ANDRÁS SZILÁRD BENCZE MIHÁLY
CSAPÓ HAJNALKA DÁVID GÉZA
KOVÁCS BÉLA MÉSZÁR JULIANNA
NAGY ÖRS SZILÁGYI JUDIT

XXIII. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Arany János Elméleti Líceum
Nagyszalonta

Feladatok és megoldások

PROLOG KIADÓ
NAGYVÁRAD, 2013

Műszaki szerkesztés: András Szilárd,
Csapó Hajnalka,
Nagy Örs

A kéziratot ellenőrizte és helyenként kiegészítette:
dr. Lukács Andor, Zsombori Gabriella, ifj. Kolumbán József

A feladatokat összeállító bizottság tagjai:
dr. András Szilárd, Babeş-Bolyai Tudományegyetem
dr. Bencze Mihály, Áprily Lajos Főgimnázium
Csapó Hajnalka, Márton Áron Elméleti Líceum
Dávid Géza, Tamási Áron Gimnázium
Kovács Béla, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum
Mészár Julianna, Arany János Elméleti Líceum
Nagy Örs, Elektromaros Technológiai Líceum
Szilágyi Judit, Báthory István Elméleti Líceum

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Erdélyi Magyar Matematikaverseny. - Oradea : Prolog, 2013
ISBN 978-973-7746-68-9

51

Tartalomjegyzék

„A matematika érdekes és szép is: az emberi gondolat izgalmas és szép kalandja. A matematika szépsége nem valami járulékos dolog, hanem a matematikának a lényegéhez tartozik. A valódi igazság mindig szép, és a valódi szépség mindig igaz”.

Rényi Alfréd

Előszó

A 2013-as évben, január 31. és február 3. között, Nagyszalontán kerül megrendezésre a XXIII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny, amely országosan és nemzetközi szinten is elismert, rangos verseny. Az Arany János Elméleti Líceumot érte az a megtiszteltetés, hogy házigazdája lehet ennek a versenynek, amely 200 diákot, 40 kísérő tanárt, 10 versenybizottsági tagot (nagyrészt egyetemi tanárokat illetve neves matematikusokat) és egyetemistákat lát vendégül. Az elnöki címet dr. Robu Judit előadótanár, a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karának dékánhelyettese tölti be. A verseny ügyvezető elnöke Szabó Csilla, miniszteri tanácsos. Ez a verseny része annak a tehetséggondozó mozgalomnak, melyet Dr. Bencze Mihály brassói matematikatanár kezdeményezett 24 évvel ezelőtt, és amely egyben a 2013. március 14-18. időszakban Győrben sorra kerülő XXII. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny erdélyi válogató szakasza is. Néhány éve vándorversennyé vált ez a Erdélyt átfogó, magyar matematika-vetélkedő. Nem újdonság városunkban ezen a versenyen a részvétel. 1998-ban vettek részt Nagyszalonta diákjai először, és azóta minden évben sikerült kivívniuk azt a jogot, hogy megmérettessenek ezen a nemes vetélkedőn. A legkiválóbb diákjaink képviselték városunkat az évek során az általában Erdély szívében megrendezett találkozókon, amely nemcsak a tehetségek felkutatását szolgálja, nemcsak a tudomány csodás, kimeríthetetlen forrását kínálja fel Erdély legtehetségesebb fiataljainak, hanem egy fóruma a kapcsolatteremtésnek, a tapasztalatcserének, a találkozásnak, a barátságok kialakulásának. Egy kitartó csapat erős hite és sok éves munkája élteti ma is ezt a versenyt. Ezek a pedagógusok tudják, hogy szükség van a matematikusok évi találkozójára, a diákság megmérettetésére, arra az összetartó erőre, amelyet a közös tanácskozások, tapasztalatcserék, az egymásnak átadott hit biztosít. Iskolánk tanári kara úgy döntött, hogy a verseny megszervezésével Bagdi Oszkár (1939-2009), volt nagyszalontai matematikatanár emléke előtt tiszteleg. Életét, munkásságát a diákok iránti elkötelezettség, a matematika szeretete, magas színvonalon való művelése jellemezte. A Bagdi családdal közösen az ő emlékére hoztuk létre a Bagdi Oszkár díjat, melyet 2013-ban az EMMV legeredményesebb szalontai diákjának osztunk ki, és a továbbiakban a versenybizottság döntése alapján minden évben kiosztásra kerül. Nagyszalonta örömmel vállalta fel a XXIII. találkozó megszervezését. Városvezetőink, egyházaink képviselői, vállalkozók, szülők, pedagógusok, diákok segítettek a megfelelő feltételek megteremtésében, ezzel is bizonyítva, hogy Nagyszalonta nemcsak az irodalom bölcsője, hanem jeles matematikusokat is nevel, a tudományos oktatásban és annak felkarolásában is elöl jár.

Mészár Julianna matematikatanár,
az Arany János Elméleti Líceum igazgatója

IX. osztály
I. forduló

1. Feladat. Határozd meg a következő egyenlet összes $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldását:

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 20 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. A sík pontjait két színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét két lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindkét színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy:

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

3. Feladat. Az ABC általános háromszög (AB) és (AC) oldalainak belsejében felvesszük a D illetve E pontokat úgy, hogy $BD = CE$. Jelöljük F illetve G-vel a (BC) valamint (DE) szakaszok felezőpontját. A B pontból az FG egyenesre húzott merőleges az AC egyenest H-ban, az A-ból a BH-ra húzott merőleges a BC-t K-ban metszi. Bizonyítsd be, hogy fennáll a $BK \cdot AC = AH \cdot KC$ egyenlőség!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

4. Feladat. Határozd meg az

$$\begin{cases} x^{2013} + y^{2011} &= 2z^{2009} \\ y^{2013} + z^{2011} &= 2x^{2009} \\ z^{2013} + x^{2011} &= 2y^{2009} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásait!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

5. Feladat. Az ABC háromszögben $AB = AC$. M és N a (BC) alap két olyan belső pontja, amelyre $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Igazold, hogy $BM + NC > MN$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Feladat. Tekintsünk egy 5×5-ös táblázatot. A táblázat kitöltése alatt azt értjük, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 25$ számokat beírjuk a táblázat celláiba úgy, hogy minden cellába pontosan egy szám kerüljön (és minden szám pontosan egy cellában jelenjen meg).

a) Létezik-e olyan kitöltés, mely esetén a táblázat négy sorában a számok szorzata egymással egyenlő?

b) Szerkesszél olyan kitöltést, mely esetén a táblázat három sorában a számok szorzata egymással egyenlő!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

X. osztály
I. forduló

1. Feladat. Határozd meg az összes olyan (x, y) természetes számokból álló számpárt, amelyre

$$x^2 + 8x + 7 = 3^y.$$

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

2. Feladat. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től 2013-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot a tábláról, a-t és b-t, letöröljük a két kiválasztott számot majd felírjuk helyettük az $ab - 3a - 3b + 12$ kifejezés értékét. Melyik szám marad utolsónak a táblán?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

3. Feladat. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög. Jelöljük A_1-gyel az A-ból a BC-re húzott merőleges talppontját, B_1-gyel az A_1-ből az AC-re húzott merőleges talppontját, C_1-gyel a B_1-ből az AB-re húzott merőleges talppontját és A_2-vel az AA_1 és B_1C_1 metszéspontját. Az $A_1A_2B_1$ háromszög területe negyede az ABC háromszög területének. Határozd meg a C szög mértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Hány különböző módon fedhető le egy 4×7-es téglalap 1×1-es, 2×2-es és 3×3-as kis négyzetek segítségével, átfödés, hiány illetve kilógó részek nélkül?

Komán Zsombor, Brassó

5. Feladat. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók O metszéspontjából az AB-re merőlegesen húzott $[OE]$ szakasz ($E \in (AB)$) a CD-t F-ben metszi. Jelöljük G-vel az F pontnak az AC-re eső vetületét, H-val pedig a DG és az OF egyenesek metszéspontját. Tudjuk, hogy $AB = 15$ és $AE = 3$. Számítsd ki a CDH háromszög területét a $k = \frac{OD}{OA}$ arány függvényében!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Feladat. A következő két oszthatóság közül melyik teljesül több $n \in \mathbb{N}$ szám esetén:

$$\left[\frac{\pi n}{7}\right] \Big| \, n \quad \text{vagy} \quad \left[\frac{\pi n}{5}\right] \Big| \, n,$$

ahol $[a]$-val az a valós szám egész része.

Komán Zsombor, Brassó

XI. és XII. osztály
I. forduló

1. Feladat. A tér pontjait három színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét három lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindhárom színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

2. Feladat. Egy iskola főépülete és bentlakása közé egy $1m \times 10m$ méretű, téglalap alakú sétányt akarnak kialakítani. A sétány elkészítéséhez fehér, piros, zöld és szürke színű, $1m$ oldalhosszúságú, négyzet alakú betonlapokat használnak. Hány különböző tervet lehetne a sétány elkészítésére készíteni, ha a piros betonlapok száma páros kell legyen?

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. Feladat. Legyen p és q két, nem feltétlenül különböző pozitív prímszám. Bizonyítsd be, hogy ha a két prímszám reciprokával, valamint a két prím összegének reciprokával, mint hosszúságokkal szerkeszthető háromszög, akkor $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$ vagy $\left[\frac{q}{p}\right] = 1$ (az x valós szám egészrésze $[x]$, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb)!

Bíró Bálint, Eger

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (AB) oldalán felveszünk egy tetszőleges M pontot. Az $\widehat{MCD}$ szögfelezője az (AD) oldalt P-ben metszi. Legyen S a CD egyenes azon pontja, amelyre $CS = CM + MB$ és $D \in (CS)$. Bizonyítsd be, hogy a CPS háromszög területe nem függ az M pont megválasztásától!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Feladat. Adott $k \geq 3$ különböző gömb a térben, amelyek felületei metszik egymást az origóban. Minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ index esetén legyen A_i az origónak az i-edik gömb középpontja szerinti szimmetrikusa. Feltételezzük, hogy az $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ halmazban nincs három kollineáris pont és tekintsük a halmaz pontjai által meghatározott konvex testet (poliédert). Igazoljuk, hogy ez a test benne van a gömbök és belső tartományaik egyesítésében!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

6. Feladat. Sir Lancelot csak akkor indul a lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel győzni fog. Minden összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányosan oszlik meg és minden n természetes szám esetén Lancelot n-edik ellenfelének a harcképessége $\frac{1}{2^{n+1}-1}$, míg Lancelot harcképessége mindig 1. Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Lancelot úgy döntött, hogy ő is indul?

Komán Zsombor, Brassó

IX. osztály

II. forduló

1. Feladat. Határozd meg azokat az $x, y \in [a, b]$ számokat, amelyekre $\sqrt{(x-a)(b-y)} + \sqrt{(y-a)(b-x)} = b - a$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok és $a < b$.

Longáver Lajos, Nagybánya

2. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat elemeire $a_1 = a \geq 1$ és

$$\frac{2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{3}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}},$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Feladat. Egy háromszög kerülete $12\,m$ és az oldalaira írt négyzetek területének összege $48\,m^2$. Számítsd ki a háromszög területét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

4. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben M az (AB), N pedig a (BC) felezőpontja, $\{E\} = AN \cap BD$ és $\{F\} = DM \cap AC$. Bizonyítsd be, hogy $ABCD$ pontosan akkor paralelogramma, ha

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály, Brassó

X. osztály

II. forduló

1. Feladat. Határozd meg az

$$(1 + iz)^6 = i\left(1 + z^2\right)^3$$

egyenlet összes komplex megoldását!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. Határozd meg a

$$2^x + 9^x + 2 = 3^{x+1} + 4^x$$

egyenlet valós megoldásait!

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Feladat. Az ABC nem egyenlő oldalú háromszögben A-nak a B szerinti, B-nek a C szerinti és C-nek az A szerinti szimmetrikuśat jelöljük A_1, B_1 illetve C_1-gyel. Bizonyítsd be, hogy ha O, M, az ABC háromszögben, O_1, M_1 pedig az $A_1B_1C_1$ háromszögben a háromszög köré írt kör középpontja illetve magasságpontja, akkor OO_1MM_1 trapéz!

Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Feldarabolható-e n^2 darab egybevágó szabályos $2n^2$ oldalú sokszög úgy, hogy a darabokból ki lehessen rakni egy szabályos $2n^2$ oldalú sokszöget? Ha igen, akkor adj egy lehetséges feldarabolást!

Nagy Örs, Marosvásárhely

XI. osztály
II. forduló

1. Feladat. Az $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sorozatban $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ és

$$a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Számítsd ki az $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \cos\left(\frac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right)$ sorozat határértékét!

Longáver Lajos, Nagybánya

2. Feladat. Adott az

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Írd fel az A mátrix determinánsát a, b, c-ben elsőfokú kifejezések szorzataként!

Longáver Lajos, Nagybánya

3. Feladat. Adottak a síkban az $A_n\left(x^n, y^n\right)$, $x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ pontok és a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat, ahol t_n az $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszög területét jelenti. Határozd meg az A_1 pont koordinátáit, ha a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{3}{8}$.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Adott $a > 0$ és $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ szám segítségével értelmezzük az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következő módon:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{p-1}+1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Konvergens-e az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat?

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[p]{n}}$$

határértéket!

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

XII. osztály
II. forduló

1. Feladat. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(3,1)$ és $B(5,5)$. A háromszög köré írt kör érinti az Ox tengelyt és nincs közös pontja az Oy tengellyel. Határozd meg a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!

Nagy Örs, Marosvásárhely

2. Feladat. Adottak a $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - x + 2$ és $Q(x) = x^2 + 5x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvények. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan injektív függvény, amelyre a $P \circ f$ és a $Q \circ f$ függvényeknek létezik primitív függvénye, bizonyítsd be, hogy f folytonos!

Bencze Mihály, Brassó

3. Feladat. Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 6, a_2 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 3a_n + 3}, n \geq 2.$$

a) Mennyi a sorozat 2013-dik tagjának egész része?

b) Értelmezhető-e az $X = \{a_n | n \geq 1\}$ halmazon olyan $\bigoplus : X \times X \to X$ műveletet, amelyre az $(X, \bigoplus)$ struktúra csoport és izomorf a $(\mathbb{Z}, +)$ csoporttal?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Feladat. Az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos függvény teljesíti az

$$(x+1)f(f(x)) = 2xf(x) - 1, \quad x > 0$$

függvényegyenletet, ahol $f(1) \geq 2$. Számítsd ki $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ értékét!

Kovács Lajos, Székelyudvarhely
András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások - I. forduló
IX. osztály

1. Feladat. Határozd meg a következő egyenlet összes $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldását:

$$x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 20 = 0.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Az egyenlet rendre egyenértékű a következőkkel:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 - 8y - 4 - 2x - 2y + 1 + 23 = 0$$

$$(x+y)^2 - 2(x+y) + 1 - 4(y^2 + 2y + 1) = -23$$

$$(x+y-1)^2 - 4(y+1)^2 = -23$$

$$(x-y-3)(x+3y+1) = -23.$$

A szorzótényezők -1 és 23 vagy 1 és -23, tehát a megoldások: $(7, 5), (19, -7), (-3, -7), (-15, 5)$. $\circledast$

1. Megjegyzés. Az előbbi felbontás megkapható úgy is, ha az egyenletet x-ben (vagy y-ban) másodfokú egyenletnek tekintjük az y (illetve x) paraméterrel és kiszámítjuk a gyököket, majd a gyökök alapján a felbontást.

2. Megjegyzés. Az átalakításoknak egy természetesebb módja, ha előbb kialakítjuk az $(x+y)^2$-et az xy-os tag miatt:

$$(x+y)^2 - (2y)^2 - 2(x+y) - 4(2y) + 20 = 0.$$

Áttérünk az $a = x + y$ és $b = 2y$ változókra:

$$a^2 - b^2 - 2a - 4b + 20 = 0.$$

A négyzetek különbségét felbontjuk:

$$(a-b)(a+b)-2a-4b+20=0.$$

Áttérünk az $u=a-b$ és $v=a+b$ változókra:

$$uv-3v+u+20=0.$$

Kialakítunk egy olyan szorzatot, amelynek a kifejtése tartalmazza az összes olyan tagot, amelyben szerepel változó:

$$uv-3v+u+20=v(u-3)+(u-3)+23=(v+1)(u-3)+23=0,$$

tehát $(v+1)(u-3)=-23$. Ez valójában ugyanaz a felbontás, mint az előbbi megoldásban, csak a szabadtag felbontását nem kell előre látni.

2. Feladat. A sík pontjait két színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét két lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindkét színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy:

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás. a) Tekintsünk egy egységnyi oldalhosszú, egyenlő oldalú háromszöget ebben a síkban. Mivel a háromszögnek három csúcsa van, de csak két színt használtunk a színezéshez, a skatulyaelv alapján biztosan van két olyan csúcsa, melyek azonos színűek, és ezek egységnyi távolságra helyezkednek el egymástól.

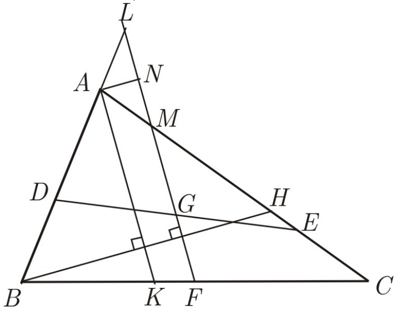
b) Ahhoz, hogy egy X pont szomszédságában ne legyen vele azonos színű, mely egységnyi távolságra van tőle, a köréje rajzolható egységnyi sugarú körön elhelyezkedő összes pontnak vele azonos színűnek kell lennie. De ugyanakkor, ha lenne ennek a körnek a belsejében egy olyan pont, amelyet a másik színnel színeztünk, akkor az előbbi állításnak erre is igaznak kellene lennie. Viszont így a két pont körüli egységsugarú kör metszi egymást, ami azt jelentené, hogy a metszéspontokat mindkét színnel egyszerre kellett volna színezzük. Ez nem felel meg a feltevésnek, ezért a kör belsejében elhelyezkedő pontoknak is a középpontban levő ponttal azonos színűeknek kell lenniük. Megismételve ezt a gondolatmenetet a kör kerületén levő pontokra, azt kapjuk, hogy az X középpontú és 2 sugarú körlap belsejében csak az X-szel megegyező színű pontok fordulhatnak elő és így matematikai indukcióval azt kapnánk, hogy minden pont színe megegyezik az X színével. Másrészt a feltételek alapján mindkét szín előfordul a síkon, tehát kell léteznie két olyan pontnak, melyek nem azonos színűek és egységnyi távolságra vannak egymástól. $\circledast$

3. Megjegyzés. Két tetszőleges pont közt létezik olyan törtvonal, amely egységnyi hosszúságú darabokból áll, tehát a végpontoknak különböző színű pontokat választunk, akkor világos, hogy a törtvonal valamelyik egységnyi szakaszának is különböző színű végpontjai lesznek.

3. Feladat. Az ABC általános háromszög (AB) és (AC) oldalainak belsejében felvesszük a D illetve E pontokat úgy, hogy $BD = CE$. Jelöljük F illetve G-vel a (BC) valamint (DE) szakaszok felezőpontját. A B pontból az FG egyenesre húzott merőleges az AC egyenest H-ban, az A-ból a BH-ra húzott merőleges a BC-t K-ban metszi. Bizonyítsd be, hogy fennáll a $BK \cdot AC = AH \cdot KC$ egyenlőség!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. $AB < AC$ esetén végezzük a bizonyítást (az $AB > AC$ esetén hasonlóan járunk el.)



Legyen L és M az FG egyenesnek az AB illetve AC egyenessel való metszéspontja és N az A pontnak az FG egyenesre eső vetülete. Az ABC és ADE háromszögekben alkalmazzuk Meneláosz tételét az FG szelőre nézve:

$$\frac{LB}{LA} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{FC}{FB} = 1 \text{ és } \frac{LD}{LA} \cdot \frac{MA}{ME} \cdot \frac{GE}{GD} = 1.$$

Figyelembe véve a $FB = FC$ és $GD = GE$ egyenlőségeket, következik, hogy $\frac{LB}{LA} = \frac{MC}{MA}$ és $\frac{LD}{LA} = \frac{ME}{MA}$, ahonnan az aránypárok megfelelő oldalainak egymásból való kivonásával $\frac{BD}{LA} = \frac{CE}{MA}$ adódik. Mivel $BD = CE$, következik, hogy $LA = MA$. Az LAM egyenlőszárú háromszögben az AN magasság egyben szögfelező is. Legyen AP a BAC szög szögfelezője. Mivel a háromszög külső szögének szögfelezője merőleges a belső szög szögfelezőjére, ezért $AN \perp AP$. $AN \perp FG$ és $BH \perp FG$, tehát $AN \parallel BH$, de $AN \perp AP$, ezért $AP \perp BH$. A feladat adataiból tudjuk, hogy $AK \perp BH$ és mivel egy külső pontból egy egyenesre egy és csakis egy merőleges húzható, ezért az AK egybeesik az AP-vel, tehát AK a BAC szög szögfelezője. Az ABH háromszögben az AK szögfelező egyben magasság is, következik, hogy $AB = AH$. Az ABC háromszögben alkalmazzuk a szögfelező tételét és felhasználjuk az $AB = AH$ egyenőséget: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC}$, következik $\frac{BK}{KC} = \frac{AH}{AC}$, ahonnan $BK \cdot AC = AH \cdot KC$. $\otimes$

4. Megjegyzés. A feladat hátterében egy klasszikus tulajdonság áll, amely azt mondja ki, hogy ha egy négyszögben a két szembenfekvő oldal ((AB) és (CD)) hossza megegyezik, akkor a másik két oldal felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos az egyenlő hosszúságú oldalak tartóegyenesei által meghatározott szög szögfelezőjével (lásd pl. a simplexportal.ro honlapon elérhető IX. osztályos tankönyv 185. oldalának 12. feladatát és ennek megoldását a hozzátartozó megoldásos könyvből). Ez a tulajdonság önmagában sok más módszerrel igazolható, talán a legegyszerűbb, ha az $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$ vektorok összegét tekintjük. Ez egyrészt párhuzamos az AB és CD egyenesek szögének szögfelezőjével (mert eltolhatjuk őket a metszéspontig és ott adjuk össze). Másrészt ez az összeg egyenlő a felezőpontokat összekötő vektor kétszeresével.

4. Feladat. Határozd meg az

$$\begin{cases} x^{2013}+y^{2011} & = & 2z^{2009} \\ y^{2013}+z^{2011} & = & 2x^{2009} \\ z^{2013}+x^{2011} & = & 2y^{2009} \end{cases}$$

egyenletrendszer valós megoldásait!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Ha $x \leq y \leq z$, akkor $x^{2009} \leq y^{2009} \leq z^{2009}$, $x^{2011} \leq y^{2011} \leq z^{2011}$ és $x^{2013} \leq y^{2013} \leq z^{2013}$, ahonnan az következik, hogy $2x^{2009} = y^{2013} + z^{2011} \geq x^{2013} + y^{2011} = 2z^{2009}$. Innen az következik, hogy $x \geq z$. Tehát $x = y = z$. Ezt az egyenlőséget kaptuk volna az x, y és z bármilyen más sorrendje esetében. Így mindhárom egyenletből a $2x^{2009} = x^{2013}+x^{2011}$ egyenletet kapjuk, ami egyenértékű az $x^{2009}(x-1)(x+1)\left(x^2+2\right) = 0$ egyenlettel. Ennek megoldásai $x = 0$, $x = 1$ és az $x = -1$. Tehát az egyenletrendszer megodáshalmaza az $M = \{(0,0,0),(1,1,1),(-1,-1,-1)\}$.

$\circledast$

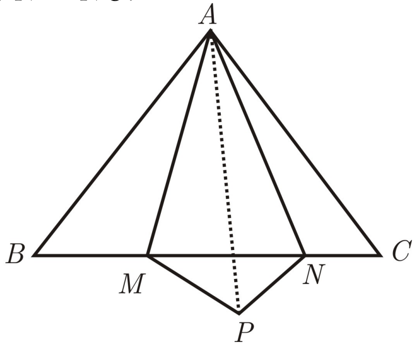
5. Feladat. Az ABC háromszögben $AB = AC$. M és N a (BC) alap két olyan belső pontja, amelyre $m(\widehat{MAN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC})$. Igazold, hogy $BM + NC > MN$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. A megadott feltételek alapján

$$m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{BAM}) + m(\widehat{NAC})$$

(ha a pontok sorrendje a (BC) oldalon $B - M - N - C$), tehát az MAN szög felbontható két részre úgy, hogy ezek a részek pontosan a BAM és NAC szögekkel legyenek egyenlők. Létezik tehát egy olyan P pont, amelyre $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{MAP})$, $m(\widehat{PAN}) = m(\widehat{NAC})$ és $AP = AB$. Erre a P pontra az ABM és APM illetve az APN és ACN háromszögpárok kongruensek, tehát $PM = BM$ és $PN = NC$.



Így a PMN háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján $PM + PN > MN$ (mivel a P pont nem lehet a BC-n), vagyis $BM + NC > MN$. $\circledast$

6. Feladat. Tekintsünk egy 5×5-ös táblázatot. A táblázat kitöltése alatt azt értjük, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 25$ számokat beírjuk a táblázat celláiba úgy, hogy minden cellába pontosan egy szám kerüljön (és minden szám pontosan egy cellában jelenjen meg).

a) Létezik-e olyan kitöltés, mely esetén a táblázat négy sorában a számok szorzata egymással egyenlő?

b) Szerkesszél olyan kitöltést, mely esetén a táblázat három sorában a számok szorzata egymással egyenlő!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) Ha négy sorban ugyanaz a számok szorzata, akkor azok prímtényezős felbontásában ugyanazok a prímek szerepelnek, így csak olyan prímtényezőik lehetnek ebben a négy sorban szereplő számoknak, amelyek az $\{1, 2, \cdots, 25\}$ halmaz legalább négy számának prímtényezős felbontásában szerepelnek. Tehát ezekben a sorokban nem szerepelhet: $7, 14, 21, 11, 22, 13, 17, 19,$ 23. Ezeket a számokat pedig nem lehet mind elhelyezeni az ötödik sorban.

b) A mellékelt táblázat egy lehetséges kitöltést mutat.

1	9	10	20	21
3	12	5	15	14
2	18	6	25	7
4	8	11	13	16
17	19	22	23	24

⊛

X. osztály

1. Feladat. Határozd meg az összes olyan (x, y) természetes számokból álló számpárt, amelyre

$$x^2 + 8x + 7 = 3^y.$$

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. $y = 0$ esetén az $x^2 + 8x + 6 = 0$ egyenletnek nincsenek egész megoldásai. Az $x^2 + 8x + 7 - 3^y = 0$ egyenletet x-ben másodfokú egyenletnek tekintjük. A megoldása $x = -4 \pm \sqrt{9 + 3^y}$ és ez csak akkor lesz egész szám, ha a gyök alatti mennyiség egy természetes szám négyzete. Ha $9 + 3^y = k^2$, ahol $k \in \mathbb{N}$, akkor $3^y = (k-3)(k+3)$. 3^y-nak csak a 3 természetes hatványai lehetnek a tényezői. Ugyanakkor $(k+3) - (k-3) = 6$ és ez osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, tehát az egyik tényező 3, a másik 3^{y-1}. Tehát $k = 6$ és $3^{y-1} = 9$, ahonnan $y = 3$, így $x = -4 \pm \sqrt{9 + 3^3} = -4 \pm 6$, tehát az egyenlet megoldáshalmaza

$$M = \{(2,\ 3)\}.$$

⊛

5. Megjegyzés. Az egyenletet $(x+1)(x+7) = 3^y$ alakba írhatjuk és a fentiekhez hasonlóan az

$$\begin{cases} x + 1 &= 3 \\ x + 7 &= 3^{y-1} \end{cases}$$

rendszert kell megvizsgálni.

2. Feladat. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től 2013-ig. Egy lépésben kiválasztunk két számot a tábláról, a-t és b-t, letöröljük a két kiválasztott számot majd felírjuk helyettük az $ab - 3a - 3b + 12$ kifejezés értékét. Melyik szám marad utolsónak a táblán?

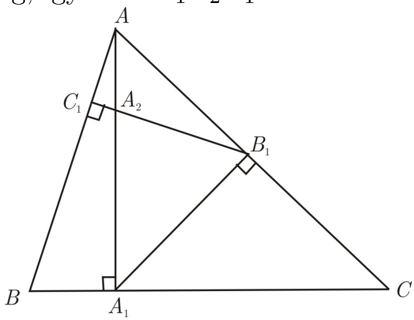
Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Az $ab-3a-3b+12=(a-3)(b-3)+3$ egyenlőségből következik, hogy ha a letörölt számok egyike 3, akkor helyettük szintén 3-at írunk vissza. Mivel a táblán eredetileg szerepelt a hármas, így mindig marad hármas a táblán, azaz, mivel 2012 lépés után csak egy szám van a táblán, ez 3. ⊛

3. Feladat. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög. Jelöljük A_1-gyel az A-ból a BC-re húzott merőleges talppontját, B_1-gyel az A_1-ből az AC-re húzott merőleges talppontját, C_1-gyel a B_1-ből az AB-re húzott merőleges talppontját és A_2-vel az AA_1 és B_1C_1 metszéspontját. Az $A_1A_2B_1$ háromszög területe negyede az ABC háromszög területének. Határozd meg a C szög mértékét!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. A $BA_1A_2C_1$ négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge derékszög, így $\widehat{B}\equiv\widehat{A_1A_2B_1}$.



Másrészt $m(\widehat{A_1A_2B_1})=m(\widehat{C})=90°-m(\widehat{CA_1B_1})$. Tehát $A_1A_2B_{1\Delta}\sim CBA_\Delta$. Következésképpen

$$\frac{T_{A_1A_2B_{1\Delta}}}{T_{CBA_\Delta}}=\left(\frac{A_1B_1}{AC}\right)^2,$$

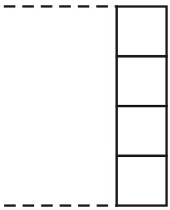
tehát $\frac{A_1B_1}{AC}=\frac{1}{2}$. Így az AA_1C derékszögű háromszögben az A_1B_1 magasság és oldalfelező is, tehát AA_1C egyenlőszárú derékszögű háromszög, azaz $m(\widehat{C})=45°$. ⊛

4. Feladat. Hány különböző módon fedhető le egy 4×7-es téglalap 1×1-es, 2×2-es és 3×3-as kis négyzetek segítségével, átfödés, hiány illetve kilógó részek nélkül?

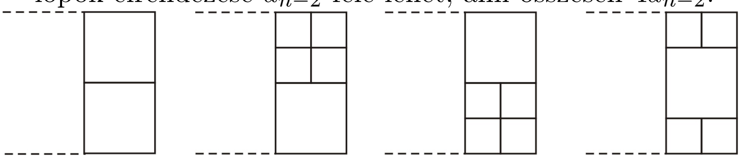
Komán Zsombor, Brassó

Megoldás. Jelölje a_n a $4 \times n$-es téglalapok lefödési lehetőségeinek számát. Aszerint csoportosítjuk a lefödéseket, hogy jobbról balra haladva hol van az első függőleges *vágás*:

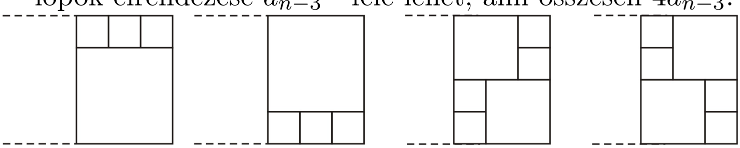
- Ha az első függőleges vágás egy egységnyire van a téglalap jobb szélétől, akkor az egyféleképpen helyezkedhet el, míg az előtte levő oszlopok elrendezése a_{n-1}- féle lehet



- Ha az első függőleges vágás két egységnyire van a téglalap jobb szélétől, ennek négy módja van, míg az előtte levő oszlopok elrendezése a_{n-2}-féle lehet, ami összesen $4a_{n-2}$.

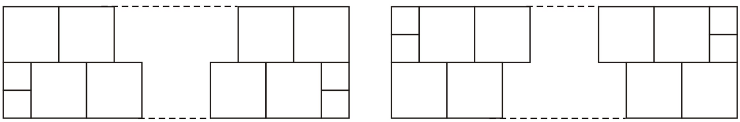


- Ha az első függőleges vágás három egységnyire van a téglalap jobb szélétől, ennek négy módja van, míg az előtte levő oszlopok elrendezése a_{n-3} - féle lehet, ami összesen $4a_{n-3}$.

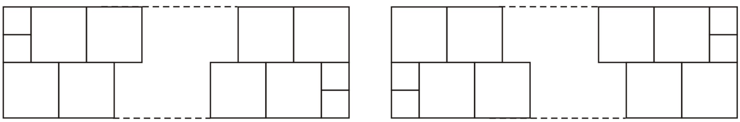


- Ha az első függőleges vágás $3 < k < n$ egységnyire van a téglalap jobb szélétől, ennek két módja lehet, ami összesen $2a_{n-k}$. Ha pedig nincs vágás, akkor 2 lehetőség van.

k páros



k páratlan



Ezek alapján $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3} + 2a_{n-4} + 2a_{n-5} + \ldots 2a_2 + 2a_1 + 2$.

Így $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = a_2 + 4a_1 + 2 = 11$, $a_4 = a_3 + 4a_2 + 4a_1 + 2 = 37$, $a_5 = a_4 + 4a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 2 = 105$, $a_6 = a_5 + 4a_4 + 4a_3 + 2a_2 + 2a_1 + 2 = 311$, $a_7 = a_6 + 4a_5 + 4a_4 + 2a_3 + 2a_2 + 2a_1 + 2 = 904$ Tehát egy 7×4-es téglalap 904-féleképpen födhető le 1×1-es, 2×2-es illetve 3×3-as négyzetek segítségével.

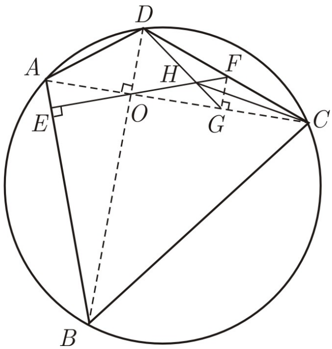
Ha nagyobb számokra szeretnénk kiszámolni, akkor a rekurzió egyszerűbb alakra írható, ugyanis $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - 2a_{n-4} + a_{n-2} + 4a_{n-3} + 4a_{n-4} + 2a_{n-5} + \ldots 2a_2 + 2a_1 + 2 = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 2a_{n-4}$. $\otimes$

5. Feladat. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók O metszéspontjából az AB-re merőlegesen húzott $[OE]$ szakasz ($E \in (AB)$) a CD-t F-ben metszi. Jelöljük G-vel az F pontnak az AC-re eső vetületét, H-val pedig a DG és az OF egyenesek metszéspontját. Tudjuk, hogy $AB = 15$ és $AE = 3$. Számítsd ki a CDH háromszög területét a $k = \frac{OD}{OA}$ arány függvényében!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACD})$ (azonos körívet közrefogó kerületi szögek), $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{FOC})$ (merőleges szárú szögek), tehát $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{FOC})$, és így az FOC háromszög egyenlő szárú, vagyis $OF = FC$. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $OF = DF$. Így $DF = FC$ és OF az ODC háromszög oldalfelezője. $FG \parallel DO$ és $DF = FC$ alapján következik, hogy G az OC felezőpontja, így DG az ODC háromszög oldalfelezője, tehát H az ODC háromszög súlypontja. $OCD_\Delta \sim OBA_\Delta$ és $\frac{OD}{OA} = k$, így

$$T_{OCD_\Delta} = k^2 \cdot T_{OBA_\Delta}.$$



A CDH és CDO háromszögek közös (CD) oldalára húzott magasságok aránya egyenlő $\frac{HF}{OF} = \frac{1}{3}$, ezért

$$T_{CDH_\Delta} = \frac{1}{3} \cdot T_{OCD_\Delta} = \frac{k^2}{3} \cdot T_{OBA_\Delta}.$$

$AE = 3$, $EB = AB - AE = 15 - 3 = 12$. Az OAB derékszögű háromszögben a magasságtétel értelmében $OE = \sqrt{AE \cdot EB} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$,

$$T_{OBA_\Delta} = \frac{AB \cdot OE}{2} = \frac{15 \cdot 6}{2} = 45$$

$$T_{CDH_\Delta} = \frac{k^2}{3} \cdot T_{OBA_\Delta} = \frac{k^2}{3} \cdot 45 = 15 \cdot k^2.$$

Tehát
$$T_{CDH_\Delta} = 15 \cdot k^2.$$

$\otimes$

6. Feladat. A következő két oszthatóság közül melyik teljesül több $n \in \mathbb{N}$ szám esetén:
$$\left[\frac{\pi n}{7}\right] \Big| n \quad \text{vagy} \quad \left[\frac{\pi n}{5}\right] \Big| n,$$
ahol $[a]$-val az a valós szám egész része.

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás. A $\left[\frac{\pi n}{7}\right] \Big| n$ egyenértékű azzal, hogy létezik $k \in \mathbb{N}$, amely osztja n-et és $k \le \frac{\pi n}{7} < k+1$, azaz $\frac{7k}{\pi} \le n < \frac{7k+7}{\pi}$. Legyen $\frac{n}{k} = m \in \mathbb{N}$. A fenti egyenlőtlenségek így alakulnak: $\frac{7k}{\pi} \le km < \frac{7k+7}{\pi}$, azaz $\frac{7}{\pi} \le m < \frac{7}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Annyi megoldásunk van, ahány (m,k) természetes számokból álló számpár van, amelyre $m \in \left[\frac{7}{\pi}, \frac{7}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$. Tehát olyan k természetes számot keresünk, melyre $\frac{7}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right) > \left[\frac{7}{\pi}\right] + 1 = 3$, ahonnan $k < \frac{7}{3\pi - 7}$, így $k \in \{1,2\}$. Ha $k = 1$, akkor $m \in \{3,4\}$, ha pedig $k = 2$, akkor $m = 3$, tehát $n = mk \in \{3,4,6\}$.

A $\left[\frac{\pi n}{5}\right] \Big| n$ kifejezésre hasonlóan járunk el. Azt kapjuk, hogy keressük azokat az (m,k) természetes számpárokat, amelyekre $m \in \left[\frac{5}{\pi}, \frac{5}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$, azaz olyan k természetes számokat keresünk, amelyekre $\frac{5}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right) > 2$, vagyis $k < \frac{7}{2\pi - 5}$. Így $k \in$

$\{1,2,3\}$. Ha $k=1$, akkor $m\in\{2,3\}$, ha $k=2$, akkor $m=2$, ha pedig $k=3$, akkor $m=2$ tehát $n=mk\in\{2,3,4,6\}$. Végül tehát az $\left[\frac{\pi n}{5}\right]\Big| n$ oszthatóság több n-re teljesül, mint az $\left[\frac{\pi n}{7}\right]\Big| n$ oszthatóság. ⊛

XI. és XII. osztály

1. Feladat. A tér pontjait három színnel színeztük ki (vagyis minden pont színét három lehetséges szín közül választottuk ki, egymástól függetlenül, tetszőlegesen) úgy, hogy mindhárom színt legalább egyszer használtuk. Bizonyítsd be, hogy

a) található két azonos színű pont, amely egységnyi távolságra van egymástól;

b) található két különböző színű pont, amely egymástól egységnyi távolságra van!

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás. a) Tekintsünk egy egységnyi oldalhosszú szabályos tetraédert. Mivel a tetraédernek négy csúcsa van, de csak három színt használtunk a színezéshez, a skatulyaelv alapján biztosan van két olyan csúcsa, melyek azonos színűek, és ezek egységnyi távolságra helyezkednek el egymástól.

b) Feltételezzük, hogy nincs két ilyen pont. Ahhoz, hogy egy X pont szomszédságában ne legyen vele azonos színű, mely egységnyi távolságra van tőle, a köréje rajzolható egységnyi sugarú gömbön elhelyezkedő összes pontnak vele azonos színűnek kell lennie. De ugyanakkor, ha lenne ennek a gömbnek a belsejében egy más színű pont, a fenti állításnak erre is igaznak kellene lennie, viszont a két pont körüli gömb metszi egymást és így a metszéspontokhoz egyetlen színt sem rendelhetnénk. Emiatt az

X pont körüli egységgömb belsejében is csak az X színe fordulhat elő. Ha ezt a gondolatmenetet megismételjük a gömbfelszín pontjaira, akkor azt kapjuk, hogy az X középpontú, 2 sugarú gömb belsejében és a felszínén minden pontnak a színe megegyezik az X színével. A matematikai indukció módszerét használva azt is beláthatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az X középpontú és n sugarú gömb belsejében és a felszínén minden pont színe megegyezik az X színével. Ez azt jelentené, hogy csak egy színt használtunk, tehát hamis a feltevésünk és így létezik két olyan pont, melyek nem azonos színűek és egységnyi távolságra vannak egymástól. $\circledast$

2. Feladat. Egy iskola főépülete és bentlakása közé egy $1m \times 10m$ méretű, téglalap alakú sétányt akarnak kialakítani. A sétány elkészítéséhez fehér, piros, zöld és szürke színű, $1m$ oldalhosszúságú, négyzet alakú betonlapokat használnak. Hány különböző tervet lehetne a sétány elkészítésére készíteni, ha a piros betonlapok száma páros kell legyen?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Első megoldás. Jelöljük x_n-nel n darab betonlap összes olyan elhelyezésének a számát, amelyben páros számú piros betonlap jelenik meg, illetve y_n-nel azoknak a lehetséges elhelyezéseknek a számát, amelyekben a betonlapok száma páratlan. Az $x_n + y_n$ összeg megadja a betonlapok összes elhelyezésének a számát, függetlenül a piros darabok számának paritásától, tehát ez 4^n. Világos, hogy $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $x_2 = 10$ és $y_2 = 6$. Általánosan felírhatjuk, hogy $x_{n+1} = 3x_n + y_n$, mivel az az első n betonlap x_n darab elhelyezése után következhet fehér, zöld vagy szürke színű, és y_n elhelyezést csak piros betonlap követhet ahhoz, hogy a felhasznált piros betonlapok száma páros legyen. Hasonló módon $y_{n+1} = x_n+3y_n$, mert ahhoz, hogy az $(n+1)$ darab elhelyezésében páratlan legyen a piros betonlapok száma, az elsö n darab x_n lehetséges elhelyezése után egy piros betonlap következhet és y_n lehetséges elhelyezés után lehet fehér, zöld vagy szürke betonlap. A fentiek alapján

$$x_{n+1} - y_{n+1} = 2(x_n - y_n) = \ldots = 2^n(x_1 - y_1) = 2^{n+1}.$$

Felhasználva az $x_{n+1} + y_{n+1} = 4^{n+1}$ egyenlőséget kapjuk, hogy $x_n = 2^{n-1}(2^n+1)$. Tehát a sétány elkészítésére $x_{10} = 2^9(2^{10}+1) = 524800$ lehetséges tervet készíthetnek. $\circledast$

Második megoldás. Ha $2k$ darab piros betonlapot használnak, akkor ezek helyét C_n^{2k} módon lehet kiválasztani és az összes többi pozicióra 3 lehetőség közül választhatunk, tehát $C_n^{2k}3^{n-2k}$ a lehetőségek száma. Így a kért szám

$$x_n = \sum_{k\geq 0} C_n^{2k} 3^{n-2k}.$$

Ez $n = 10$ esetén akár kézileg is kiszámolható, de Newton binomiális képlete alapján a zárt képlet is levezethető az $y_n = \sum\limits_{k\geq 0} C_n^{2k+1} 3^{n-2k-1}$ összeg segítségével, hisz $x_n + y_n = (3+1)^n$ és $x_n - y_n = (3-1)^n$, tehát $x_n = \frac{1}{2}\left(4^n + 2^n\right) = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$. $\circledast$

3. Feladat. Legyen p és q két, nem feltétlenül különböző pozitív prímszám. Bizonyítsd be, hogy ha a két prímszám reciprokával, valamint a két prím összegének reciprokával, mint hosszúságokkal szerkeszthető háromszög, akkor $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$ vagy $\left[\frac{q}{p}\right] = 1$ (az x valós szám egészrésze $[x]$, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb)!

Bíró Bálint, Eger

Első megoldás. A szimmetria miatt az általánosság leszűkítése nélkül feltételezhetjük, hogy $q \leq p$. Így

$$\frac{1}{p+q} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q},$$

tehát a feltételek alapján

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{q}.$$

Miután közös nevezőre hozunk és eltüntetjük a nevezőket a

$$p^2 - pq - q^2 \leq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha q^2-tel elosztjuk mindkét oldalát és a $t = \frac{p}{q}$-ban másodfokú egyenlőtlenségként megoldjuk, az

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Így (az eredeti feltételezésünk alapján) írhatjuk, hogy

$$1 \leq \frac{p}{q} < 2,$$

tehát $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$. ⊛

Második megoldás. Feltételezhetjük, hogy $0 < q \leq p$. Ha az $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ és $\frac{1}{p+q}$ hosszúságokkal szerkeszthető háromszög, akkor

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+q} > \frac{1}{q}.$$

A fenti egyenlőtlenség ekvivalens az $1+\frac{p}{p+q} > \frac{p}{q}$ egyenlőtlenséggel ($p > 0$), aminek a bal oldala $2-\frac{q}{p+q}$ alakban is írható. Az előbbiek alapján

$$2 > 2 - \frac{q}{p+q} > \frac{p}{q} \geq 1,$$

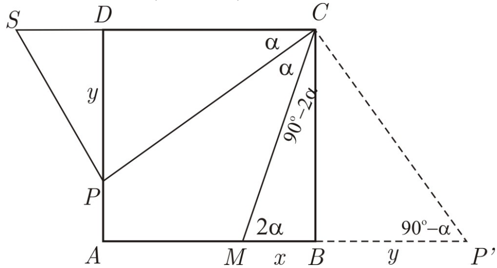
ami egyenértékű az $\left[\frac{p}{q}\right] = 1$ állítással. $\circledast$

6. Megjegyzés. A megoldáshoz nincs szükség arra, hogy p és q prímek.

4. Feladat. Az $ABCD$ négyzet (AB) oldalán felveszünk egy tetszőleges M pontot. Az $\widehat{MCD}$ szögfelezője az (AD) oldalt P-ben metszi. Legyen S a CD egyenes azon pontja, amelyre $CS = CM + MB$ és $D \in (CS)$. Bizonyítsd be, hogy a CPS háromszög területe nem függ az M pont megválasztásától!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Ha $BM = x$, $DP = y$, $AB = a$ és $m(\widehat{DCP}) = m(\widehat{PCM}) = \alpha$, akkor $m(\widehat{MCB}) = 90^o - 2\alpha$.



A CM-et ki szeretnénk fejezni az x, y függvényében, ezért az AB egyenesen a négyzeten kívül felvesszük a P' pontot úgy, hogy $BP' = DP = y$. Így $CDP_\Delta \equiv CBP'_\Delta$, tehát

$$m(\widehat{DCP}) = m(\widehat{BCP'}) = \alpha, \quad m(\widehat{MP'C}) = 90^o - \alpha.$$

A CMP' háromszögben

$$m(\widehat{MCP'}) = m(\widehat{MCB}) + m(\widehat{BCP'}) = (90^o - 2\alpha) + \alpha = 90^o - \alpha,$$

tehát

$$m(\widehat{MP'C}) = m(\widehat{MCP'}) = 90^o - \alpha.$$

Ez alapján a CMP' háromszög egyenlő szárú és $MC = MP' = x + y$.

$$T_{CPS_\Delta} = \frac{CS \cdot DP}{2} = \frac{(2x+y)\,y}{2} = \frac{2xy + y^2}{2}$$

A BCM derékszögű háromszögben

$$MC^2 = MB^2 + BC^2$$

vagyis

$$(x+y)^2 = x^2 + a^2,$$

ahonnan $2xy + y^2 = a^2$ és

$$T_{CPS_\Delta} = \frac{a^2}{2} = \frac{T_{ABCD}}{2} = \text{állandó}.$$

$\circledast$

7. Megjegyzés. 1) Lehet egy ismeretlennel is dolgozni. Például ha $BM = x$, akkor $CM = \sqrt{x^2 + a^2}$ és így

$$CS = \sqrt{x^2 + a^2} + x.$$

Az előző megoldáshoz hasonlóan vesszük fel a P' pontot (elforgatjuk a CDP háromszöget $+90^o$-kal) és bizonyítjuk, hogy $MC = MP'$, ahonnan

$$DP = BP' = MC - MB = \sqrt{x^2 + a^2} - x$$

és

$$T_{CPS_\Delta} = \frac{CS \cdot DP}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 + a^2} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + a^2} - x\right)}{2} = \frac{a^2}{2} = \text{állandó}$$

.

2) A feladat megoldható analitikus geometriai illetve trigonometriai eszközökkel is.

5. Feladat. Adott $k \geq 3$ különböző gömb a térben, amelyek felületei metszik egymást az origóban. Minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ index esetén legyen A_i az origónak az i-edik gömb középpontja szerinti szimmetrikusa. Feltételezzük, hogy az $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ halmazban nincs három kollineáris pont és tekintsük a halmaz pontjai által meghatározott konvex testet (poliédert). Igazoljuk, hogy ez a test benne van a gömbök és belső tartományaik egyesítésében!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

Első megoldás. Tetszőleges $i \neq j$ esetén metszük az i-edik és a j-edik gömböket az OA_iA_j síkkal. A metszet két egy síkban lévő metsző kör (O az egyik közös pontjuk és a másik metszéspontot jelöljük M_{ij}-vel). Ekkor $m(\widehat{A_iM_{ij}O}) = m(\widehat{A_jM_{ij}O}) = 90°$, tehát A_i, M_{ij}, A_j kollineárisak, így az OA_iA_j háromszöglap benne van a gömbök egyesítésében. Ha $k \neq i$ és $k \neq j$, legyen H_{ijk} az O pont vetülete az $A_iA_jA_k$ síkra. Ekkor $m(\widehat{A_iH_{ijk}O}) = m(\widehat{A_jH_{ijk}O}) = m(\widehat{A_jH_{ijk}O}) = 90°$, tehát H_{ijk} rajta van az i-edik, j-edik és k-adik gömbökön is, így az $A_iA_jA_k$ háromszöglap a három gömb egyesítésében van, következésképpen a poliéder bármely három csúcsa által alkotott háromszög a gömbök egyesítésében van, tehát a poliéder is benne van ebben az egyesítésben. $\circledast$

Második megoldás. Az $OA_1 \ldots A_n$ poliéder előállítható $OA_iA_jA_k$ alakú tetraéderek egyesítéseként, ezért elégséges $n = 3$ esetén igazolni a tulajdonságot. Tekintsük a háromdimenziós Descartes-féle koordinátarendszert. Legyenek a gömbök középpontjainak koordinátái $x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3)$, a sugaraik pedig r_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Ekkor minden $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén az A_i pont koordinátái $(2x_i^1, 2x_i^2, 2x_i^3)$. Tekintsünk egy tetszőleges pontot a tetraéderből, legyenek a koordinátái $x = (x^1, x^2, x^3)$. Ekkor léteznek a $\lambda_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ valós számok úgy, hogy

$$x = \lambda_1 2x_1 + \lambda_2 2x_2 + \lambda_3 2x_3 + \lambda_4 0,$$

ami úgy is értelmezhető, hogy léteznek a $\lambda_i \in [0,1], \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \leq 1$ valós számok úgy, hogy $x = 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)$.

Feltételezzük, hogy x nincsen benne a gömbök egyesítésében, tehát mindhárom gömb külső tartományában van. Ekkor minden $i \in \{1,2,3\}$ esetén

$$(x^1 - x_i^1)^2 + (x^2 - x_i^2)^2 + (x^3 - x_i^3)^2 > r_i^2.$$

Mivel az origó rajta van az i-edik gömbön, $(x_i^1)^2+(x_i^2)^2+(x_i^3)^2 = r_i^2$, behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe kapjuk, hogy

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 > 2(x^1x_i^1 + x^2x_i^2 + x^3x_i^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_i((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) > 2\lambda_i(x^1x_i^1 + x^2x_i^2 + x^3x_i^3).$$

Összegezve i szerint következik, hogy

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\right)((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) >$$
$$> \left(2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^1\right) x^1 + \left(2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^2\right) x^2 + \left(2\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^3\right) x^3 =$$
$$= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Ellentmondáshoz jutottunk. Tehát x benne van a gömbök egyesítésében. $\otimes$

6. Feladat. Sir Lancelot csak akkor indul a lovagi tornán, ha tudja, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel győzni fog. Minden összecsapás esetén az ellenfelek győzelmének valószínűsége a harcképességükkel arányosan oszlik meg és minden n természetes szám esetén Lancelot n-edik ellenfelének a harcképessége $\frac{1}{2^{n+1}-1}$, míg Lancelot harcképessége mindig 1. Hány lovag jelentkezhetett a tornára, ha Lancelot úgy döntött, hogy ő is indul?

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás. Ha az n-edik ellenfele $\frac{1}{2^{n+1}-1}$ harcképességű, az n-edik összecsapás megnyerésére $\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}-1}}$ esélye van, vagyis egyszerűsítés után $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Ha függetleneknek tekintjük az összecsapásokat, akkor annak a valószínűsége, hogy mindegyiket megnyeri

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Pár tagot felírva megsejthetjük, hogy ennek értéke mindig nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right) \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \geq 2.$$

$n = 2$ esetén mindkét oldal értéke $\frac{3}{8}$, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}} - \ldots - \frac{1}{2^{2n+2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{2^{k+1}}) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n}} \geq \frac{1}{2}.$$

Ezek alapján bárhány lovag is jelentkezhetne a tornára, Lancelotnak mindig felénél nagyobb esélye lenne a győzelemre, tehát mindenképpen benevez. $\circledast$

8. Megjegyzés. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) > \left(\frac{n - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2^n - 1}{n \cdot 2^{n+1}}\right)^n$$

$(P_n)_{n \geq 1}$ csökkenő sorozat és

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2^n - 1}{n \cdot 2^{n+1}}\right)^{-\frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^n - 1} \cdot \left(-\frac{2^n - 1}{n \cdot 2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2},$$

tehát $P_n > \frac{1}{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Így akárhányan indulnak, Lancelot is indulni fog.

9. Megjegyzés. Vizsgáljuk a komplementer eseményt. Annak a valószínűsége, hogy Lancelot az n-edik mérkőzést elveszíti $P(V_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$, tehát annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik összecsapást elveszíti

$$P(V) = P(V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Így $P(\overline{V}) \geq \frac{1}{2}$, tehát Lancelot tetszőleges számú ellenfél esetén is indul a tornán.

Megoldások - II. forduló

IX. osztály

1. Feladat. Határozd meg azokat az $x, y \in [a, b]$ számokat, amelyekre $\sqrt{(x-a)(b-y)} + \sqrt{(y-a)(b-x)} = b - a$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok és $a < b$.

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. A feltételek alapján a gyökök alatt szereplő tényezők nem negatívak, tehát a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy:

$$\sqrt{(x-a)(b-y)} \leq \frac{x-a+b-y}{2} \quad \text{és}$$

$$\sqrt{(y-a)(b-x)} \leq \frac{y-a+b-x}{2}.$$

A megfelelő oldalakat összeadva következik, hogy

$$\sqrt{(x-a)(b-y)} + \sqrt{(y-a)(b-x)} \leq b - a,$$

tehát a vizsgált egyenlet az egyenlőség esetének tárgyalását jelenti. Másrészt ez az egyenlőség csakis akkor teljesülhet, ha a közepek közti egyenlőtlenségekben is teljesült az egyenlőség, vagyis ha $x - a = b - y$ és $y - a = b - x$. Így végtelen sok megoldás létezik és a megoldáshalmaz

$$M = \{(x, y) | y = a + b - x, x \in [a, b]\}.$$

$\circledast$

10. Megjegyzés. Ha a második négyzetgyököt kivonjuk mindkét oldalból és után négyzetre emeljük mindkét oldalt, akkor a

$$b - y + x - a = 2\sqrt{(b-y)(x-a)}$$

egyenlőséghez jutunk. Ezt ismét négyzetre emelve következik, hogy $x + y = a + b$. Ebben az esetben viszont a megoldásokat le kell ellenőrizni, mivel az első négyzetre emelésnél nem vizsgáltuk meg, hogy mindkét azonos előjelű-e vagy sem.

2. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat elemeire $a_1 = a \geq 1$ és

$$\frac{2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{3}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}},$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Ha a megadott egyenlőségbe $n = 1$-et helyettesítünk, a

$$\frac{2}{a_1} = \frac{3}{a_1} - \frac{3}{a_2}$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan $a_2 = 3a$. Ha $n = 2$, akkor a

$$\frac{2}{a_1 + a_2} = \frac{3}{a_2} - \frac{3}{a_3}$$

egyenletet kapjuk és ebből következik (az $a_2 = 3a$ alapján), hogy $a_3 = 6a$. Ha $n = 3$, akkor

$$\frac{2}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{3}{a_3} - \frac{3}{a_4},$$

tehát

$$\frac{3}{a_4} = \frac{1}{2a_1} - \frac{2}{10a_1}$$

és így $a_4 = 10a$. Észrevehető, hogy $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, és $10 = 1+2+3+4$. Ez alapján az a sejtés fogalmazható meg, hogy

$$a_n = (1 + 2 + \ldots + n)a$$

vagyis $a_n = \frac{n(n+1)}{2}a$, ahol $n \geq 1$. Ezt a sejtést a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

$$\frac{2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{3}{a_n} - \frac{3}{a_{n+1}},$$

tehát

$$\frac{3}{a_{n+1}} = \frac{3 \cdot 2}{n(n+1) \cdot a} - \frac{2 \cdot 2}{(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)) \cdot a}.$$

Így

$$\frac{3}{a_{n+1}} = \frac{3 \cdot 2}{n(n+1) \cdot a} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2) \cdot a},$$

tehát $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. A matematikai indukció elve alapján $a_n = \frac{n(n+1)}{2}a$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. ⊛

3. Feladat. Egy háromszög kerülete $12\,m$ és az oldalaira írt négyzetek területének összege $48\,m^2$. Számítsd ki a háromszög területét!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Megoldás. Jelöljük a háromszög oldalainak hosszát a-val, b-vel illetve c-vel. A feltételek alapján

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 48 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Ha az első egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük és kivonjuk belőle a második egyenletet, akkor a 2-vel való osztás után kapjuk, hogy $ab+bc+ca = 48$. Így $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, tehát

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + \left(c - a^2\right) = 0.$$

Ebből az egyenlőségből következik, hogy $a = b = c$ és a rendszer első egyenletéből kapjuk, hogy $a = b = c = 4$. Végül pedig az egyenlő oldalú háromszög területe

$$T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$ ⊛

11. Megjegyzés. A rendszer megoldásánál használhatjuk a vektorok skaláris szorzatát is. Ha $\overrightarrow{u}\,(1,\,1,\,1)$ és $\overrightarrow{v}\,(a,\,b,\,c)$, akkor $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\cdot a + 1\cdot b + 1\cdot c = a+b+c = 12$ és $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Az $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\cdot\overrightarrow{\|v\|}\cdot\cos\alpha$, következik $12 = \sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$, ahonnan $\cos\alpha = 1$, vagyis $\alpha = 0$, tehát az $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ kollineáris vektorok, így koordinátáik arányosak: $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$, vagyis $a = b = c$ és a rendszer első egyenletéből következik $a = b = c = 4$.

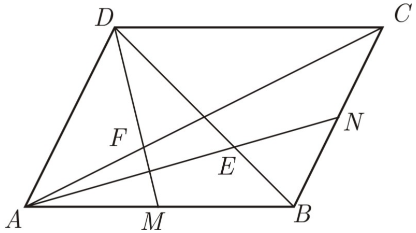
4. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben M az (AB), N pedig a (BC) felezőpontja, $\{E\} = AN \cap BD$ és $\{F\} = DM \cap AC$. Bizonyítsd be, hogy $ABCD$ pontosan akkor paralelogramma, ha

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ha $ABCD$ paralelogramma, akkor az AMF és CDF háromszögek hasonlóak és mivel $\frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$, következik, hogy $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$, tehát $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$.

A fordított irányú bizonyítás érdekében az $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ lineárisan független vektorok segítségével előállítjuk az ábrán megjelenő vektorokat.



Az $\overrightarrow{CD}$ vektor az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ valamilyen lineáris kombinációja, tehát felírható $\overrightarrow{CD} = a\vec{u} + b\vec{v}$ alakban. A továbbiakban kifejezzük a többi pont helyzetvektorát A-hoz viszonyítva:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (a+1)\vec{u} + (b+1)\vec{v},$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Mivel $BD = 3BE$, írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{a+3}{3}\vec{u} + \frac{b+1}{3}\vec{v}.$$

Az $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{AN}$ vektorok kollinearitásából következik, hogy $a - 2b + 1 = 0$. Hasonló gondolatmenet alapján írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = -\left(a + \frac{2}{3}\right)\vec{u} - \left(b + \frac{2}{3}\right)\vec{v}$$

és

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\left(a + \frac{1}{2}\right)\vec{u} - (b+1)\,\vec{v}.$$

A két vektor kollinearitásából következik, hogy $2a + b + 2 = 0$. Az a és b-re felírt két összefüggés alapján $a = -1$ és $b = 0$, tehát $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ és így a négyszög paralelogramma. $\otimes$

X. osztály

1. Feladat. Határozd meg az

$$(1 + iz)^6 = i\left(1 + z^2\right)^3$$

egyenlet összes komplex megoldását!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Mivel $(1 + z^2) = (1 + iz)(1 - iz)$, az egyenlet a következőképpen írható fel:

$$(1 + iz)^6 = i(1 + iz)^3 \cdot (1 - iz)^3$$

vagyis

$$(1 + iz)^3 \cdot \left[(1 + iz)^3 - i(1 - iz)^3\right] = 0.$$

Tehát meg kell oldanunk az $(1+iz)^3 = 0$ és az

$$(1+iz)^3 - i(1-iz)^3 = 0$$

egyenleteket. Az első egyenlet egyetlen megoldása (háromszoros gyöke) az i. A második egyenlet esetében további átalakításokat végzünk:

$$(1+iz)^3 + i^3 \cdot (1-iz)^3 = 0$$

$$(1+iz+i(1-iz))((1+iz)^2 - i(1+iz)(1-iz) + i^2(1-iz)^2) = 0,$$

ahonnan $1+i+z(1+i) = 0$ vagy

$$1 + 2iz - z^2 - i - iz^2 - 1 + 2iz + z^2 = 0.$$

Tehát a megoldások a $z+1=0$ és a $z^2-4z+1=0$ egyenletekből származnak. Így az eredeti egyenlet megoldásai $i, -1$, $2+\sqrt{3}$ és $2-\sqrt{3}$. ⊛

2. Feladat. Határozd meg a

$$2^x + 9^x + 2 = 3^{x+1} + 4^x$$

egyenlet valós megoldásait!

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Az $a = 2^x$ és $b = 3^x$ jelölésekkel az eredeti egyenelet

$$a + b^2 + 2 = 3 \cdot b + a^2$$

alakba írható. Másrészt

$$a^2 - a - b^2 + 3 \cdot b - 2 = (a-b+1)(a+b-2),$$

tehát az $a = b-1$ és az $a = 2-b$ egyenleteket kell megvizsgálni. Az $1 + 2^x = 3^x$ egyenletnek az egyedüli megoldása az $x = 1$, míg a $2^x + 3^x = 2$ egyenletnek $x = 0$ (mindkét egyenlet esetén 2^x-nel végigosztunk és az egyik oldalon növekvő, a másik oldalon csökkenő kifejezés jelenik meg, tehát legfeljebb egy megoldás létezhet). ⊛

3. Feladat. Az ABC nem egyenlő oldalú háromszögben A-nak a B szerinti, B-nek a C szerinti és C-nek az A szerinti szimmetrikusat jelöljük A_1, B_1 illetve C_1-gyel. Bizonyítsd be, hogy ha O, M, az ABC háromszögben, O_1, M_1 pedig az $A_1B_1C_1$ háromszögben a háromszög köré írt kör középpontja illetve magasságpontja, akkor OO_1MM_1 trapéz!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Jelöljük minden pontnak az affixumát a megfelelő kisbetűvel (A-nak a-val, stb.). A szerkesztés és a felezőpont affixumára vonatkozó tulajdonság miatt írhatjuk, hogy $a_1 = 2b - a$, $b_1 = 2c - b$ és $c_1 = 2a - b$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$a + b + c = a_1 + b_1 + c_1,$$

tehát a két háromszögnek közös a súlypontja. Másrészt ha egy tetszőleges háromszögben O a körülírt kör középpontja, H a magasságpont és G a súlypont, akkor O, G és H egy egyenesre illeszkednek (a háromszög Euler egyenesére) és

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

Ez alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{OG}{GM} = \frac{1}{2} = \frac{O_1G}{GM_1},$$

ahol G az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek közös súlypontja. Ez alapján következik, hogy amennyiben az OO_1MM_1 négyszög nem elfajult, akkor trapéz. A bizonyítás teljességéhez azt is be kell látni, hogy ez a négyszög nem lehet elfajult. Mivel az eredeti háromszög nem egyenlő oldalú ezért $O \neq M$, tehát elégséges azt igazolni, hogy $O \neq O_1$. Ha viszont ez nem lenne igaz, akkor az

$O = O_1$ pontot tekinthetnénk a koordináta-rendszer középpontjának és így a $|a| = |b| = |c| = R$, illetve $|2b - a| = |2c - b| = |2a - c| = R_1$ egyenlőségekhez jutnánk, ahol R és R_1 a két kör sugara. Ez azt mutatja, hogy a komplex számok trigonometriai alakját érdemes használni. Valóban, ha $a = R(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $b = R(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ és $c = R(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$, akkor

$$|2b - a|^2 = R^2(5 - 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)),$$

tehát a másik két egyenlőségből következik, hogy

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_3).$$

Ennek a rendszernek a megoldásai viszont ABC-re egyenlő oldalú háromszöget eredményeznek, tehát az adott feltételek alapján OM_1MO_1 valóban trapéz. $\otimes$

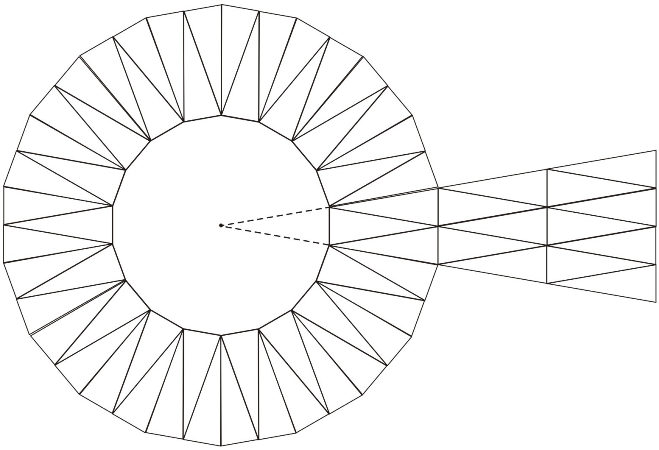
4. Feladat. Feldarabolható-e n^2 darab egybevágó szabályos $2n^2$ oldalú sokszög úgy, hogy a darabokból ki lehessen rakni egy szabályos $2n^2$ oldalú sokszöget? Ha igen, akkor adj egy lehetséges feldarabolást!

Nagy Örs, Marosvásárhely

Megoldás. Legyen az eredeti kicsi $2n^2$-szögek köré írható körök sugara 1 egység. Ekkor egy kicsi sokszög területe

$$T = 2n^2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{n^2}}{2} = n^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n^2},$$

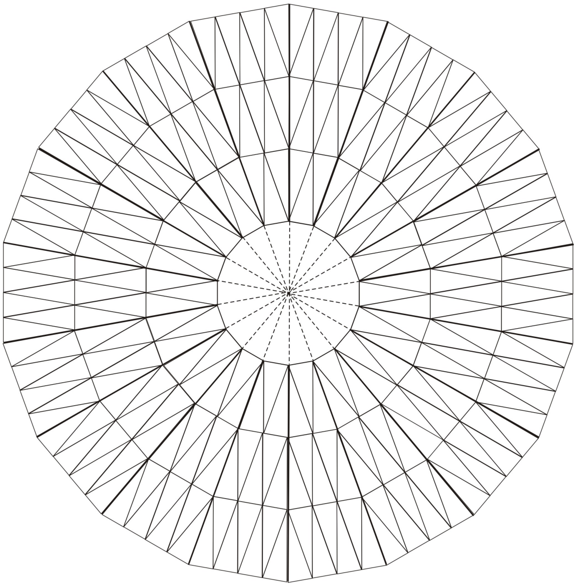
tehát a nagy sokszög területe $n^4 \cdot \sin\frac{\pi}{n^2}$ kell legyen, ahonnan a nagy sokszög köré írt kör sugara $R = n$, tehát a nagy sokszög valamely kicsi sokszög n-szeres nagyításával kapható. Daraboljuk fel az $n^2 - 1$ darab kicsi sokszöget a középpontjukat a csúcsaikkal összekötő szakaszok mentén egyenként $2n^2$ darab egybevágó egyenlő szárú háromszögre.



A keletkező $\left(n^2-1\right)\cdot 2n^2$ darab háromszöget helyezzük az épen maradt kicsi sokszög köré az ábrán látható módon. Közvetlenül a sokszög oldalaira először $3\cdot 2n^2$ darab háromszög helyezhető el, amelyek alapjaikkal illetve csúcsaikkal felváltva illeszkednek a sokszög oldalaihoz. Hasonlóan folyatva a kicsi háromszögek elhelyezését, a következő szintre $5\cdot 2n^2$, majd $7\cdot 2n^2, \ldots, (2n-1)\cdot 2n^2$ darab háromszög helyezhető el. Így összesen

$$(3+5+7+\ldots+(2n-1))\cdot 2n^2=\left(n^2-1\right)\cdot 2n^2,$$

tehát az összes kicsi háromszög elhelyezhető a kicsi sokszög köré és az eredmény a nagyobb, szintén szabályos sokszög. $n=3$ esetén az alábbi ábrán látható a kis háromszögekből és a kis sokszögből összerakott nagyobb sokszög.



⊛

XI. osztály

1. Feladat. Az $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sorozatban $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ és

$$a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Számítsd ki az $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \cos\left(\dfrac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right)$ sorozat határértékét!

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Észrevesszük, hogy $a_1 \vdots 2$, $a_2 \vdots 2^2$, és a matematikai indukció segítségével igazoljuk, hogy $a_n \vdots 2^n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$. Ha tekintjük a $P(n): \quad a_n \vdots 2^n$ kijelentést, akkor $P(1)$ és $P(2)$ igaz kijelentések. Ha feltételezzük, hogy $P(k)$ és $P(k+1)$ igazak valamilyen $k \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor írhatjuk, hogy

$$a_{k+2} = 2\cdot a_{k+1} + 4\cdot a_k = 2\cdot 2^{k+1}\cdot z_{k+1} + 4\cdot 2^k\cdot z_k = 2^{k+2}\cdot\left(z_{k+1} + z_k\right),$$

ahol $z_{k+1}, z_k \in \mathbb{N}$. Így $a_{k+2} \vdots 2^{k+2}$, tehát $P(k+2)$ is igaz. A matematikai indukció elve alapján $P(n)$ igaz minden $n \geq 1$ természetes számra, tehát bármely $n \geq 1$ esetén létezik $z_n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n = 2^n \cdot z_n$. Emiatt

$$x_n = \cos\left(\frac{a_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right) = \cos\left(\frac{2^n \cdot z_n \cdot \pi}{2^{n-1}}\right) = \cos\left(2 \cdot z_n \cdot \pi\right) = 1,$$

tehát az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat egy állandó sorozat, amelynek a határértéke 1. $\circledast$

2. Feladat. Adott az

$$A = \begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Írd fel az A mátrix determinánsát a, b, c-ben elsőfokú kifejezések szorzataként!

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. Tekintjük a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

mátrixot, amelynek a determinánsa Vandermonde tipusú, tehát

$$\det B = (b-a)(c-b)(c-a).$$

Ugyanakkor

$${}^tB \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\det A = \det\left[{}^tB \cdot B\right] = \det\left[{}^tB\right] \cdot \det B = (\det B)^2 =$$

$$= (c-a)^2 \cdot (c-b)^2 \cdot (b-a)^2.$$

$\circledast$

3. Feladat. Adottak a síkban az $A_n\left(x^n, y^n\right)$, $x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ pontok és a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat, ahol t_n az $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszög területét jelenti. Határozd meg az A_1 pont koordinátáit, ha a $(t_n)_{n\geqslant 2}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{3}{8}$.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. $t_n = \frac{1}{2}\left|\Delta\right|$, ahol

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^{n-1} & y^{n-1} & 1 \\ x^n & y^n & 1 \\ x^{n+1} & y^{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

A determináns kiszámítása után kapjuk, hogy

$$t_n = \frac{\left|(xy)^{n-1}(x-1)(y-1)(y-x)\right|}{2},$$

tehát a határérték tulajdonságai alapján

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } |xy| > 1 \text{ és } x \neq 1, y \neq 1, \\ & x \neq y; \\ 0, & \text{ha } |xy| < 1 \text{ vagy} \\ & x = 1 \text{ vagy } y = 1 \text{ vagy } x = y; \\ \frac{|(x-1)(y-1)(y-x)|}{2}, & \text{ha } |xy| = 1. \end{cases}$$

Mivel a feladat feltétele alapján $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{3}{8}$, írhatjuk, hogy $|xy| = 1$ és $\frac{|(x-1)(y-1)(y-x)|}{2} = \frac{3}{8}$. Ha $xy = -1$, akkor $y = -\frac{1}{x}$ és az egyenlet így alakul:

$$\frac{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^2} = \pm\frac{3}{4},$$

amelynek nincs egész megoldása. Ha $xy = 1$, akkor $y = \frac{1}{x}$ és a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^2} = \pm\frac{3}{4},$$

amelynek egyetlen egész megoldása az $x = 2$. Így tehát $y = \frac{1}{2}$, és A_1 koordinátái $A_1\left(2, \frac{1}{2}\right)$. ⊛

4. Feladat. Adott $a > 0$ és $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ szám segítségével értelmezzük az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot a következő módon:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{p-1} + 1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Konvergens-e az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat?

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[p]{n}}$$

határértéket!

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. a) Ha a sorozat konvergens lenne, létezne $l \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$. A rekurzióban határértékre térve az $\frac{1}{l^{p-1}+1} = 0$ egyenlőséghez jutunk, ami nem lehetséges, tehát a sorozat nem konvergens. Továbbá $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^{p-1}+1} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, tehát a sorozat szigorúan növekvő. Az eddigiekből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[p]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{\frac{a_n^p}{n}} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^p}{n}}$. Ez utóbbi határérték kiszámítására a Cesàro-Stolz tételt alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^p - a_n^p}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(a_n + \frac{1}{a_n^{p-1}+1}\right)^p - a_n^p\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{p} C_p^k a_n^{p-k} \frac{1}{\left(a_n^{p-1}+1\right)^k} - a_n^p\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} C_p^k a_n^{p-k} \frac{1}{\left(a_n^{p-1}+1\right)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(C_p^1 \frac{a_n^{p-1}}{a_n^{p-1}+1} + C_p^2 \frac{a_n^{p-2}}{\left(a_n^{p-1}+1\right)^2} + \dots + C_p^p \frac{1}{\left(a_n^{p-1}+1\right)^p} \right)$$

$$= C_p^1 = p.$$

Innen következik, hogy a keresett határérték

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[p]{n}} = \sqrt[p]{p}.$$

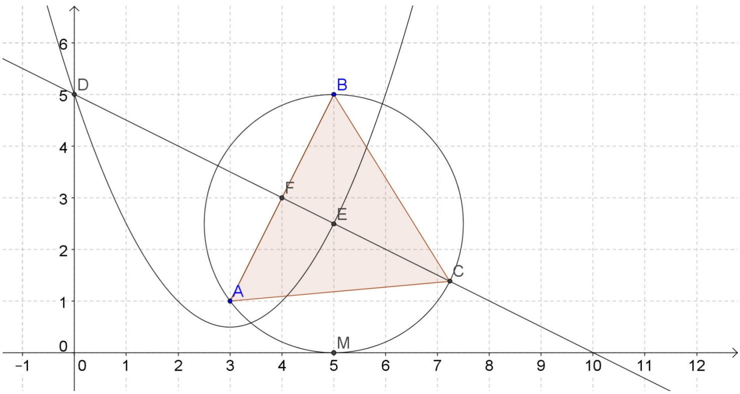
⊗

XII. osztály

1. Feladat. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(3,1)$ és $B(5,5)$. A háromszög köré írt kör érinti az Ox tengelyt és nincs közös pontja az Oy tengellyel. Határozd meg a háromszög harmadik csúcspontjának koordinátáit úgy, hogy az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb legyen!

Nagy Örs, Marosvásárhely

Megoldás. A háromszög köré írt kör meghatározásának érdekében, előbb meghatározzuk a kör középpontjának koordinátáit.



Ez rajta van az AB húr felezőmerőlegesén. Az AB felezőpontjának koordinátái $F(4,3)$ és a felezőmerőleges egyenlete

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

Ekkor a kör középpontja: $E\left(x_0, -\frac{1}{2}x_0 + 5\right)$. Másrészt E ugyanolyan távol van A-tól, mint az x tengelytől, vagyis rajta van az A fókuszú, x-tengely vezéregyenesű parabolán, melynek egyenlete:

$$y = \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5.$$

A fentiekből kapjuk, hogy S$-\frac{1}{2}x_0 + 5 = \frac{1}{2}x_0^2 - 3x_0 + 5, S$ ahonnan $x_0 = 0$ (ami nem lehet, mert akkor metszené az y tengelyt) vagy $x_0 = 5$. Tehát $E\left(5, \frac{5}{2}\right)$, a kör egyenlete pedig $(x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. A háromszög területe akkor maximális, ha az AB oldalhoz tartozó magasság a legnagyobb. Ez akkor teljesül, amikor a harmadik pont a háromszög köré írt körön, az AB-től a legtávolabb van, vagyis az AB felezőmerőlegesének és a körnek a metszéspontja. Behelyettesítve a kör egyenletébe $y = -\frac{1}{2}x + 5$-öt, kapjuk, hogy $x_C = 5 \pm \sqrt{5}$ és $y_C = \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$, ahonnan csak a $C\left(5 + \sqrt{5}, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ pont felel meg. $\circledast$

12. Megjegyzés. A kör E középpontjának ordinátája az $AE = EM$ miatt megegyezik az AE távolsággal. Így dolgozva nincs szükség a parabola egyenletére.

2. Feladat. Adottak a $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - x + 2$ és $Q(x) = x^2 + 5x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvények. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan injektív függvény, amelyre a $P \circ f$ és a $Q \circ f$ függvényeknek létezik primitív függvénye, bizonyítsd be, hogy f folytonos!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Tekintjük az $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(x) = P(x) + Q(x)$ függvényt. Mivel $R'(x) = 3x^2 + 2x + 4 > 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, az R függvény szigorúan növekvő, tehát injektív. Ugyanakkor $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x) = -\infty$, tehát R bijektív. Így létezik az inverze és az inverze is folytonos (mivel $R'(x) > 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$). Másrészt a $H = (P + Q) \circ f$ függvénynek létezik primitív függvénye és két injektív függvény összetételeként injektív is, tehát szigorúan monoton és folytonos. Ugyanakkor írhatjuk, hogy

$$f = \left(R^{-1} \circ R\right) \circ f = R^{-1} \circ (R \circ f) = R^{-1} \circ H,$$

tehát f két folytonos függvény összetétele és így folytonos. $\circledast$

3. Feladat. Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 6, a_2 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 3a_n + 3}, n \geq 2.$$

a) Mennyi a sorozat 2013-dik tagjának egész része?

b) Értelmezhető-e az $X = \{a_n | n \geq 1\}$ halmazon olyan $\bigoplus : X \times X \to X$ műveletet, amelyre az $(X, \bigoplus)$ struktúra csoport és izomorf a $(\mathbb{Z}, +)$ csoporttal?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. **a)** Az adott sorozat további tagjai: $a_3 = 4$, $a_4 = 2\frac{2}{7}$, $a_5 = 3\frac{55}{67}$. A sorozat minden tagja pozitív mivel $a_n^2 - 3a_n + 3 > 0$ az a_n bármilyen valós értékére.

$$a_{n+1} - 4 = \frac{-3(a_n - 2)^2}{a_n^2 - 3a_n + 3},$$

tehát a $a_n \leq 4$, ha $n \geq 3$.

$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\frac{a_n^2 - 9a_n + 9}{a_n^2 - 3a_n + 3} > 0,$$

tehát matematikai indukcióval igazolható, hogy $n \geq 1$ esetén $\frac{3}{2} < a_n$ (a $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ intervallum a számlálóban megjelenő kifejezés gyökei közt van).

$$a_{n+1} - 3 = \frac{-(a_n - 3)(2a_n - 3)}{a_n^2 - 3a_n + 3},$$

tehát az előbbi tulajdonság alapján szintén matematikai indukcióval igazoljuk, hogy ha $a_n > 3$, akkor $a_{n+1} < 3$ és fordítva. Ezek alapján, a sorozat páros rangú tagjai $\frac{3}{2}$ és 3 közötti, páratlan rangú tagjai pedig 3 és 4 közötti számok a 4. tagtól kezdve. Tehát a sorozat 2013. tagjának egész része 3.

b) Előbb szerkesztünk egy bijektív függvényt az $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ és a $\mathbb{Z}$ halmazok közt. Egy lehetőség az $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, függvény, amelyre $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2k) = k$, $\varphi(2k+1) = -k$, bármely $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Ennek a segítségével létrehozhatunk X és $\mathbb{Z}$ közt bijekciót a következő módon: bármely $x \in X$ esetén létezik egyértelmű $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $x = a_n$, tehát értelmezhetjük az $f(x)$ értéket az $f(x) = \varphi(n)$ kifejezéssel. Így értelmeztünk egy $f : X \to \mathbb{Z}$ bijektív függvényt. Ennek az inverzével a $(\mathbb{Z}, +)$-beli műveletet átvisszük az X-re a következő módon:

$$\forall x, y \in X : x \bigoplus y := f^{-1}\left(f(x) + f(y)\right).$$

Az így kapott $(X, \bigoplus)$ struktúra izomorf $(\mathbb{Z}, +)$-szal és f az izomorfizmus köztük. $\circledast$

13. Megjegyzés. a Mivel

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n(a_n-1)(a_n-3)}{a_n^2 - 3a_n + 3}, \text{ és}$$

$$a_{n+2} - a_n = \frac{-a_n(a_n-1)(a_n-3)^3}{a_n^4 - 9(a_n-1)(a_n^2 - 3a_n + 3)},$$

a sorozat páros rangú tagjai szigorúan növekvő, a páratlan rangú tagjai szigorúan csökkenő részsorozatot alkotnak, mindkét részsorozat konvergens, közös határértékük a 3, ami egyben a sorozat határértéke is. Belátható, hogy teljesül az

$$a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + ... + 3^{n-1}a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$$

azonosság is, bármely $n \geq 1$ esetén.

b) Az előbbi szerkesztés egy tetszőleges megszámlálható halmazon (pl. végtelen sok különböző tagból álló sorozaton) elvégezhető.

4. Feladat. Az $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos függvény teljesíti az

$$(x+1)f(f(x)) = 2xf(x) - 1, \quad x > 0$$

függvényegyenletet, ahol $f(1) \geq 2$. Számítsd ki $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ értékét!

Kovács Lajos, Székelyudvarhely
András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Jelöljük $f(1)$ értékét a-val. Ha az adott egyenlőségbe $x = 1$-et, helyettesítünk, akkor az $f(a) = a - \frac{1}{2}$ egyenlőséghez jutunk. Mivel $a \geq 2 > 1$ írhatjuk, hogy $f(1) > 1$ és $f(a) < a$. Így a $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ folytonos függvény 1 és a közt előjelet vált. Tehát létezik olyan $x_0 \in (1, a)$, amelyre $f(x_0) = x_0$. Ha a feladat szövegében szereplő egyenlőségben x-nek éppen x_0-t választunk, akkor az $x_0^2 = x_0 + 1$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan következik, hogy $x_0 \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. Mivel $1 - \sqrt{5} < 0$, csak az lehetséges, hogy $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és így

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

⊛

14. Megjegyzés. A megoldás teljességéhez az is hozzátartozik, hogy létezik ilyen f függvény. Például $f(1) = 2$ esetén az $f(x) = \frac{x+1}{x}$ teljesíti a függvényegyenletet és $f(1) \geq 2$ esetén megszerkeszthető a megoldás.

A versenyen résztvevő tanárok névsora

Betuker Enikő	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Bíró Béla	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Bíró Zoltán	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Bors Violetta	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Dáni Zsuzsa	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Deák Éva	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Egyed Géza	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Hatházi Anna-Mária	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
István Zoltán	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Jámbor Csilla	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Koczinger Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
ifj. Kolumbán József	Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Kovács Erzsébet	Téglás Gábor Iskolaközpont, Déva
Kovács Lajos	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Mátéfi István	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy Ildikó	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Nagy Olga	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Nemes András	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Oláh Ilkei Árpád	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Páll Rákhel Olga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Péter András	Csíky Gergely Főgimnázium, Arad
Simó Margit	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Simon János	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szél Gyöngyi	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Szijjártó Tünde	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Takács Attila János	Leőwey Klára Elméleti Líceum, Máramarossziget
Tamási Csaba	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Turdean Katalin Zsuzsanna	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Vandra Mária	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó

A versenyen résztvevő diákok névsora

IX. osztály

Ágoston Péter	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Akkerman Kinga	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Anghel Anna	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Baló Tímea-Katalin	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Batiz Orsolya	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Benedek Zoltán	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Bocz Hunor - Chris	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Bodoni Adrienn	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Boldizsár Zoltán	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Boros Zoltan	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Burus Endre	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Cara Alessio	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Chevul Alexandru	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Dudás Norbert	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Élthes Zoltán Zsombor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Füstös Ágnes	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gábor Csaba-László	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gál Krisztina	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Gricz Alexandra	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Hegedüs Hunor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Ionas Henrietta	Zajzoni Rab István Középiskola, Négyfalu
Ispas Róbert	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Jakab Edina	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Józsa Máté	Tamási áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Juhász Dóra	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Karda Edith	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kerestély Réka	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kiss Gergely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kiss Hunor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Kocsis Bernadett	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Kosztin Anna	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kovács Ádám	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda

Kovács Ákos	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Kovács Ivett	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium, Nagyvárad
Kovács Yvonne	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Komán Attila	Plugor Sándor Művészeti Szakközépiskola, Sepsiszentgyörgy
Laczkó Gyula-Tihamér	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Lukács Róbert	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Miklós Botond	Zajzoni Rab István Középiskola, Négyfalu
Moldován Balázs	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Nagy Attila Levente	Leőwey Klára Elméleti Líceum, Máramarossziget
Olteán-Péter Boróka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Osztián Pálma Rozália	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Papp Andrea Kinga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Rab Zsolt	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Schefler Gergő	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti
Simó Anita	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Sisa Rihárd	Csíky Gergely Főgimnázium, Arad
Sütő Ágoston	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szabó Eszter	Petru Maior Iskolaközpont, Szászregen
Szász Zsombor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Szopos -Pap Felix	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Szűcs Róbert	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Tasnádi Tulogdi Tamás	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Zsigmond Botond	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely

X. osztály

Bács Béla	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Baricz Anita-Zsuzsanna	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Beiland Arnold	Nagykárolyi Elméleti Líceum, Nagykároly
Biró Enikő	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Biró Timea	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Bocz Péter	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Boga Biborka	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Borsos Bálint	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Csala Hunor	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Csestanovits Judith	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Csutak Balázs	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Dombi Kristóf Barnabás	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Ecsedi Flóra Rebeka	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Farkas Eszter	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Fűsűs Bettina Juliánna	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Gagyi Mátyás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Gotha Guntter István	Leőwey Klára Elméleti Líceum, Máramarossziget
Gyarmathy Tìmea	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Horváth Ilka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Jenei Csilla	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Juhos Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Kelemen Kinga Orsolya	Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium, Székelyudvarhely
Kiss Anna Bernadett	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Koncz Botond	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Kopacz Anikó	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Kovács Péter Róbert	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Kucsván Zsolt	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Laczkó Hunor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Lazăr Ioan	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Marthi Andrea	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Mester Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Nánia Csilla	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Nagy Imola	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy István	Szilvánia Főgimnázium, Zilah

Nagy László	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Nagy Lilla	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Nagy Xénia Abigél Irén	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Pál Magos Andrea	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Puskás-Bajkó Tímea	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Salánki Dániel	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Simon Ádám	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Sólyom Gellért	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Szabó Bálint	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Szabó Izabella	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Szász Apolka	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Szegi Máté	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Székely Attila	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Tókos Dezső	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Veres Kincső	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

XI. osztály

Bîtoancă Isabela	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Borbély Andor	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Buidin Thomas Imre Cyrille	Báthory István Elméleti Líceum , Kolozsvár
Csáki Tamás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Csutak Balázs	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Dávid Márk Tamás	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Erős Csilla	Petru Maior Középiskola, Szaszrégen
Farkas-Páll Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Gulyás Beatrix	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Hegedüs Zsófia	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kálmán Noémi	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Kántor Zsolt	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kari Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kelemen Szabolcs	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kémenes Attila	Nagy Mózes ELméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kis Nándor	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Kócs Krisztián	Colegiul National Mihai Eminescu, Nagyvárad

Kolumbán Antal György	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kovács Ágota	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Lacz Eszter	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lántzky Anna	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lorenzovici Zsombor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mag István	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Magdó Dorottya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Makkai Hanna-Borbála	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Megyesfalvi Botond	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Miklós Aba Lóránt	Baróti Szabó Dávid Középiskola , Barót
Rancz Sándor	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Rétyi Dorottya	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Sallai Eliza	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Sandy Bálint	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Soós Ildikó Csilla	Baróti Szabó Dávid Középiskola , Barót
Szász Tamás-Csaba	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Székely István	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Szőcs Tamás	Baróti Szabó Dávid Középiskola , Barót
Tamási Tímea	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Tóth Melinda	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Varga Cecília	Téglás Gábor Iskolaközpont, Déva
Zemba Ákos	Nagy Mózes ELméleti Líceum, Kézdivásárhely

XII. osztály

Benkő Beatrix	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Bîrsan Norbert	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Borbély Ruben	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Boros Bernadett	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Dudás Ádám	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Faluvégi Ágota	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Farkas Izabella Ingrid	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Fechete Tiberiu	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Gazsa Gergő	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Gothárd Szabolcs	Tamási áron Gimnázium, Székelyudvarhely

Halada Szilárd	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Jani András	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Jaskó György	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kajántó Sándor	Tamási áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kurunczi Papp Dávid	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
László Gábor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Máté Attila-Barna	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Máté Brigitta	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Máté Péter	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Magyar Lilla	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Megyesi Attila	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Molnár Zsolt	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Nemes András Zoltán	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Oláh Mátyás	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Páll Katinka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Polyánki Csaba	Arany János Elméleti Líceum, Nagyszalonta
Püsök Nóra	Tamási áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Smeu Júlia	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Székely Ádám	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Székely Réka	Téglás Gábor Iskolaközpont, Déva
Szabó-Sinka Sámuel	Református Gimnázium, Sepsiszentgyörgy
Zsebe Enikő	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár

A feladatok szerzőinek névjegyzéke