

Centrul National de Evaluare și Examinare



III. országos magyar matematikaolimpia XXX. EMMV

megyei szakasz, 2020. január 18.

V. osztály

1. feladat. Anna 1-től kezdve, sorban írja a természetes számokat: 1, 2, 3, Melyik számot írja, ha a 2020. számjegynél tart? Melyik a 2020. számjegy?

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás. A következőket vehetjük észre:

1-től 9-ig 9 darab egyjegyű szám van, ez összesen 9 számjegy.

10-től 99-ig 90 darab kétjegyű szám van, ez összesen 180 számjegy.

100-tól 999-ig 900 darab háromjegyű szám van, ez összesen 2700 számjegy. (3 pont)

Mivel 9 + 180 + 2700 > 2020, ezért nem kell az összes háromjegyű számot leírni.

Tehát Anna háromjegyű számnak megfelelő számjegyből 2020 - 189 = 1831 számjegyet írt le.

(**2** pont)

Az 1831-et hárommal osztva a hányados 610, a maradék 1. Ez azt jelenti, hogy Anna 610 darab háromjegvű számot írt le és még egy számjegyet. (2 pont)

Mivel 100-tól 709-ig 610 darab szám van, így a 2020. számjegy a 710-ben van és ez a számjegy a 7-es.

(2 pont)

Hivatalból

(1 pont)

2. feladat. Igazold, hogy

a) $2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017}$ nem teljes négyzet; b) $2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008}$ teljes négyzet és teljes köb!

Nagy Örs, Kolozsvár

$$u(2^{2017}) = u(2^{4\cdot 504+1}) = 2$$
, tehát 2^{2017} nem teljes négyzet. (2 pont)

A fenti gondolat helyett elég észrevenni, hogy a 2²⁰¹⁷ páratlan számú 2-es prímtényezőt tartalmaz és ezért nem teljes négyzet.

b)

$$2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = 2 \cdot 2^{2019} - 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} =$$

$$= 2^{2019} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} =$$

$$= 2 \cdot 2^{2018} - 2^{2018} - \dots - 2^{1008} =$$

$$= 2^{2018} - \dots - 2^{1008} = \dots = 2^{1008}$$
(2 pont)

Mivel
$$2^{1008} = (2^{504})^2$$
, ezért 2^{1008} teljes négyzet. (1 pont)

Ugyanakkor
$$2^{1008} = (2^{336})^3$$
, ezért 2^{1008} teljes köb. (1 pont)
Hivatalból (1 pont)

(1 pont)

3. feladat. Egy előadás előtt sor alakult ki a pénztárnál. Andor, aki közvetlenül Balázs előtt állt, megszámolta, hogy hányan vannak és azt mondta: mögöttem 5-ször többen állnak, mint előttem. Ekkor Csongor, aki közvetlenül Balázs mögött állt, szétnézett és így szólt: mögöttem 3-szor többen állnak, mint előttem. Hány ember állt a sorban?

Matlap

Megoldás. Szakaszos ábrázolás módszerével a következőket írhatjuk:

Andor előtt:
$$a$$
 Andor után: a a a a a a a a a (2 pont)

Csongor előtt:
$$a AB \over a+2$$
 személy

Csongor után:
$$a AB a AB a AB (a+2)$$
 személy (2 pont)

Mivel Andor után 2-vel több személy áll, mint Csongor után, ${\bf (2~pont)}$ ezért

$$5a = 3(a+2) + 2 \iff 5a = 3a + 8 \iff 2a = 8 \iff a = 4$$
 (2 pont)

Tehát a sorban összesen
$$a + 1 + 5a = 25$$
 személy áll. (1 pont)

Hivatalból (1 pont)

Megjegyzés. Más ábrázolási lehetőség:

$$\underbrace{\ldots, A, B, Cs, \ldots}_{a}, \underbrace{A, B, Cs, \ldots}_{5a}$$

innen 3(a + 2) + 2 = 5a, ahonnan a = 4.

4. feladat. Egy színházban egy színdarabot háromszor adtak elő. Az első előadáson 370 diákjegyet és 250 felnőttjegyet adtak el. A második előadáson 260 diákjegy és 360 felnőttjegy kelt el, a bevétel pedig 660 lejjel volt nagyobb, mint az első előadáson. A harmadik előadáson 470 diákjegy és 200 felnőttjegy fogyott el, a bevétel pedig 300 lejjel volt több, mint az első előadáson. Mennyibe került egy felnőttjegy, valamint egy diákjegy külön-külön?

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Legyen d egy diákjegy és f egy felnőttjegy ára.

1. előadás bevétele: 370d + 250f

2. előadás bevétele:
$$260d + 360f = 370d + 250f + 660$$
 (1) (1 pont)

3. előadás bevétele:
$$470d + 200f = 370d + 250f + 300$$
 (2) (1 pont)

Az (1) összefüggés mindkét oldalából levonva 250 f-et és 260 d-t kapjuk, hogy

$$110f = 110d + 660 \iff f = d + 6.$$
 (2 pont)

A (2) összefüggés mindkét oldalából levonva 200 f-et és 370d-t kapjuk, hogy

$$100d = 50f + 300 \quad \Longleftrightarrow \quad 2d = f + 6. \tag{2 pont}$$

Behelyettesítve:
$$2d = d + 6 + 6$$
. (1 pont)

Tehát egy diákjegy ára
$$d = 12$$
 lej, míg egy felnőttjegy ára $f = 18$ lej. (2 pont)