, amikor mindkettő az A vagy mindkettő a B felé indul szimmetrikus, ezért elég egyiket letárgyalni. Jelöljük t_1-el azt az időt, amennyi alatt a járőrök megtesznek 10 km távolságot ($t_1 = 2$ óra).
Ha mind a két új járőr egy irányba indul, akkor a szimmetria miatt ezt választhatjuk az A irányának. A következő ábra alapján $6t_1$ idő után mindegyik járőr visszakerül a helyére, viszont ezúttal az új járőrök a B irányába fognak tartani. Tehát $12t_1$ idő után mindenki visszakerül a kiinduló helyére, a kezdeti irányával és innen a folyamat ismétlődik. (**1 pont**)



A maradék két esetben a két új járőr különböző irányba indul kezdetben. Ha a 4-es számú járőr az A felé indul, akkor $2t_1$ idő után mindenki visszakerül a helyére, viszont a 4-es ezúttal a B felé fog menni, az 5-ös pedig az A felé. Ez pontosan a harmadik tárgyalandó eset kiinduló állapota, és innen $4t_1$ idő alatt visszajutnak a második eset kiinduló állapotába. Tehát mindkét esetben $6t_1$ idő alatt a járőrök visszajutnak a kiinduló helyükre a kiinduló menetirányukkal. (**2 pont**)



Összefoglalva legfeljebb $12t_1 = 24$ óra alatt mindenki visszakerül a kiindulási helyére. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■