VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** a) Igazold, hogy $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

b) Mutasd ki, hogy $\log_{bc} \dfrac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \dfrac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \dfrac{c^2+4}{4} \geq \dfrac{3}{2}$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

c) Határozd meg az a, b, c egynél nagyobb természetes számokat úgy, hogy

$$\log_{bc} \frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4ca}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A logaritmusok tulajdonságai alapján elvégezhetjük a következő átalakításokat:

$$\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c \iff \log_a bc \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} bc \iff \frac{1}{\log_{bc} a} \geq \frac{1}{\log_{bc} \frac{a^2+4}{4}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, hogyha $\log_{bc} a \leq \log_{bc} \dfrac{a^2+4}{4}$. Mivel $b, c > 1$, így $bc > 1$, tehát a bc alapú logaritmus tulajdonságai alapján $a \leq \dfrac{a^2+4}{4}$, ahonnan $0 \leq (a-2)^2$, ami nyilvánvaló. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = 2$. **(1 pont)**

b) Az előző alpontban beláttuk, hogy $\log_{bc} a \leq \log_{bc} \dfrac{a^2+4}{4}$, ezt hasonlóan felírhatjuk a változókat permutálva, tehát a $\log_{ca} b \leq \log_{ca} \dfrac{b^2+4}{4}$ és a $\log_{ab} c \leq \log_{ab} \dfrac{c^2+4}{4}$ egyenlőtlenségek szintén teljesülnek.
Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\log_{bc} \frac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \frac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \frac{c^2+4}{4} \geq \log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c\,. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A jobb oldali kifejezésben közös alapra írjuk a logaritmusokat

$$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c = \frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b}\,, \quad \textbf{(1 pont)}$$

így a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül, ha igaz a következő:

$$\frac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \frac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \frac{\lg c}{\lg a + \lg b} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Jelölve $\lg a = x$, $\lg b = y$, $\lg c = z$ kapjuk, hogy $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$. (**1 pont**)

Jelöljük továbbá $x + y = s$, $x + z = p$, $y + z = q$, ahonnan $2(x + y + z) = s + p + q$, illetve $2x = p+s-q$, $2y = q+s-p$, $2z = p+q-s$. Ezek alapján az egyenlőtlenség a következőképp alakul

$$\frac{s+p-q}{2q} + \frac{q+s-p}{2p} + \frac{p+q-s}{2s} \geq \frac{3}{2} \iff \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + \left(\frac{p}{s} + \frac{s}{p}\right) + \left(\frac{s}{q} + \frac{q}{s}\right) \geq 6\,,$$

ami igaz minden $s, p, q > 0$ esetén. (**1 pont**)

Megjegyzés. $\dfrac{\lg a}{\lg b + \lg c} + \dfrac{\lg b}{\lg c + \lg a} + \dfrac{\lg c}{\lg a + \lg b} = \dfrac{3}{2} \iff \lg a = \lg b = \lg c\,.$ (**1 pont**)

c) A megadott egyenlőtlenséget átalakíthatjuk a következő képpen:

$$\log_{bc}\frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca}\frac{4ac}{b^2+4} + \log_{ab}\frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}$$

$$3 + \log_{bc}\frac{4}{a^2+4} + \log_{ca}\frac{4}{b^2+4} + \log_{ab}\frac{4}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}$$

$$3 - \log_{bc}\frac{a^2+4}{4} - \log_{ca}\frac{b^2+4}{4} - \log_{ab}\frac{c^2+4}{4} \geq \frac{3}{2}$$

$$\log_{bc}\frac{a^2+4}{4} + \log_{ca}\frac{b^2+4}{4} + \log_{ab}\frac{c^2+4}{4} \leq \frac{3}{2}$$ (**1 pont**)

Viszont az előző alpontban bizonyítottuk, hogy $\log_{bc}\dfrac{a^2+4}{4} + \log_{ca}\dfrac{b^2+4}{4} + \log_{ab}\dfrac{c^2+4}{4} \geq \dfrac{3}{2}$, tehát $\log_{bc}\dfrac{a^2+4}{4} + \log_{ca}\dfrac{b^2+4}{4} + \log_{ab}\dfrac{c^2+4}{4} = \dfrac{3}{2}$, ami csak akkor lehet, hogyha $a = b = c$, vagyis $M = \{(2, 2, 2)\}$. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$5(\sqrt[3]{5x-9} + 1) = (x-1)^3 + 9.$$

Mátyás Mátyás, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Jelöljük $y = \sqrt[3]{5x-9} + 1$, ekkor $y - 1 = \sqrt[3]{5x-9}$, ahonan $(y-1)^3 = 5x - 9$, így $x = \dfrac{(y-1)^3 + 9}{5}$.

Az eredeti egyenletbe helyettesítve pedig $(x-1)^3 + 9 = 5y$, ahonnan $\dfrac{(x-1)^3+9}{5} = y$. (**2 pont**)

Összeadva a két egyenlőséget a következőt kapjuk $x + \dfrac{(x-1)^3+9}{5} = \dfrac{(y-1)^3+9}{5} + y$. (**1 pont**)

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{(x-1)^3+9}{5} + x \quad$ függvény szigorúan növekvő, ezért injektív.

Ez alapján az $x + \dfrac{(x-1)^3+9}{5} = \dfrac{(y-1)^3+9}{5} + y$ tulajdonképpen $f(x) = f(y)$ és mivel f injektív, ezért $x = y$, vagyis elégséges megoldani az $\dfrac{(x-1)^3+9}{5} = x$ egyenletet, ami átalakítva a következő:

$$\frac{(x-1)^3+9}{5} = x \iff (x-1)^3+9 = 5x \iff x^3-3x^2-2x+8 = 0 \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Észrevesszük, hogy $x = 2$ megoldása az egyenletnek, így $x^3-3x^2-2x+8 = (x-2)(x^2-x-4) = 0$. **(2 pont)**

Megoldjuk az $x^2-x-4=0$ egyenletet: $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 17 > 0$, azaz $x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. **(1 pont)**

Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2, \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}\}$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Alakítsuk át az egyenletet: $\sqrt[3]{5x-9}+1 = \dfrac{(x-1)^3+9}{5}$ és legyen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{5x-9}+1$ függvény. **(2 pont)**

A köbgyök függvény tulajdonságai miatt tudjuk, hogy f szigorúan növekvő, tehát injektív. **(1 pont)**

Az f szürjektív is, mert $y = \sqrt[3]{5x-9}+1 \iff y-1 = \sqrt[3]{5x-9} \iff (y-1)^3 = 5x-9 \iff \dfrac{(y-1)^3+9}{5} = x$, tehát minden y valós számra létezik x valós úgy, hogy $f(x) = y$. **(1 pont)**

Ezek alapján az értelmezett függvény bijektív, tehát invertálható, és az inverze $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $f^{-1}(x) = \dfrac{(x-1)^3+9}{5}$. **(1 pont)**

Ekkor az egyenletünk tulajdonképpen $f(x) = f^{-1}(x)$, viszont egy függvény és az inverze szimmetrikus az első szögfelezőre, tehát csak $x = y$ koordinátájú pontokban metszhetik egymást, vagyis elégséges megoldanunk az $f(x) = x$, azaz a $\sqrt[3]{5x-9}+1 = x$ egyenletet. **(1 pont)**

$$\sqrt[3]{5x-9}+1 = x \iff \sqrt[3]{5x-9} = x-1 \iff 5x-9 = (x-1)^3 \iff (x-1)^3-5(x-1)+4 = 0$$

(1 pont)

Legyen $t = x-1$, ekkor

$$(x-1)^3-5(x-1)+4 = 0 \iff t^3-5t+4 = 0 \iff (t^3-t)-4(t-1) = 0 \iff (t-1)(t^2+t-4) = 0.$$

A $t = 1$ megoldás, ekkor a jelölés alapján $x = t+1 = 2$ megoldása az eredeti egyenletnek. **(1 pont)**

A $t^2+t-4 = 0$ egyenlet esetén pedig $\Delta = (-1)^2-4\cdot 1\cdot(-4) = 17 > 0$, azaz $t_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, a jelölés alapján $x_{1,2} = t_{1,2}+1 = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ megoldása az eredeti egyenletnek. **(1 pont)**

Tehát az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{2, \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}\}$. ■

3. feladat (10 pont)**.** a) Határozd meg az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ szürjektív függvényt, ha

$$f(x)\cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1,$$

minden $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ esetén!

b) Értelmezzük a $h_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-szer } f}$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg a h_{2024} függvényt!

Kovács Melinda, Beszterce
Gergely Anna, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az adott $f(x) \cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1$ egyenlőségből kiindulva kapjuk, hogy $f(f(x))(f(x)+1) = f(x)-1$. Mivel a függvény értékkészlete az $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ halmaz, ezért $f(x) \neq -1$, tehát eloszthatunk $(f(x)+1)$-el, így $f(f(x)) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$. **(1 pont)**

Jelöljük $y = f(x)$, ekkor $f(y) = \dfrac{y-1}{y+1}, \quad \forall y \in \mathrm{Im} f$. **(1 pont)**

Tehát a keresett függvény az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}, \quad f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. **(1 pont)**

Ellenőrizzük az f szürjektivitását: $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ esetén $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ úgy, hogy $f(x) = y \iff \dfrac{x-1}{x+1} = y$, ahonnan $x = \dfrac{1+y}{1-y}$, ez pedig létezik az $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ halmazon. **(1 pont)**

Ha $\dfrac{1+y}{1-y} = -1 \iff 1+y = -1+y \iff 1 = -1$, ami lehetetlen.

Ha $\dfrac{1+y}{1-y} = 0 \iff 1+y = 0 \iff y = -1$, ami lehetetlen. **(1 pont)**

b) Számítsuk ki:

$n = 1$ esetén $h_1(x) = f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$n = 2$ esetén $h_2(x) = (f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{x}$ **(1 pont)**

$n = 3$ esetén $h_3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x+1}{1-x}$ **(1 pont)**

$n = 4$ esetén $h_4(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x) = x$. **(1 pont)**

Ahonnan következik, hogy $n = 2024$ esetén $h_{2024}(x) = h_4(x) = x$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt kör egységnyi sugarú. A kör tetszőleges M pontja esetén igazold a következő egyenlőtlenségeket:

a) $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} \geq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Mike Ildikó, Kézdivásárhely
Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelölje z_A, z_B, z_C és z az A, B, C és M pontok affixumait.

A bal oldali szorzatot komplex számok segítségével $MA \cdot MB \cdot MC = |z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|$ alakban írhatjuk. **(1 pont)**

A moduluszok négyzeteire felírható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség:

$$\sqrt[3]{|z - z_A|^2 \cdot |z - z_B|^2 \cdot |z - z_C|^2} \leq \frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3}$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3}\right)^3. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Kiszámítjuk a $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = (z - z_A)\overline{(z - z_A)} + (z - z_B)\overline{(z - z_B)} + (z - z_C)\overline{(z - z_C)}$ kifejezést, ahonnan kapjuk, hogy

$$|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 3z \cdot \overline{z} - (z_A + z_B + z_C) \cdot \overline{z} - \overline{(z_A + z_B + z_C)} \cdot z + z_A\overline{z_A} + z_B\overline{z_B} + z_C\overline{z_C}.$$

(2 pont)

Felhasználjuk, hogy a háromszög egyenlő oldalú, a köré írt kör egységsugarú, innen felírható, hogy $(z_A + z_B + z_C = \overline{(z_A + z_B + z_C)} = 0$, illetve $z_A\overline{z_A} = |z_A|^2 = z_B\overline{z_B} = |z_B|^2 = z_C\overline{z_C} = |z_C|^2 = 1$.

Mivel az M pont is a körön van, ezért $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$. **(1 pont)**

Ezek alapján $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 6$, így az egyenlőtlenség a következő:

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2}{3}\right)^3$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq \left(\frac{6}{3}\right)^3$$

$$(|z - z_A| \cdot |z - z_B| \cdot |z - z_C|)^2 \leq 8$$

$$MA \cdot MB \cdot MC \leq \sqrt{8}$$

$$MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}\,. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Az $\frac{1}{MA}, \frac{1}{MB}, \frac{1}{MC}$ számokra felírjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{MA} \cdot \frac{1}{MB} \cdot \frac{1}{MC}}\,, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

illetve felhasználjuk az előző alpont eredményét, miszerint $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$, ahonnan

$$\frac{1}{MA \cdot MB \cdot MC} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezek alapján

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{MA \cdot MB \cdot MC}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■