VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{és} \quad 17^{a_{n+2}} = 15^{a_{n+1}} + 8^{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

b) Számítsd ki az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékét!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $a_0 = a_1 = 1$ és $17^{a_2} = 15^1 + 8^1 = 23$, ahonnan $a_2 = \log_{17} 23 > 1$, így $a_0 = a_1 < a_2 < 2$. **(1 pont)**

Indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat növekvő. Valóban, $a_0 \le a_1 < a_2$ és ha az $a_k \le a_{k+1}$ állítás igaz, bármely $k = \overline{1, n-1}$ esetén, akkor

$$17^{a_{n+1}} = 15^{a_n} + 8^{a_{n-1}} \ge 15^{a_{n-1}} + 8^{a_{n-2}} = 17^{a_n}$$

(felhasználtuk, hogy az $f(x) = 15^x$ és $g(x) = 8^x$ függvények növekvőek és hogy $a_n \ge a_{n-1}$ és $a_{n-1} \ge a_{n-2}$, az indukciós feltevés szerint). Tehát $17^{a_{n+1}} \ge 17^{a_n}$ és mivel a $h(x) = 17^x$ függvény növekvő, következik, hogy $a_{n+1} \ge a_n$. **(2 pont)**

Szintén matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $a_n < 2$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.
Az $a_0 = a_1 < a_2 < 2$ és ha feltételezzük, hogy $a_k < 2$, bármely $k = \overline{1, n}$ esetén, akkor

$$17^{a_{n+1}} = 15^{a_n} + 8^{a_{n-1}} < 15^2 + 8^2 = 289 = 17^2,$$

így $a_{n+1} < 2$. **(2 pont)**

Mivel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ növekvő és felülről korlátos, a sorozat konvergens. **(1 pont)**

b) Határértékre térünk a rekurziós összefüggésben, így

$$17^{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2}} = 15^{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}} + 8^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

Az $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöléssel a fenti egyenlőség $17^l = 15^l + 8^l$ alakba írható, **(1 pont)**

ami az

$$\left(\frac{15}{17}\right)^l + \left(\frac{8}{17}\right)^l = 1 \tag{1}$$

egyenlőséggel egyenértékű. Mivel a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \left(\frac{15}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x$ függvény szigorúan csökkenő, a h injektív, így az (1) egyenletnek legtöbb egy megoldása van. **(1 pont)**

Ugyanakkor $\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$, így az egyenlet egyetlen megoldása $l = 2$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Ha $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ igazold, hogy

$$\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tr} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \det A\right)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2},$$

ahol $\operatorname{tr} A$ az A mátrix főátlóján lévő elemeinek összege (az A mátrix nyoma).

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Az A mátrixhoz rendelt karakterisztkus polinom:

$$\det\left(A - x \cdot I_2\right) = x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Ugyannakkor

$$A^2 + A + I_2 = (A - \varepsilon I_2) \cdot (A - \varepsilon^2 I_2),$$

ahol ε a harmadrendű egységgyök, azaz $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. (**1 pont**)

Mivel $\det X \cdot Y = \det X \cdot \det Y$

$$\begin{aligned}
\det\left(A^2 + A + I_2\right) &= \det\left(A - \varepsilon I_2\right) \cdot \det\left(A - \varepsilon^2 I_2\right) && (\mathbf{1\ pont})\\
&= (\varepsilon^2 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon + \det A) \cdot (\varepsilon^4 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^2 + \det A) && (\mathbf{1\ pont})\\
&= \varepsilon^6 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^5 + \det A \cdot \varepsilon^4 - \operatorname{tr} A \cdot \varepsilon^4 + (\operatorname{tr} A)^2 \cdot \varepsilon^3 - \operatorname{tr} A \cdot \det A \cdot \varepsilon^2 +\\
&\quad + \det A \cdot \varepsilon^2 - \operatorname{tr} A \cdot \det A \cdot \varepsilon + (\det A)^2. && (\mathbf{1\ pont})
\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\varepsilon^6 = \varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon^5 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^4 = \varepsilon \quad \text{és} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon = -1 \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\det\left(A^2 + A + I_2\right) &= 1 + \operatorname{tr} A + (\operatorname{tr} A)^2 - \det A + (\det A)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A && (\mathbf{1\ pont})\\
&= \frac{1}{4} + \operatorname{tr} A + (\operatorname{tr} A)^2 + \frac{1}{4} - \det A + (\det A)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2} && (\mathbf{1\ pont})\\
&= \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tr} A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \det A\right)^2 + \operatorname{tr} A \cdot \det A + \frac{1}{2}. && (\mathbf{1\ pont})
\end{aligned}$$

■

3. feladat (10 pont)**.** Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot az $x_{n+1} = x_n^2 - (2a-1) \cdot x_n + a^2$ rekurziós összefüggéssel értelmezzük, ahol $a \in \mathbb{R}, a > 1$ és $x_1 \in \mathbb{R}$.

a) Ha $x_1 = a + 1$, igazold, hogy az

$$y_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a + 1}\right)^{x_{n+1} - a}, \quad \forall\, n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

b) Ha $x_1 \in (a-1, a)$, igazold, hogy a

$$z_n = (x_n - a + 1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

általános tagú sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $x_{n+1} - x_n = (x_n - a)^2 \geq 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő.
Ha a sorozat felülről korlátos lenne, akkor a Weierstrass tétele alapján létezne $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ véges határérték. **(1 pont)**

Ekkor az l határértékre felírható, hogy

$$l = l^2 - (2a-1)\cdot l + a^2 \iff (l-a)^2 = 0 \iff l = a.$$

Mivel az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \geq x_1 = a+1 > a$, vagyis ellentmondáshoz jutottunk. Tehát a sorozat felülről nem korlátos, így $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. **(1 pont)**

A rekurziós összefüggés alapján

$$x_{n+1} - a = (x_n - a)^2 + x_n - a.$$

Így az $a_n = x_n - a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, általános tagú sorozatra érvényes az

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n \tag{2}$$

összefüggés, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(1 pont)**

Az y_n értelmezésében szereplő összeg átírható, mint

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a + 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k + 1}.$$

A (2) alapján $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1)$, ahonnan $\dfrac{1}{a_n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Így

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k\cdot a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k\cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right)^{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{-1}{a_{n+1}}\right)^{-a_{n+1}}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az előző alpont alapján az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő.
Tudjuk, hogy $x_1 < a$. Ha feltételezzük, hogy $x_n < a$, akkor

$$x_{n+1} - a = (x_n - a)^2 + x_n - a = (x_n - a)(x_n - a + 1) < 0 \iff x_{n+1} < a$$

Tehát az indukció elve alapján $x_n < a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(1 pont)**

Mivel a sorozat felülről korlátos és növekvő, ezért konvergens. Az előző alpont alapján kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Mivel $a_n = x_n - a$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ugyanakkor $x_n < a$, így $a_n < 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$. **(1 pont)**

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1+a_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right]^{n\cdot a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n}$, **(1 pont)**

ahol a $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$ határérétékre alkalmazható a Cesaro-Stolz tétele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\cdot a_n}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\cdot a_n}{-a_n^2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\lim_{n\to\infty} (a_n+1) = -1,$$

így $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Tekintjük az $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixokat. Jelölje $\operatorname{tr} M$ az M mátrix főátlóján lévő elemek összegét (az M mátrix nyomát).

a) Ha $B \neq O_3$, igazold, hogy az $f\colon \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr}(B\cdot X)$ függvény szürjektív!

b) Ha $\operatorname{tr}(A\cdot X) = 0$, minden $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, akkor mutasd ki, hogy $A = O_3$!

Cziprok András, Szatmárnémeti
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha $B \neq O_3$, akkor a $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ mátrixnak van legalább egy $b_{pm} \neq 0$ eleme.

A $B\cdot X$ mátrix nyoma $\operatorname{tr}(B\cdot X) = \sum\limits_{k=1}^{3}\left(\sum\limits_{l=1}^{3} b_{kl}\cdot x_{lk}\right)$. **(1 pont)**

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Igazolni kell, hogy létezik $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix úgy, hogy $\operatorname{tr}(B\cdot X) = \alpha$. **(1 pont)**

Tekintsük az $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ mátrixot úgy, hogy $x_{mp} = \frac{\alpha}{b_{pm}}$ és a többi eleme nulla, azaz $b_{ij} = 0$, ha $i \neq m$ vagy $j \neq p$. **(1 pont)**

Ezen X mátrix esetén

$$\operatorname{tr}(B\cdot X) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\cdot x_{lk}\right) = b_{pm}\cdot x_{mp} = b_{pm}\cdot\frac{\alpha}{b_{pm}} = \alpha,$$

tehát f szürjektív. **(1 pont)**

b) Legyenek $X_{ji} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ azon mátrixok, amelyek j-dik sorában és i-dik oszlopában 1-es szerepel, míg a többi eleme 0, minden $i, j = \overline{1,3}$ esetén. **(2 pont)**

Az $A\cdot X_{ji}$ mátrix minden eleme 0, kivéve az $a_{ij}\cdot x_{ji} = a_{ij}$ elemet, amely a főátlóban található. **(1 pont)**

Következik, hogy

$$\operatorname{tr}(A\cdot X_{ji}) = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3} a_{kl}\cdot x_{lk}\right) = a_{ij}\cdot x_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1,3}.$$ **(1 pont)**

A $\operatorname{tr}(A\cdot X) = 0$, minden $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, feltétel alapján $a_{ij} = 0$, minden $i, j = \overline{1,3}$ esetén, tehát $A = O_3$. **(1 pont)**

■