Országos Magyar Matematika Olimpia

Megyei szakasz, 2019. január 26.

VIII. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $M = \{x \in \mathbb{N} | x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz. Igazold, hogy

a.) $170 \in M, 71 \notin M$;

b.) ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$;

c.) $17^{17} \in M$.

(Matlap)

2. Feladat (10 pont)

A $VABC$ szabályos háromoldalú gúlában az ABC háromszög az alap, $VB \perp (VAC)$ és $AB = 12$ cm. Számítsd ki:

a) a gúla oldaléleinek hosszát;
b) a VO magasság hosszát;
c) a VC és AB egyenesek távolságát, azaz a közös merőlegesük hosszát!

3. Feladat (10 pont)

a) Igazold, hogy: $\frac{1}{\sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2019} \cdot (1+\sqrt{2019})} - \frac{1}{1+\sqrt{2019}} = 0$;

b) Számítsd ki $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right)^2$-t, ha $a, b \in \mathbb{R}^*$ és $a + b \neq 0$;

c) Igazold, hogy $\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \in \mathbb{Q}$, bármely páronként különböző $x, y, z \in \mathbb{Q}$ számok esetén!

4. Feladat (10 pont)

Egy ládában arany és ezüst pénzérmék vannak. Az ezüstérmék száma több, mint az aranyaké. Egy aranyérme 5 gramm, egy ezüstérme 13 grammos. Hány ezüst és hány arany pénzérme lehet a ládában, ha az érmék tömege összesen háromnegyed kilogramm?

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.