OMMO EMMV — MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE — Centrul Național De Evaluare și Examinare — romania2019.eu

Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
XII. osztály

1. Feladat (10 pont) Adottak az $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ deriválható függvények, amelyeknek deriváltjai folytonosak.

a) Igazold, hogy $\int [f'(x) + f(x)g'(x)] e^{g(x)} dx = f(x) \cdot e^{g(x)} + C$;

b) Számítsd ki: $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x + \frac{1}{x}} dx$ integrált, ahol $x > 0$!

(Matlap)

2. Feladat (10 pont) Számítsd ki :

a) az $I - J$ integrált, ha $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ és $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$;

b) $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx, x > 0$ integrált!

3. Feladat (10 pont) Öt számkártyára felírtuk az $1, 2, 3, 4$ és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő X , Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

4. Feladat (10 pont) A $G = (1; \infty)$ halmazon értelmezett az $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ belső művelet $\forall x, y \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Ábel-féle csoport;

b) Határozd meg az m, n valós számokat úgy, hogy az $f: (0, \infty) \to (1, \infty)$ függvény, ahol $f(x) = \sqrt{mx + n}$ egy izomorfizmust valósítson meg az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és a $(G, \circ)$ csoportok közt;

c) Számítsd ki $\sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \ldots \circ \sqrt{\frac{2 \cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$ értékét!

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.