IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont). Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat esetén $x_1 \geq 1$ és $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$-ra.

a) Határozd meg a sorozat általános tagjának képletét, ha $x_1 = 2$.

b) Bizonyítsd be, hogy minden $x_1 \geq 1$ kezdőérték esetén a sorozat konvergens és határértéke 1.

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$ határértéket!

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. a) A rekurzió alapján $x_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{5}{4}$. **(1 pont)**
A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $x_n = \frac{n+1}{n}, \forall n \geq 1$. **(1 pont)**
Az eddigiek alapján a $P(n) : x_n = \frac{n+1}{n}$ állítás igaz $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén. Másrészt, ha $x_k = \frac{k+1}{k}$ valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor a rekurzió alapján

$$x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1},$$

tehát a $P(k+1)$ állítás is igaz. Így a matematikai indukció elve alapján $P(n)$ igaz, bármely $n \geq 1$ természetes számra, tehát $x_n = \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**

b) Ha $x \geq 1$, akkor egyrészt $\frac{1}{x} \leq 1$, és ezért $2 - \frac{1}{x} \geq 1$, másrészt az $x + \frac{1}{x} \geq 2$ egyenlőtlenség alapján $2 - \frac{1}{x} \leq x$. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagja az $[1, +\infty)$ intervallumban van. Valóban, ha $x_k \geq 1$, akkor $x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} \geq 1$. **(1 pont)**
Másrészt, $x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tehát a sorozat csökkenő. Az előbbiek alapján $x_n \in [1, 2)$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát a sorozat konvergens. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. **(1 pont)**

A rekurzióban határértékre térve azt kapjuk, hogy $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$, ahonnan $(\ell - 1)^2 = 1$, tehát $\ell = 1$. **(1 pont)**

c) Legyen $L = \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\frac{1}{x_n - 1}}$. A b) alpont alapján az $\frac{1}{x_n - 1}$ sorozat növekvő és végtelenhez tart, **(1 pont)**
tehát a Cesàro–Stolz-kritérium alkalmazható. Ugyanakkor

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_n}} - \frac{1}{x_n - 1} = 1, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

tehát a Cesàro-Stolz kritérium alapján $L = 1$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. A

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x_n}} - \frac{1}{x_n - 1} = 1$$

összefüggés alapján az általános tag tetszőleges x_1 esetén felírható, hiszen

$$\frac{1}{x_n-1}=\frac{1}{x_1-1}+n-1,$$

tehát

$$x_n=1+\frac{1}{n-1+\frac{1}{x_1-1}}.$$

Természetesen az x_1 nem lehet $1-\frac{1}{n-1}$ alakú, ahol $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Ugyanezt az eredményt kaptuk volna akkor is, ha a lineáris törttranszformációból származó rekurziók általános megoldási módszerét alkalmaztuk volna.

2. feladat (10 pont)**.** Adott az $A=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 8 & -6\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mátrix.

a) Határozd meg az A^n mátrixot, ahol $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Adott az $f\colon\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$, $f(x)=\frac{9x-7}{8x-6}$ függvény és legyen $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{-szer}}$. Határozd meg az f_{2022} függvényt!

Bara Lajos, Zilah
Kocsis Attila, Déva

Megoldás. a) Legyen minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén $A^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ u_n & v_n\end{pmatrix}$. Mivel

$$\begin{pmatrix}x_{n+1} & y_{n+1}\\ u_{n+1} & v_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ u_n & v_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -7\\ 8 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9x_n+8y_n & -7x_n-6y_n\\ 9u_n+8v_n & -7u_n-6v_n\end{pmatrix},$$

innen következik, hogy

$$\begin{cases}x_{n+1}= & 9x_n+8y_n\\ y_{n+1}= & -7x_n-6y_n\end{cases}\qquad\text{és}\qquad\begin{cases}u_{n+1}= & 9u_n+8v_n\\ v_{n+1}= & -7u_n-6v_n,\end{cases}\qquad\textbf{(2 pont)}$$

valamint tudjuk, hogy $x_1=9$, $y_1=-7$, $u_1=8$ és $v_1=-6$. Az első rendszer egyenleteinek megfelelő oldalait összeadva, következik, hogy minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén

$$x_{n+1}+y_{n+1}=2(x_n+y_n),\qquad\textbf{(1 pont)}$$

tehát $x_n+y_n=2^{n-1}(x_1+y_1)=2^n$, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén. Felhasználva ezt az eredményt, írhatjuk, hogy minden $n\geq 1$ esetén

$$x_n=9x_{n-1}+8y_{n-1}=9x_{n-1}+8(2^{n-1}-x_{n-1})=x_{n-1}+2^{n-1}.$$

Összeadva ezeket az összefüggéseket $k=2,3,4,\ldots,n$-re, azt kapjuk, hogy

$$x_n=x_1+2^4+2^5+\cdots+2^{n+2}=9+(2^{n+3}-1)-1-2-4-8=2^{n+3}-7,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad\textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy $y_n=-7\cdot 2^n-7$, $\forall n\geq 1$ és mivel az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatok is ugyanazt a rekurziórendszert teljesítik, mint az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, illetve az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, csak más kezdeti értékekkel, analóg módon következik, hogy $u_n=2^{n+3}-8$, valamint $v_n=-7\cdot 2^n+8$ minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

(1 pont)

b) Az $f\colon \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ függvény homografikus (ha $ad-bc\neq 0$), és a hozzárendelt mátrixa az $M_f=A$. Tudjuk, hogy a homografikus függvények összetétele homografikus, és $M_{f\circ g}=M_f\cdot M_g$, tehát $M_{f_n}=(M_f)^n$. **(2 pont)**
Így az a) alpont alapján

$$M_{f_n}=A^n=\begin{pmatrix}2^{n+3}-7 & -7(2^n-1)\\ 8(2^n-1) & 8-7\cdot 2^n\end{pmatrix},\quad \forall n\geq 1,$$

tehát

$$f_{2022}(x)=\frac{(2^{2025}-7)x-7(2^{2022}-1)}{8(2^{2022}-1)x+8-7\cdot 2^{2022}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás az a) alpontra. Az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$p_A(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+\det(A)=x^2-3x+2,$$

amelynek a gyökei $x_1=1$ és $x_2=2$. **(1 pont)**
Ezért a Cayley–Hamilton-tétel egyik következménye alapján léteznek a B és C mátrixok úgy, hogy

$$A^n=1^nB+2^nC,\quad \forall n\geq 1. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Meghatátozzuk a B és C mátrixokat ebből az összefüggésből, felhasználva az $n=1$ és $n=2$ eseteket: mivel $A=B+2C$ és $A^2=B+4C$, következik, hogy $2C=A^2-A$, **(1 pont)**
ahonnan

$$C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}25 & -21\\ 24 & -20\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9 & -7\\ 8 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -7\\ 8 & -7\end{pmatrix}\quad\text{és}\quad B=A-2C=\begin{pmatrix}-7 & 7\\ -8 & 8\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát minden $n\geq 1$ esetén

$$A^n=\begin{pmatrix}-7 & 7\\ -8 & 8\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}8 & -7\\ 8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+3}-7 & -7(2^n-1)\\ 8(2^n-1) & 8-7\cdot 2^n\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont)**.** Legyen $\mathcal{A}$ azoknak az $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixoknak a halmaza, amelyek esetén $\det A=1$, illetve $\det(A^4+A^2+I_2)=1$.

a) Határozd meg a $\mathcal{T}=\{\operatorname{tr}(A)\mid A\in\mathcal{A}\}$ halmazt, ahol $\operatorname{tr}(A)$ az A mátrix főátlón levő elemeinek összegét jelöli!

b) Határozd meg a $\mathcal{D}=\{\det(A+A^{-1})\mid A\in\mathcal{A}\}$ halmazt! *Tóth Csongor, Szováta*

Megoldás. a) Észrevesszük, hogy $A^4+A^2+I_2=A^4+2A^2+I_2-A^2=(A^2+I_2)^2-A^2$ **(1 pont)**
A Cayley–Hamilton-tétel alapján a $\operatorname{tr}(A)=t$ jelölést használva $A^2-tA+\det A\cdot I_2=O_2$, ahonnan azt kapjuk, hogy $A^2+I_2=tA$. **(2 pont)**
Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe, következik, hogy

$$A^4+A^2+I_2=(tA)^2-A^2=(t^2-1)A^2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a $\det(A^4+A^2+I_2)=1$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $(t^2-1)^2(\det A)^2=1$, ahonnan $(t^2-1)^2=1$, és így $t\in\{0,\pm\sqrt{2}\}$. **(1 pont)**

Belátható, hogy ha az A mátrix rendre a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixok egyike, akkor egyrészt A teljesíti a feladat kijelentésében megadott feltételeket, másrészt pedig $\operatorname{tr}(A)$ rendre 0, $\sqrt{2}$, illetve $-\sqrt{2}$. Tehát $\mathcal{T} = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. (**1 pont**)

b) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det(A + A^{-1}) &= \det(A + A^{-1}) \det A = \det((A + A^{-1})A) = \det(A^2 + I_2) \\ &= \det(tA) = t^2 \det A = t^2, \end{aligned} \qquad (\textbf{2 pont})$$

tehát $\det(A + A^{-1}) \in \{0, 2\}$. (**1 pont**)

Az a) alpont megoldásának a végén megadott A mátrixok esetén a $\det(A + A^{-1})$ felveszi a 0-t és 2-t. Tehát $\mathcal{D} = \{0, 2\}$.
Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás az a) alpontra. A Cayley–Hamilton-tétel alapján $A^2 - tA + \det A \cdot I_2 = O_2$, és innen következik, hogy $A^2 + I_2 = t \cdot A$. (**2 pont**)
Ez alapján $A^4 + A^2 + I_2 = A^4 + tA$. Tehát

$$\det(A^4 + A^2 + I_2) = \det(A^4 + tA) = \det A \cdot \det(A^3 + tI_2) = \det(A^3 + tI_2). \qquad (\textbf{1 pont})$$

Ugyanakkor, az $A^2 + I_2 = tA$ összefüggésből következik, hogy

$$A^3 + A = tA^2 = t(tA - I_2) = t^2A - tI_2,$$

tehát $A^3 = t^2A - tI_2 - A$. (**1 pont**)
Ezt felhasználva következik, hogy

$$\det(A^3 + tI_2) = \det(t^2A - A) = (t^2 - 1)^2 \det A = (t^2 - 1)^2.$$

Mivel $\det(A^4 + A^2 + I_2) = 1$, következik, hogy $(t^2 - 1)^2 = 1$, ahonnan $t \in \{0, \pm\sqrt{2}\}$. (**1 pont**)
Az első megoldásban megadott példák mutatják, hogy mindhárom t érték felvevődik. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatokat az

$$x_n = (45 + \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

illetve

$$y_n = (45 - \sqrt{2022})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

képletekkel értelmeztük.

a) Igazold, hogy $x_n + y_n \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!
b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}}$ határértéket, ahol $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. a) Newton binomiális képlete alapján írhatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} 2022^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} (-1)^k 2022^{\frac{k}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 45^{n-k} 2002^{\frac{k}{2}} (1 + (-1)^k) = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ páros}}} C_n^k 45^{n-k} 2002^{\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy $(x_n + y_n) \in \mathbb{N}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. (**2 pont**)

b) Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $x_n, y_n > 0$ és

$$y_n = (\sqrt{2025} - \sqrt{2022})^n = \left(\frac{3}{(\sqrt{2025} + \sqrt{2022})} \right)^n \in (0, 1).$$

Mivel az a) alpont alapján $\{x_n + y_n\} = 0$, ezért $\{x_n\} = 1 - y_n$. (**3 pont**)
Ugyanakkor, $x_n \cdot y_n = (45 + \sqrt{2022})^n \cdot (45 - \sqrt{2022})^n = (2025 - 2022)^n = 3^n$, (**1 pont**)
ezért írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \{x_n\}^{\frac{x_n}{3^n}} &= \lim_{n\to\infty} (1 - y_n)^{\frac{x_n \cdot y_n}{3^n \cdot y_n}} = \lim_{n\to\infty} (1 - y_n)^{\frac{3^n}{3^n \cdot y_n}} = \lim_{n\to\infty} (1 - y_n)^{\frac{1}{y_n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - y_n)^{-\frac{1}{y_n} \cdot (-1)} = \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. (**3 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■