Országos Magyar Matematika Olimpia
Megyei szakasz, 2019. január 26.
IX. osztály

1. Feladat (10 pont)

Adott az $a=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám.

a) Számítsd ki az a szám egész részét.

b) Oldd meg az egész számok halmazán az $\left[\frac{x+1}{2}\right]=2019[a]$ egyenletet, ahol $[t]$ az t valós szám egész részét jelöli.

2. Feladat (10 pont)

Igazold, hogy

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ bármely a, b pozitív valós szám esetén;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{16}{a+b+c}$ bármely a, b, c pozitív valós szám esetén;

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ bármely a, b, c, d pozitív valós szám esetén!

3. Feladat (10 pont)

Adott az ABC háromszög és E, D és F pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

Igazold, hogy a) az A, F és D pontok kollineárisak;

b) $\frac{T_{FEA_\Delta}}{T_{FDC_\Delta}}=3$.

4. Feladat (10 pont)

Egy kör alakú 1 kg tömegű pizzát egyenes vágásokkal darabokra osztunk. Ha tudjuk, hogy két vágás átmegy a pizza közepén, a harmadik pedig nem, bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan darab, amelynek tömege legalább 166 g. *(Matlap)*

Minden feladat kötelező. Munkaidő 3 óra.