SZABÓ CSILLA
DR. BENCZE MIHÁLY
DR. KOLUMBÁN JÓZSEF
DÁVID GÉZA
CSAPÓ HAJNALKA
BÍRÓ JUDIT
MÁTÉFI ISTVÁN
MÉSZÁR JULIANNA
SZILÁGYI JUDIT
KOVÁCS BÉLA
PÁLHEGYI – FARKAS LÁSZLÓ
MASTAN ELIZA

XXIV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Németh László Elméleti Líceum
Nagybánya

Feladatok és megoldások

MARIA MONTESSORI KIADÓ
NAGYBÁNYA, 2014

Műszaki szerkesztés: Csapó Hajnalka, Madarassy Kinga, Májercsik Rudolf

A feladatokat összeállító bizottság tagjai:

Szabó Csilla, Nemzeti Oktatási Minisztérium, Bukarest
dr. Kolumbán József, Babes-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Biró Judit, Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Csapó Hajnalka, Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Cziprok András, Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémet
Dávid Géza, Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Egyed Géza, Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kocsis Attila Levente, Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Koczinger Éva, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Kovács Béla, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Mastan Eliza, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Mátéfi István, Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mészár Julianna, Arany János Elméleti Líceum, Szalonta
Nemes András, Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Pálhegyi – Farkas László, Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Reman Ildikó, Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Szilágyi Judit, Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Vad Márta, Petőfi Sándor Elméleti Líceum, Székelyhíd
Vandra Mária, Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó

Titkár: Májercsik Rudolf, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
XXIV. Erdélyi Magyar Matematika Verseny : Németh László Elméleti Líceum Nagybánya / coord.: Szabó Csilla, dr. Kolumbán József, Csapó Hajnalka, ... - Baia Mare : Editura Casei Corpului Didactic
Baia Mare "Maria Montessori", 2014
ISBN 978-606-8262-99-4
I. Szabó, Csilla (coord.)
II. Kolumbán, József (coord.)
III. Csapó, Hajnalka (coord.)
51(075.35)

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

A XXIV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny házigazdája 2014. február 6-9 között a nagybányai Németh László Elméleti Líceum volt. A nagybányai festő iskola színességébe, a történelem szépségeként beilleszkedett idén a matematika is. Németh Lászlót, a város szülöttjét idézve *„Maga a feladat segít és véd bennünket”*.

Köszönet Váradi Izabellának, a „Németh László” Elméleti Líceum igazgatónőjének, hogy felvállalta ezen verseny szervezését, hasonlóan Mastan Eliza matematika tanárnőnek, és a líceum tanári karának, és végül az egész város magyarságának, hogy példamutató összefogásukkal egy csodálatos versenyen vehettünk részt.

Ez a verseny része annak a tehetséggondozó mozgalomnak, melyet dr. Bencze Mihály brassói matematikatanár kezdeményezett 25 évvel ezelőtt, és amely egyben a 2014. március 12-16 között Csíkszeredában sorra kerülő XXIII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny erdélyi válogató szakasza is. Amióta a román tanügyminisztérium hivatalos versenye lett, megengedhetjük, hogy vándorversenyként Erdély nevezetes magyar iskolái rendezhessék. *„A matematikai intuíció lángja éppen hogy pislákol a gyermek agyában. Meg kell erősíteni és fenn kell tartani, hogy fénye minden számtani tevékenységre rávetülhessen*.” (Stanislas Dehaene)

Dr. Kolumbán József a versenybizottság elnöke, a matematika tanárok egykori egyetemi tanára, a Magyar Tudományos Akamémia hazai képviselője, felvetette a matematika tanárképzés és a matematika tanítás várható válságát, és ennek megelőzésére ösztönözte a résztvevő ifjú matematikusokat. A Bolyaiak által elíndított matematikánknak jövője kell legyen, és ez rajtunk és versenyző diákjaink jövőbeli hozzáállásán múlik.

Pach János következő idézetét fáklyaként emelem a jövőbe: *„Aki matematikát tanul, az a tűzzel játszik. A matematika könnyen lenyűgözi, elcsábítja, rabul ejti az embert. Csodálatos titkokat rejt, melyek egyike-másika kis szerencsével és kemény munkával megfejthető. A megvilágosodás pillanatának katarzisa semmivel sem összehasonlítható, felemelő érzés.”*

Szabó Csilla
A román Oktatásügyi Minisztérium tanácsosa,
az Erdélyi Magyar Középiskolák Matematikaversenyének
ügyvezető elnöke

A VERSENY SZERVEZÉSÉBEN RÉSZT VÁLLALTAK

dr. Váradi Izabella - igazgató	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Bogya Emese	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Czol Erzsébet	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Czumbil Csaba	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Dávid Erzsébet	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Dejerán Melinda	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Elekes Izabella	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Farkas Annamária	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Fülöp Gabi	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Ivás Edith	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Longáver Lajos	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Madarassy Kinga	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Staharóczky Kinga	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Szkiba Sándor	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Tasnádi Ella	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Veress Noémi	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Zákány Mónika	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Májercsik Andrea	Domokosi Általános Iskola, Domokos
Balogh Enikő	Felsőbányai Műszaki Iskola, Felsőbánya
Dembrovszki Károly	Hosszúmezői Általános Iskola, Hosszúmező
Takács Attila	Leövey Klára Elméleti Líceum , Máramarossziget
Bálint Beáta	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Kiss Luca Andrea	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Lapsánszky Edith	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Lojszli Sára	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Toth Melinda	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Ujlaki Zita	Nicolae Iorga Általános Iskola, Nagybánya
Moanţă Annamaria	Petőfi Sándor Általános Iskola, Koltó
Bálint Tünde	Petre Dulfu Általános Iskola, Nagybánya
Csendes Mónika	Petre Dulfu Általános Iskola, Nagybánya
Csurka Tünde	Petre Dulfu Általános Iskola, Nagybánya
Ninács Mária	Petre Dulfu Általános Iskola, Nagybánya

A Németh László Elméleti Líceum munkaközössége

A VERSENYBIZOTTSÁG TAGJAI

Elnök: dr. Kolumbán József, Babes-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Ügyvezető elnök: Szabó Csilla, Nemzeti Oktatási Minisztérium, Bukarest
Alelnök: dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Tag: Biró Judit, Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Tag: Csapó Hajnalka, Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Tag: Cziprok András, Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémet
Tag: Dávid Géza, Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Tag: Egyed Géza, Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Tag: Kocsis Attila Levente, Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Tag: Koczinger Éva, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Tag: Kovács Béla, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Tag: Mastan Eliza, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Tag: Mátéfi István, Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Tag: Mészár Julianna, Arany János Elméleti Líceum, Szalonta
Tag: Nemes András, Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Tag: Pálhegyi – Farkas László, Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Tag: Reman Ildikó, Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Tag: Szilágyi Judit, Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Tag: Vad Márta, Petőfi Sándor Elméleti Líceum, Székelyhíd
Tag: Vandra Mária, Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Titkár: Majercsik Rudolf, Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

FELADATOK

I. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. Oldd meg az $\left(x^2+2x+4\right)\left(16y^2+4y+1\right)=8xy$, $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ egyenletet!

Mátéfi István, Marosvásárhely

2. Igazold, hogy az $A=12^{n+1}-22\cdot\left(2^{2n+1}+3^{n+1}\right)+132n+98$ szám osztható 396 -tal!

Bencze Mihály, Bukarest

3. Adott a következő sorozat:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5},\ldots$$

a) Mivel egyenlő a sorozat 2014-ik tagja?

b) A sorozat hányadik tagja az $\frac{1014}{1001}$ szám?

Longáver Lajos, Nagybánya

4. A síkban vegyünk fel n különböző, az origóból induló vektort, és képezzük ezekből az összes lehetséges különböző vektorokból álló összeget. Tekintsük az eredeti vektorok és az így kapott összegvektorok végpontjainak M_n halmazát. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre ez az n vektor megadható úgy, hogy az M_n halmazból ki lehessen választani egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsát, és négy olyan pontot is, amelyek egy négyzet csúcsait alkotják?

Róka Sándor, Nyíregyháza

X. OSZTÁLY

1. Adott a b pozitív valós szám. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt{2}^{\log_b x} + b^{\log_x \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

Bencze Mihály, Bukarest

2. Legyen a, $b \in \mathbb{R}$, $a - b < \frac{1}{4}$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ olyan függvény, amelyre

$$f(x^2 + a) + \frac{1}{f(x+b)} = 2 \text{ bármely } x \in \mathbb{R} \text{ esetén}\quad .$$

Igazold, hogy az f függvény nem injektív.

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Adott a $H = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, \left| z + \frac{1}{z} \right| + \left| z - \frac{1}{z} \right| = 2 \right\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $|\, z \,| = 1$ bármely $z \in H$ esetén!

b) Határozd meg a H halmaz elemeit!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

4. Az ABC derékszögű háromszögben CD az AB átfogóhoz tartozó magasság. A CD átmérőjű k kör a BC és AC befogókat rendre az E és F pontokban metszi. A k körhöz az E és F pontokban húzott érintők az AC és BC egyeneseket az E_1 illetve F_1 pontokban metszik.

a) Bizonyítsd be, hogy $EE_1 \parallel FF_1$.

b) Bizonyítsd be, hogy $E_1F = AC$ és $EF_1 = BC$.

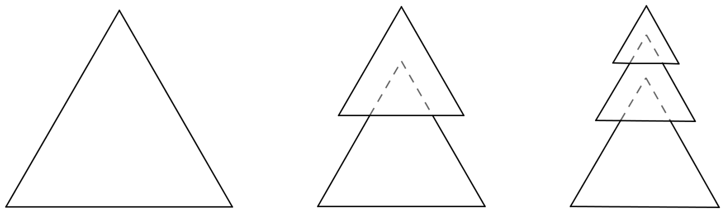
Bíró Bálint, Eger

XI. OSZTÁLY

1. Ha $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 1)a_k\right)$ minden $n \geq 1$ természetes számra, határozd meg az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

Bencze Mihály, Bukarest

2. Gergő karácsonyi hangulatban a következő rajzokat készítette:



A „fenyőfák” mind egységnyi magasságúak és egyenlő oldalú háromszögek egymásra tevésével képeztük. Minden háromszög „felső” csúcsa a fölötte lévő magasságának a felezőpontja, és minden háromszög magassága a fölötte lévő magasságának másfélszerese. Mennyi a „fenyőfák” területének határértéke, ha a fákat alkotó háromszögek száma tart a végtelenhez?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Ha $A, B \in M_2\left(\mathbb{C}\right)$, igazold hogy az $A(A+B)B = B(B+A)A$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $(\mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B)(AB - BA) = O_2$.

Bencze Mihály, Bukarest

4. Adott az $n \geq 2$ természetes szám és az $E = \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $\sum_{A\in M_n(E)} \det A = 0$.

b) Igazold, hogy az $\{A \in M_n(E) \,|\, \det A = 0\}$ halmaz elemeinek száma páros!

Longáver Lajos, Nagybánya

XII. OSZTÁLY

1. Adott a $G_1 = (-a+b,\ a+b)$ és a $G_2 = (-1,1)$ intervallum, valamint az

$$x \perp y = \frac{bxy + \left(a^2 - b^2\right)\left(x+y-b\right)}{xy - b\left(x+y\right) + a^2 + b^2},\ \forall x, y \in G_1 \text{ és}$$

$$x * y = \left(\frac{\sqrt[2n+1]{x} + \sqrt[2n+1]{y}}{1 + \sqrt[2n+1]{xy}}\right)^{2n+1},\ \forall x, y \in G_2$$

műveletek, ahol $a, b \in \mathbb{R}, \left(a > 0\right), n \in \mathbb{N}^*$. Igazold, hogy :

a) $\left(G_1, \perp\right)$ és $\left(G_2, *\right)$ Abel-féle csoport. **b)** $\left(G_1, \perp\right) \cong \left(G_2, *\right)$.

Bencze Mihály, Bukarest

2. Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvényeket, amelyekre:

$$\begin{vmatrix} f'(x) & 2f(x) \\ x & x^2 + 1 \end{vmatrix} = x^3 + x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ és } f\left(0\right) = 0\ .$$

Koczinger Éva és Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Adottak az $a, x_0 \in \mathbb{R}$ valós számok és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan primitívvel rendelkező függvény, amelyre $f\left(x_0\right) = a$. Számítsd ki az f függvény primitív függvényeit, ha az értelmezési tartomány minden pontja helyi minimumpontja f-nek .

Longáver Lajos és Mastan Eliza, Nagybánya

4. Határozd meg a $8^{2x-1} - 1 = 343^{x-1} + \frac{3}{14} \cdot 28^x$ egyenlet összes valós megoldását!

Bencze Mihály, Bukarest és Kovács Béla, Szatmárnémeti

II. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3 + x + 5 = y^2$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $N \in AD$ úgy, hogy A az $[ND]$ felezőpontja, $C \in (MB)$ úgy, hogy $BC = 2CM$. Tudva, hogy $AM \parallel NC$, határozd meg a trapéz alapjainak arányát és az $[AM]$ illetve $[NC]$ hosszának arányát.

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. Az a és b természetes számok relatív prímek és $a, b \geq 2$.

Igazold, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $(a^n - 1) \vdots b$.

Bencze Mihály, Bukarest és Szilágyi Judit, Kolozsvár

4. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$. Egy, az alapokkal párhuzamos d egyenes az (AC) és (BD) átlókat rendre az E és F pontokban metszi. Legyen $P \in (AB)$, $PE \parallel AD$ és $Q \in (DC)$ $FQ \parallel BC$.

Igazold, hogy a P, Q pontok és az (AC) szakasz felezőpontja kollineárisak!

Longáver Lajos, Nagybánya

5. Jelölje I az ABC háromszögbe írt kör középpontját. Ha a BIC, BIA, CIA háromszögek valamelyike hasonló az ABC háromszöggel, akkor igazold, hogy az ABC háromszög szögeinek mértékei mértani haladványt alkotnak.

Bencze Mihály, Bukarest

6. Egy kosárban 2014 alma található. Hófehérke mond egy 2014-nél kisebb $k \in \mathbb{N}^*$ számot. Hapci és Szundi a következő játékot játsszák: Hapci elvesz a kosárból legalább egy, de legtöbb k almát, majd Szundi megismétli az eljárást és folytatják, míg a kosárból az utolsó almát is elveszik. Az nyer, aki az utolsó almát kiveszi a kosárból.

Hófehérke tudja, hogy mindkét törpe nagyon jó játékos, és ha van nyerő stratégiája, akkor meg is nyeri a játékot.

Mivel Szundinak nagyon rossz napja volt, Hófehérke olyan számot szeretne mondani, amellyel neki kedvez. Segíts Hófehérkének megtalálni az összes ilyen *k* számot.

Szilágyi Judit, Kolozsvár és Mátéfi István, Marosvásárhely

X. OSZTÁLY

1. Legyenek $a, n \in \mathbb{N}^*$ rögzített számok, valamint

$S = a + \left(a+1\right) + ... + \left(a+n\right)$.

Igazold, hogy az $S = 2^x$ egyenlet megoldása pozitív irracionális szám!

Gotha Güntter, Nagybánya

2. 2014. február 8-án egy matematika tanár olyan, nyolc kérdésből álló feleletválasztós tesztet oldatott meg az osztályával, amelyben minden kérdés esetében a lehetséges válaszok $0,1,2,4,8$. Miután összeszedte a dolgozatokat, elárulta, hogy a helyes válaszok sora: $2,0,1,4,0,2,0,8$. Azt is elárulta ezúttal, hogy nem csak a helyes megoldást adó diákok kapnak tízest, hanem azok a „szerencsések” is, akik ugyan más sorrendben, de pontosan ezeket a válaszokat jelölték meg helyesként. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki véletlenszerűen adott válaszok esetén „szerencsés” legyen aznap?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Egy N oldalú konvex sokszöget egy rögzített csúcsából kiinduló két átlója három sokszögre oszt fel, melyek szögeinek összege rendre S_1, S_2, S_3. Az N mely értékei esetén alkothat S_1, S_2 és S_3 számtani haladványt? Az $N = 101$ esetén határozd meg azoknak a felbontásoknak a számát, amelyekre a fenti számtani haladványban lévő S_1, S_2, S_3 összegek közül a legnagyobb a legkisebbnek egész számú többszöröse!

Egyed Géza, Kézdivásárhely

4. Az $ABCD$ paralelogrammában N a CD oldal felezőpontja és M a BC oldalnak az a pontja, amelyre $BM = \dfrac{2}{5} \cdot BC$. Jelöljük P-vel az AM és a BN egyenesek metszéspontját. Számítsd ki az ABP háromszög és a $PNCM$ négyszög területének az arányát!

Longáver Lajos, Nagybánya

5. Adottak az O_1 és O_2 középpontú R illetve r sugarú körök, $O_1O_2 > R + r$. Az O_1 ponton áthaladó, O_2 középpontú körhöz húzott érintő az O_1 középpontú kört az A és B pontokban metszi, az O_2 ponton áthaladó, O_1 középpontú körhöz húzott érintő az O_2 középpontú kört C és D pontokban metszi. Igazold, hogy az A, B, C, D pontok két párhuzamos egyenest határoznak meg!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Az $a_1,\ a_2, \ldots$ sorozatot az $a_1 = 1,\ a_2 = 143$ és $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ rekurzióval értelmezzük (ahol $n \geq 2$). Bizonyítsd be, hogy a sorozat minden eleme egész szám!

Róka Sándor, Nyíregyháza

XI. ÉS XII. OSZTÁLY

1. Adott az $A=\{1,2,3,...,25\}$ számhalmaz. Legfennebb hány elemű lehet az A halmaz azon H részhalmaza, melyben bármelyik két szám összege nem osztható 13 -mal?

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

2. Igazold, hogy ha egy természetes számokból álló számtani haladvány első tagja köbszám, akkor végtelen sok olyan tagja van, ami szintén köbszám.

Bencze Mihály, Bukarest

3. Az $ABCD$ konvex négyszögben az AB és CD oldalak nem párhuzamosak. $M\in(AC)$ egy tetszőleges pont és $P\in AD$ úgy, hogy $MP\parallel CD$, $Q\in BC$ úgy, hogy $MQ\parallel AB$. Határozd meg az M pont helyzetét, amelyre a PMQ háromszög területe maximális.

Longáver Lajos, Nagybánya

4. Egy 1007×1007 -es mátrix elemei az $\{1,2,3,...,1007\}$ halmazból vannak úgy, hogy egy-egy sorban illetve egy-egy oszlopban nincs két egyenlő elem. Megváltoztathatjuk-e úgy néhány szám előjelét, hogy ha összeszorozzuk minden sorban, illetve minden oszlopban az elemeket, az így kapott 2014 szám összege 0 legyen?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda és Pálhegyi Farkas László, Nagyvárad

5. Az ABC háromszögben $m(ABC\sphericalangle)=45^\circ$. Az A csúcsból húzott magasság, a B csúcsból húzott szögfelező és a C csúcsból húzott oldalfelező összefutók. Határozd meg a C szög mértékét!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda és Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Egy 1 -től 6 -ig megszámozott 6 férőhelyes autóba 6 utasnak kell beszállni a következő szabály szerint:

- az első utas egy tetszőleges helyre ül le
- az n-edik utas, ha $n \in \{2,3,4,5,6\}$, leül az n-edik helyre ha ez üres. Ha nem üres, akkor teszőleges helyet foglal el.

Mi a valószínűsége annak, hogy a 6-ik utas a 6-ik helyre ül le?

Kramer Alpár Vajk, Lisszabon, Portugália

MEGOLDÁSOK
I. FORDULÓ

IX. osztály

1. Oldd meg az $\left(x^2+2x+4\right)\left(16y^2+4y+1\right)=8xy$, $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ egyenletet!

Első megoldás

$$x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0,\ 16y^2+4y+1=\left(4y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

tehát az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $xy>0$.

$$x^2+2x+4=\left(x^2+4\right)+2x\geq 2\sqrt{4x^2}+2x=4\left|x\right|+2x$$

$$16y^2+4y+1=\left(16y^2+1\right)+4y\geq 2\sqrt{16y^2}+4y=8\left|y\right|+4y$$

1. Ha $x>0$ és $y>0$, akkor $x^2+2x+4\geq 6x$, $16y^2+4y+1\geq 12y$, tehát

$\left(x^2+2x+4\right)\left(16y^2+4y+1\right)\geq 72xy>8xy$, ahonnan $M_1=\varnothing$

2. Ha $x<0$ és $y<0$, akkor $x^2+2x+4\geq -2x$, $16y^2+4y+1\geq -4y$, tehát $\left(x^2+2x+4\right)\left(16y^2+4y+1\right)\geq 8xy$

Az egyenlőség fennáll, ha

$x^2+2x+4=-2x$ és $16y^2+4y+1=-4y$, vagyis $\left(x+2\right)^2=0$ és $\left(4y+1\right)^2=0$, ahonnan $M_2=\left\{\left(-2,-\frac{1}{4}\right)\right\}$.

Az egyenlet megoldáshalmaza: $M=\left\{\left(-2,-\frac{1}{4}\right)\right\}$

Második megoldás

$$x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0,\ 16y^2+4y+1=\left(4y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

tehát az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $xy>0$.

Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor összeszorozva a zárójeleket a következő egyenlőséget kapjuk:

$16x^2y^2 + 16xy^2 + 64y^2 + 4yx^2 + 8xy + 16y + x^2 + 2x + 4 = 8xy$,

ahonnan $16x^2y^2 + 16xy^2 + 64y^2 + 4yx^2 + 16y + x^2 + 2x + 4 = 0$, nincs megoldás, mivel a baloldal pozitív.

Ha $x < 0$ és $y < 0$ újból kiindulva, az eredeti egyenlőségből kapjuk, hogy:

$\left[\left(x+2\right)^2 - 2x\right]\left[\left(4y+1\right)^2 - 4y\right] = 8xy$ összeszorozva következik,

hogy $\left(x+2\right)^2 \cdot \left(4y+1\right)^2 - 2x\left(4y+1\right)^2 - 4y\left(x+2\right)^2 = 0$,

mivel minden tag nagyobb vagy egyenlő,

mint nulla az összeg csak akkor nulla, ha $\begin{cases} \left(x+2\right)^2 \cdot \left(4y+1\right)^2 = 0 \\ -2x\left(4y+1\right)^2 = 0 \\ y\left(x+2\right)^2 = 0-4 \end{cases}$,

ahonnan $\left(x+2\right)^2 = 0$ és $\left(4y+1\right)^2 = 0$, tehát $M = \left\{\left(-2, -\frac{1}{4}\right)\right\}$

2. Igazold, hogy az $A = 12^{n+1} - 22 \cdot \left(2^{2n+1} + 3^{n+1}\right) + 132n + 98$ szám osztható 396 -tal!

Első megoldás

$$\left.\begin{aligned} 4^n - 4 = 4 \cdot \left(4^{n-1} - 1\right) = M \cdot 6 \\ 3^n - 3 = 3 \cdot \left(3^{n-1} - 1\right) = M \cdot 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(3^n - 3\right) \cdot \left(4^n - 4\right) = M \cdot 36 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^n - 3 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 12 = M \cdot 36$$

$$\Rightarrow M \cdot 36 = \sum_{k=1}^{n}\left(12^k - 3 \cdot 4^k - 4 \cdot 3^k + 12\right) =$$

$$= \frac{12^{n+1} - 12}{11} - 3 \cdot 4 \cdot \frac{4^n - 1}{3} - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 12n =$$

$$=\frac{12^{n+1}-22\cdot\left(2^{2n+1}+3^{n+1}\right)+132n+98}{11}$$

$$36\cdot 11=396\ \Rightarrow\quad 12^{n+1}-22\cdot\left(2^{2n+1}+3^{n+1}\right)+132n+98=M\cdot 396$$

Második megoldás

Az $n=0$ esetén $A=0$, tehát osztható 396-tal

Tudva, hogy $396=4\cdot 9\cdot 11$ az adott szám

$$A=\left(11+1\right)^{n+1}-2\cdot 11\cdot\left(2^{2n+1}+3^{n+1}\right)+11\cdot 12n+98=$$

$11\cdot M+1+98-2\cdot 11\cdot\left(2^{2n+1}+3^{n+1}\right)+11\cdot 12n$ alakban írható, tehát

$A\vdots 11$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Ha $A=3^{n+1}\cdot 4^{n+1}-22\cdot 2^{2n+1}+132n-2\cdot\underbrace{\left(11\cdot 3^{n+1}-49\right)}_{páros}$, akkor

$A\vdots 4$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

$$A=3^{n+1}\cdot 4^{n+1}-22\cdot 3^{n+1}-22\cdot 2^{2n+1}+14\cdot 9n+90+6n+8=$$
$$=3^{n+1}\left(4^{n+1}-22\right)+14\cdot 9n+90-18\cdot 2^{2n+1}-2\left(2\cdot 2^{2n+1}-3n-4\right),$$

akkor osztható 9-cel $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén, ha

$\left(2\cdot 2^{2n+1}-3n-4\right)\vdots 9$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ezt a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

$n=1$ esetén igaz .

Tegyük fel hogy egy rögzített $k\geq 1$ esetén igaz az állítás vagyis $2\cdot 2^{2k+1}-3k-4\vdots 9$.

Igazoljuk, hogy $2\cdot 2^{2k+3}-3k-7\vdots 9$

Valóban $2\cdot 2^{2k+3}-3k-7=4\cdot\left(2\cdot 2^{2k+1}-3k-4\right)+9k+9\vdots 9$

A 4, 9 és 11 számok páronként relatív prímek, tehát $A\vdots(4\cdot 9\cdot 11)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3. Adott a következő sorozat:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{1},\frac{4}{2},\frac{3}{3},\frac{2}{4},\frac{1}{5},\dots$$

a) Mivel egyenlő a sorozat 2014-ik tagja?

b) A sorozat hányadik tagja az $\frac{1014}{1001}$ szám?

Megoldás. a) A sorozat tagjait csoportokra osztjuk. A k-adik ($k \in \mathbb{N}^*$) csoportba kerülnek azok a tagok amelyeknél a számláló és a nevező összege $k+1$.

A k-adik csoport tehát: $\frac{k}{1},\frac{k-1}{2},\frac{k-2}{3},\dots,\frac{2}{k-1},\frac{1}{k}$. ($k$ darab szám)

A tag helyét a csoportban a nevező adja meg.

Egy olyan k természetes számot keresünk amelyre:

$$\frac{k\cdot(k+1)}{2} \le 2014 < \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

$$1953 = \frac{62\cdot 63}{2} \le 2014 < \frac{63\cdot 64}{2} = 2016.$$

A keresett szám a 62, ezért a 2014-edik elem a 63-as csoportban a $2014\text{-}1953 = 61$-edik lesz, azaz $\frac{3}{61}$.

b) Annak a csoportnak k a sorszáma, amelyben az $\frac{1014}{1001}$ szám van: $k = 1014+1001-1 = 2014$. Az $\frac{1014}{1001}$ szám a csoport 1001-edik eleme.

A 2014-es csoport első eleméig

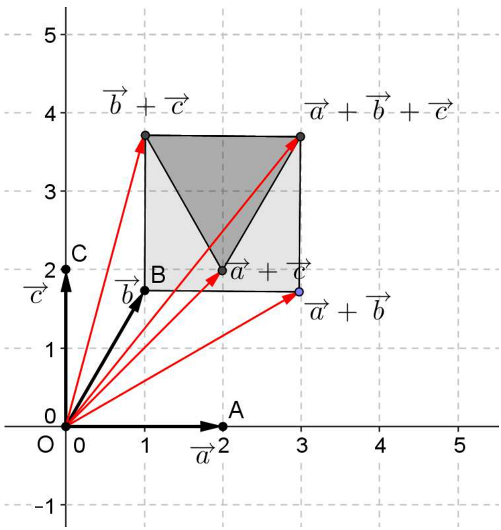
$1+2+3+\dots+2013 = \frac{2013\cdot 2014}{2} = 2027091$ tag van. Ezért az $\frac{1014}{1001}$ szám a $2027091+1001 = 2028092$-edik tagja a sorozatnak.

4. A síkban vegyünk fel n különböző, az origóból induló vektort, és képezzük ezekből az összes lehetséges különböző vektorokból álló összeget. Tekintsük az eredeti vektorok és az így kapott összegvektorok végpontjainak M_n halmazát. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre ez az n vektor megadható úgy, hogy az M_n halmazból ki lehessen választani egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsát, és négy olyan pontot is, amelyek egy négyzet csúcsait alkotják?

Megoldás. $n = 2$ esetén a két vektor és az összegük végpontja összesen 3 pontot ad, ezekből nem lehet egy négyzet csúcsait kiválasztani. Tehát $n \geq 3$.

$n = 3$ esetén van alkalmas konstrukció.

A vektorokat a következőképpen vesszük fel: mindhárom vektor azonos hosszúságú, $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok szöge 90˚, a $\vec{b}$ az $\vec{a}$ vektorral 60˚-os, a $\vec{c}$-vel pedig 30° -os szöget alkot. Például egy megoldás az ábrának megfelelően, koordinátákkal megadva: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, ahol $A\left(2;\ 0\right)$, $B\left(1;\ \sqrt{3}\right)$, $C\left(0;\ 2\right)$.



X. OSZTÁLY

1. Adott a b pozitív valós szám. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $\sqrt{2}^{\log_b x} + b^{\log_x \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Megoldás. Létezési feltételek: $x > 0$, $x \neq 1$, $b \neq 1$.

Jelölje $t = \log_b x$. Akkor $b^{\log_x \sqrt{2}} = b^{\frac{\log_b \sqrt{2}}{\log_b x}} = \left(b^{\log_b \sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\log_b x}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{t}}$

Így az adott egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel: $\sqrt{2}^t + \sqrt{2}^{\frac{1}{t}} = 2\sqrt{2}$

Ha $t > 0$, akkor $\sqrt{2}^t + \sqrt{2}^{\frac{1}{t}} \geq \sqrt{\sqrt{2}^{t+\frac{1}{t}}} \geq 2\sqrt{\sqrt{2}^2} = 2\sqrt{2}.$

Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $t = 1$

Tehát $\log_b x = 1$ következik, hogy $x = b$.

Ha $t < 0$, akkor $\sqrt{2}^t$ csak akkor értelmezett, ha t egész szám. Tehát $t = -n$, ahol n egy nem nulla természetes szám.

Következik, hogy $\sqrt{2}^{-n} + \sqrt{2}^{-\frac{1}{n}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}^n} + \frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{1}{n}}} = 2\sqrt{2}.$

Ha $n = 1$ akkor $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ hamis.

Ha $n > 1$ akkor $\frac{1}{\sqrt{2}^n} + \frac{1}{\sqrt{2}^{\frac{1}{n}}} < 2,$ de $2 < 2\sqrt{2}$ ami ellentmondás.

Tehát ebben az esetben nincs megoldás.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a - b < \frac{1}{4}$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ olyan függvény, amelyre

$$f(x^2 + a) + \frac{1}{f(x+b)} = 2 \text{ bármely } x \in \mathbb{R} \text{ esetén} .$$

Igazold, hogy az f függvény nem injektív.

Megoldás. Keresünk két olyan valós x értéket amelyekre

$x^2 + a = x + b \Leftrightarrow x^2 + a - x - b = 0$.

$a - b < \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \cdot (a - b) > 0$, tehát a fenti egyenlet x_1 és x_2 gyökei valósak és különbözőek.

$x_k^2 + a = x_k + b = z_k$, $k = \overline{1,2}$, $z_1 \neq z_2$

$$f(x^2 + a) + \frac{1}{f(x+b)} = 2 \quad \Rightarrow \quad f(z_k) + \frac{1}{f(z_k)} = 2, \quad k = \overline{1,2} \quad \Rightarrow$$

$\left[f(z_1) - 1\right]^2 = \left[f(z_2) - 1\right]^2 = 0$, tehát létezik $z_1 \neq z_2$ amelyekre $f\left(z_1\right) = f\left(z_2\right) = 1 \Rightarrow f$ függvény nem injektív

Megjegyzés (Módosított szöveg)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a - b < \frac{1}{4}$ és $f : \left(0, \infty\right) \to \mathbb{R}^*$ egy olyan függvény amelyre bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x^2 + a) + \frac{1}{f(x+b)} = 2$.

Mutassuk ki, hogy az f függvény nem injektív.

Megoldás:

Keresünk két olyan valós x értéket amelyekre

$x^2 + a = x + b \Leftrightarrow x^2 - x + a - b = 0$

$0 < a - b < \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \cdot (a - b) > 0$, $S = x_1 + x_2 = 1 > 0$,

$P = x_1 \cdot x_2 = a - b > 0$ tehát a fenti egyenlet x_1 és x_2 gyökei valósak, különbözőek és pozitívak

$x_k^2 + a = x_k + b = z_k$, $k = \overline{1,2}$, $z_1 \neq z_2$

$$f(x^2 + a) + \frac{1}{f(x+b)} = 2 \Rightarrow f(z_k) + \frac{1}{f(z_k)} = 2,\ k = \overline{1,2} \Rightarrow$$

$$\left[f(z_1) - 1\right]^2 = \left[f(z_2) - 1\right]^2 = 0$$

létezik $z_1 \neq z_2$ amelyekre $f\left(z_1\right) = f\left(z_2\right) = 1$

3. Adott a $H = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, \left| z + \frac{1}{z} \right| + \left| z - \frac{1}{z} \right| = 2 \right\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $|z| = 1$, bármely $z \in H$ esetén!

b) Határozd meg a H halmaz elemeit!

Megoldás

a) Ismeretes, hogy $\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|, (\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Ezt az egyenlőtlenséget kétszer alkalmazva a megadott egyenlőség jobb oldalán álló összegre kapjuk, hogy:

$$2 = \left| z + \frac{1}{z} \right| + \left| z - \frac{1}{z} \right| \ge \left|2z\right| = 2\left|z\right| \Rightarrow \left|z\right| \le 1 \ (1)$$

Hasonlóan

$$2 = \left| z + \frac{1}{z} \right| + \left| z - \frac{1}{z} \right| \ge \left| \frac{2}{z} \right| = \frac{2}{\left|z\right|} \Rightarrow \left|z\right| \ge 1 \ (2)$$

(1) és (2) –ből $|z| = 1$

b) Ha $z \in H$, akkor az a) alpont alapján következik, hogy $|z| = 1$, vagyis $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$,

$\alpha \in \left[0, 2\pi\right)$ alakban keresendő.

Így az adott egyenlőség a következő képpen alakul:

$\left|2\cos\alpha\right| + 2\left|i\sin\alpha\right| = 2,$ vagyis $\left|\cos\alpha\right| + \left|i\sin\alpha\right| = 1$

Négyzetre emelés és összevonás után a $\sin 2\alpha = 0, \alpha \in \left[0, 2\pi\right)$ egyenlethez jutunk

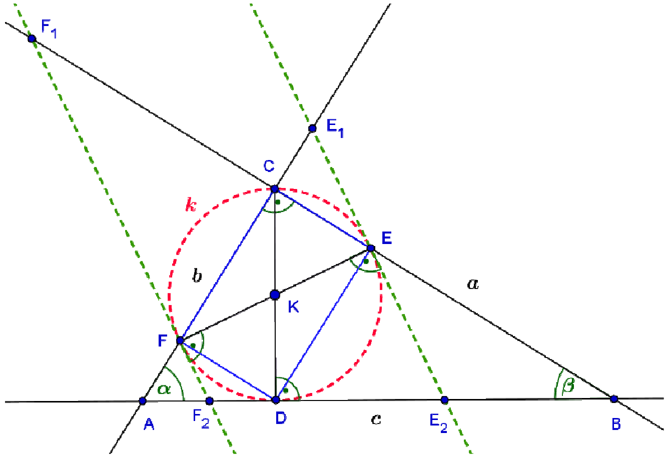
Ennek az egyenletnek a megoldáshalmaza: $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Ezen α értékeknek a $z \in \left\{-1, 1, i, -i\right\}$ halmaz felel meg

4. Az ABC derékszögű háromszögben CD az AB átfogóhoz tartozó magasság. A CD átmérőjű k kör a BC és AC befogókat rendre az E és F pontokban metszi. A k körhöz az E és F pontokban húzott érintők az AC és BC egyeneseket az E_1 illetve F_1 pontokban metszik.

a) Bizonyítsd be, hogy $EE_1 \parallel FF_1$.

b) Bizonyítsd be, hogy $E_1F = AC$ és $EF_1 = BC$.

Megoldás



Legyen a CD magasság és az EF szakasz metszéspontja K. A CD szakasz a k kör átmérője, ugyanakkor, mivel $FCE\angle = 90°$, a Thalész-tétel megfordítása miatt az EF szakasz, mint átmérő fölé rajzolt körön rajta van a C pont, ez pedig csak úgy lehet ha a CD szakasznak és az EF szakasznak a Thalész-köre azonos. Ebből az is következik, hogy K a k kör középpontja, és a $DECF$ négyszög téglalap.

Mivel EF a k kör átmérője, ezért az F_1F_2 és E_1E_2 egyenesek az érintő tulajdonsága miatt a k kör EF átmérőjére merőlegesek, tehát z F_1F_2 és E_1E_2 egyenesek párhuzamosak.

Az ABC háromszög hegyesszögei α és β, amelyekre $\alpha + \beta = 90°$. Ebből azonnal adódik, hogy $ACD\sphericalangle = FCD\sphericalangle = FCK\sphericalangle = \beta$, illetve mivel a fentiek szerint az FCK egyenlőszárú, ezért $CFK\sphericalangle = CFE\sphericalangle = \beta$, és így az FEC háromszögben $CEF\sphericalangle = \alpha$.

Az F_1F_2 érintő merőleges az EF szakaszra, ezért az EF_1F háromszög derékszögű, amelyben $CEF\sphericalangle = F_1EF\sphericalangle = \alpha$, így $EF_1F\angle = \beta$, tehát az EF_1F és az ABC háromszögek szögei rendre megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló.

Mivel $CFE\sphericalangle = \beta$, ezért az E_1FE derékszögű háromszögben $EFE_1\sphericalangle = \beta$, és $\alpha + \beta = 90^\circ$ miatt $FE_1E\sphericalangle = \alpha$, ezért az E_1FE és az ABC háromszögek szögeinek nagysága is rendre egyenlő, azaz ez a két háromszög is hasonló. A szögek egyenlősége alapján az EFC és ABC is hasonló háromszögek.

Az egymáshoz hasonló EF_1F és ABC, illetve EFC háromszögekben a megfelelő szakaszok (például egy-egy oldal, és a hozzá tartozó magasságok) hosszának aránya egyenlő, ezért a $CD = EF = m$ jelöléssel: (1) $\dfrac{F_1E}{FC} = \dfrac{c}{m}$ és $\dfrac{FC}{m} = \dfrac{a}{c}$.

Az (1) összefüggésekből $F_1E = FC \cdot \dfrac{c}{m} = m \cdot \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{c}{m} = a$, tehát a k körhöz húzott két párhuzamos érintő
a BC befogó egyeneséből valóban $BC = F_1E = a$ hosszúságú szakaszt metsz ki.

Az egymáshoz szintén hasonló E_1FE és ABC, illetve EFC háromszögekben a megfelelő szakaszok hosszának aránya:

(2) $\dfrac{E_1F}{EC} = \dfrac{c}{m}$ és $\dfrac{EC}{m} = \dfrac{b}{c}$.

A (2) összefüggésekből $E_1F = EC \cdot \dfrac{c}{m} = m \cdot \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{m} = b$, tehát a k körhöz húzott két párhuzamos érintő az AC befogó egyeneséből valóban $AC = E_1F = b$ hosszúságú szakaszt metsz ki.

XI. OSZTÁLY

1. Ha $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 1)a_k\right)$ minden $n \geq 1$ természetes számra, határozd meg az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

Első megoldás

Igazoljuk matematikai indukcióval, hogy $a_n = n!$ Látható, hogy $n = 1$ igaz, feltételezzük, hogy igaz n-re, azaz $a_n = n!$ és igazoljuk, hogy igaz $n+1$-re is.

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 1)a_k\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 1)k!\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k)k!\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)\cdot(k+1)! - k\cdot k!\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1 + (n+1)(n+1)! - 1\right) = (n+1)!$$

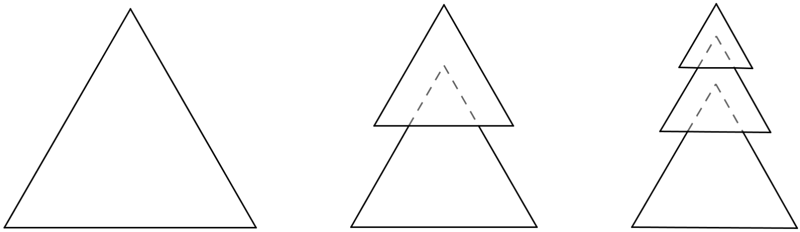
Második megoldás. A rekurzió alapján

$$\left(n+1\right)a_{n+1} - na_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 1)a_k - 1 - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + k + 1)a_k$$

,

$= \left(n^2 + n + 1\right)a_n$, ahonnan $\left(n+1\right)a_{n+1} = \left(n^2 + 2n + 1\right)a_n$, azaz $a_{n+1} = \left(n+1\right)a_n$, tehát $a_n = n(n-1)(n-2)...2\cdot a_1 = n!$

2. Gergő karácsonyi hangulatban a következő rajzokat készítette:



A „fenyőfák” mind egységnyi magasságúak és egyenlő oldalú háromszögekből állnak. Minden háromszög „felső” csúcsa a fölötte lévő magasságának a felezőpontja, és minden háromszög magassága a fölötte lévő magasságának másfélszerese. Mennyi a „fenyőfák” területének határértéke, ha a fákat alkotó háromszögek száma tart a végtelenhez?

Megoldás

Legyen x_n az n darab háromszögből álló „fenyőfa” legfelső háromszögének magassága. Az alatta lévő háromszögek magasságai rendre $\frac{3}{2}x_n, \frac{9}{4}x_n, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} x_n$. Mivel minden fa egységnyi magasságú, és a legfelsőt kivéve minden háromszög magasságának harmada takarásban van, következik, hogy $\left\{1+\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}x_n = 1$, ahonnan $x_n = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}-2^{n-2}}$.

Így a legfelső háromszög területe $t_n = \frac{x_n^2\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}-2^{n-2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Az alatta lévő háromszög magassága $\frac{3}{2}x_n$, így a területe $\frac{9}{4}t_n$, de a terület $\frac{1}{9}$-ed része takarásban van, ezért a második háromszög miatt a fa területe $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{4}t_n = 2t_n$ értékkel nő. A harmadik háromszögből látszó rész területe $\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2 t_n = \frac{3^2}{2} t_n$, és így tovább, a legalsó háromszögből

látható terület $\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}\cdot t_n = \frac{3^{2n-4}}{2^{2n-5}}\cdot t_n$.

Az n háromszögből álló „fenyőfa” területe $T_n = \left(1+2+\frac{3^2}{2}+\ldots+\frac{3^{2n-4}}{2^{2n-5}}\right)t_n$, azaz $T_n = \frac{3^{2n-2}-3\cdot 2^{2n-5}}{5\cdot 2^{2n-5}} t_n$.

Következik, hogy

$$T_n = \frac{3^{2n-2}-3\cdot 2^{2n-5}}{5\cdot 2^{2n-5}}\cdot\left(\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}-2^{n-2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$, azaz

$$T_n = \frac{2\sqrt{3}\left(3^{2n-3}-2^{2n-5}\right)}{5\left(3^{2n-2}-2^{n-1}\cdot 3^{n-1}+2^{2n-4}\right)}$$. A keresett határérték pedig

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3}\left(1-\frac{2^{2n-3}}{3^{2n-3}}\cdot\frac{1}{4}\right)}{5\left(3-\frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}+\frac{2^{2n-3}}{3^{2n-3}}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{15}.$$

3. Ha $A,B\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$, igazold hogy az $A(A+B)B = B(B+A)A$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $(\operatorname{Tr} A+\operatorname{Tr} B)(AB-BA) = O_2$.

Megoldás

A Cayley-Hamilton tétel alapján bármely $A,B\in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ mátrix esetén

$$A^2 = A\operatorname{Tr} A - I_2\det A \Rightarrow A^2B = AB\operatorname{Tr} A - B\det A$$

$$B^2 = B\operatorname{Tr} B - I_2\det B \Rightarrow AB^2 = AB\operatorname{Tr} B - A\det B$$

A fentiek alapján

$$A\left(A+B\right)B = A^2B+AB^2 = (\operatorname{Tr} A+\operatorname{Tr} B)AB - A\det B - B\det A$$

Hasonlóan

$B\left(B+A\right)A = B^2A + BA^2 = (\operatorname{Tr} B + \operatorname{Tr} A)BA - B\det A - A\det B$

Tehát $A\left(A+B\right)B - B\left(B+A\right)A = (\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B)(AB - BA)$, azaz az $A(A+B)B = B(B+A)A$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $(\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B)(AB - BA) = O_2$

4. Adott az $n \geq 2$ természetes szám és az $E = \{1,2,3,\ldots,2014\}$ halmaz.

a) Igazold, hogy $\sum_{A \in M_n(E)} \det A = 0$.

b) Igazold, hogy $\{A \in M_n(E) \mid \det A = 0\}$ elemeinek száma páros.

Megoldás

a) Első megoldás

Ha egy mátrix első két sora megegyezik, akkor annak determinánsa nulla.

Legyen $M \subset M_n\left(E\right)$ azon mátrixok halmaza, amelyek első két sora nem azonos. Az M halmaz elemeit párosíthatjuk úgy, hogy minden mátrixhoz hozzárendeljük azt a mátrixot, amelyet az első két sorának felcserélésével kapunk.

Ez a párosítás kölcsönös és egyértelmű.

Az így kapott párok determinánsai egymás ellentettei, tehát a mátrizok összege nulla.

Második megoldás. Először igazoljuk, hogy egy adott mátrix sorainak permutálásával kapott mátrixok determinánsainak összege nulla. Ehhez elegendő bizonyítani, hogy ugyanannyi a páros illetve a páratlan permutációk száma, ugyanis ezen mátrixok determinánsa azonos moduluszú és ellentétes előjelű.

Ezt a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

$n = 2$ esetén $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ páros és $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ páratlan permutáció.

$n = 3$ esetén a permutációkat az előzőekből egy 3 -as beszúrásával képezzük:

Ha első helyre szúrjuk be, akkor 2-vel nő az inverziók száma, így nem változik a paritás, ha a második helyre, akkor 1-gyel nő az inverziók száma, megváltozik a paritás, ha pedig a harmadik helyre, akkor nem változik az inverziók száma, tehát a paritás sem.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ páros, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ páratlan és $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ páros

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ páratlan, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ páros és $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ páratlan

Látható, hogy az $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ permutációból képezett páros permutációknak van páratlan „társuk” az $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ permutációkból képezett permutációk között és a páratlanoknak páros „társuk”

$n = 4$ esetén a permutációkat az előzőekből egy 4-es beszúrásával képezzük:

Ha első helyre szúrjuk be, akkor 3-mal nő az inverziók száma, így megváltozik a paritás, ha a második helyre, akkor 2-vel nő az inverziók száma, nem változik a paritás, ha a harmadik helyre, akkor 1-gyel nő az inverziók száma, így megváltozik a paritás, ha pedig a negyedik helyre, akkor nem változik az inverziók száma, tehát a paritás sem. Például:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ páratlan, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ páros,

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ páratlan, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ páros

Így minden permutációból két páros és két páratlan permutációt generálunk, azaz megegyezik a páros és páratlan permutációk száma.

Az 5-ös beszúrásakor páros permutációból generálunk három páros és két páratlan permutációt, páratlan permutációból pedig három páratlan és két páros permutációt, de mivel a negyedrendű permutációk esetén megegyezik a páros és páratlan permutációk száma, következik, hogy az így generált ötödrendűek esetén is megegyezik.

A matematikai indukciós lépés a fentiekhez hasonló.

Ha a $2n$-edrendű permutációkra igaz, hogy megegyezik a páros és páratlan permutációk száma, akkor minden permutációból a $2n+1$ beszúrásával $2n+1$ új permutációt kapunk, páros permutációból n darab páratlan és $n+1$ darab párosat, páros permutációból pedig n darab páros és $n+1$ darab páratlan permutációt. Így mivel a a $2n$-edrendű permutációk esetén megegyezik a páros és páratlan permutációk száma, következik, hogy az így generált $2n+1$-edrendűek esetén is megegyezik.

Ha a $2n+1$-edrendű permutációkra igaz, hogy megegyezik a páros és páratlan permutációk száma, akkor minden permutációból a $2n+2$ beszúrásával $2n+2$ darab permutációt kapunk, amelyekből $n+1$ páros és $n+1$ páratlan, tehát ebben az esetben is megegyezik a páros és páratlan permutációk száma.

Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak nincs két azonos sora, akkor az $M_n\left(E\right)$ halmazban összesen $n!$ olyan mátrix van, amelyeknek ugyanezek a soraik (más-más sorrendben), ezek determinánsai azonos moduluszúak, fele negatív, fele pedig pozitív (amennyiben nem mind nulla), így összegük nulla.

Ha egy mátrixnak két sora azonos, akkor determinánsa nulla. Tehát az összes determináns összege nulla.

b) Összesen 2014^{n^2} eleme van az $M_n\left(E\right)$ halmaznak, a fentiek alapján a negatív és pozitív determinánsú mátrixok száma megegyezik, tehát összesen a nem nulla determinánsúak száma páros. Így a nulla determinánsú mátrixok száma is páros.

XII. OSZTÁLY

1. Adott a $G_1 = (-a+b,\ a+b)$ és $G_2 = (-1,1)$ intervallum, valamint az

$$x \perp y = \frac{bxy + \left(a^2 - b^2\right)\left(x+y-b\right)}{xy - b\left(x+y\right) + a^2 + b^2},\ \forall x, y \in G_1$$

$$\text{és } x * y = \left(\frac{\sqrt[2n+1]{x} + \sqrt[2n+1]{y}}{1 + \sqrt[2n+1]{xy}}\right)^{2n+1},\ \forall x, y \in G_2$$

műveletek, ahol $a, b \in \mathbb{R}, \left(a > 0\right), n \in \mathbb{N}^*$.

Igazold, hogy :

a) $\left(G_1, \perp\right)$ és $\left(G_2, *\right)$ Abel-féle csoport.

b) $\left(G_1, \perp\right) \cong \left(G_2, *\right)$.

Megoldás

a) Tekintsük a $G = \left(-1,1\right)$ intervallumot és az $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ műveletet.

Ismert, hogy $\left(G, \circ\right)$ Abel-féle csoport.

Az $f : G \to G_1,\ f\left(x\right) = ax + b$ függvény bijektív és

$f\left(x \circ y\right) = f\left(x\right) \perp f\left(y\right),\ \forall x, y \in G$.

A $g : G \to G_2,\ g\left(x\right) = x^{2n+1}$ függvény bijektiv és

$g\left(x \circ y\right) = g\left(x\right) * g\left(y\right),\ \forall x, y \in G$.

Következik, hogy $\left(G_1, \perp\right)$ és $\left(G_2, *\right)$ Abel-féle csoport.

b) $g \circ f^{-1} : G_1 \to G_2$ függvény bijektiv és csoportmorfizmus, következik, hogy $\left(G_1, \perp\right) \cong \left(G_2, *\right)$.

2. Határozd meg azokat az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvényeket, amelyekre: $\begin{vmatrix} f'(x) & 2f(x) \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} = x^3 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ és $f(0)=0$.

Megoldás. Kiszámítjuk a determinánst:

$$(x^2+1)f'(x) - 2xf(x) = x(x^2+1)$$

Osztunk (x^2+1)– el : $f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1}f(x) = x$

Az egyenlőség bal oldalán közös nevezőre hozunk

$$\frac{(x^2+1)f'(x) - 2xf(x)}{x^2+1} = x$$

Osztunk ismét (x^2+1)– el: $\dfrac{(x^2+1)f'(x) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x}{x^2+1}$

Most az egyenlőség bal oldalán egy törtfüggvény deriváltja szerepel:

$$\left(\frac{f(x)}{x^2+1}\right)' = \frac{x}{x^2+1}$$

És a jobb oldalon is: $\left(\dfrac{f(x)}{x^2+1}\right)' = \left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]'$

Ha két folytonosan deriválható függvény deriváltjai egyenlőek, akkor ezek a függvények csak egy állandóban különböznek egymástól.

$$\frac{f(x)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Legyen most $x=0$, következik, hogy $f(0) = C \Rightarrow C = 0$

A keresett függvény pedig: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)$

3. Adottak az $a, x_0 \in \mathbb{R}$ valós számok és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan primitívvel rendelkező függvény, amelyre $f\left(x_0\right) = a$. Számítsd ki az f függvény primitív függvényeit, ha az értelmezési tartomány minden pontja helyi minimumpontja f-nek .

Megoldás

A feltétel alapján $f\left(x\right) \geq f\left(y\right), \forall x \in V_y$ és $f\left(y\right) \geq f\left(x\right), \forall y \in V_x$.

Ebből következik az, hogy $f\left(x\right) = f\left(y\right), \forall x, y \in V_x \cap V_y$. Következik, hogy az f függvény intervallumokon állandó.

Ha f primitívvel rendelkezik, akkor Darboux tulajdonsága van.

Ez csak akkor lehetséges, ha f állandó $\mathbb{R}$ – en.

$f\left(x_0\right) = a \Leftrightarrow f\left(x\right) = a, \forall x \in \mathbb{R}$

és $\int f\left(x\right) dx = ax + C, \forall x \in \mathbb{R}$

4. Határozd meg a $8^{2x-1} - 1 = 343^{x-1} + \frac{3}{14} \cdot 28^x$ egyenlet összes valós megoldását!

Megoldás

Az egyenletet $1 - 8^{2x-1} + 343^{x-1} + \frac{3}{14} \cdot 28^x = 0$ alakba írjuk.

Legyen $a = 1$, $b = -2^{2x-1}$, $c = 7^{x-1}$, ekkor $3abc = -\frac{3}{14} \cdot 28^x$ és az egyenlet alakja:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ ami ekvivalens

$\left(a + b + c\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(a + b + c\right)\left[\left(a - b\right)^2 + \left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2\right] = 0$

Két esetet különböztetünk meg :

(1) $a = b = c$, ami nem lehetséges

(2) $a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2^{2x-1} + 7^{x-1} = 0$

Az $f\left(x\right) = 1 + 7^{x-1} - 2^{2x-1}$ folytonosan deriválható függvény,

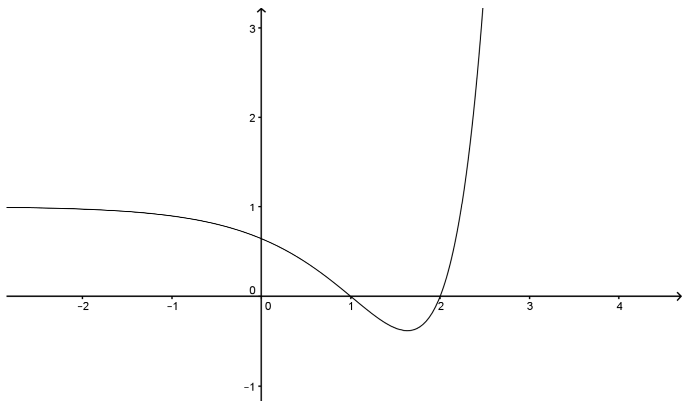
$f'\left(x\right) = 7^{x-1}\ln 7 - 2^{2x}\cdot\ln 2$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 7^{x-1}\cdot\ln 7 - 2^{2x}\cdot\ln 2 = 0 \Leftrightarrow 7^{x-1}\cdot\ln 7 = 2^{2x}\cdot\ln 2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^{x} = \frac{7\ln 2}{\ln 7}$

Az $f'\left(x\right) = 0$ egyenletnek egyetlen zérus helye van, következik, hogy az $f\left(x\right) = 0$ egyenletnek legtöbb két zérus helye lehet.

Észre lehet venni, hogy $f\left(1\right) = 0$ és $f\left(2\right) = 0$, tehát az adott egyenlet megoldásai az 1 és 2.



Az $f\left(x\right) = 1 + 7^{x-1} - 2^{2x-1}$ függvény grafikus képe.

II. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$2x^3 + x + 5 = y^2$$

Első megoldás

A $2x^3 + x$ kifejezést $x(2x^2 + 1)$ alakba írva, az $x = 3k$, $x = 3k + 1$, $x = 3k + 2$ eseteket vizsgálva megállapítjuk, hogy a $2x^3 + x$ kifejezés mindig osztható 3 - mal,
ezért az egyenlőség bal oldalának 3 – mal való osztási maradéka mindig 2.
A jobb oldalon pedig egy négyzetszám van, aminek 3 - mal való osztási maradéka nem lehet 2.
Következik, hogy az egyenletnek nincs egész megoldása.

Második megoldás

$$2x^3 + x + 5 = 3x^3 + \left(x - x^3\right) + 5$$

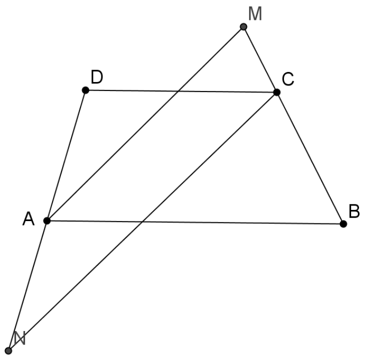
$$\left.\begin{array}{l} 3x^3 \vdots 3 \\ x - x^3 = x \cdot \left(1 - x\right)\left(1 + x\right) \vdots 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(2x^3 + x + 5\right)$$ hárommal való osztási maradéka mindig 2.

y^2 hárommal való osztási maradéka 0 vagy 1.

Tehát az egyenletnek nincs egész megoldása.

2. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $N \in AD$ úgy, hogy A az $\left[ND\right]$ felezőpontja, $C \in \left(MB\right)$ úgy, hogy $BC = 2CM$. Tudva, hogy $AM \parallel NC$, határozzuk meg a trapéz alapjainak arányát és az $\left[AM\right]$ illetve $\left[NC\right]$ hosszának arányát.

Első megoldás



ADC háromszögben, $N \in AD, \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ND}$,

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{CD}$, ahonnan $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}$

ABC háromszögben, $M \in BC, \overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$,

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$, ahonnan $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$AB \parallel CD \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{DC}$

$AM \parallel NC \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy $\overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{AM}$,ahonnan

$$2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = k \cdot \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{DC}\right)$$

tehát $\begin{cases} \frac{3k}{2} = -2 \\ \frac{k \cdot \alpha}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{3}{2}$ és $\frac{AM}{CN} = \frac{3}{4}$

Második megoldás:

Jelölje *P* az *AM* és *DC* metszéspontját. A feltételek alapján *A* felezőpontja az $[ND]$-nak és $AP \parallel NC$ akkor *P* felezőpontja a $[DC]$-nek.

De $PC || AB$ akkor $MPC_\Delta \sim MAB_\Delta$ (a hasonlóság alaptétele alapján),

tehát $\frac{PC}{AB} = \frac{MC}{MB} = \frac{PM}{AM} = \frac{1}{3}$.

Így $\frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$.

Másrészt NDC_Δ -ben *AP* középvonal akkor $AP = \frac{NC}{2}$

és AMB_Δ -ben $\frac{AP}{AM} = \frac{2}{3}$, tehát $\frac{NC}{AM} = \frac{4}{3}$

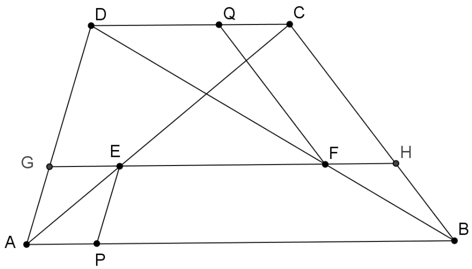
3. Az a és b természetes számok relatív prímek és $a, b \geq 2$.
Igazold, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $(a^n - 1) \vdots b$.

Megoldás

Tekintsük az $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^b$ számok b-vel való osztási maradékait. Ez $b+1$ darab számot eredményez, de *b*-vel való osztási maradék csak *b* darab van, így a skatulyaelv alapján $\exists\, m < k \leq b$ szám, amelyre a^m és a^k a-nak ugyanaz a *b*-vel való osztási maradéka.
Így $(a^k - a^m) \vdots b$. $\Leftrightarrow$ $a^m \left(a^{k-m} - 1\right) \vdots b$ és $\left(a, b\right) = 1$, következik, hogy $\left(a^m, b\right) = 1$, ezért $(a^{k-m} - 1) \vdots b$, tehát, ha n-nel jelöljük a $k - m$ számot, akkor $a^n - 1 \vdots b$, és mivel $m < k$ következik, hogy $n \neq 0$.

4. Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$. Egy, az alapokkal párhuzamos d egyenes az $\left(AC\right)$ és $\left(BD\right)$ átlókat rendre az E és F pontokban metszi. Legyen $P \in \left(AB\right)$, $PE \parallel AD$ és $Q \in \left(DC\right)$, $FQ \parallel BC$.
Igazold, hogy a P, Q pontok és az $\left(AC\right)$ szakasz felezőpontja kollineárisak!

Megoldás



Legyen $d \cap AD = \{G\}$, $d \cap BC = \{H\}$. A hasonlóság alaptétele alapján:

$d \parallel DC \Rightarrow \dfrac{GE}{DC} = \dfrac{AG}{AD}$ (1)

$d \parallel DC \Rightarrow \dfrac{FH}{DC} = \dfrac{BH}{BC}$ (2)

AB || d || DC $\Rightarrow \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{BH}{BC}$ (3)

(1) , (2) , (3) alapján $\dfrac{GE}{DC} = \dfrac{FH}{DC} \Rightarrow GE = FH$

$APEG$, $FHCQ$ paralelogrammák $\Rightarrow AP = GE = FH = QC$

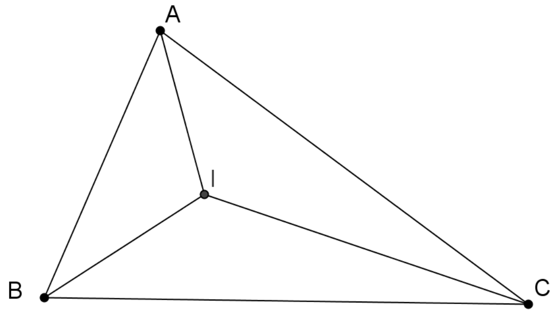
$AP = QC \Rightarrow$ APCQ négyszög paralelogramma

$\Rightarrow$ AC és PQ átlók felezik egymást .

Tehát a P, Q pontok és az (AC) szakasz felezőpontja kollineárisak.

5. Jelölje I az ABC háromszögbe írt kör középpontját. Ha a BIC, BIA, CIA háromszögek valamelyike hasonló az ABC háromszöggel, akkor az ABC háromszög szögeinek mértékei mértani haladványt alkotnak.

Megoldás:



Tegyük fel, hogy $BIC_\Delta \sim ABC_\Delta$ akkor $m\left(I\hat{B}C\right) = m\left(B\hat{A}C\right)$,
$m\left(B\hat{I}C\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$ és $m\left(B\hat{C}I\right) = m\left(A\hat{C}B\right)$ ahonnan
$m\left(\frac{A\hat{C}B}{2}\right) = m\left(A\hat{C}B\right)$ ellentmondás.

Ha $CIA_\Delta \sim ABC_\Delta$ akkor $m\left(A\hat{C}I\right) = m\left(C\hat{A}B\right)$,
$m\left(C\hat{I}A\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$ és $m\left(C\hat{A}I\right) = m\left(A\hat{C}B\right)$ ahonnan
$m\left(\frac{A\hat{C}B}{2}\right) = m\left(B\hat{A}C\right)$ és $m\left(\frac{B\hat{A}C}{2}\right) = m\left(B\hat{C}A\right)$, tehát
$m\left(\frac{B\hat{A}C}{4}\right) = m\left(B\hat{A}C\right)$ ellentmondás.

Ha $BIA_\Delta \sim ABC_\Delta$ akkor $m\left(A\hat{B}I\right) = m\left(C\hat{A}B\right)$,
$m\left(B\hat{I}A\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$ és $m\left(B\hat{A}I\right) = m\left(A\hat{C}B\right)$ ahonnan
$m\left(\frac{A\hat{B}C}{2}\right) = m\left(B\hat{A}C\right)$; $m\left(B\hat{I}A\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$ és
$m\left(B\hat{C}A\right) = m\left(\frac{B\hat{A}C}{2}\right)$. Tehát $m\left(B\hat{C}A\right) = m\left(\frac{A\hat{B}C}{4}\right)$ és

$m\left(B\hat{A}C\right)=m\left(\frac{A\hat{B}C}{2}\right)$ akkor $m\left(B\hat{C}A\right)$, $m\left(B\hat{A}C\right)$ és $m\left(A\hat{B}C\right)$ mértani haladványt alkotnak .

6. Egy kosárban 2014 alma található. Hófehérke mond egy 2014-nél kisebb $k \in \mathbb{N}^*$ számot. Hapci és Szundi a következő játékot játsszák: Hapci elvesz a kosárból legalább egy, de legtöbb k almát, majd Szundi megismétli az eljárást és folytatják, míg a kosárból az utolsó almát is elveszik. Az nyer, aki az utolsó almát kiveszi a kosárból.
Hófehérke tudja, hogy mindkét törpe nagyon jó játékos, és ha van nyerő stratégiája, akkor meg is nyeri a játékot.
Mivel Szundinak nagyon rossz napja volt, Hófehérke olyan számot szeretne mondani, amellyel neki kedvez. Segíts Hófehérkének megtalálni az összes ilyen *k* számot.

Megoldás. Ha valamelyik törpének sikerült elérni azt, hogy *k+1* alma maradjon a kosárban miután ő választott, akkor ő fog nyerni, hiszen a kosárban legkevesebb *egy*, legtöbb *k* alma marad, miután a másik választ, így ő kiveheti a kosárból az összes megmaradt almát.
Tehát a 0 alma nyerő pozíciót lehet helyettesíteni a *k+1* nyerő pozícióval. Ezt a gondolatmenetet folytatva, aki először eléri az $m\cdot\left(k+1\right)$ pozíciót, az nyer.

Ha a játék nem $m\cdot\left(k+1\right)$ darab almával indul, ezt az első játékos elérheti, ha először 2014-nek *k+1*-gyel való osztási maradékával egyenlő számú almát vesz ki a kosárból. Viszont, ha $m\cdot\left(k+1\right)$ darab almával indul a játék, akkor bármennyit is vesz el Hapci, Szundi érheti el először az $m\cdot\left(k+1\right)$ pozíciót. Tehát Szundi csak akkor nyerhet biztosan, ha a 2014 szám $k+1$-nek többszöröse.
Mivel $2014=2\cdot 19\cdot 53$, ezért 2014 osztói: 1, 2, 19, 53, 76, 106, 1007, 2014.
Így *k* lehetséges értékei rendre: 1, 18, 52, 75, 105, 1006, 2013.

X. osztály

1. Legyenek $a, n \in \mathbb{N}^*$ rögzített számok, valamint

$S = a + (a+1) + ... + (a+n)$.

Igazold, hogy az $S = 2^x$ egyenlet megoldása pozitív irracionális szám.

Megoldás

$$S = 2^x \Leftrightarrow (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} = 2^x \Leftrightarrow \frac{(n+1)(2a+n)}{2} = 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(2a+n) = 2^{x+1} \ .$$

Ha $x \in (-\infty, 0)$ úgy, hogy $S = 2^x$: könnyen belátható, hogy ez lehetetlen, mert $2^x < 1$ és $S \geq 3$.

Ha $x \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$ úgy, hogy $S = 2^x$ akkor $\exists p, q \in \mathbb{N}^* \ (q > 1)$ úgy, hogy $x = \dfrac{p}{q}$ és $(p,q) = 1$. Tehát $S = 2^x \Leftrightarrow S = \sqrt[q]{2^p}$. Mivel $2^p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(p,q) = 1$ és $q > 1$, következik, hogy $\sqrt[q]{2^p} \notin \mathbb{N}$.

$S \in \mathbb{N}$, tehát feltételezésünk nem teljesülhet.

Ha $x \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $S = 2^x$ akkor két eset lehetséges:

Ha n páros, akkor $n+1$ páratlan $(n+1 \geq 3)$,

Ha n páratlan, akkor *2a+n* páratlan $(2a + n \geq 3)$. Tehát az $(n+1)(2a+n)$ szorzat prímtényezői között van legalább egy páratlan szám. Azonban 2^{x+1} prímtényezői csak ketteseket tartalmaznak. Következik, hogy $(n+1)(2a+1) = 2^{x+1}$ egyenlet nem teljesülhet, azaz feltételezésünk hamis.

Mivel az előző három esetben ellentmondáshoz jutottunk és az $S = 2^x$ egyenletnek van valós megoldása, következik, hogy x pozitív, irracionális szám.

2. 2014. február 8-án egy matematika tanár olyan, nyolc kérdésből álló feleletválasztós tesztet oldatott meg az osztályával, amelyben minden kérdés esetében a lehetséges válaszok $0,1,2,4,8$. Miután összeszedte a dolgozatokat, elárulta, hogy a helyes válaszok sora: $2,0,1,4,0,2,0,8$. Azt is elárulta ezúttal, hogy nem csak a helyes megoldást adó diákok kapnak tízest, hanem azok a „szerencsések” is, akik ugyan más sorrendben, de pontosan ezeket a válaszokat jelölték meg helyesként. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki véletlenszerűen adott válaszok esetén „szerencsés” legyen aznap?

Megoldás

A lehetséges esetek száma 8 kérdés és 5 lehetséges válasz esetén 5^8.
Az $1,4,8$ elhelyezésére $8\cdot 7\cdot 6=336$ lehetőség van.
A megmaradt öt helyre a két 2-es elhelyezésére 10 lehetőség van.
A megmaradt helyekre 0-kat teszünk
A kedvező esetek száma $336\cdot 10$.
A „szerencsések” száma $3360-1=3359$.
A keresett valószínűség $P=\dfrac{3359}{5^8}$.

3. Egy N oldalú konvex sokszöget egy rögzített csúcsából kiinduló két átlója három sokszögre oszt fel, melyek szögeinek összege rendre S_1, S_2, S_3. Az N mely értékei esetén alkothat S_1, S_2 és S_3 számtani haladványt? Az $N=101$ esetén határozd meg azoknak a felbontásoknak a számát, amelyekre a fenti számtani haladványban lévő S_1, S_2, S_3 összegek közül a legnagyobb a legkisebbnek egész számú többszöröse!

Megoldás

Az *N* oldalú konvex sokszög *(N-2)* darab háromszögre bontható fel.
Legyen S_1 k darab háromszögből álló sokszög.
Vagyis $S_1=k\cdot 180°, k\in\mathbb{N}^*$, $S_2=p\cdot 180°, p\in\mathbb{N}^*$

$S_3=[(N-2)-k-p]\cdot 180°$.

$\div S_1, S_2, S_3 \Rightarrow 2S_2=S_1+S_3 \Rightarrow 3p=N-2 \Rightarrow N=3p+2$.

Belátható, hogy minden $N=3p+2$ alakú szám esetén, ahol $p\in\mathbb{N}^*$ a felbontás megvalósítható, például úgy, hogy

Ha $N = 101 \Rightarrow p = 33 \Rightarrow S_1 \cdot r = S_3$, $r \in \mathbb{Z}$, de $\frac{S_3}{S_1} = r > 0 \Rightarrow$

$r \in \mathbb{N}^*$

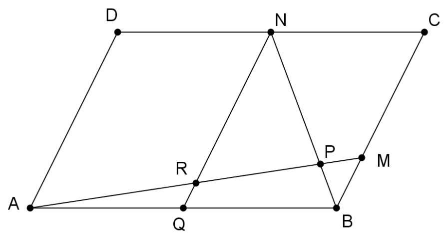
$S_1 \leq S_3 \Rightarrow 1 \leq k \leq 33$. $r = \frac{S_3}{S_1} = \frac{66-k}{k} = \frac{66}{k} - 1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 66 \vdots k$

$\Rightarrow k \in D_{66}$. Tehát $k \in \{1,2,3,6,11,22,33\}$.

Minden $k \in \{1,2,3,6,11,22\}$ érték esetén hat lehetséges felbontás van, a $k = 33$ esetben egy lehetséges felbontás van , tehát összesen 37 lehetséges felbontás van.

4. Az $ABCD$ paralelogrammában N a CD oldal felezőpontja és M a BC oldalnak az a pontja, amelyre $BM = \frac{2}{5} \cdot BC$. Jelöljük P-vel az AM és a BN egyenesek metszéspontját. Számítsd ki az ABP háromszög és a $PNCM$ négyszög területének az arányát.

Megoldás. Meghúzzuk az $NQ \parallel BC$, $Q \in (AB)$, szakaszt, mely az AM-et R-ben metszi. RQ középvonal az ABM háromszögben, tehát $QR = \frac{BM}{2} = \frac{BC}{5}$ és



$RN = \frac{4}{5} BC$. A BPM és az NPR háromszögek hasonlóságából következik, hogy $BP = \frac{1}{3} BN$, $PM = \frac{1}{2} RP$ és $AP = \frac{5}{6} AM$

$$T[ABP] = \frac{5}{6} T[ABM]$$

$$T[BPM] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} T[BNC] = \frac{2}{15} T[BNC]$$

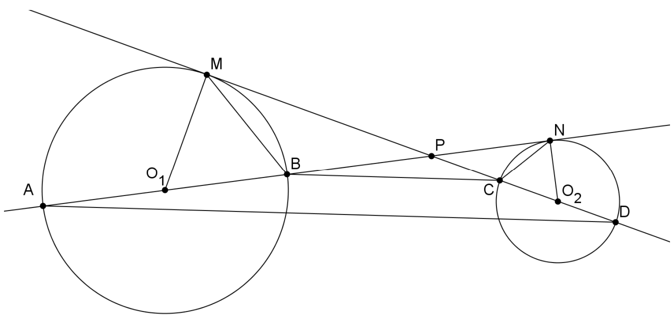
$$\Rightarrow T\left[PNCM\right]=\frac{13}{15}T\left[BNC\right]$$

$$\frac{T\left[ABP\right]}{T\left[PNCM\right]}=\frac{\frac{5}{6}T\left[ABM\right]}{\frac{13}{15}T\left[BNC\right]}=\frac{25}{26}\frac{AB\cdot BM\cdot\sin B}{BC\cdot CN\cdot\sin C}=$$

$$=\frac{25}{26}\frac{AB\cdot\frac{2}{5}BC}{BC\cdot\frac{1}{2}AB}=\frac{10}{13}$$

5. Adottak az O_1 és O_2 középpontú R illetve r sugarú körök, $O_1O_2>R+r$. Az O_1 ponton áthaladó, O_2 középpontú körhöz húzott érintő az O_1 középpontú kört az A és B pontokban metszi, az O_2 ponton áthaladó, O_1 középpontú körhöz húzott érintő az O_2 középpontú kört C és D pontokban metszi. Igazold, hogy az A,B,C,D pontok két párhuzamos egyenest határoznak meg!

Megoldás



Az AB a $C\left(O_2,r\right)$ kört N-ben, a CD a $C\left(O_1,R\right)$ kört M-ben érinti és P az AB és CD egyenesek metszéspontja. Mivel $O_2M\perp O_1M$ és

$O_2N \perp O_1N$ következik, hogy az MO_1P és az NO_2P háromszögek hasonlóak, tehát $MO_1B\sphericalangle = NO_2C\sphericalangle$.

Innen mivel MO_1B és az NO_2C háromszögek egyenlő szárúak, következik, hogy az $O_1MB\sphericalangle = O_2NC\sphericalangle$, ahonnan azt kapjuk, hogy ezek pószögei a $BMP\sphericalangle = CNP\sphericalangle$.

Az előbbiekből azt kapjuk, hogy a PMB és PNC háromszögek hasonlóak, ahonnan következik, hogy $\frac{PB}{PC} = \frac{MB}{NC} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} = \frac{AB}{CD}$, ahonnan Thalész tétele alapján kapjuk, hogy $BC \parallel AD$.

A bizonyítás más esetekben is hasonlóan végezhető el.

6. Az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot az $a_1 = 1,\ a_2 = 143$ és $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ rekurzióval értelmezzük (ahol $n \geq 2$). Bizonyítsuk be, hogy a sorozat minden eleme egész szám!

Első megoldás

$a_3 = 5 \cdot 72 = 360$, ez is egész szám.

Ha $n \geq 4$, akkor $a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$ és

$a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}}{n-2}$ miatt

$$a_n = \frac{5}{n-1} \cdot \left(\frac{n-2}{5} \cdot a_{n-1} + a_{n-1} \right) = \frac{n+3}{n-1} \cdot a_{n-1}.$$

Azaz $n \geq 4$ esetén

$$a_n = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 7}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot a_3 = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 360 =$$

, $= (n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n$ ezzel beláttuk az állítást.

Második megoldás: Nézzük a sorozat elemeiből képzett összegeket, az $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összegeket. Ha belátjuk, hogy az S_n számok egész számok, akkor a sorozat elemei is egészek.

$S_1 = 1,\ S_2 = 144$ és $a_{n+1} = 5\cdot\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ miatt

$S_{n+1} - S_n = \dfrac{5S_n}{n}$, azaz $S_{n+1} = \dfrac{n+5}{n}S_n$.

Így $n \geq 2$ esetén $S_{n+1} = \dfrac{(n+5)\cdot(n+4)\cdot\ldots\cdot 7}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot S_2 =$

$$\frac{(n+5)\cdot(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 144 =$$

$$= \frac{(n+5)\cdot(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{5}$$

Ennek a törtnek az értéke egész szám, hiszen a számlálóban öt egymást követő egész szám szorzatát látjuk, és ezek egyike osztható 5-tel. Ezzel beláttuk az állítást

XI. és XII. osztály

1. Adott az $A = \{1, 2, 3, ..., 25\}$ számhalmaz. Legfennebb hány elemű lehet az A halmaz azon H részhalmaza, melyben bármelyik két szám összege nem osztható 13 -mal?

Első megoldás

Az $\{1, 25\}$, $\{2, 24\}$, $\{3, 23\}$, ... $\{12, 14\}$ kételemű részhalmazoknak legfennebb egyik-egyik eleme szerepelhet a H részhalmazban. (Mert ezen elempárokban szereplő számok összege mind 26, ami osztható 13-mal).

Így H -nak legfennebb $25 - 12 = 13$ eleme lehet.

Ez a 13-as elemszám el is érhető.

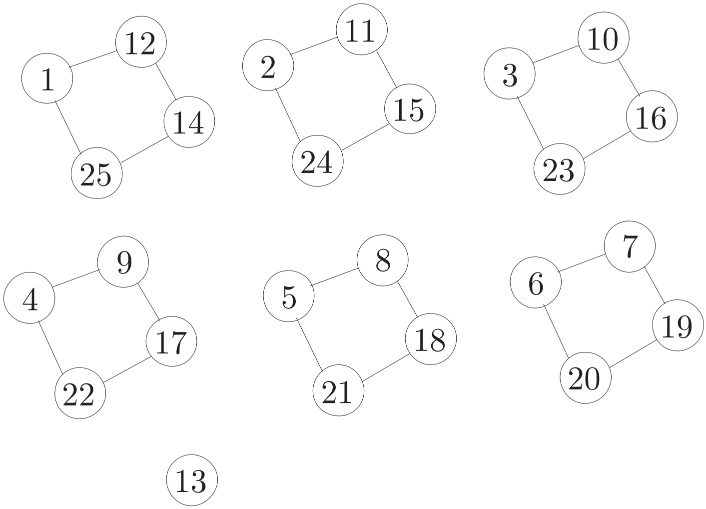
Pl. $H = \{1, 24, 3, 22, 5, 20, 7, 18, 9, 16, 11, 14, 13\}$ részhalmaz teljesíti a feladat feltételeit, azaz bármely két elemének összege nem osztható 13 -mal.

A bizonyításban felhasználjuk a következő állítást: Két egész szám összege pontosan akkor osztható 13 -mal, ha a 13 -mal való osztási maradékaik összege is osztható 13 -mal.

Így az előbbi H részhalmazból vett számok 13 -mal való osztási maradékainak $H_m = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ halmazában bármely két (nem feltétlenül különböző, kivétel a 0 maradék esete) maradék összege nem osztható 13 -mal, ezért a H részhalmazbeli számpárok összegei sem oszthatók 13 -mal

Második megoldás

Szerkesszünk egy gráfot, amelynek csúcsai az A halmaz elemei, két csúcsot él köt össze, ha nem lehetnek egyszerre benne a H halmazban, azaz összegük osztható 13-mal.



Bármely két nem élszomszédos szám benne lehet egyszerre a H halmazban, tehát minden összefüggő komponens, amely 4 csúcsú kör két szemközti csúcsában szereplő szám benne lehet a H halmazban viszont egyikből sem lehet kettőnél több csúcs a halmazban, a 13-as is benne lehet, tehát a H halmaz maximum $2\cdot 6+1=13$ elemet tartalmazhat

2. Igazold, hogy ha egy természetes számokból álló számtani haladvány első tagja köbszám, akkor végtelen sok olyan tagja van, ami köbszám.

Első megoldás. Legyen $a_1 = k^3$, szerkesztünk olyan n és l számokat, amelyekre $a_n = l^3$.

Ehhez $a_n - a_1 = l^3 - k^3 = (l-k)(l^2 + lk + k^2)$

Ha r a számtani haladvány állandó különbsége, akkor
$(n-1)r = l^3 - k^3 = (l-k)(l^2 + lk + k^2)$.

Az l és n értékeit úgy választjuk meg, hogy $l - k = pr$ és

$l^2 + lk + k^2 = \frac{n-1}{p}$, ahol $p \in \mathbb{N}^*$, ekkor $l = k + pr$ és

$n = 1 + p(l^2 + lk + k^2) = 1 + p(3k^2 + 3kpr + p^2r^2)$ esetén az

a_n köbszám lesz $\forall p \in \mathbb{N}^*$ esetén. Tehát végtelen sok ilyen tag van.

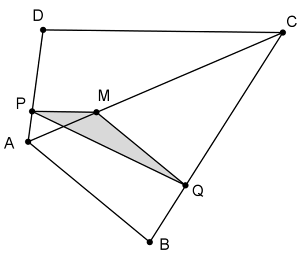
Második megoldás

Ha $a_1 = k^3$, akkor $\left(k + nr\right)^3 = k^3 + 3k^2nr + 3kn^2r^2 + n^3r^3 =$

$$= a_1 + r\left(3k^2n + 3kn^2r + n^3r^2\right) = a_{3k^2n+3kn^2r+n^3r^2+1}$$

3. Az $ABCD$ konvex négyszögben az AB és CD oldalak nem párhuzamosak. $M \in \left(AC\right)$ egy tetszőleges pont és $P \in AD$ úgy, hogy $MP \parallel CD$, $Q \in BC$ úgy, hogy $MQ \parallel AB$. Határozd meg az M pont helyzetét, amelyre a PMQ háromszög területe maximális.

Megoldás



$$T\left[PMQ\right]=\frac{MP\cdot MQ\cdot\sin(PMQ)}{2}$$

$MP \parallel DC$ és $MQ \parallel AB$ $\Rightarrow \sin(PMQ)=\sin(CD,AB)$, ami állandó.

$T\left[PMQ\right]$ akkor maximális, ha a $MP\cdot MQ$ szorzat a legnagyobb.

$$MP \parallel DC \Rightarrow \frac{MP}{CD}=\frac{AM}{AC};\quad MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{MQ}{AB}=\frac{CM}{CA}$$

$$\frac{MP}{CD}\cdot\frac{MQ}{AB}=\frac{AM}{AC}\cdot\frac{CM}{AC} \Rightarrow MP\cdot MQ=\frac{CD\cdot AB}{AC^2}\cdot AM\cdot CM$$

$MP\cdot MQ$ szorzat a legnagyobb ha az $AM\cdot MC$ szorzat a lehető legnagyobb

$AM+MC=AC=$ állandó, a legnagyobb területet akkor kapjuk, ha $AM=MC$, M az $\left[AC\right]$ átló felezőpontja

4. Egy 1007×1007 -es mátrix elemei az $\left\{1,2,3,\ldots,1007\right\}$ halmazból vannak úgy, hogy egy-egy sorban illetve egy-egy oszlopban nincs két egyenlő elem. Megváltoztathatjuk-e úgy néhány szám előjelét, hogy ha összeszorozzuk minden sorban, illetve minden oszlopban az elemeket, az így kapott 2014 szám összege 0 legyen?

Első megoldás. Mielőtt megváltoztatnánk a számok előjelét minden sorban és minden oszlopban az elemek szorzata $1007!$

Egy szám előjelének megváltoztatásakor egy oszlopban és egy sorban megváltozik a számok szorzatának előjele. Így a 2014 szorzat közül minden ilyen előjelváltáskor két szorzat előjele változik meg, azaz minden lépésben a negatív és a pozitív szorzatok száma is páros.

Az összeg abban az esetben 0, ha 1007 darab $1007!$ és ha 1007 darab $-1007!$ szerepel, ami a fentiek alapján nem lehetséges

Második megoldás. A feltételek alapján bármilyen előjel változtatás esetén minden sorban és minden oszlopban az elemek szorzata $\pm 1007!$

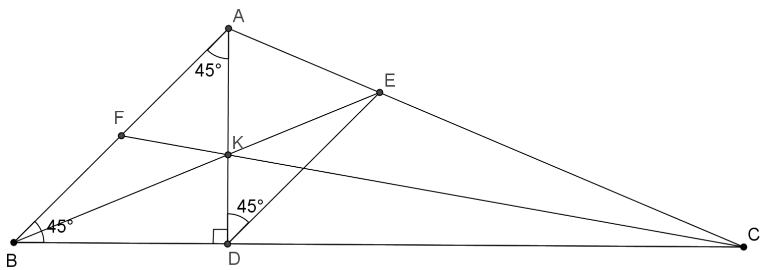
Ezek összege abban az esetben 0, ha 1007 darab $1007!$ és ha 1007 darab $-1007!$ szerepel,

ugyanakkor a 2014 darab szám szorzata egyenlő a mátrix elemei szorzatának négyzetével,

viszont 1007 darab $1007!$ és ha 1007 darab $-1007!$ szorzata negatív szám, így nem lehetséges az előjelek megválasztása úgy, hogy az összeg 0 legyen.

5. Az ABC háromszögben $m(ABC\sphericalangle) = 45^\circ$. Az A csúcsból húzott magasság, a B csúcsból húzott szögfelező és a C csúcsból húzott oldalfelező összefutók. Határozd meg a C szög mértékét!

Első megoldás



Legyenek AD, BE és CF az A csúcsból húzott magasság, a B csúcsból húzott szögfelező és a C csúcsból húzott oldalfelező, K pedig az összefutási pont. (Ez belső pont, mert a szögfelező és az oldalfelező belső nevezetes vonalak, így az AD magasság is belső vonal)

Céva tétele alapján $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$, következik, hogy $\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{CE}$, tehát $ED \parallel AB$

Tehát $ABE\sphericalangle \equiv BED\sphericalangle$, ugyanakkor $ABE\sphericalangle \equiv EBD\sphericalangle$, tehát BED egyenlőszárú háromszög, azaz $BD = ED$

Az ABD háromszög egyenlőszárú és derékszögű, tehát $BD = AD$

Az előbbiek alapján $AD = DE$ és $m\left(ADE\sphericalangle\right) \equiv m\left(BAD\sphericalangle\right) = 45^\circ$,

így az ADE háromszögben $m\left(DAE\sphericalangle\right) = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$ és

DAC háromszögből $m\left(C\sphericalangle\right) = 90^\circ - 67{,}5^\circ = 22{,}5^\circ$

Második megoldás. Legyenek AD, BE és CF az A csúcsból húzott magasság, a B csúcsból húzott szögfelező és a C csúcsból húzott oldalfelező, K pedig az összefutási pont. (Ez belső pont, mert a szögfelező és az oldalfelező belső nevezetes vonalak, így az AD magasság is belső vonal)

Céva tétele alapján $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$, tehát $\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{CE}$

Másrészt a szögfelező tétele alapján $\frac{EA}{CE}=\frac{c}{a}$. Ugyanakkor

$\frac{BD}{DC}=\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$, tehát $c \operatorname{tg} B = a \operatorname{tg} C$.

A szinusz tételt felhasználva következik, hogy

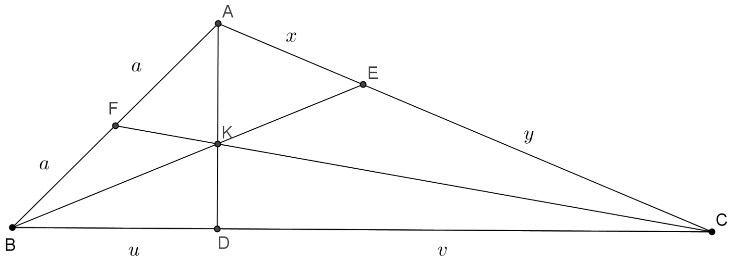
$2R\sin C\cdot 1 = 2R\sin A\frac{\sin C}{\cos C}$, tehát $\sin A = \cos C$.

Mivel D belső pont, következik, hogy C hegyesszög, tehát

$\sin A = \sin\left(90^\circ - C\right)$, de $A \neq 90^\circ - C$, mert $B \neq 90^\circ$, tehát

$A + 90^\circ - C = 180^\circ$. Tehát $A - C = 90^\circ$ és $A + C = 135^\circ$, ahonnan $C = 22{,}5^\circ$

Harmadik megoldás



Legyenek AD, BE és CF az A csúcsból húzott magasság, a B csúcsból húzott szögfelező és a C csúcsból húzott oldalfelező, K pedig az összefutási pont. Ez belső pont, mert a szögfelező és az oldalfelező belső nevezetes vonalak, így az AD magasság is belső vonal, tehát C hegyesszög.

Használjuk a következő jelöléseket: $AB = 2a$, $AC = c$, $BC = b$, $BD = u$, $DC = v$, $AE = x$, $EC = y$, mivel ABD háromszög egyenlő szárú és derékszögű következik, hogy $AD = u$.

A szögfelező tételéből: $x = \dfrac{2ac}{2a+b}$, $y = \dfrac{bc}{2a+b}$ és $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2a}{b}$

Ceva tételéből: $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{v}{u} = \dfrac{2a}{b} \cdot \dfrac{v}{u} = 1$, de $u + v = b$, innen kifejezve az u értékét, kapjuk, hogy $u = \dfrac{2ab}{2a+b} = a\sqrt{2}$, az utóbbi egyenlőségből kifejezve a b értékét, kapjuk, hogy $b = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2} + 2a$. Innen pedig $v = b - a\sqrt{2} = a\sqrt{2} + 2a$

Számítsuk ki a C szög tangensét: $\operatorname{tg} C = \frac{AD}{DC} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}+2a} = \sqrt{2}-1$.

Mivel $\operatorname{tg}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2}-1$, következik, hogy a C szög mértéke $22,5^\circ$

6. Egy 1 -től 6 -ig megszámozott 6 férőhelyes autóba 6 utasnak kell beszállni a következő szabály szerint:

- az első utas egy tetszőleges helyre ül le
- az n -edik utas, ha $n \in \{2,3,4,5,6\}$, leül az n -edik helyre ha ez üres. Ha nem üres, akkor teszőleges helyet foglal el.

Mi a valószínűsége annak, hogy a 6 -ik utas a 6 -ik helyre ül le?

Megoldás.

Jelöljük T_k –val a lehetséges esetek számát k utas és k hely esetén.

A 6-ik utas vagy az 1 vagy a 6-ik helyre ülhet le.

Ha $i \in \{2,3,4,5\}$ esetén az i-edik hely üres lenne, amikor a 6-ik utas beszáll, akkor ez azt jelentené, hogy az i-edik utas nem foglalta el az i-edik helyet, amikor beszállt, ez viszont ellentmond a szabálynak.

Ez azt jelenti, hogy az első 5 utas vagy az első 5 helyet vagy az utolsó 5 helyet foglalhatja el beszálláskor.

Ha a hatodik utas a hatodik helyre ül, akkor az első öt utas az első öt helyet T_5 féle képpen foglalhatja el.

Ha a hatodik utas az első helyet foglalja el, akkor az első 5 utas szintén T_5 féle képpen foglalhatja el a helyeket (Az 1-es ülés szerepét átveszi a 6-os ülés). Tehát $T_6 = 2T_5$.

Hasonlóan $T_5 = 2T_4$, $T_4 = 2T_3$, $T_3 = 2T_2$ és $T_2 = 2$. Tehát $T_6 = 32$

A kedvező esetek száma $T_5 = 16$

Annak a valószínűsége , hogy a 6-ik utas a 6-ik helyre ül le

$$P = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

A VERSENYEN RÉSZTVEVŐ TANÁROK NÉVSORA

Báthori Éva	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Băruță Cristina-Ana-Maria	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Betuker Enikő	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Biró Zoltán	Salamon Ernő Elméleti Líceum, Gyergyószentmiklós
Burcică Andrea	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Deák Éva	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Gaskó Gabriella	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Gáspár Mária	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
György Gabriella	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Jakab Medvéssy Aliz	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kovács Lajos	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Lakatos Imre	Matei Általános Iskola, Beszterce
Miklós Melinda	Zajzoni Rab István Elméleti Líceum, Négyfalu
Nagy Örs	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Oláh Ilkei Árpád	Baróti Szabó Dávid Szakközépiskola, Barót
Páll ℝ . Olga	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Péter András	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Polcz Zita	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Simon János	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Takács Attila János	Leövey Klára Elméleti Líceum , Máramarossziget
Tamási Csaba	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Turdean Katalin	Silvania Főgimnázium, Zilah

A VERSENYEN RÉSZTVEVŐ DIÁKOK NÉVSORA

IX. OSZTÁLY

Aszalos Szilvia Erzsébet	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Baja Zsolt	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Barabás Attila	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Becze Zsolt	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Bold Barbara- Bianca	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Cseke Alpár	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Csukás Bálint	Arany János Elméleti Líceum, Szalonta
Damokos Kinga	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Darlati I. Hunor	Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Demény Andrea Bernadett	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Demeter Hunor	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Egri Szabolcs	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Fogarasi Levente	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Fogel Péter	Kölcsey Ferenc Elméleti Líceum, Szatmárnémet
Forró László	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Gegő Csenge	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Halmágyi Ruben	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Hammas Attila	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Hegedűs Erwin Tibor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Horváth Abigél	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Ilona Judit	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Jakab Emőke Boglárka	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Kádár Attila	Baróti Szabó Dávid Szakközépiskola, Barót
Kenéz Anna Boglárka	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Keresztes Levente	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kézdi Örs Sebestyén	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Kis Balázs	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kocsis Julia Hedwig	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Kovács Ferencz	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Kovács Péter	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Lakatos Angéla	Silvania Főgimnázium, Zilah
Lovász Botond György	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Lukács Áron Zsolt	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Medgyesi Attila	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Nagy-Galaczi Tamás	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Oláh Evelin	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár

Péterfi Orsolya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Portik Attila	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Puskás Bajkó Kamil	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Sárga Angéla	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Schefler Barna	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Stelczner Britta	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Sütő Boglárka	Református Kollégium, Kézdivásárhely
Szabó Ágnes	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szőcs Marianna	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Talpă Diana	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Tankó-Gábor Tihamér	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Tőtős György	Silvania Főgimnázium, Zilah
Trimfa Egon	Baróti Szabó Dávid Szakközépiskola, Barót
Veress Szilárd	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Veres-Vitályos Álmos	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Vitus Regina	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy

X. OSZTÁLY

Baka-Bálint Áron	János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár
Batiz Orsolya	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Berta Bianka	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Bod Réka Barbara	Mikes Kelemen Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Boldizsár Zoltán	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Boros Zoltán	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Burcica Cristian-Daniel	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Burus Endre	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Cara Alessio	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Dudas Norbert	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Élthes Zoltán Zsombor	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Füstös Ágnes	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gábor Csaba László	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gál Krisztina	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Gergely Attila	Református Kollégium, Kézdivásárhely
Gombos Kriszta	Silvania Főgimnázium, Zilah
Gyéresi Ibolya Kreszcencia	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Hegedüs Hunor	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Kovács Yvonne	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Juhász Dóra	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Kiss Gergely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kovács Ádám	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Kovács Ákos	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Kovacs Béla	Leövey Klára Elméleti Líceum, Máramarossziget
Kovács Gyula	Arany János Elméleti Líceum, Szalonta
Kovács Ivett	Lórántffy Zsuzsanna Református Gimnázium, Nagyvárad
Kovács Levente	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kovács Patrik	Kölcsey Ferenc Elméleti Líceum, Szatmárnémet
Lukács Róbert	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Magdó Sándor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Magos Zsolt	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Márkos Zsolt	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Máthé Orsolya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Miklós Botond	Zajzoni Rab István Elméleti Líceum, Négyfalu
Moldovan Balázs	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Molnár Szilárd	Mikes Kelemen Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Móré Zsejke	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Nagy Attila Levente	Leövey Klára Elméleti Líceum, Máramarossziget
Olteán-Péter Boróka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Osztián Pálma Rozália	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Pallai Dorottya	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Papp Andrea Kinga	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Rab Zsolt	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Roszpapa Dávid	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Schefler Gergő	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet
Sisa Richárd	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Sütő Ágoston	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szép Márton	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémet

XI. OSZTÁLY

Baricz Anita	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Beiland Arnold	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Biró Enikő	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Bocz Péter	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Csala Hunor	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Csutak Balazs	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Domokos Kamilla	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Ecsedi Flóra-Rebeka	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Erősdi Zakariás	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Farkas Eszter	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Füsüs Bettina Juliánna	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Gagyi Mátyás	Orbán Balázs Elméleti Líceum, Székelykeresztúr
Gotha Güntter	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Gyarmathy Tímea	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Heidenhoffer Erhard	Kölcsey Ferenc Elméleti Líceum, Szatmárnémet
Horváth Ilka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Horvay Balázs	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Ienesca Roland	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Imre Lajos	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Juhos Attila	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Koncz Botond	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Kopacz Anikó	Salamon Ernő Elméleti Líceum, Gyergyószentmiklós
Kovács Péter Róbert	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Kucsván Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Lazar János	Kölcsey Ferenc Elméleti Líceum, Szatmárnémet
Lőrinczi Norbert	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Marthi Andrea	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Mester Attila	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Nagy Dániel	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy Imola	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy István	Silvania Főgimnázium, Zilah
Nagy László	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Nagy Lilla	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Pál Tamás	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Pap S. Ervin Istvan	Andrei Mureşanu Főgimnázium, Beszterce
Simon Ádám	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Sólyom Gellért	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Szabó Izabella	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Szász Apolka	Baróti Szabó Dávid Szakközépiskola, Barót
Székely Attila	Salamon Ernő Elméleti Líceum, Gyergyószentmiklós
Tókos Dezső	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Tóth Ákos András	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Vass Péter	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Veres Kincső	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

XII. OSZTÁLY

Borbély Andor	Salamon Ernő Elméleti Líceum, Gyergyószentmiklós
Buidin Thomas Imre Cyrille	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Csáki Tamás	Orbán Balázs Elméleti Líceum, Székelykeresztúr
Csegzi Gergely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Dávid Márk Tamás	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Farkas Pál Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Forgács Ákos	Horváth János Elméleti Líceum, Margita
Gál Béni	Székely Mikó Elméleti Líceum, Sepsiszentgyörgy
Gulyás Beatrix	Csíki Gergely Főgimnázium, Arad
Hegedüs Zsófia	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kálmán Noémi Ildikó	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Kari Tamás	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Katona Boglárka	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Kelemen Szabolcs	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kolumbán Antal György	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Lántzky Anna	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Léva Norbert	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Lorenzovici Zsombor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mag István	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Magdó Dorottya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Makkai Hanna Borbála	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Megyesfalvi Botond	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Rétyi Dorottya	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Szász Tamás Csaba	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Székely Lóránd Norbert	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Szilágyi Ottó	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Tamási Tímea	Márton Áron Elméleti Líceum, Csíkszereda
Tóth Melinda	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Veres Mirjám	Horváth János Elméleti Líceum, Margita

TÁMOGATÓINK

Városi Színház

Képzőművészeti Múzeum

Petőfi-Teleki Múzeum, Koltó

A Véső Ágoston vezette Képzőművészeti Egyesület

Design: Mészáros Julka

Bertóti Johanna

Altă Opțiune

Koltói Önkormányzat

Limes Com KFT

Biro Tech

Maravet KFT

Coquett

Enesis nyomda

Floare de Colț Panzió

Colegiul Tehnic "C.D. Nenițescu" Baia Mare

Petőfi Sándor Általános Iskola, Koltó

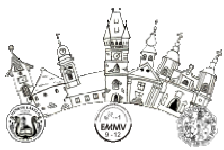
Nicolae Iorga Általános Iskola

Hosszúmezői Általános Iskola

A Németh László Elméleti Líceum XII. A, X.C, XI.C, IX.B, VII. osztályainak szülői közössége

Sporttevékenység: Jakab Ferenc

Kultúrális programok:
A Németh László Elméleti Líceum kórusa
A Schönherr Gyula Történelmi kör táncosai
Koltói Somfa Néptáncegyüttes
Berena Zenekar és Csíki Árpád
Torpedó
Mares Hanna



Alföldi Lakatos Zsuzsanna
Bakk András
Balázs Anna Gabriella
Balázs Dóra
Bálint Tünde
Balogh Margit
Bencze Kádár Berta családja
Bencze Nikoletta családja
Benkő Lilla családja
Bertalan Lilla
Bobolog Krisztián és családja
Boda Zsuzsánna
Bodor Ágota
Bokos Enikő
Brettschneider Ivett családja
Ciople Angéla
Csendes Mónika
Cozma Tamás
Damián Ildikó
Dembrovszki Károly
Diénes Áron
Dombrádi Balázs családja
Dragomir Norbert
Duna Jessica
Erdőközi Zoltán családja
Fekete Schmidt Péter családja
Figuli Fábián családja
Fóris Andrea
Geiger Attila
Grib Marián Mária
Hadadi Adalbert
Halász Cynthia
Horváth Ildikó
Istvánfi Zoltán családja
Istvánfi Zsuzsanna családja
Jenei Szilveszter családja
Juhász Enikő
Kádár István
Kádár Gergő
Kádár Gabriella és Zoltán
Kecskés Balázs
Kerekes Zsolt
Kert Imola családja
Kirchmaier Éva
Kirchmeier Ingrid családja
Kis Amália családja
Kiss Kornél
Klára és David Permenter
Kolozsvári Miklós családja
Komlósi Judit és József
Koncsárd Aliz
Koncsárd Tünde
Koncsárd Balázs családja
Koncz Enikő Mária családja
Konyicska Ilona
Kopányi Mária
Kovács Lóránd
Krizsanovszki Enikő
Ladányi Ingrid
Lakatos Melinda
Lakatos Nándor családja
Lapohos Ella
Lapsánszky Edith
László Erika és családja
Longáver Lajos
Lovász Ildikó
Madarassy Kinga
Maier Henrietta családja
Marc Ildikó
Mares Gyöngyi
Mátyás Elizabeth
Mészáros Julka
Mezey Ella
Mezey Tímea
Miklós Csaba
Moldován Ildikó
Molnár Rebeka
Móré Zsejke
Nemes Katalin
Ninács Mária
Orbán Gyula családja
Pap Ruben családja
Rákóczi Béla
Román János esperes
Sajó Andrea Bernadett családja
Sárga Angéla
Sav Ibolya
Schneider Annamária
Strengher Erika családja
Szabó Kristóf
Szabó Orsolya
Szabó Roland
Székely Loránd
Szőlősi Balázs családja
Tar Karola
Tim Mária
Tóth Annamária családja
Tóth Zsuzsanna családja
Traxler Artúr
Varga Laura családja
Várvédő Emőke
Vicsai János
Vicsai Melinda
Virágh József
Virágh Péter
Weber Kinga családja
Weis Rita
Wieland Attila családja
Zákány Mónika
Zavácki Laura