**Országos Magyar Matematika Olimpia**
**Megyei szakasz, 2019. január 26.**

# Javítókulcs
## IX. osztály

**1. Feladat (10 pont)**

Adott az $a=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám.

a) Számítsd ki az $a$ szám egész részét.

b) Oldd meg az egész számok halmazán az $\left[\frac{x+1}{2}\right]=2019[a]$ egyenletet, ahol $[t]$ az $t$ valós szám egész részét jelöli.

*(Oláh-Ilkei Árpád, Barót)*

**Megoldás:**

Hivatalból **1pont**

a) $a=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{9}}=$ **1pont**

$=\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}\left(1-\sqrt{5}\right)}{10}$ **1pont**

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow -2<1-\sqrt{5}<-1$ **1pont**

$3<\sqrt{10}<4\Rightarrow -6<\sqrt{10}\left(1-\sqrt{5}\right)<-4$ **1pont**

$\Rightarrow -1<-0,6<a<-0,4<0$ **1pont**

$\Rightarrow [a]=-1$ **1pont**

b) $x\in\mathbb{Z},\left[\frac{x+1}{2}\right]=2019[a]$

$\left[\frac{x+1}{2}\right]=-2019\Rightarrow -2019\le\frac{x+1}{2}<-2018$ **1pont**

$-4039\le x<-4037$ és $x\in\mathbb{Z}$ **1pont**

$M=\{-4039;-4038\}$ **1pont**

**2. Feladat (10 pont)**

Igazold, hogy

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ bármely $a,b$ pozitív valós szám esetén;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{16}{a+b+c}$ bármely $a,b,c$ pozitív valós szám esetén;

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ bármely $a,b,c,d$ pozitív valós szám esetén!

*(Nagy Olga, Nagyszalonta)*

**Megoldás:**

Hivatalból **1pont**

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}$ (1)

$a+b>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{ab}\geq 4$ (2) **1pont**

$ab>0\Rightarrow(2)\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab$ **1pont**

$(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$, evidens bármely $a,b$ pozitív valós szám esetén **1pont**

***Megjegyzés:*** Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$ .

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\overset{a)}{\geq}\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}$ (3) **1pont**

és $\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}=4\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)\overset{a)}{\geq}4\cdot\frac{4}{a+b+c}=\frac{16}{a+b+c}$ (4) **1pont**

$(3)$ *és* $(4)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{16}{a+b+c}$ igaz, bármely $a,b,c$ pozitív valós szám esetén, **1pont**

***Megjegyzés:*** Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$ és $a+b=c$ és $a+b+c=d$ .

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\overset{b)}{\geq}\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}$ (5) **1pont**

$\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}=16\cdot\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\overset{a)}{\geq}16\cdot\frac{4}{a+b+c+d}$ (6) **1pont**

$(5)$ *és* $(6)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ igaz bármely $a,b,c,d$ pozitív valós szám esetén. **1pont**

***Megjegyzés:*** Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$ és $a+b=c$ és $a+b+c=d$ .

**3. Feladat (10 pont)**

Adott az $ABC$ háromszög és $E, D$ és $F$ pontok úgy, hogy $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ és $\overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{CE}$

Igazold, hogy a) az $A, F$ és $D$ pontok kollineárisak;

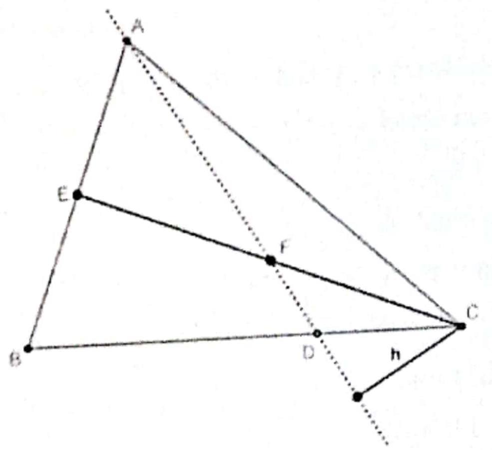
b) $\frac{T_{FEA_\Delta}}{T_{FDC_\Delta}} = 3$ .

*(Szőts Ildikó, Brassó és Spier Tünde, Arad)*

**Megoldás:** **1pont**

Hivatalból

Rajz




**1pont**

**1pont**

a) $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AC}$ (1)

**1pont**

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{AF} = \frac{1}{4}\left(\overline{AB} + 2\overline{AC}\right)$ (2)

**1pont**

$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}\left(\overline{AB} + 2\overline{AC}\right)$ (3)

$(3) \Rightarrow 3\overline{AD} = \overline{AB} + 2\overline{AC}$ (4)

**1pont**

$(2) \text{és} (4) \Rightarrow \overline{AF} = \frac{3}{4}\overline{AD}$

**1pont**

b) Mivel F felezőpontja az $EC$ -nek, $T_{AEF} = T_{AFC}$ (5)

Legyen $h$ a $CFD$ háromszög $C$ -ből húzott magassága, amely megegyezik az $AFC$ háromszög $C$ -ből húzott magasságával.

$$\frac{T_{AEF}}{T_{FDC}} \overset{(5)}{=} \frac{T_{AFC}}{T_{FDC}} = \frac{AF \cdot \frac{h}{2}}{FD \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AF}{FD} \quad (6)$$ **1pont**

az a) $\Rightarrow \frac{AF}{FD} = 3 \quad (7)$ **1pont**

$(6)$ és $(7) \Rightarrow \frac{T_{FEA_\Delta}}{T_{FDC_\Delta}} = 3$. **1pont**

**4. Feladat (10 pont)**

Egy kör alakú 1 kg tömegű pizzát egyenes vágásokkal darabokra osztunk. Ha tudjuk, hogy két vágás átmegy a pizza közepén, a harmadik pedig nem, bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan darab, amelynek tömege legalább 166 g.

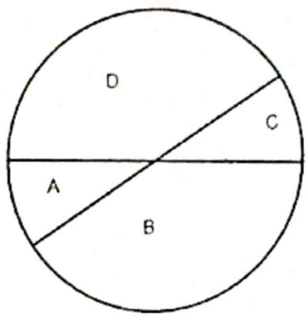
*(Matlap, 2893.feladat, 7szám/2018)*

**Megoldás:**

Hivatalból **1pont**

A két vágással, amely átmegy a pizza közepén négy részre osztják a pizzát, A, B, C és D, ezek közül két-két rész szimmetrikus: A és C, valamint B és D.

**2pont**

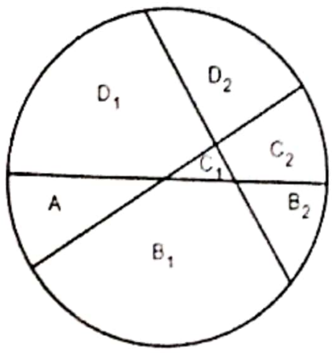



A harmadik vágás, amely nem megy át a középponton, a négy részből maximum hármat vághat el, így a harmadik vágás után öt, hat vagy hét darabot kaphatunk. **2pont**

Ha öt darabot kapunk, akkor a skatulya-elv alapján létezik legalább egy darab, amelynek tömege legalább 1000:5=200 (g), (tehát legalább 166 g). **1pont**

Ha a pizzát hat részre osztottuk, akkor szintén a skatulya-elv alapján egy darab tömege: 1000:6=166,(6), ami legalább 166 g. **1pont**

Tekintsük a harmadik esetben a következő ábrát (amikor hét részre osztjuk a pizzát):




A $D_1, D_2, C_1 \cup C_2, B_1, B_2$ és $A$ részek tömege összesen 1 kg, így egy darab tömege: 1000:6=166,(6), ami legalább 166 g. **1pont**

Ha a fenti részekből a $D_1, D_2, B_1, B_2$ *vagy* $A$ tömege legalább 166 g, akkor a feladat megoldását befejeztük. **1pont**

Ha pedig a $C_1 \cup C_2$ rész tömege legalább 166 g, akkor szintén befejeztük a feladat megoldását, mert $C_1 \cup C_2 = A$.

**1pont**

**Országos Magyar Matematikaolimpia 2019**
**Megyei szakasz, 2019. január 26.**

**Javítókulcs**
**X. osztály**

**1. Feladat (10 pont)**

a) Tudva, hogy $x=\log_a(bc),\ y=\log_b(ca),\ z=\log_c(ab),\ a,b,c\in(0,1)\cup(1,\infty)$, igazold, hogy $x+y+z+2=x\cdot y\cdot z$.

b) Adj példát olyan $a, b$ és $c$ páronként különböző természetes számokra, amelyekre az $x, y$ és $z$ is természetes számok!

***Megoldás:***

Hivatalból .......... **1 pont**

a) $x=\log_a(bc)=\dfrac{\lg b+\lg c}{\lg a},\ \ y=\log_b(ca)=\dfrac{\lg c+\lg a}{\lg b},\ \ z=\log_c(ab)=\dfrac{\lg a+\lg b}{\lg c}$ .. **1 pont**

$$x\cdot y\cdot z=\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}\cdot\frac{\lg c+\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg a+\lg b}{\lg c}=\frac{\left(\lg b\cdot\lg c+\lg a\cdot\lg b+\lg^2 c+\lg a\cdot\lg c\right)\cdot\left(\lg a+\lg b\right)}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=$$

$$=\frac{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c+\lg^2 a\cdot\lg b+\lg a\cdot\lg^2 c+\lg^2 a\cdot\lg c+\lg^2 b\cdot\lg c+\lg a\cdot\lg^2 b+\lg b\cdot\lg^2 c+\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=$$

.......... **2pont**

$$=1+\frac{\lg a}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a}{\lg b}+\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg b}{\lg c}+\frac{\lg c}{\lg a}+1=$$ .......... **2 pont**

$$=2+\frac{\lg(bc)}{\lg a}+\frac{\lg(ca)}{\lg b}+\frac{\lg(ab)}{\lg c}=$$ .......... **1 pont**

$=2+\log_a(bc)+\log_b(ca)+\log_c(ab)=x+y+z+2$, amit igazolni kellett. .......... **1 pont**

b) Legyen $z=1$, akkor $x+y+3=xy\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=4\ \Rightarrow\ x=2, y=5$ ..........**1 pont**

$$\left.\begin{aligned}x=2&\Leftrightarrow a^2=bc\\ y=5&\Leftrightarrow b^5=a\cdot c\\ z=1&\Leftrightarrow c=a\cdot b\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=b^2\\ c=b^3\end{cases}\Rightarrow$$

Például: $b=2, a=4, c=8$, amelyek teljesítik a kért feltételeket. ............................ 1 pont

**2. Feladat (10 pont)**

Legyen $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Igazold, hogy $\omega=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha $|z|=1$.

Hivatalból ........................ 1 pont

***I. Megoldás:***

$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\Rightarrow z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ ........................ 1 pont

Akkor $\omega=\dfrac{1+a+bi+a^2-b^2+2abi}{1-a-bi+a^2-b^2+2abi}=$ ........................ 1 pont

$=\dfrac{(1+a+a^2-b^2)+b(1+2a)i}{(1-a+a^2-b^2)-b(1-2a)i}=$ ........................ 1 pont

$=\dfrac{\left[(1+a+a^2-b^2)+b(1+2a)i\right]\cdot\left[(1-a+a^2-b^2)+b(1-2a)i\right]}{\left[(1-a+a^2-b^2)-b(1-2a)i\right]\cdot\left[(1-a+a^2-b^2)+b(1-2a)i\right]}=$ ........................ 1 pont

$=\operatorname{Re}\omega+\dfrac{(1+a+a^2-b^2)b(1-2a)+(1-a+a^2-b^2)b(1+2a)}{(1-a+a^2-b^2)^2+b^2(1-2a)^2}i=$ ........................ 1 pont

$=\operatorname{Re}\omega+\dfrac{2(1-a^2-b^2)}{(1-a+a^2-b^2)^2+b^2(1-2a)^2}i\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ ........................ 1,5 pont

$\Leftrightarrow\ \operatorname{Im}\omega=0\ \Leftrightarrow 2(1-a^2-b^2)=0\ \Leftrightarrow$ ........................ 1,5 pont

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2=1\ \Leftrightarrow\ |z|=1.$ ........................ 1 pont

***II. Megoldás:***

$\omega\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{\omega}=\omega,$ ........................ 2 pont

akkor $\dfrac{1+\overline{z}+\overline{z}^2}{1-\overline{z}+\overline{z}^2}=\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\Leftrightarrow -z+\overline{z}+z^2\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{z}^2=0\Leftrightarrow$ ........................ 4 pont

$(\overline{z}-z)\cdot(1-z\cdot\overline{z})=0\Rightarrow\ \overline{z}=z$, ami ellentmond a $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ feltételnek ........................ 1 pont

illetve, $1-z\cdot\overline{z}=0\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1.$ ........................ 2 pont

**3. Feladat (10 pont)**

Az $ABC$ háromszögben $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ és a $C$ szög mértéke $60^\circ$.

a) Igazold, hogy $1 + tgA tgB = 0$.

b) Számítsd ki az $A$ és a $B$ szög mértékét!

Hivatalból ....................................................................................................................1 pont

*I. Megoldás*

a) A feltétel alapján $b < a$, tehát $B < A$, ahonnan kapjuk, hogy a $B$ és a $C$ hegyesszögek, ezért az $A$-ból húzott magasság talppontja a $BC$ szakaszra esik, az ábrának megfelelően ..........1.pont

Az $ADC$ háromszögben a $C$ szög mértéke $60^\circ$, ezért az $A$ szög $30^\circ$-os.

$CD = \frac{b}{2}$, $AD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ .............1.pont

$BD = BC - CD = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} b$.

Az $ADB$ háromszögben $tgB = \frac{AD}{DB} = 2 - \sqrt{3}$ ..........................................................1.pont

Az $ABC$ háromszögben $tgA = tg(180^\circ - (B + C)) = -tg(B + C) =$ ..............................1 pont

$= -\frac{tgB + tgC}{1 - tgB \cdot tgC} = -(2 + \sqrt{3})$ ........................................................................2 pont

A fentiek alapján $1 + tgAtgB = 1 - (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 0$ ...........................................1 pont

b) Az a) alpontban igazolt összefüggést beszorozva $\cos A \cdot \cos B$ -vel $\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B = 0$ összefüggéshez jutunk, vagyis, hogy $\cos(A - B) = 0$, ahonnan $A - B = 90^\circ$ ....................2 pont

Mivel $A + B = 120^\circ$ azt kapjuk, hogy a $B$ szög mértéke $15^\circ$ és az $A$ szög mértéke $105^\circ$ ...1 pont

*II. Megoldás*

Bármely háromszögben $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, következik, hogy $\sin A = (2 + \sqrt{3}) \sin B$ ............2 pont

Mivel a $C$ szög mértéke $60^\circ$ azt kapjuk, hogy $A + B = 120^\circ$ ....................................1 pont

tehát $\sin(120^\circ - B) = (2 + \sqrt{3}) \sin B$ ..................................................................................1 pont

Kifejtve a baloldali kifejezést és átrendezve az egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$\sqrt{3} \cos B = (3 + 2\sqrt{3}) \sin B$. Innen következik, hogy $tgB = 2 - \sqrt{3}$ ..................................2 pont

ahonnan következik, hogy a $B$ szög mértéke $15^\circ$.

Végül következik, hogy az $A$ szög mértéke $105^\circ$ ..........................................................2 pont.

A kapott szögek tangensét kiszámolva és behelyettesítve kapjuk a feladat a) alpontjának az eredményét.................................................................................1 pont

***III. Megoldás:***

A tangenstétel értelmében $\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}}$, ..........................................3 pont

amit a $\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=tg\frac{A-B}{2}tg\frac{C}{2}$ alakba írva ..........................................2 pont

a feltételek alapján azt kapjuk, hogy $tg\frac{A-B}{2}=1$, ahonnan az következik, hogy $A-B=90^\circ$. Az $A+B=120^\circ$ és $A-B=90^\circ$ összefüggésekből következik, hogy a $B$ szög mértéke $15^\circ$ és az $A$ szög mértéke $105^\circ$. ..........................................3 pont

A kapott szögek tangensét kiszámolva és behelyettesítve kapjuk a feladat a) alpontjának az eredményét..........................................1 pont

**4. Feladat (10 pont)**

Oldd meg a $2^{[4x-1]}=\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol $[x]$ az $x$ valós szám egész részét jelöli.

*Matlap*

Hivatalból .......................................................................... 1 pont

***Megoldás:***

Bizonyítjuk, hogy $\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}>0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. ..........................................1 pont

Bizonyítjuk, hogy $\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}<7$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\left[\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\le 6$ ......................2 pont

*A fentiek helyett tekinthetjük az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$ *függvényt, és meghatározzuk a függvényértékek halmazát:* $\mathrm{Im}(f)=\left[\frac{10-2\sqrt{19}}{3},\frac{10+2\sqrt{19}}{3}\right]$, *amit szintén 3 pontot ér.*

Tehát $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\geq 0 \Rightarrow \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\in\mathbb{N}$, bármely valós $x$ esetén,

ebből következik, hogy $[4x-1]\geq 0 \Rightarrow [4x-1]\in\mathbb{N}$, bármely valós $x$ esetén.

Ezért $2^{[4x-1]}\in\{1,2,4,8,...\}$ és $\operatorname{Im}(f)\cap\mathbb{Z}=\{1,2,3,4,5,6\}$ ..............1 pont

$\Rightarrow 2^{[4x-1]}\in\{1,2,4\}$ és ebből $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]\in\{1,2,4\}$ ..........................1 pont

Tárgyalás:

**1. eset:**

$$2^{[4x-1]}=1\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=0\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\\ x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[-2+\sqrt{5},\dfrac{2}{3}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)=M_1$$

.............................................................1 pont

**2. eset:**

$$2^{[4x-1]}=2\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=1\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)\\ x\in\left(-\infty,-2-\sqrt{5}\right]\cup\left[-2+\sqrt{5},\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)=M_2$$

..................................................................1 pont

**3. eset:**

$$2^{[4x-1]}=4\Leftrightarrow\begin{cases}[4x-1]=2\\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{3}{4},1\right)\\ x\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3},\dfrac{-7-\sqrt{17}}{8}\right)\cup\left(\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8},\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\right]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing=M_3$$

...........................................1 pont

$M=M_1\cup M_2\cup M_3=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)\cup\varnothing=\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$. ...........................................1 pont

# Országos Magyar Matematika Olimpia
## Megyei szakasz, 2019. január 26.

## Javítókulcs
## XI. osztály

**1. Feladat (10 pont)**

a.) Kétféleképpen kiszámítva az $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ mátrix determinánsát, igazold az alábbi egyenlőséget:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

b) Ha $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $a+b+c=1$, igazold, hogy $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$.

(Betuker Enikő, Mastan Eliza, Szilágyi Judit)

**Megoldás**
Hivatalból 1p

a) $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$ 2p

$\det A=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=$ 1p

$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 2p

b) Ha $a+b+c=1$, akkor az a) alpont alapján $a^3+b^3+c^3-3abc=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$. 1p

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\right]=$ 1p

$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2\right]\geq 0$. 1p

Tehát $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$, innen :

$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc$. 1p

**2. Feladat (10 pont)**

Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_{n+1} = x_n + \frac{3}{x_n}$, $x_0 = 1$.

a) Igazold, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ !

b) Számítsd ki a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n}$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}$ határértéket!

(Zákány Mónika)

**Megoldás**

Hivatalból 1p 1p

a) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{3}{x_n} > 0 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő

Mivel $(x_n)_{n\geq 0}$ szigorúan növekvő $\Rightarrow$ ha $(x_n)_{n\geq 0}$ korlátos, akkor létezik $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, ha pedig $(x_n)_{n\geq 0}$ nem korlátos, akkor $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 1p

Feltételezzük, hogy a sorozat korlátos és $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Határértékre térve a rekurzióban: $l = l + \frac{3}{l} \Rightarrow \frac{3}{l} = 0$ ellentmondás, tehát a sorozat nem korlátos és $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 1p

b) Legyen $a_n = x_n^2$ és $b_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. A $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos. (1) 1p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 - x_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = 6 \ (2)$$

(1) és (2) Cesaro-Stolz tétele alapján $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 6$ 2p

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\frac{x_n}{\sqrt{n}}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}}$ 1p

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2$ és a b) alapján $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = 6$.

Mivel $\frac{x_n}{\sqrt{n}} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{6}$.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n} = e^{\sqrt{6}}$ 1p

**3. Feladat (10 pont)**

Adott az $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ mátrix.

a) Számítsd ki az $A^n$ mátrixot!

b) Számítsd ki $\det(A^n)$ értékét!

(Matlap)

**Megoldás**
Hivatalból 1p

$A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 1p

$A^3=\begin{pmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ 1p

Igazoljuk, indukcióval, hogy $A^n=\begin{pmatrix}x_n&y_n&y_n\\y_n&x_n&y_n\\y_n&y_n&x_n\end{pmatrix}$ alakú és

$A^{n+1}=\begin{pmatrix}2y_n&x_n+y_n&x_n+y_n\\x_n+y_n&2y_n&x_n+y_n\\x_n+y_n&x_n+y_n&2y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}&y_{n+1}&y_{n+1}\\y_{n+1}&x_{n+1}&y_{n+1}\\y_{n+1}&y_{n+1}&x_{n+1}\end{pmatrix}$. 1p

Innen :

$\begin{cases}x_{n+1}=2y_n\\y_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$

Tehát $\begin{cases}x_n=y_{n+1}-y_n\\y_{n+2}=y_{n+1}+2y_n\end{cases}$. 1p

A második lineáris rekurencia karakterisztikus egyenlete $r^2-r-2=0$ , melynek megoldásai 2 és -1, tehát $y_n=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n$.
1p

Az $y_1=1$ és $y_2=1$ feltételekből $A=\frac{1}{3}$ és $B=-\frac{1}{3}$.
1p

Innen $y_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n$

és $x_n=\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1}-\frac{2}{3}\cdot(-1)^{n-1}$.
1p

b)

Tudjuk, hogy $\det(A^n)=(\det A)^n$
1p

Mivel $\det A=2 \Rightarrow \det(A^n)=2^n$
1p

**4. Feladat (10 pont)**

Igazold, hogy az 1, 2, 3, ..., 2019 számok közül nem választható ki 100 olyan szám, amelyekből bármely kettőt összeadva, az így képezhető kéttagú összegek mind különbözzenek egymástól!

(Szilágyi Judit)

**Megoldás**

Hivatalból 1p

Az 1, 2, ..., 2019 számokból képezhető

legkisebb kéttagú összeg $1+2=3$, illetve 1p

legnagyobb kéttagú összeg $2018+2019=4037$ 1p

emiatt a 2019 számból legtöbb 4035 különböző összeget kaphatunk. 2p

Ha a 2019 számból kiválasztunk 100 számot, ezekből nyilvánvalóan nem kaphatunk ennél több különböző összeget. 1p

Száz számból $C_{100}^{2}=4950$ számpárt alkothatunk, tehát 4950 összeget képezhetünk. 3p

Mivel $4950>4037$ ezek nem lehetnek mind különbözőek. 1p

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.

# Javítókulcs
## XII. osztály

**1. Feladat (10 pont)** Adottak az $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ deriválható függvények, amelynek deriváltjai folytonosak.

a) Igazold, hogy $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x) \cdot e^{g(x)} + C$;

b) Számítsd ki: $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx$ integrált, ahol $x > 0$ !

(Matlap 10- L:2951/2018)

**Megoldás:**

Hivatalból ........................................................................................1p

a) $\left[f(x) \cdot e^{g(x)}\right]' = f'(x) \cdot e^{g(x)} + f(x) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x) = [f'(x) + f(x) \cdot g'(x)]e^{g(x)}$. ....................4p

b) $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx =$

$\int \left[\frac{(x^2-1)\ln x}{x^2} + \frac{1}{x}\right] \cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx =$

$\int \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x}\right] \cdot e^{x+\frac{1}{x}}dx =$ ....................................................1p

$f(x) = \ln x$ tehát $f'(x) = \frac{1}{x}$ ....................................................1p

$g(x) = x + \frac{1}{x}$ ahonnan $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ....................................................1p

$\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x) \cdot e^{g(x)} + C =$

$= \ln x \cdot e^{x+\frac{1}{x}} + C$ .

....................................................................................2p

**2. Feladat (10 pont)** Számítsd ki :

a) az $I - J$ integrált, ha $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$ és $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$;

b) $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx, x > 0$ integrált!

**Megoldás:**

Hivatalból ............................................................................................................1p

a) $I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx =$ ..............................................1p

$-\int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx =$ ..............................................................................2p

$-\ln(\sin x + \cos x) + c$. ..........................................................................................2p

b)

Legyen $I = \int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx$ és $J = \int \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x} dx$ . ..........................................1p

Ekkor $I + J = x + C_1$ ...........................................................................................1p

$I - J = \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right) + C_2$. ..............................................................1p

Összegezve az egyenlőségeket kapjuk, hogy $I = \frac{1}{2}\left(x + \ln\left(e^x + \cos x + \sin x\right)\right) + C$. ..................1p

**3. Feladat (10 pont)** Öt számkártyára felírtuk az 1,2,3,4 és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő $X$ , $Y$ és $Z$ dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az $X$ jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

**Megoldás:**

Ha az $X$ dobozba nem kerül kártya, akkor az öt számkártyát az $Y$ és $Z$ dobozokba $2^5$ -féleképpen helyezhetjük el. ..........................................................................................1p

Ha az $X$ dobozba egy számkártya kerül, akkor az csak az 5 lehet, a fennmaradó négyet az $Y$ és $Z$ dobozokba $2^4$ -féleképpen tehetjük. ..........................................................................1p

Ha az $X$ dobozba két számkártya kerül, akkor azokon az 1 és 4 vagy a 2 és 3 szerepelhet. Így a megmaradt számkártyákat az $Y$ és $Z$ dobozokba $2^3$ -féleképpen tehetjük. ..................................2p

Ha az $X$ dobozba három számkártya kerül, akkor azokon 1,4,5 vagy 2,3,5 számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az $Y$ és $Z$ dobozokba $2^2$ -féleképpen tehetjük. .........................2p

Ha az $X$ dobozba négy számkártya kerül, akkor azokon 1,2,3 és 4 számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az $Y$ és $Z$ dobozokba 2 -féleképpen tehetjük. .....................................1p

Ha mind az 5 számkártya az $X$ dobozba kerül, akkor ez egyféleképpen lehetséges. ....................1p

Tehát az elhelyezések száma: $2^5+2^4+2\cdot 2^3+2\cdot 2^2+2+1=75$. ........................................1p

**4. Feladat (10 pont)** A $G=(1;\infty)$ halmazon értelmezett az $x\circ y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$ belső művelet $\forall x,y\in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G,\circ)$ Ábel-féle csoport;

b) Határozd meg az $m,n$ valós számokat úgy, hogy az $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$ függvény, ahol $f(x)=\sqrt{mx+n}$ egy izomorfizmust valósítson meg az $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ és a $(G,\circ)$ csoportok közöt;

c) Számítsd ki $\sqrt{\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}}\circ\sqrt{\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}}\circ\ldots\circ\sqrt{\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}}$ értékét!

**Megoldás:**

Hivatalból ........................................1p

a) Asszociativitás kimutatása........................................1p

Kommutativitás........................................1p

$e=\sqrt{2}\in(1;\infty)$ ........................................1p

$x'=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}>1$ tehát $x'\in G$ szimmetrikus elem........................................1p

b) $f(x\cdot y)=f(x)\circ f(y)\Leftrightarrow\sqrt{mxy+n}=\sqrt{mx+n}\circ\sqrt{my+n}=$

$=\sqrt{m^2xy+m(n-1)x+m(n-1)y+mn-2n+2}$ innen kapjuk, hogy

$\begin{cases} m^2=m \\ m(n-1)=0 \\ mn-2n+2=n \end{cases}$ ahonnan $m\in\{0,1\}$, de mivel $f$ nem lehet konstans függvény .

Innen következik, hogy $n=0$. ........................................1p

$f(x)=\sqrt{x+1}$ bijektív........................................1p

c) Ha az $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$ , $f(x)=\sqrt{x+1}$ izomorfizmus a $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$ és $(G,\circ)$ között, akkor az $f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2-1$ is izomorfizmus a $(G,\circ)$ és $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$ között............1p

Jelöljük $x_1=\sqrt{\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}}$, $x_2=\sqrt{\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}}$ ,..., $x_n=\sqrt{\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}}$ ,

ekkor $f^{-1}(x_1)=\frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}-1=\frac{1^2-1+1}{1^2+1+1}$, $f^{-1}(x_2)=\frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}-1=\frac{2^2-2+1}{2^2+2+1}$ ,...,

$f^{-1}(x_n)=\frac{2\cdot n^2+2}{n^2+n+1}-1=\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$.

$$\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2-(n-1)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-3n+3}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}=\frac{1}{n^2+n+1}$$ ..........................................................1p

$$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=f\left(\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k)\right)=f\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\sqrt{\frac{1}{n^2+n+1}+1}=\sqrt{\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}}$$ ...........1p