VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Adottak a következő halmazok, ahol $u(p)$ a p szám utolsó számjegyét jelöli:

$$A = \{1 + u(1^{2024});\ 2 + u(2^{2024});\ 3 + u(3^{2024});\ 5 + u(5^{2024})\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = u(a),\ a \in A\},$$
$$C = \{b \in \mathbb{N} \mid b = u(y^2),\ y \in \mathbb{N}\}.$$

a) Határozd meg az A, B, C halmazokat az elemeik felsorolásával!

b) Határozd meg az $[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B]$ halmaz elemeinek számát!

Hodgyai Edit, Micske
Máthé Attila-István, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel

$$1 + u(1^{2024}) = 2,$$
$$2 + u(2^{2024}) = 8, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$3 + u(3^{2024}) = 4,$$
$$5 + u(5^{2024}) = 10, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért $A = \{2; 4; 8; 10\} \Rightarrow B = \{0; 2; 4; 8\}$ **(1 pont)**
A négyzetszámok utolsó számjegyei $0; 1; 4; 5; 6; 9$, ezért $C = \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$. **(1 pont)**

b) Elvégezve a halmazok közötti szükséges műveleteket kapjuk, hogy

$$A \setminus B = \{10\},$$
$$B \setminus A = \{0\},$$
$$A \cup C = \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10\}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 10\}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$(A \cup C) \setminus B = \{1; 5; 6; 9; 10\}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B] = \{10\}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így a kért halmaz elemeinek a száma 1. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Egy téglalap alakú papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 5 és függőlegesen 60 egyenlő részre osztunk. Így egy négyzethálós lapot kapunk. Igazold, hogy ha egy ugyanakkora méretű papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 14, míg függőlegesen 168 egyenlő részre osztunk, akkor az így keletkezett háló kis téglalapjai négyzetek!

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen az első esetben kapott négyzetháló kis négyzeteinek oldalhossza x. Ekkor a papírlap oldalainak hossza $5x$, illetve $60x$. **(1 pont)**

A második felosztás során a kis téglalap oldalainak hossza legyen u és v. Így a papírlap oldalainak hossza $14u$, illetve $168v$. **(1 pont)**

Mivel mindkét esetben a papírlapok megegyező méretűek, ezért felírható, hogy:

$$5x = 14u \Rightarrow \frac{x}{u} = \frac{14}{5} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$60x = 168v \Rightarrow \frac{x}{v} = \frac{14}{5} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

azaz

$$\frac{x}{u} = \frac{x}{v}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ami akkor lehetséges, ha $u = v$. **(1 pont)**

Tehát a második esetben kapott téglalapok négyzetek. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont)**.** Adott az O középpontú és AB átmérőjű kör, F pedig az AO szakasznak egy tetszőleges belső pontja. Vedd fel az AF átmérőjű és C középpontú kört, majd a BC átmérőjű és E középpontú kört! Legyen a két kör sugara $AC = r$ és $EB = R$.

a) Számítsd ki az OE és OC szakaszok hosszát R és r segítségével!

b) Ha $OE = OF$, határozd meg az $\dfrac{AC}{CB}$ arány értékét!

c) Ha az F pont egybeesik az O ponttal, számítsd ki az $\dfrac{AC}{CB}$ arány értékét!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

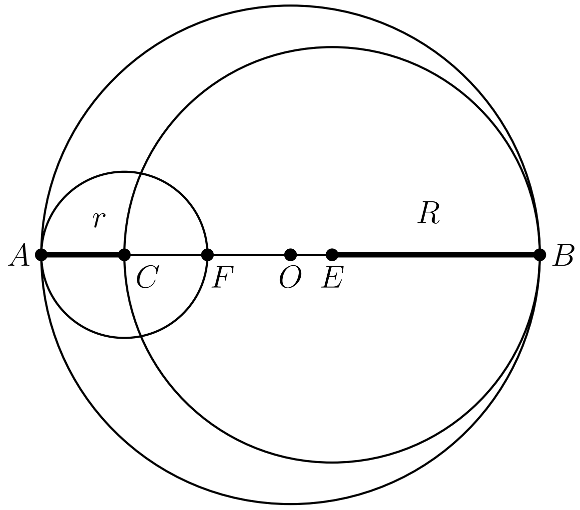
a) Mivel

$$AB = 2R + r \Rightarrow OB = \frac{2R + r}{2} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

így

$$OE = OB - EB = \frac{2R + r}{2} - R = \frac{r}{2}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$OC = OA - CA = \frac{2R + r}{2} - r = \frac{2R - r}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$



b) Mivel

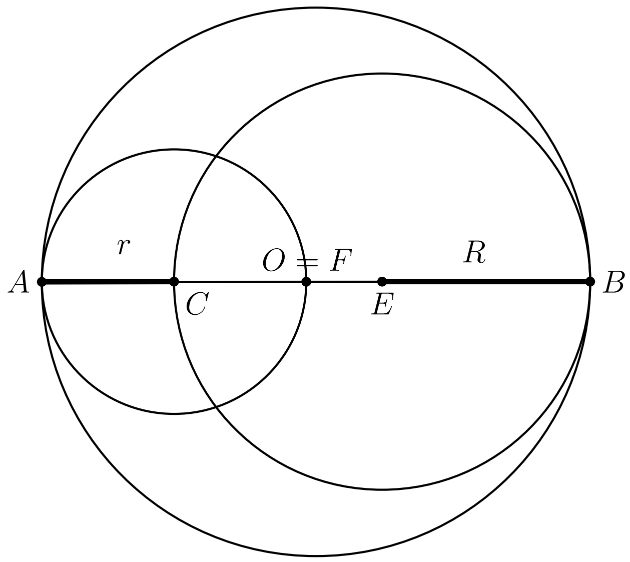
$$OF = OA - FA = \frac{2R+r}{2} - 2r = \frac{2R-3r}{2} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és

$$OE = OF \Leftrightarrow \frac{r}{2} = \frac{2R-3r}{2} \Leftrightarrow R = 2r. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Így

$$CB = 4r \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$



c) *Első megoldás.* Felhasználva az *a)* pontban kapott eredményt és tudva, hogy $OC = r$ kapjuk, hogy

$$OC = \frac{2R-r}{2} = r. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát

$$2R - r = 2r \Rightarrow r = \frac{2}{3}R \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Így

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\frac{2}{3}R}{2R} = \frac{1}{3}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

c) *Második megoldás.* Mivel

$$AC = CO = r \Rightarrow AB = 4r, \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$CB = AB - AC = 3r. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Így

$$\frac{AC}{CB} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6),\ n \leq 2024,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz összes elemét felírjuk a táblára. Letörölünk két számot, majd helyette felírjuk, a letörölt két szám összegének 11-gyel való osztási maradékát. Ezeket a lépéseket ismételve egy idő múlva a táblán az 1003 és még egy szám maradt.

a) Legyen s az A halmaz elemeinek összege. Határozd meg az s osztóinak számát!

b) Melyik szám maradt az 1003 mellett a táblán?

Hamar Erzsébet, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6)$$
$$x = n \cdot (2^{72} + 3^{36} + 5^{24}) : (2^{72} + 3^{36} + 5^{24}) \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$x = n \Rightarrow A = \{1; 2; 3; \ldots ; 2024\} \quad \textbf{(1 pont)}$$

Így $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2024 = 2025 \cdot 1012 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^1 \cdot 23^1$, **(1 pont)**

tehát az összeg osztóinak száma: $d_s = (2 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 180$. **(1 pont)**

b) Ez előző alpont alapján kezdetben a táblán lévő számok összege $s = 2025 \cdot 1012$, ami osztható 11-gyel. **(1 pont)**

Ha két számot letörölünk és visszaírjuk azok 11-el való osztási maradékát, a táblán lévő számok összegének 11-gyel való osztási maradéka nem változik. **(1 pont)**

Valóban, ha a két letörölt szám a és b és ezek összegének 11-gyel való osztási maradéka m, akkor

$$a + b = 11c + m$$

ahol $c \in \mathbb{N}$, így $m-(a+b)$ osztható 11-gyel, tehát az új összeg egy 11-gyel osztható számmal módosult a régihez képest. **(2 pont)**

Mivel 1003 nem egy 11-gyel való osztási maradék ($1003 \notin \{0, 1, 2, \ldots , 12\}$), ezért a táblán maradt másik szám biztosan az. Viszont az 1003 szám 11-gyel való osztási maradéka 2, és az összeg osztható 11-gyel, ezért a másik szám 9. **(1 pont)**

■