IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV

országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

X. osztály – II. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Oldd meg az egész számok halmazán a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet!

Baricz Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Mivel $615 + x^2$ természetes szám bármely x egész szám esetén, ezért 2^y is az kell legyen. Tehát y nem lehet negatív egész szám.

Az x^2-nek a 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1; 615 osztható 3-mal; valamint 2^y-nak a 3-mal osztási maradéka 1, ha y páros és 2, ha y páratlan. **(2 pont)**

Tehát y páros kell legyen, vagyis $y = 2k$ alakú. **(1 pont)**

Így az eredeti egyenlet

$$(2^k - x)(2^k + x) = 615$$

alakba írható. Észrevesszük, hogy a bal oldalon szereplő tényezők közül az egyik biztosan pozitív, emiatt a másik is az kell legyen. Mivel

$$(2^k - x) + (2^k + x) = 2^{k+1},$$

ezért a 615-öt fel kell bontani két olyan természetes szám szorzatára, amelyeknek az összege 2-nek hatványa.

(3 pont)

A 615 prímtényezőkre való felbontása $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$, emiatt a lehetséges felbontások a

$$615 = 1 \cdot 615 = 3 \cdot 205 = 5 \cdot 123 = 15 \cdot 41$$

és ezek szimmetrikusai. **(1 pont)**

Ezen felbontások közül csak az $5 \cdot 123$ esetén lesz a tényezők összege 2-nek hatványa. Tehát

$$2^{k+1} = 5 + 123 = 2^7,$$

ahonnan $k = 6$ és $y = 12$. **(1 pont)**

Ekkor $x^2 = 2^{12} - 615 = 4096 - 615 = 3481 = 59^2$. Összefoglalva a $615 + x^2 = 2^y$ egyenletnek két megoldása van az egész számok halmazán: $(x, y) \in \{(-59, 12), (59, 12)\}$. **(1 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

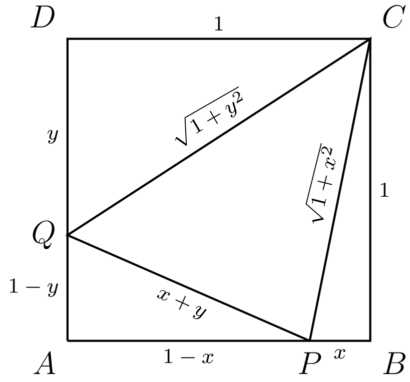
■

Megjegyzés. Az $x^2 + d = a \cdot b^y$ alakú diofantoszi egyenleteket Ramanujan-Nagell típusú egyenleteknek nevezik a szakirodalomban. Az $x^2 + 7 = 2^y$ egyenletnek csak $y \in \{3, 4, 5, 7, 15\}$ esetén van megoldása. Ezt az állítást Srinivasa Ramanujan fogalmazta meg 1913-ban és tőle függetlenül Wilhelm Ljunggren, majd 1948-ban igazolta Trygve Nagell.

A $615 + x^2 = 2^y$ egyenletet a $x^2 - 25 = 2^y - 640$ alakba is írhatjuk, ahonnan $(x + 5)(x - 5) = 2^6(2^{y-6} - 10)$ és könnyen igazolható, hogy csak az $x + 5 = 2^6$ és $x - 5 = 2^{y-6} - 12$ esetén kapunk megoldást.

2. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB és AD oldalán a P, illetve Q olyan pontok, amelyekre az APQ háromszög kerülete 2. Határozd meg a PCQ szög mértékét! *(***)*

Megoldás. Legyen $PB = x$, $DQ = y$. Következik, hogy $AP = 1 - x$, $AQ = 1 - y$, $CP = \sqrt{1+x^2}$, $CQ = \sqrt{1+y^2}$ (lásd a mellékelt ábrát).



Az APQ háromszög kerülete 2, ezért $PQ = 2 - AP - AQ = x + y$. (**2 pont**)
Az APQ háromszög derékszögű, ezért $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$, vagyis $(x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$, ahonnan

$$x + y = 1 - xy. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az előbbi összefüggés mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy $x^2 + 2xy + y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$, ahonnan $x^2y^2 = x^2 + y^2 + 4xy - 1$. A PCQ háromszögben

$$\cos\widehat{PCQ} = \frac{CP^2 + CQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PC \cdot CQ} = \frac{1 + x^2 + 1 + y^2 - (x+y)^2}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

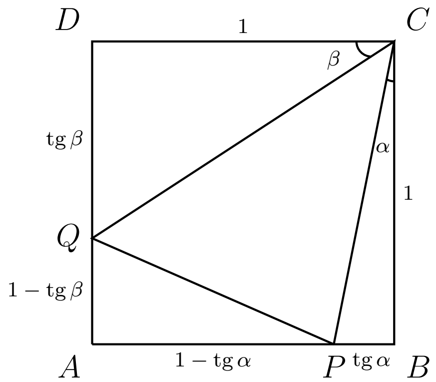
$$= \sqrt{\frac{(1-xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}} = \sqrt{\frac{1 - 2xy + x^2y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2xy + x^2 + y^2 + 4xy - 1}{1 + x^2 + y^2 + x^2 + y^2 + 4xy - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Innen következik, hogy a PCQ szög mértéke 45°. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Legyen a BCP szög mértéke α és a DCQ szög mértéke β. Következik, hogy $PB = \operatorname{tg}\alpha$, $DQ = \operatorname{tg}\beta$ (lásd a mellékelt ábrát). (**1 pont**)



Az APQ háromszög kerülete 2, vagyis $AP + PQ + QA = 2$, ahonnan $PQ = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$. (**2 pont**)
Az APQ háromszögben $PQ^2 = AP^2 + AQ^2$, következik, hogy

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 = (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\beta)^2$$

vagyis

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

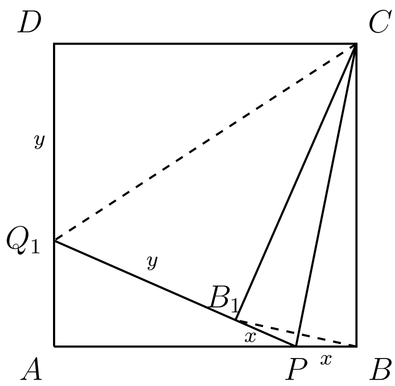
ahonnan

$$1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \qquad \textbf{(2 pont)}$$

tehát $\alpha + \beta = 45°$, ezért PCQ szög mértéke $45°$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

Harmadik megoldás. Legyen B_1 a B pontnak a CP egyenesre vonatkoztatott szimmetrikusa és Q_1 a PB_1 és az AD metszéspontja (lásd a mellékelt ábrát). (**2 pont**)



A szimmetria miatt a CB_1P háromszög kongruens a CBP háromszöggel, ezért $CB_1 = CB = 1$, $\widehat{CB_1P} = 90°$, és ha $PB = x$, akkor $PB_1 = x$. (**2 pont**)
Mivel $CD = 1 = CB_1$, $\widehat{CDQ_1} = 90° = \widehat{CB_1Q_1}$ és CQ_1 közös oldal, következik, hogy a CDQ_1 háromszög kongruens a CB_1Q_1 háromszöggel. (**1 pont**)
Tehát, ha $DQ_1 = y$, akkor $B_1Q_1 = y$. Ekkor $AQ_1 = 1 - y$, $AP = 1 - x$, tehát az APQ_1 háromszög kerülete $AP + PB_1 + B_1Q_1 + Q_1A = 1 - x + x + 1 - y + y = 2$. Ugyanakkor az APQ háromszög kerülete is 2. Tehát rögzített P esetén a Q_1 és Q pont egybeesik. (**3 pont**)
Mivel CQ a DCB_1, a CP pedig BCB_1 szög szögfelezője, következik, hogy

$$\widehat{PCQ} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{90°}{2} = 45°. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

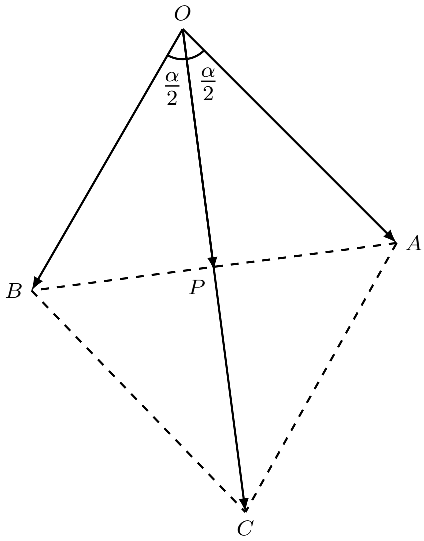
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy 202204 egy síkban fekvő egységvektor között mindig van 67402 olyan vektor, amelyek közül bármely kettőnek az összege legalább egységnyi hosszúságú!

Kovács Bálint, Székelyudvarhely

Megoldás. Tekinthetjük úgy, hogy a vektoroknak közös az O kezdőpontja és ekkor a végpontjaik az O középpontú egységsugarú körön helyezkednek el. (**1 pont**)
Tekintsük az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ egységvektorokat és az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ vektort (lásd a mellékelt ábrát).



Az OAB egyenlő szárú háromszögben P az AB szakasz felezőpontja. Ekkor

$$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |2 \cdot \overrightarrow{OP}| = 2 \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

ahol $\alpha \in [0, \pi]$ az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ szöge. (**2 pont**)
Az $|\overrightarrow{OC}| \geq 1$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $2\cos\frac{\alpha}{2} \geq 1$, ahonnan $\cos\frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$, azaz $\frac{\alpha}{2} \leq 60°$, tehát $\alpha \leq 120°$. (**2 pont**)
Az O középpontú egységsugarú kört felosztjuk három diszjunkt $120°$-os körívre. Mivel $202204 = 3 \cdot 67401 + 1$, ezért a vektorok között biztosan van 67402 olyan, amelyeknek a végpontjai ugyanazon a köríven helyezkednek el. Ezek közül bármely kettő összegének a hossza legalább 1. (**4 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Tudva, hogy x és y az

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásai, számítsd ki az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ kifejezés értékét és oldd meg az egyenletrendszert! *(***)*

Megoldás. A második egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk $-i$-vel, majd összeadjuk a két egyenlet megfelelő oldalait, és azt kapjuk, hogy

$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 1 + i\sqrt{3},$$

vagyis

$$(x + iy)^3 = 1 + i\sqrt{3}.$$ (**3 pont**)

Legyen $z = x + iy$. **(1 pont)**
A kiszámolandó kifejezés

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = |z|^3 = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Másrészt az $(x+iy)^3 = 1 + i\sqrt{3}$ egyenlet a következő alakba írható:

$$z^3 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

amelynek megoldásai

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right), \\ &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(6k+1)\pi}{9} + i\sin\frac{(6k+1)\pi}{9}\right), \quad k \in \{0,1,2\}. \end{aligned} \quad \textbf{(1 pont)}$$

De $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$, ezért a megoldások

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{9}, \\ y_1 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{7\pi}{9}, \\ y_2 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{7\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \sqrt[3]{2}\cos\frac{13\pi}{9}, \\ y_3 = \sqrt[3]{2}\sin\frac{13\pi}{9}. \end{cases} \quad \textbf{(2 pont)}$$

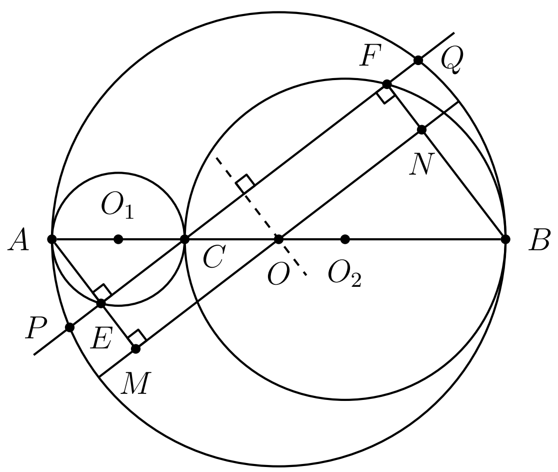
Hivatalból **(1 pont)**

■

5. feladat (10 pont)**.** Adott az AB szakasz és annak egy C belső pontja. Az AB-vel nem egybeeső, a C ponton áthaladó d egyenes az AC átmérőjű kört másodjára az E pontban, a BC átmérőjű kört másodjára az F pontban, valamint az AB átmérőjű kört a P és Q pontokban metszi. Igazold, hogy $PE = FQ$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen O az AB szakasz felezőpontja. Feltételezhetjük, hogy C az AO szakasz belsejében van. Meghúzzuk az O ponton áthaladó PQ-val párhuzamos egyenest, amely az AE egyenest az M pontban, és a BF egyenest az N pontban metszi. **(2 pont)**



Az $\widehat{AEC}$, illetve $\widehat{CFB}$ félkörbe írt kerületi szögek, ezért derékszögek, tehát az $MNFE$ négyszög egy téglalap. **(2 pont)**
Az AMO és BNO háromszögek kongruensek, mert $OA = OB$, $\widehat{OMA} = \widehat{ONB} = 90°$ és $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ (csúcsszögek). **(1 pont)**
Innen következik, hogy O az MN szakasz felezőpontja. **(1 pont)**
Tehát az O pontból a PQ húrra húzott merőleges a PQ szakaszt felezi, valamint az $MNFE$ téglalap szimmetriatengelye, így felezi az EF szakaszt is. **(2 pont)**
Tehát az EF és a PQ szakaszok felezőpontja közös, amiből következik, hogy $PE = FQ$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Megjegyzés. A fenti megoldás abban az esetben is érvényes, ha a P és a Q pontot felcseréljük. A bizonyítás tehát ábrafüggetlen.

6. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, tudva, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n \in \mathbb{N}^*$ és

$$a_{m\cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n].$$

Az (x, y) az x és y természetes számok legnagyobb közös osztóját és $[x, y]$ a legkisebb közös többszörösét jelöli.

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. A feltétel alapján

$$a_{m\cdot n} = (m, a_n) \cdot [a_m, n] = (n, a_m) \cdot [a_n, m] = a_{n\cdot m}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Innen következik, hogy

$$a^2_{m\cdot n} = (m, a_n) \cdot [m, a_n] \cdot (n, a_m) \cdot [n, a_m], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tudjuk, hogy ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, ezért az előbbi összefüggés a következő alakba írható:

$$a^2_{m\cdot n} = m \cdot n \cdot a_n \cdot a_m, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ha $m = 1$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a_n^2 = n \cdot a_n \cdot a_1$, és mivel $a_n \neq 0$, ezért

$$a_n = na_1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A feltételből és az előbbi összefüggésből következik, hogy

$$m \cdot n \cdot a_1 = (m, na_1) \cdot [ma_1, n], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Ha $m = 1$, akkor $na_1 = (1, na_1) \cdot [a_1, n] = 1 \cdot [a_1, n]$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. **(2 pont)**
Ugyanakkor $na_1 = (n, a_1) \cdot [n, a_1] = (n, a_1) \cdot na_1$, ahonnan $(n, a_1) = 1$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ami csak akkor lehetséges, ha $a_1 = 1$. **(2 pont)**
Innen következik, hogy $a_n = n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ez a sorozat teljesíti a feladatban megadott feltételt. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

Második megoldás. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ tetszőleges, ekkor

$$a_n = a_{n \cdot 1} = (n, a_1) \cdot [a_n, 1] = (n, a_1) \cdot a_n.$$

A feltétel szerint $a_n \neq 0$, ezért $(a_1, n) = 1$, bármilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. (**4 pont**)
Ha $n = a_1$, akkor innen következik, hogy $(a_1, a_1) = 1$, vagyis $a_1 = 1$. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$a_n = a_{1 \cdot n} = (1, a_n) \cdot [a_1, n] = 1 \cdot [n, 1] = n. \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Tehát $a_n = n$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, valamint ez a sorozat teljesíti a kitűzött feltételt, mert

$$a_{m \cdot n} = m \cdot n = (m, n) \cdot [m, n] = (m, a_n) \cdot [a_m, n]. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hivatalból (**1 pont**)

■