XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

XI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Oldd meg a

$$\begin{cases} 27^{x+y} + 2 = 3^{y+z+1} \\ 27^{y+z} + 2 = 3^{z+x+1} \\ 27^{z+x} + 2 = 3^{x+y+1} \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bevezetve az $A = 3^{x+y}$, $B = 3^{y+z}$, $C = 3^{z+x}$ jelöléseket, az egyenletrendszer

$$\begin{cases} A^3 + 2 = 3B \\ B^3 + 2 = 3C \\ C^3 + 2 = 3A \end{cases}$$

alakba írható át. **(1 pont)**
Mivel az egyenletrendszer ciklikus (vagyis az $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ helyettesítéssel nem változik meg az egyenletrendszer), ezért feltehetjük, hogy az A, B, C számok közül az A a legnagyobb. **(1 pont)**
Ekkor $3B = A^3 + 2 \geq C^3 + 2 = 3A$, ahonnan $B \geq A$, tehát $A = B$. **(1 pont)**
A második és harmadik egyenlet alapján $3C = B^3 + 2 = A^3 + 2 \geq C^3 + 2 = 3A$, ahonnan $C \geq A$, tehát $A = C$. **(1 pont)**
Az egyenletrendszerből azt kaptuk, hogy

$$A = B = C \iff 3^{x+y} = 3^{y+z} = 3^{z+x} \iff 3^x = 3^y = 3^z \iff x = y = z. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletrendszer első egyenletébe adódik, hogy

$$3^{6x} + 2 = 3 \cdot 3^{2x} \iff (3^{2x} - 1)^2(3^{2x} + 2) = 0 \iff x = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $x = y = z = 0$. **(1 pont)**
■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bevezetve az $A = 3^{x+y}$, $B = 3^{y+z}$, $C = 3^{z+x}$ jelöléseket, az egyenletrendszer

$$\begin{cases} A^3 + 2 = 3B \\ B^3 + 2 = 3C \\ C^3 + 2 = 3A \end{cases}$$

alakba írható át. **(1 pont)**
Összeadva az egyenleteket kapjuk, hogy

$$A^3 + B^3 + C^3 + 6 = 3A + 3B + 3C \iff A^3 + B^3 + C^3 + 6 - 3A - 3B - 3C = 0,$$

amely egyenértékű átalakításokkal a következő alakba írható át:

$$\begin{aligned}
A^3+B^3+C^3+6-3A-3B-3C&=0,\\
(A^3-3A+2)+(B^3-3B+2)+(C^3-3C+2)&=0,\\
(A^3-A-2A+2)+(B^3-B-2B+2)+(C^3-C-2C+2)&=0,\\
(A-1)(A^2+A-2)+(B-1)(B^2+B-2)+(C-1)(C^2+C-2)&=0,\\
(A-1)(A-1)(A+2)+(B-1)(B-1)(B+2)+(C-1)(C-1)(C+2)&=0,\\
(A-1)^2(A+2)+(B-1)^2(B+2)+(C-1)^2(C+2)&=0.
\end{aligned}$$ **(3 pont)**

Az $A, B, C > 0$ miatt $A+2>0$, $B+2>0$, $C+2>0$, ezért $(A-1)^2(A+2)\geq 0$, $(B-1)^2(B+2)\geq 0$, $(C-1)^2(C+2)\geq 0$ és

$$\begin{aligned}
(A-1)^2(A+2)=0 &\iff (A-1)^2=0 \iff A=1,\\
(B-1)^2(B+2)=0 &\iff (B-1)^2=0 \iff B=1,\\
(C-1)^2(+2)=0 &\iff (C-1)^2=0 \iff C=1.
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Ezek alapján $(A-1)^2(A+2)+(B-1)^2(B+2)+(C-1)^2(C+2)=0$ akkor és csakis akkor, ha

$$A=B=C=1 \iff 3^{x+y}=3^{y+z}=3^{z+x}=1 \iff 3^x=3^y=3^z=1 \iff x=y=z=0.$$

(2 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $x=y=z=0$ az egyenletrendszer megoldása, így az egyetlen megoldása. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján minden $a>0$ szám esetén

$$\frac{a^3+1+1}{3}\geq\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1} \iff a^3+2\geq 3a,$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a=1$. **(2 pont)**

A fenti egyenlőtlenségbe rendre $a=3^{x+y}$, $a=3^{y+z}$, $a=3^{z+x}$ értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{cases}
27^{x+y}+2\geq 3^{x+y+1}\\
27^{y+z}+2\geq 3^{y+z+1}\\
27^{z+x}+2\geq 3^{z+x+1}
\end{cases}, \tag{1}$$

(2 pont)

amelyek megfelelő oldalait összeadva a

$$27^{x+y}+27^{y+z}+27^{z+x}+6\geq 3^{x+y+1}+3^{y+z+1}+3^{z+x+1}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. **(2 pont)**

Ebben az egyenlőtlenségben akkor és csakis akkor van egyenlőség, ha az (1) egyenlőtlenségekben mindenhol egyenlőség áll fenn, vagyis ha

$$3^{x+y}=3^{y+z}=3^{z+x}=1 \iff x+y=y+z=z+x=0 \iff x=y=z=0.$$ **(1 pont)**

Tehát, ha a megadott egyenletrendszer egyenleteit összeadjuk, akkor a kapott

$$27^{x+y}+27^{y+z}+27^{z+x}+6=3^{x+y+1}+3^{y+z+1}+3^{z+x+1}$$

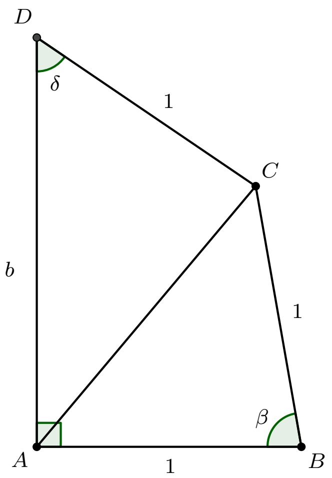
egyenletnek csak $x = y = z = 0$ a megoldása. (**1 pont**)
Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $x = y = z = 0$ az egyenletrendszernek is megoldása, így ez az egyetlen megoldása. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ konvex négyszögben az A csúcsnál található szög mértéke $90°$, valamint $AB = BC = CD = 1$. Igazold, hogy $1 < AC \leq \sqrt{2}$.

Molnár István, Gyula

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Bevezetjük a $\widehat{BAD} = \alpha = 90°$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCD} = \gamma$, $\widehat{CDA} = \delta$ és $AD = b$ jelöléseket.



Az $1 < AC$ egyenlőtlenséget reductio ad absurdum módszerével igazoljuk. Tegyük fel, hogy $AC \leq 1$. Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik, így

- az ABC háromszögben $AC \leq 1 = BC$ miatt $\beta \leq \widehat{BAC}$; (**1 pont**)
- az ADC háromszögben $AC \leq 1 = CD$ miatt $\delta \leq \widehat{DAC}$. (**1 pont**)

Így $\beta+\delta \leq \widehat{BAC}+\widehat{DAC} = \alpha = 90°$, továbbá a konvex négyszög szögeinek összege $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$, azaz $\beta + \delta + \gamma = 270°$, ahonnan $\gamma \geq 180°$, ami ellentmond a feltételnek, hogy az $ABCD$ négyszög konvex. Tehát

$$1 < AC.$$ (**2 pont**)

Az $AC \leq \sqrt{2}$ egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget: bármely konvex négyszögben a szemközti oldalak szorzatösszege legalább akkora, mint az átlók szorzata, tehát az $ABCD$ konvex négyszögben

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot DC + AD \cdot BC$$ (**1 pont**)

Felhasználva, hogy a BAD derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $BD = \sqrt{b^2+1}$, a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$AC \cdot \sqrt{b^2+1} \leq 1 \cdot 1 + b \cdot 1 \iff AC \leq \frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}}. \tag{2}$$

(**1 pont**)

Alkalmazva a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget, vagyis

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \iff x+y \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall\, x,y \geq 0, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

kapjuk, hogy

$$b+1 \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+1} \iff \frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}} \leq \sqrt{2}, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

ahonnan a (2) egyenlőtlenség alapján következik, hogy $AC \leq \sqrt{2}$. (**1 pont**)

■

Megjegyzés. Az $AC \leq \sqrt{2}$ egyenlőtlenség bizonyítható a négyszögre vonatkozó Euler-formulával: minden $ABCD$ konvex négyszög esetén, ha E és F az AC, illetve BD átlók felezőpontjai, akkor

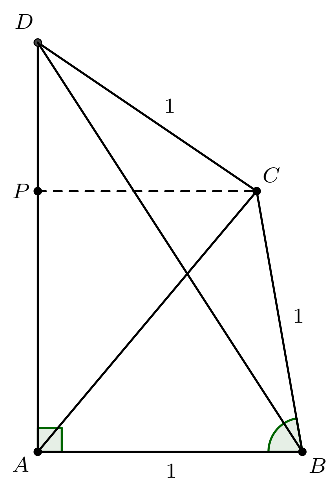
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Az ABD derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1 + b^2$. (**1 pont**)
Euler képletét alkalmazva a feladatbeli négyszögre kapjuk, hogy

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + b^2 = AC^2 + (1+b^2) + 4EF^2 \iff 2 - 4EF^2 = AC^2, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

ahonnan $AC^2 \leq 2$, vagyis $AC \leq \sqrt{2}$. (**1 pont**)

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Előbb igazoljuk, hogy $60^\circ < \widehat{ABC} \leq 90^\circ$. Ha P a C pont vetülete az AD egyenesre ($P \in AD$, $AD \perp PC$), akkor $PC \leq DC = 1$. Ha $PC = 1 = AB = BC$, akkor $PC \parallel AB$ miatt $ABCP$ négyszög négyzet, így $\widehat{ABC} = 90^\circ$. (**1 pont**)
Ha $PC < 1$, akkor $ABCP$ derékszögű trapéz, AB a nagyalapja, így $\widehat{ABC} < 90^\circ$. Összegezve $\widehat{ABC} \leq 90^\circ$. (**1 pont**)



Reductio ad absurdum módszerével igazoljuk, hogy $\widehat{ABC} > 60^\circ$. Tegyük fel, hogy $\widehat{ABC} \leq 60^\circ$. Ekkor az $ABCD$ négyszög konvexitása miatt egyrészt

$$\widehat{ABD} < \widehat{ABC} \leq 60^\circ,$$

másrészt az ABC egyenlő szárú háromszögben $\widehat{BAC} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} \geq 60^\circ$, így

$$AC \leq BC = 1 \qquad (3)$$

(nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik). **(1 pont)**
Mivel

$$\widehat{CAD} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \leq \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és a (3) alapján az ACD háromszögben $AC \leq DC = 1$, így felhasználva, hogy az ACD háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik, kapjuk, hogy

$$\widehat{ADB} < \widehat{ADC} \leq \widehat{CAD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \leq \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az eddigek alapján $\widehat{ABD} < 60^\circ$ és $\widehat{ADB} < 30^\circ$, így

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ADB} - \widehat{ABD} > 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

ami ellentmond a feltevésnek, hogy $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Tehát $\widehat{ABC} > 60^\circ$. **(1 pont)**
Végül az ABC háromszögben a koszinusz tétel alapján

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) \iff AC^2 = 2 - 2 \cdot \cos(\widehat{ABC}). \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel beláttuk, hogy $60^\circ < \widehat{ABC} \leq 90^\circ$ és a koszinusz függvény szigorúan csökkenő a $(60^\circ, 90^\circ]$ intervallumon, **(1 pont)**
ezért

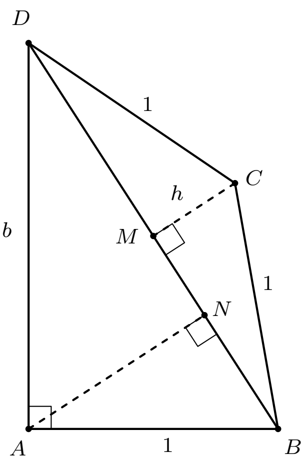
$$1 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 - 2 \cdot \cos 60^\circ < AC^2 = 2 - 2 \cdot \cos(\widehat{ABC}) \leq 2 - 2 \cdot \cos 90^\circ = 2,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$1 < AC^2 \leq 2 \iff 1 < AC \leq \sqrt{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát.



Legyen M, illetve N az C, illetve A pont vetülete a BD átlóra. Legyen $CM = h$, valamint $DA = b$. Az ABD háromszögben felírt Pitagorasz-tétel alapján

$$BD = \sqrt{b^2 + 1}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A CBD egyenlő szárú háromszögben a CM magasság egyben oldalfelező is, innen következik, hogy

$$BM = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+1}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az ABD háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$AN = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ugyanebben a háromszögben a befogó-tétel alapján

$$BN = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Két esetet különböztetünk meg. Ha $BN > BM$, akkor $MN = BN - BM = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+1}$. Ha $BM > BM$, akkor $MN = BM - BN = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+1} - \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$. Mindkét esetben

$$MN^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2+1} - \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\right)^2 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az MBC háromszögben felírt Pitagorasz-tételből következik, hogy

$$h^2 + \frac{1}{4}(b^2+1) = 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezt az összefüggést felhasználva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} AC^2 &= MN^2 + (AN+h)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+1}} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + h\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2bh}{\sqrt{b^2+1}}. \end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $b, h > 0$, ezért $AC^2 > 1$. Az $AC^2 \leq 2$ belátásához elegendő belátni, hogy

$$4b^2h^2 \leq b^2 + 1. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ez viszont igaz, mivel

$$b^2 + 1 - 4b^2h^2 = b^2 + 1 - 4b^2\left(1 - \frac{1}{4}(b^2+1)\right) = b^4 - 2b^2 + 1 = (b^2-1)^2 \geq 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont)**.** Egy tetraéder éleire felírtuk rendre az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokat. Lehetséges-e, hogy minden oldallapon a számok összege azonos legyen? Hasonlóan, ha számozzuk egy kocka éleit rendre az 1, 2, ..., 12 számokkal, lehetséges-e, hogy minden oldallapon a számok összege azonos legyen?

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Jelöljük T_1, T_2, T_3, illetve T_4-gyel a tetraéder oldallapjain megjelenő számok összegét. Mivel minden él pontosan két oldallapon szerepel, ezért

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 42. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

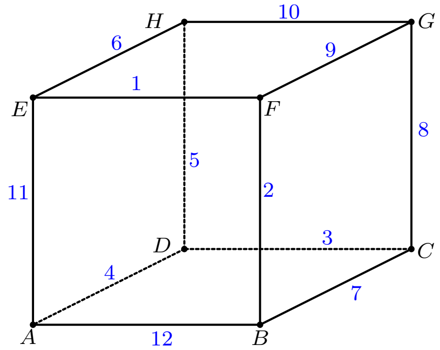
Ha lehetséges lenne, hogy minden oldallapon ugyanannyi a számok összege, akkor

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \frac{42}{4},$$

ami nem egész szám. Tehát nem lehetséges, hogy minden oldallapon ugyanannyi legyen a számok összege. (**2 pont**)
Vizsgáljuk meg most a kockát. Hasonló gondolatmenetet követve, ha a kocka oldallapjain levő számok összege rendre K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 és K_6, akkor

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 12) = 156,$$

tehát ha minden oldallapon ugyanannyi a számok összege, akkor $K_1 = \cdots = K_6 = 26$. (**2 pont**)
A következő ábrán látható a számok egy olyan elhelyezése az oldaléleken, amely megfelel a követelményeknek. ($AB \to 12$, $BC \to 7$, $CD \to 3$, $DA \to 4$, $EF \to 1$, $FG \to 9$, $GH \to 10$, $HE \to 6$, $AE \to 11$, $BF \to 2$, $CG \to 8$ és $DH \to 5$.) (**4 pont**)



■

4. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy minden $n \geq 5$ természetes szám esetén

$$(n+1)^{n-1} < n^n < (n-1)^{n+1}.$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Előbb igazoljuk az $(n+1)^{n-1} < n^n$, minden $n \geq 1$ esetén egyenlőtlenséget. Az igazolandó egyenlőtlenséget egyenértékű átalakításokkal a következő alakra hozzuk: minden $n \geq 1$ esetén

$$(n+1)^{n-1} < n^n \iff \frac{1}{n+1} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \iff \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} < \frac{n}{n+1}.$$ (**1 pont**)

Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ számok esetén fennáll az

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

(számtani és mértani közepek közötti) egyenlőtlenség. Ebben az egyenlőtlenségben akkor és csakis akkor van egyenlőség, ha $a_1 = \cdots = a_n$. (**1 pont**)

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget az $a_1 = \frac{1}{n+1}, a_2 = 1, \ldots, a_n = 1$ számokra, kapjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)\text{ db. 1-es}}} < \frac{\frac{1}{n+1} + \overbrace{1 + \cdots + 1}^{(n-1)\text{ db. 1-es}}}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1} + n - 1}{n} =$$

$$= \frac{1 + (n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1 + n^2 - 1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Végül a matematikai indukció módszerével igazoljuk az

$$n^n < (n-1)^{n+1}, \quad \forall\, n \geq 5, \tag{4}$$

egyenlőtlenséget. Az $n = 5$ esetben teljesül ez az egyenlőtlenség, mivel

$$5^5 < 4^6 \iff 25 \cdot 125 < 16 \cdot 16^2 \iff 25 \cdot 125 < 16 \cdot 256 \iff 25 \cdot 250 < 32 \cdot 256. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Feltételezzük, hogy egy rögzített $n = N \geq 5$ esetén teljesül a (4) egyenlőtlenség, azaz

$$N^N < (N-1)^{N+1}. \tag{5}$$

Igazoljuk, hogy $n = N + 1$ esetén is teljesül az egyenlőtlenség, vagyis

$$(N+1)^{N+1} < N^{N+2}. \tag{6}$$

(1 pont)

Ezt úgy igazoljuk, hogy belátjuk az

$$\frac{(N+1)^{N+1}}{N^N} < \frac{N^{N+2}}{(N-1)^{N+1}} \tag{7}$$

egyenlőtlenséget, majd az (5) és (7) egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeszorozva adódik a (6) egyenlőtlenség. **(2 pont)**

A (7) egyenlőtlenség igaz, mert

$$\frac{(N+1)^{N+1}}{N^N} < \frac{N^{N+2}}{(N-1)^{N+1}} \iff (N+1)^{N+1}(N-1)^{N+1} < N^{2N+2} \iff (N^2-1)^{N+1} < (N^2)^{N+1},$$

minden $N \geq 2$ esetén. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A megoldás során a Bernoulli-egyenlőtlenséget fogjuk használni:

$$(1+x)^r \geq 1 + rx, \quad \forall\, x \geq -1,\ \forall\, r \in \mathbb{Z}_{>0}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az $(n+1)^{n-1} < n^n$ egyenlőtlenség átírható

$$(n+1)^{n-1} < n^n \iff \frac{1}{n} < \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} \iff \frac{1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \iff \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$$

alakba. **(1 pont)**

Így $x = -\frac{1}{n+1}$ és $r = n-1$ számokra a Bernoulli-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1} > \frac{1}{n},$$

mivel $2n > n+1$, ha $n \geq 5$. (**2 pont**)
Végül az $n^n < (n-1)^{n+1}$, minden $n \geq 5$ esetén egyenlőtlenség átírható

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \leq n-1, \quad \forall\, n \geq 5,$$

alakba. Belátjuk, hogy az $a_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$, $n \geq 2$ számsorozat szigorúan csökkenő, vagyis minden $n \geq 2$ esetén

$$a_n > a_{n+1} \iff \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n} \iff \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

(**2 pont**)
Valóban, a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n^2-1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1}, \quad \forall\, n \geq 2,$$ (**1 pont**)

és

$$\frac{n^2+n-1}{n^2-1} > \frac{n+1}{n}, \quad \forall\, n \geq 2,$$

mert $n(n^2+n-1) = n^3+n^2-n > n^3+n^2-n-1 = (n+1)(n^2-1)$, minden $n \geq 2$ esetén. (**1 pont**)
Mivel az $(a_n)_{n\geq 2}$ számsorozat szigorúan csökkenő, ezért minden $n \geq 2$ esetén $a_n < a_1 = \left(\frac{2}{2-1}\right)^2 = 4$, így

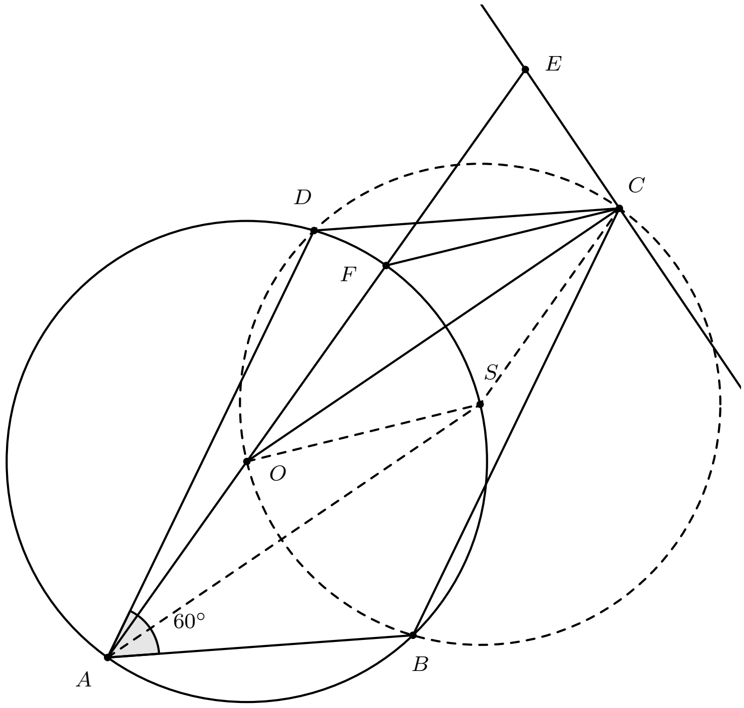
$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = a_n < 4 \leq n-1, \quad \forall\, n \geq 5.$$ (**1 pont**)

■

5. feladat (10 pont)**.** Az $ABCD$ paralelogrammában az A szög mértéke $60°$ és O az ABD háromszög köré írt körének középpontja. Jelölje E az AO egyenes és a BCD szög külső szögfelezőjének metszéspontját. Igazold, hogy $OE = 2AO$.

dr. Ripcó Sipos Elvira, Zenta

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Legyen az F pont az AO egyenes és az ABD háromszög köré írt körének metszéspontja, $AO = OF = r$, ahol r a kör sugara. Elég igazolni, hogy az F pont felezi az OE szakaszt.
Mivel $\widehat{DCB} + \widehat{BOD} = 60° + 2 \cdot \widehat{BAD} = 60° + 120° = 180°$, tehát ebből következik, hogy $CBOD$ húrnégyszög. (**2 pont**)
Jelölje S a $CBOD$ húrnégyszög köré írt körének középpontját. Mivel $OD = OB = r$, ezért a $CBOD$ húrnégyszög köré írt kör DO és OB körívei egyenlő hosszúak, ahonnan következik, hogy a CO félegyenes a $\widehat{BCD}$ szögfelezője. (**2 pont**)

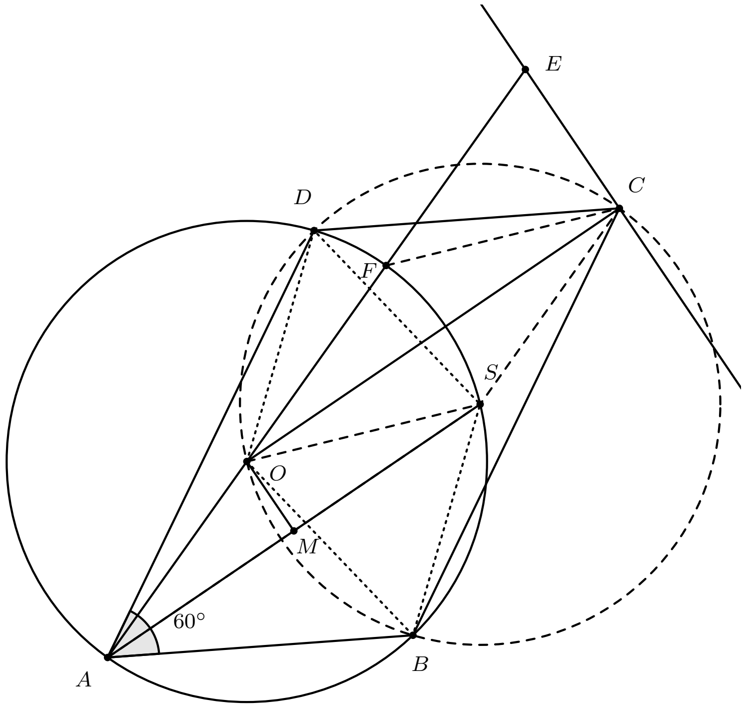


Előbb azt az esetet tárgyaljuk, mikor $C \neq E$. Ekkor $\widehat{OCE} = 90°$. Az $ABCD$ paralelogrammában az átlók metszéspontja a paralelogramma szimmetria középpontja, BDC és DBA háromszögek szimmetrikusak a középpontra nézve, ezért az S és O pontok is szimmetrikusak a szimmetria-középpontra nézve. (**1 pont**)
Tehát az AC, BD, OS szakaszok felezőpontjai egybeesnek, ahonnan következik, hogy $ASCO$ is paralelogramma, ezért $SC = OA = OF$ és $SC \parallel AO$. (**1 pont**)
Ekkor $OSCF$ négyszög paralelogramma, amelyben $FO = OS = r$, így $OSCF$ rombusz és $FC = OF = r$. (**1 pont**)
Az OCE derékszögű háromszögben ($\widehat{OCE} = 90°$) F az OE átfogó azon pontja, amelyre $FC = OF$. Tehát az OFC egyenlő szárú háromszögben $\widehat{FOC} = \widehat{OCF}$, ahonnan következik, hogy

$$\widehat{FEC} = 90° - \widehat{FOC} = 90° - \widehat{OCF} = \widehat{FCE}.$$

Tehát az EFC háromszög is egyenlő szárú, $EF = FC$, de $FC = OF$, tehát $EF = FO$, azaz F az OE szakasz felezőpontja. (**1 pont**)
Abban az esetben, ha $C = E$, akkor az A, O, C pontok kollineárisak. Ekkor az AC átló felezi az $ABCD$ paralelogramma C szögét, ezért $ABCD$ rombusz, amelyben $\widehat{BAD} = 60°$. Tehát BAD háromszög egyenlő oldalú és O középpont egybeesik a súlyponttal. Hasonlóan S is súlypont a BCD egyenlő oldalú háromszögben, ezért $AO = OS = SC$, tehát $EO = CO = 2AO$. (**1 pont**)
■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Legyen S a CDB háromszög köréírt körének középpontja. Mivel a CDB és ABD háromszögek kongruensek, ezért az ABD és CDB háromszögek köré írt körök sugara megegyezik, amelyet r-rel fogunk jelölni.



Előbb megmutatjuk, hogy OC a $\widehat{BCD}$ szögfelezője. A paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlók felezőpontjára nézve, ezért OC a $\widehat{BCD}$ szögfelezője akkor és csakis akkor, ha AS a $\widehat{BAD}$ szögfelezője. (**1 pont**)

A BAD kerületi és BOD középponti szög ugyanazt a BD körívet fogja közre, így

$$\widehat{BOD} = 2\widehat{BAD} = 120°.$$

A $DOBS$ négyszög rombusz, mivel $DO = OB = BS = DS = r$, tehát az OS átló felezi a DOB szöget, így $\widehat{DOS} = \frac{\widehat{DOB}}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$. (**1 pont**)

A DOS egyenlő szárú háromszögben ($OD = DS = r$) $\widehat{DOS} = 60°$, tehát DOS egyenlő oldalú háromszög és $OS = r$. (**1 pont**)

Az S pont rajta van az ABD háromszög köré írt körön és felezi a $\widehat{BAD}$ által közrezárt BD körívet, ezért $\widehat{BAS} = \widehat{SAD}$, vagyis AS a $\widehat{BAD}$ szögfelezője. (**1 pont**)

Előbb feltételezzük, hogy $C \neq E$, azaz az A, O, S, C pontok nem kollineárisak. Legyen M az AS szakasz felezőpontja. Az AOS egyenlő szárú háromszögben ($OA = OS = r$) az OM oldalfelező egyben magasság is, $\widehat{OMA} = 90°$.

Mivel $DOBS$ és $ABCD$ paralelogrammák, ezért az AC, BD, OS szakaszok felezőpontjai egybeesnek, így $ASCO$ is paralelogramma, tehát $OC \parallel AS$ és $OC = AS = 2AM$. (**2 pont**)

Az $OC \parallel AS$ párhuzamosság miatt az $\widehat{OAM} = \widehat{EOC}$, ahonnan következik, hogy az OAM és EOC derékszögű háromszögek hasonlóak, tehát

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AM}{OC} = \frac{AM}{AS} = \frac{1}{2},$$

így $OE = 2AO$. (**2 pont**)

Abban az esetben, ha $C = E$, akkor az A, O, S, C pontok kollineárisak és $AO = OS = SC = r$, tehát $OE = OC = 2AO$. (**1 pont**)

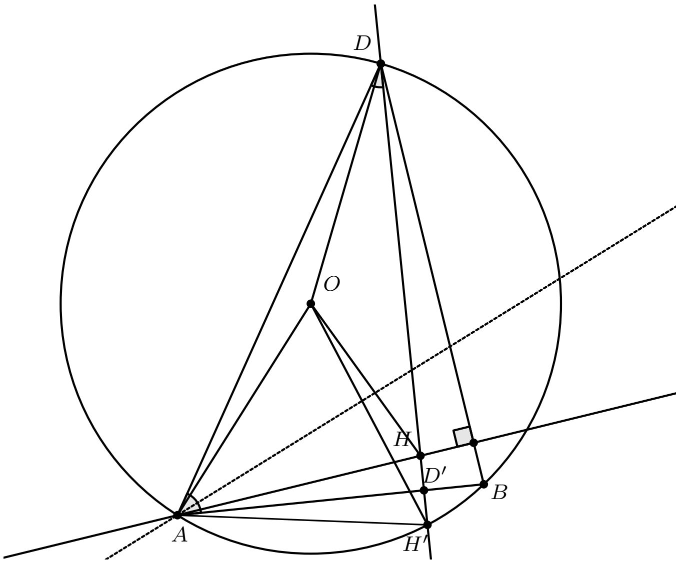
■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Jelöljük H-val az ABD háromszög magasságpontját. Ekkor a BAD szög belső szögfelezője felezi az OAH szöget is, mivel

$$\widehat{HAB} = 90^\circ - \widehat{DBA}$$

és az AOD egyenlő szárú háromszögben ($AO = OD$), így

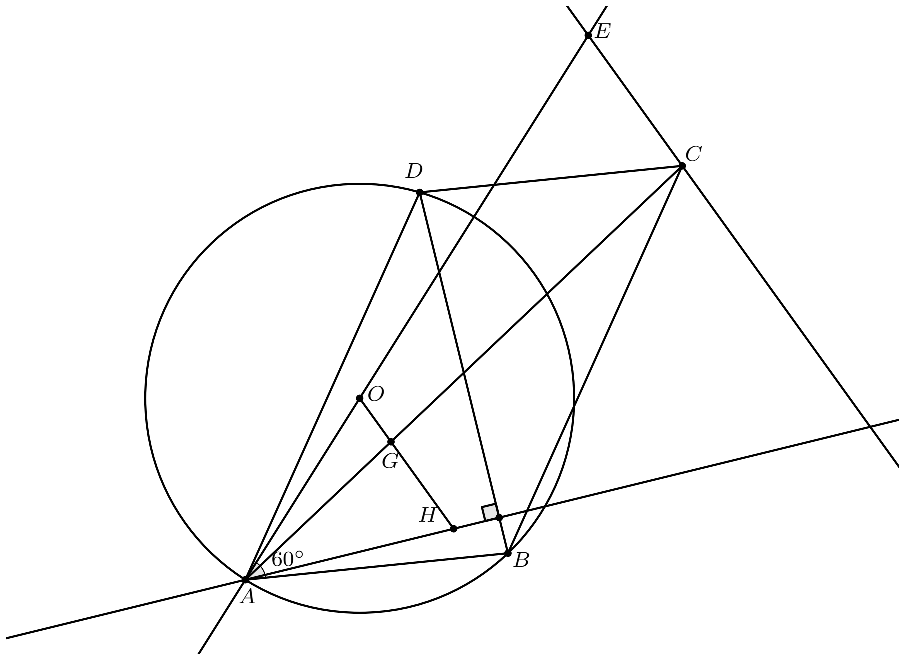
$$\widehat{OAD} = \frac{180^\circ - \widehat{DOA}}{2} = 90^\circ - \widehat{DBA}.$$ **(1 pont)**



Legyen H' a H pont AB egyenes szerinti szimmetrikusa, $D' \in AB$ a ABD háromszög D csúcsából húzott magasság talppontja. Mivel DH merőleges AB-re, ezért a D, H, H' pontok kollineárisak. Ekkor a szimmetria miatt

$$\widehat{AH'D'} = \widehat{AHD'} = 90^\circ - \widehat{HAB} = \widehat{ABD},$$

tehát az $ADBH'$ húrnégyszög és H' az ADB háromszög köré írt körön van. **(2 pont)**
A $\widehat{BAD} = 60^\circ$, ezért $\widehat{AOH'} = 2 \cdot \widehat{ADH'} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ az AOH' egyenlő szárú háromszögben.
Tehát az AOH' háromszög egyenlő oldalú és $AH = AH' = AO$. **(1 pont)**
Azt kaptuk, hogy az OAH egyenlő szárú háromszögben a BAD szög belső szögfelezője egyben magasság is, így az BAD szög belső szögfelezője merőleges az OH egyenesre, tehát OH párhuzamos a BAD szög külső szögfelezőjével. **(1 pont)**
Az ABD és CDB háromszögek szimmetrikusak a BD szakasz felezőpontjára nézve, ezért az $ABCD$ paralelogramma A és C szögeinek szögfelezői párhuzamosak, ahonnan adódik, hogy OH párhuzamos a BCD szög külső szögfelezőjével. **(1 pont)**



Legyen G az ABD háromszög súlypontja, ekkor $3AG = AC$. Mivel A, O, E, illetve A, G, C pontok kollineárisak, $HO = GO \parallel EC$, ezért

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AG}{GC} = \frac{1}{2},$$

ahonnan $OE = 2AO$. **(3 pont)**

■

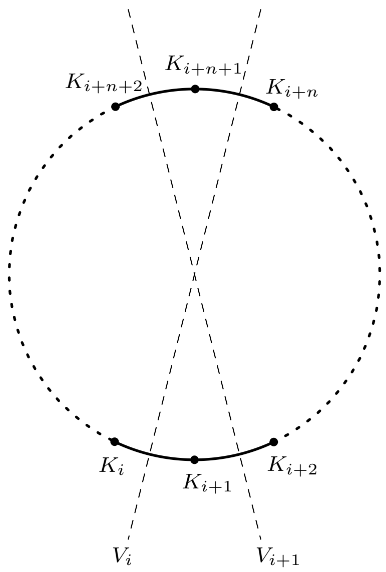
6. feladat (10 pont)**.** Kinga és Orsi találtak egy rubin- és zafírszemekből álló nyakláncot. Mindkét drágakőből páros számú szem található a nyakláncon. A lányok szeretnék egymás között elosztani a nyakláncot úgy, hogy mindkettejükhöz azonos számú rubin-, illetve zafírszem kerüljön, ugyanakkor minél kevesebb vágást ejtsenek rajta (a nyaklánc zárt, egy vágás mindig két ékkő között történik és csak egy helyen vágja át a láncot). A lányok azt állítják, hogy két vágás mindig elegendő, akármilyen sorrendben is helyezkednek el az ékkövek, és akármennyi darab található a bizonyos fajtákból. Bizonyítsd be, hogy a lányoknak igaza van!

dr. Ágó Krisztina, Zenta

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legalább két vágásra van szükség ahhoz, hogy a nyakláncot két vagy több darabra vágjuk.
Legyen a nyakláncon található rubinszemek száma $2r \geq 2$ és a zafírszemek száma pedig $2z \geq 2$. Elosztás után fejenként r darab rubinszem és z darab zafírszem kell jusson, vagyis összesen $n = z + r$ darab drágakőszem. **(1 pont)**

A nyaklánc mentén egy adott irányban elindulva a drágakőszemeket a $K_1, \ldots, K_{2n}$ betűkkel jelöljük meg. Az egyszerűbb leírás kedvéért bevezetjük a $K_{2n+i} = K_i$ jelölést, minden $i \geq 1$ esetén (azaz $K_{2n+1} = K_1, K_{2n+2} = K_2, \ldots$) .



Ha két vágással szeretnénk két darabra vágni a nyakláncot úgy, hogy mindkettőjüknek n darab drágakőszem jusson, akkor közvetlenül valamelyik K_{i+1} drágakőszem előtt és K_{i+n} drágakőszem után kell elvágni a nyakláncot. Ekkor Kingának a $K_{i+1}, \ldots, K_{i+n}$ drágakövek jutnak, míg Orsinak pedig a $K_{i+n+1}, \ldots, K_{i+2n} = K_i$ drágakövek. Ezeket a fajta vágásokat V_i, $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ vágásoknak fogjuk nevezni.

Jelölje minden $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ esetén r_i, illetve z_i a $K_{i+1}, \ldots, K_{i+n}$ kövek között előforduló rubin- és zafírszemek számát. Egyrészt a V_i vágás során Kingának r_i rubin- és z_i zafírszem jut, összesen n darab drágakőszem, azaz

$$r_i + z_i = n, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{8}$$

(1 pont)

Másrészt a V_i vágás során Kingának r_i, míg Orsinak r_{i+n} darab rubinszem jut, kettejüknek összesen r darab, azaz

$$r_i + r_{i+n} = 2r, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{9}$$

(1 pont)

Ha $r_i = r$, akkor a (8) alapján $z_i = n - r = (r + z) - r = z$, tehát ha a V_i vágással az egyikük r darab rubinszemet kap, akkor mindkettőjük ugyanannyi rubin- és zafírszemet fog kapni. **(1 pont)**

A célunk olyan $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ index találása, amelyre $r_i = r$. Megvizsgáljuk, hogy hogyan változhat az r_i az $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ függvényében.

Ha a K_{i+1} és K_{i+n+1} drágakövek azonos típusúak (mindkettő rubin vagy mindkettő zafír), akkor $r_{i+1} = r_i$. Ha a K_{i+1} drágakő rubin és K_{i+n+1} zafír, akkor $r_{i+1} = r_i - 1$. Ha a K_{i+1} drágakő zafír és K_{i+n+1} rubin, akkor $r_{i+1} = r_i + 1$. Tehát a r_{i+1} az r_i-től -1, 0, 1-ben térhet el. **(2 pont)**

A (9) egyenlőségeket összeadva minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} r_i + r_{i+n} = 2nr \iff \sum_{i=1}^{2n} r_i = 2nr. \tag{10}$$

(1 pont)

Feltételezzük, hogy minden $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ esetén $r_i \neq r$. Ekkor három eset lehetséges.

I. Ha minden $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ esetén $r_i < r$, akkor $r_1 + \cdots + r_{2n} < 2nr$, amely ellentmond a (10) egyenlőségnek.

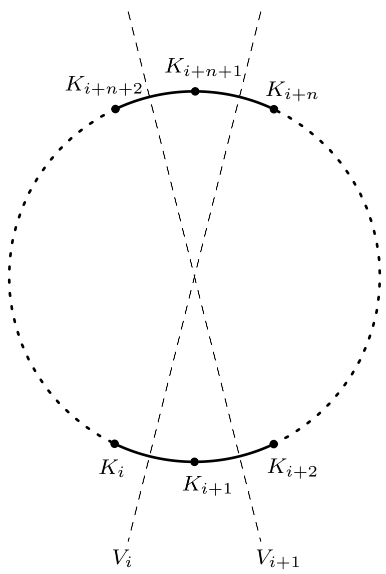
II. Ha minden $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ esetén $r_i > r$, akkor $r_1 + \cdots + r_{2n} > 2nr$, amely ellentmond a (10) egyenlőségnek. **(1 pont)**

III. Ha léteznek $1 \leq i < j \leq 2n$ úgy, hogy $r_i < r < r_j$ vagy $r_j < r < r_i$, akkor az létezik $i < k < j$ úgy, hogy $r_k = r$, mivel az $i \mapsto r_i$ függvény egymásutáni értékei legfeljebb eggyel térnek el egymástól, illetve felvesz r-nél kisebb és nagyobb értékeket. Így szintén ellentmondáshoz jutunk.

Tehát mindenképpen kell létezzen $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ úgy, hogy $r_i = r$, és ekkor a V_i vágás során Kingának és Orsinak ugyannanyi rubin-, illetve zafírszem jut. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legalább két vágásra van szükség ahhoz, hogy a nyakláncot két vagy több darabra vágjuk.
Legyen a nyakláncon található rubinszemek száma $2r \geq 2$ és a zafírszemek száma pedig $2z \geq 2$. Elosztás után fejenként r darab rubinszem és z darab zafírszem kell jusson, vagyis összesen $n = z + r$ darab drágakőszem. **(1 pont)**
A nyaklánc mentén egy adott irányban elindulva a drágakőszemeket a $K_1, \ldots, K_{2n}$ betűkkel jelöljük meg. Az egyszerűbb leírás kedvéért bevezetjük a $K_{2n+i} = K_i$ jelölést, minden $i \geq 1$ esetén (azaz $K_{2n+1} = K_1, K_{2n+2} = K_2, \ldots$) .



Ha két vágással szeretnénk két darabra vágni a nyakláncot úgy, hogy mindkettőjüknek n darab drágakőszem jusson, akkor közvetlenül valamelyik K_{i+1} drágakőszem előtt és K_{i+n} drágakőszem után kell elvágni a nyakláncot. Ekkor Kingának a $K_{i+1}, \ldots, K_{i+n}$ drágakövek jutnak, míg Orsinak pedig a $K_{i+n+1}, \ldots, K_{i+2n} = K_i$ drágakövek. Ezeket a fajta vágásokat V_i, $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ vágásoknak fogjuk nevezni.
Jelölje minden $i = 1, \ldots, 2n$ esetén r_i, illetve z_i a $K_{i+1}, \ldots, K_{i+n}$ kövek között előforduló rubin- és zafírszemek számát. Egyrészt a V_i vágás során Kingának r_i rubin- és z_i zafírszem jut, összesen n darab drágakőszem, azaz

$$r_i + z_i = n, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{11}$$

(1 pont)

Másrészt a V_i vágás során Kingának r_i, míg Orsinak r_{i+n} daraab rubinszem jut, kettejüknek összesen r darab, azaz

$$r_i + r_{i+n} = 2r, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{12}$$

(1 pont)

Ha $r_i = r$, akkor a (11) alapján $z_i = n - r = (r + z) - r = z$, tehát a V_i vágással az egyikük r darab rubint kap, akkor mindkettőjük ugyanannyi rubin- és zafírszemet fog kapni. **(1 pont)**

A célunk olyan $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ index találása, amelyre $r_i = r$.

Bevezetjük a

$$f\colon \{1, \ldots, 2n\} \to \mathbb{Z}, \quad f(i) = r_i - r_{i+n}$$

függvényt, amely azt méri, hogy a V_i vágás esetén mennyivel kap több rubint Kinga, mint Orsi. Igazolni fogjuk, hogy létezik $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ úgy, hogy $f(i) = 0$, azaz $r_i = r$. Ekkor a nyakláncon két vágást megejtő V_i-nek nevezett vágást végrehajtva mindkettőjüknek ugyanannyi rubin- és zafírszem jut.

Az f függvény csak páros értékeket vesz fel, mivel a függvény értelmezése és a (12) összefüggés alapján

$$f(i) = r_i - r_{i+n} = r_i - (2r - r_i) = 2r_i - 2r = 2(r_i - r), \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, 2n\}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Megvizsgáljuk, hogy az f függvény hogyan változik. Ha K_{i+1} és K_{i+n+1} ugyanolyan fajta drágakövek (mindkettő rubin vagy mindkettő zafír), akkor $r_{i+1} = r_i$, így

$$f(i + 1) = f(i).$$

Ha K_{i+1} rubinszem és K_{i+n+1} zafírszem, akkor $r_{i+1} = r_i - 1$, így

$$f(i + 1) = 2(r_{i+1} - r) = 2(r_i - 1 - r) = 2(r_i - r) - 2 = f(i) - 2.$$

Ha K_{i+1} zafírszem és K_{i+n+1} rubinszem, akkor $r_{i+1} = r_i + 1$, így

$$f(i + 1) = 2(r_{i+1} - r) = 2(r_i + 1 - r) = 2(r_i - r) + 2 = f(i) + 2.$$

Tehát páros számokat felvevő f függvény egymásutáni értékei -2, 0, 2-vel változhatnak meg.**(2 pont)**

Az f függvényre teljesül, hogy

$$f(i + n) = r_{i+n} - r_{i+2n} = r_{i+n} - r_i = -f(i), \quad \forall\, i = 1, \ldots, 2n. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $f(1) = 0$, akkor kész vagyunk. Ha $f(1) \neq 0$, akkor $f(1) = -f(n + 1)$ miatt az $f(1)$ és $f(n + 1)$ értékek közül az egyik pozitív és a másik negatív. Figyelembe véve, hogy az f függvénynek van pozitív és negatív értéke, a függvény páros értékeket vesz fel és a függvény egymásutáni értékei -2, 0, 2-vel térhetnek el egymástól, ezért kell létezzen $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ úgy, hogy $f(i) = 0$. **(1 pont)**

■

Megjegyzés. Ez a nyaklánc-probléma egy sajátos esete (Noga Alon, *Splitting necklaces*). Ha k személy szeretne osztozkódni egy nyakláncon, amelyen t fajta drágakő található, mindegyik fajtából $k \cdot a_i$ darab, $i = 1, \ldots, t$, akkor legfeljebb $(k - 1) \cdot t$ vágást kell ejteni a nyakláncon, hogy a k személy közül mindenki minden fajta drágakőből ugyanannyi darabot kapjon (vagyis az $i = 1, \ldots, t$ fajta drágakőből a_i darabot kapjon). Könnyen látható, hogy legalább ennyi vágásra szükség van, ha a nyakláncon az ugyanolyan fajta drágakövek egymásután következnek.