# XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

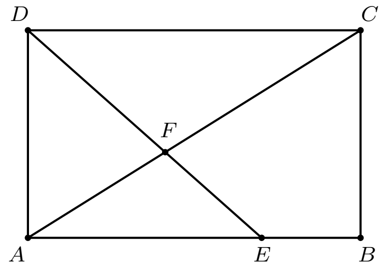
**Nagyvárad, 2024. április 24–28.**

## IX. osztály

**1. feladat** (10 pont)**.** Legyen $E$ az $ABCD$ téglalap $AB$ oldalának egy belső pontja és $\{F\} = AC \cap DE$. Ha az $AFD$ háromszög területe $5\,\text{cm}^2$, az $AFE$ háromszögé pedig $4\,\text{cm}^2$, számítsd ki az $EBCF$ négyszög területét!

*Angyal Andor, Szabadka*

*Első megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát.




Mivel az $AFE$ és $AFD$ háromszögek $AF$ oldala közös, valamint az $FE$, illetve az $FD$ oldalai egy egyenesen vannak, ezért

$$\frac{FE}{FD} = \frac{T_{AFE}}{T_{AFD}} = \frac{4}{5}.$$ **(3 pont)**

Másrészt, mivel az $AFE$ és $CFD$ háromszögek $AE$, illetve $CD$ oldalai párhuzamosak egymással, ezért a két háromszög hasonló. Innen következik, hogy

$$\frac{T_{AFE}}{T_{CFD}} = \left(\frac{FE}{FD}\right)^2 = \frac{16}{25},$$

vagyis $T_{CFD} = \frac{25}{4}\,\text{cm}^2$. **(3 pont)**
Végül, mivel az $ABCD$ téglalapban $AC$ átló, ezért $T_{ACD} = T_{ACB}$, vagyis

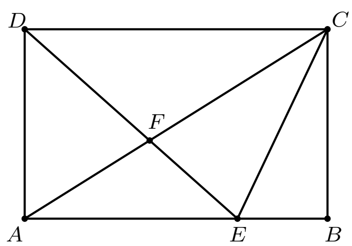
$$T_{AFD} + T_{CDF} = T_{AFE} + T_{EBCF}.$$

A fentiek alapján

$$T_{EBCF} = T_{AFD} + T_{CDF} - T_{AFE} = 5\,\text{cm}^2 + \frac{25}{4}\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = \frac{29}{4}\,\text{cm}^2.$$ **(3 pont)**

■

*Második megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát.



Az $AECD$ trapézban az $ADE$ és $ACE$ háromszögek területe megegyezik (közös az $AE$ alap és ugyanakkora a magasság). Innen következik, hogy

$$5\,\mathrm{cm}^2 = T_{AFD} = T_{AED} - T_{AEF} = T_{ACE} - T_{AEF} = T_{EFC}. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Ugyanakkor,

$$\frac{T_{AFD}}{T_{FDC}} = \frac{AF}{FC} = \frac{T_{AFE}}{T_{EFC}},$$

ahonnan következik, hogy

$$T_{FDC} = \frac{T_{AFD} \cdot T_{EFC}}{T_{AFE}} = \frac{25}{4}\,\mathrm{cm}^2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

Az $ABCD$ téglalapban $AC$ átló, ezért $T_{ACD} = T_{ACB}$. Az előbbi összefüggések alapján

$$T_{EBCF} = T_{AFD} + T_{FDC} - T_{AFE} = 5\,\mathrm{cm}^2 + \frac{25}{4}\,\mathrm{cm}^2 - 4\,\mathrm{cm}^2 = \frac{29}{4}\,\mathrm{cm}^2. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

■

**2. feladat** (10 pont)**.** Legyen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ a természetes számok halmaza. Bizonyítsd be, hogy

a) a $\{6^x + 6^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \neq y\}$ halmaz egyetlen eleme sem négyzetszám;

b) a $\{3^x + 3^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x \neq y\}$ halmazban végtelen sok négyzetszám található!

*dr. Kántor Sándor, Debrecen*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha $x \in \mathbb{N}$, akkor a $6^x$ kifejezés utolsó számjegye 1 vagy 6.
Ez alapján, ha $x, y \in \mathbb{N}$, akkor a $6^x + 6^y$ kifejezés utolsó számjegye 2 vagy 7. **(2 pont)**
Egy négyzetszám utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet, ezért a megadott halmaz egyetlen eleme sem lehet négyzetszám. **(2 pont)**

b) Legyen $x, y \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x \neq y$. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $x > y$. Ekkor

$$3^x + 3^y = 3^y(3^{x-y} + 1).$$

Ha $3^{x-y} + 1$ négyzetszám és $y$ páros, akkor a fenti kifejezés szintén négyzetszám. **(2 pont)**
Vegyük észre, hogy $3^1 + 3^0 = 4$ négyzetszám. **(1 pont)**
Az előbbiek alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, az $y = 2k$ és $x = 2k+1$ választással a $3^x + 3^y$ négyzetszám, tehát a megadott halmaz végtelen sok négyzetszámot tartalmaz. **(2 pont)**

■

**3. feladat** (10 pont)**.** Hány olyan $(x, y)$ pozitív egészekből alkotott számpár létezik, amelyek esetén

$$xy - x - y^3 = 2024?$$

*Péics Hajnalka, Szabadka*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
A megadott egyenleten a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük el:

$$\begin{aligned} xy - x - y^3 &= 2024, \\ x(y-1) - (y^3 - 1) &= 2025, \\ (x - y^2 - y - 1)(y - 1) &= 2025, \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahonnan következik, hogy $(y-1) \mid 2025$. **(1 pont)**
Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, ezért a 2025 pozitív osztóinak száma $(4+1)\cdot(2+1) = 15$. **(2 pont)**
Mivel $y > 0$, ezért az $(y-1) \mid 2025$ oszthatóság csak akkor teljesülhet, ha $y-1>0$. Ezért az $y-1$ és az $y$ is 15 lehetséges értéket vehet fel. **(2 pont)**
Ugyanakkor, ebben az esetben minden $y > 0$ esetén

$$x = y^2 + y + 1 + \frac{2025}{y-1} > 0.$$

Emiatt 15 darab pozitív egészekből alkotott $(x, y)$ számpár teljesíti a megadott egyenlet. **(2 pont)**

■

**4. feladat** (10 pont)**.** Egy osztályban a tanulók felváltva pozitív egész számokat mondanak. A szabály az, hogy mindig $n$-nel nagyobb számot kell mondani, mint a legutoljára elhangzott szám, ahol $n > 0$ egy rögzített természetes szám. Eddig összesen 10 szám hangzott el, amelyek között pontosan egy összetett van, ez pedig a 35. Melyik szám hangozhat el tizenegyediknek?

*Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Az a szám, ami a 35-ös után ötödiknek hangzana el a $35 + 5n = 5(7+n)$, ami biztosan osztható 5-tel. Emiatt a 35-ös legalább hatodiknak hangzik el a tíz szám közül. **(3 pont)**
Másrészt, a 35-ös előtti ötödik szám, ami a $35 - 5n$, szintén osztható 5-tel. Mivel ez a szám nem lehet összetett, ezért pontosan 5 kell, hogy legyen. **(3 pont)**
Innen kapjuk, hogy $35 - 5n = 5$, vagyis $n = 6$. A tíz elhangzott szám rendre a következő:

$$5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35,\ 41,\ 47,\ 53,\ 59,$$

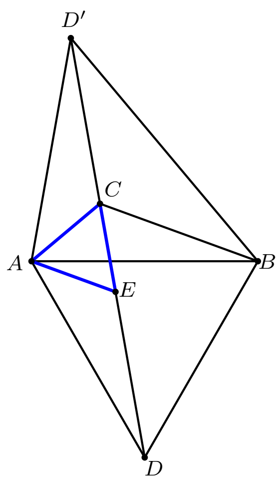
amelyek valóban teljesítik a feladat feltételeit. A tizenegyediknek elhangzó szám tehát a 65 lesz. **(3 pont)**

■

**5. feladat** (10 pont)**.** Az $ABC$ háromszögben az $A$ csúcsnál $40°$-os, a $B$ csúcsnál $20°$-os szög van. A háromszög $C$ csúcsából induló belső szögfelező tartóegyenesén felveszünk egy $D$ pontot, amelyre $AD = AB$. Mekkorák lehetnek az $ABD$ háromszög szögei?

*Katz Sándor, Bonyhád*

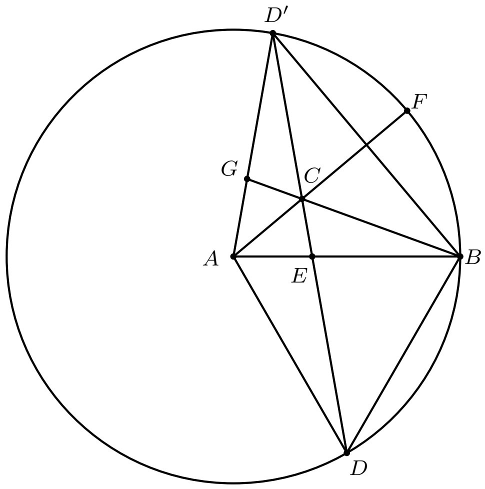
*Első megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Tekintsük a mellékelt ábrát. A feladatban megszerkesztett $D$ pontnak két lehetséges helyzete van, ezeket az ábrán $D$, illetve $D'$ pontokkal jelöltük.



Legyen $E \in DD'$ úgy, hogy $CE = CA$. Mivel az $ACE$ háromszög $C$ szöge $60°$-os, ezért az $ACE$ háromszög egyenlő oldalú. **(3 pont)**
Egyrészt, mivel $AB = AD$, $AC = AE$, valamint az $ACB$ és az $AED$ szögek $120°$-osak, ezért az $ACB$ és az $AED$ háromszögek egybevágóak. Ezek alapján a $DAE$ szög $40°$-os, a $DAB$ szög pedig $60°$-os. Mivel $AB = AD$, következik, hogy az $ADB$ háromszög egyenlő oldalú, tehát minden szöge $60°$-os. **(3 pont)**
Másrészt, mivel $AB = AD'$, valamint az $ACB$ és az $ACD'$ szögek $120°$-osak, ezért az $ACB$ és az $ACD'$ háromszögek egybevágóak. Emiatt a $D'AC$ szög $40°$-os, a $D'AB$ szög pedig $80°$-os. Mivel $AB = AD'$, ezért az $AD'B$ és az $ABD'$ szög is $50°$-os. **(3 pont)**

■

*Második megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Vegyül fel az $A$ középpontú $AB$ sugarú kört. A feladatban megszerkesztett $D$ pontnak két lehetséges helyzete van, ezek a $C$ szög szögfelezőjének, illetve az előbb felvett körnek a metszéspontjai, amelyeket a mellékelt ábrán $D$, illetve $D'$ pontokkal jelöltünk.

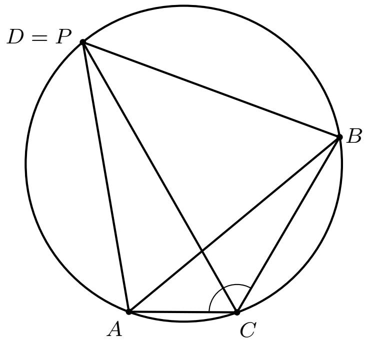



Legyen a $C$ szög szögfelezőjének az $AB$ oldallal vett metszéspontja $E$. Hosszabbítsuk meg az $AC$ szakaszt a $C$ ponton túl amíg az elmetszi a kört, az így kapott metszéspontot jelölje $F$. Végül legyen a $BC$ és az $AD'$ metszéspontja $G$. Ekkor az $ACE$, $ECB$, $BCF$, $FCD'$, $D'CG$ és $GCA$ szögek mindegyike $60°$. **(3 pont)**
Ezek alapján az $ACB$ és az $ACD'$ háromszögekben az $AC$ oldal közös, $AB = AD'$, valamint az $ACB$, illetve az $ACD'$ szögek mértéke $120°$, tehát a két háromszög egybevágó. Innen következik, hogy a $D'AB$ szög a $CAB$ szög duplája, vagyis $80°$. Mivel $AB = AD'$ ezért az $ABD'$ és $AD'B$ szög is $50°$-os. **(3 pont)**
Másrészt, az $ACD'$ háromszögben a $D'AC$ szög $40°$, az $ACD'$ szög $120°$, így a $CD'A$ szög $20°$. Mivel az $ADD'$ háromszög egyenlő szárú, ezért az $ADE$ szög is $20°$-os. Az $EDB$ szög mértéke megegyezik a $BD'$ körív mértékének felével, vagyis a $D'AB$ szög mértékének felével, ami $40°$. Innen következik, hogy az $ADB$ szög $60°$-os. Mivel az $ABD$ háromszög egyenlő szárú, ezért az $BAD$ és az $ABD$ szög is $60°$-os. **(3 pont)**

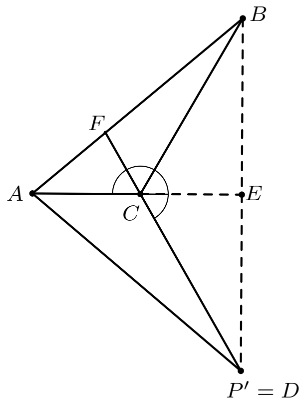
■

**Megjegyzés.** Mindkét megoldásban a negyedik egybevágósági esetet használtuk: Két háromszög egybevágó, ha van két egyenlő hosszú oldaluk és a nagyobbik oldallal szemben lévő szög is egyenlő.

*Harmadik megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Először vizsgáljuk azt az eset, amikor a $D$, illetve a $C$ pont az $AB$ egyenes különböző oldalán helyezkedik el. Ehhez tekintsük a mellékelt ábrát.




Legyen az $ABC$ háromszög köré írt körének és a $C$ csúcs belső szögfelezőjének metszéspontja $P$. Egyrészt, mivel az $ACP$ és $BCP$ kerületi szögek egyenlők, ezért az hozzájuk tartózó $PA$ és $PB$ húrok is egyenlő hosszúságúak. Másrészt, mivel az $APB$ és $ACD$ egymással szemben fekvő kerületi szögek, ezért kiegészítő szögek, vagyis az $APB$ szög mértéke $180° - 120° = 60°$. Ezek alapján a $PAB$ háromszög egyenlő oldalú, ahonnan $PA = AB$.
Mivel a feladatban szereplő $D$ pont a $C$ szög belső szögfelezőjének azon pontja, amelyre $AD = AB$, ezért $P = D$. Tehát az $ABD$ háromszög szögei 60°-osak. **(4,5 pont)**
Most vizsgáljuk azt az eset, amikor a $D$, illetve a $C$ pont az $AB$ egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el és tekintsük a mellékelt ábrát.




Legyen $P'$ a $B$ pontnak az $AC$ egyenesre vonatkozó tükörképe, $E$ az $AC$, illetve $BP'$ egyenesek metszéspontja, valamint $F$ az $ACB$ belső szögfelezőjének és az $AB$ egyenesnek a metszéspontja. Mivel az $ACB$ szög 120°-os és $CF$ szögfelező ezért az $ACF$ és a $BCF$ szög is 60°-os. A tükrözés miatt $ACP'$ szintén 120°-os, vagyis a $P'$ pont az $ACB$ szög szögfelezőjének tartóegyenesén van. Szintén a tükrözés miatt $AP' = AB$.
A feladatban szereplő $D$ pont a $C$ szögfelezőjének azon pontja, amelyre $AD = AB$, ezért $P' = D$, valamint az $ABD$ háromszög szögei rendre 80°, 50° és 50°. **(4,5 pont)**
■

**6. feladat** (10 pont)**.** Legfeljebb hány bástyát lehet feltenni egy $3n \times 3n$ egységnégyzetből álló négyzet alakú táblára úgy, hogy bármely bástya legfeljebb egy másikkal legyen ütésben? (Két bástya akkor van ütésben, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban helyezkednek el.)

*Béres Zoltán, Palics*

*Megoldás.* Hivatalból **(1 pont)**
Tételezzük fel, hogy felraktunk a táblára néhány bástyát a feladat feltételeinek megfelelően.
Észrevehetjük, hogy ha egy bástya ütésben van egy másikkal, akkor a másik is ütésben van az elsővel. Mivel minden bástya legfeljebb egy másikkal lehet ütésben, ezért a táblán lehetnek ütésben

álló bástyapárok, illetve olyan bástyák, akik nincsnek ütésben. Legyen $2x$ az ütésben álló bástyák száma, illetve $y$ azoknak a bástyáknak a száma, amelyek nincsenek ütésben.
Nevezzünk *vonalnak* egy sort vagy oszlopot. Egy ütésben álló bástyapár három vonalat, egy ütésben nem álló bástya két vonalat foglal el (az elfoglalt vonalon biztosan nem található más bástya).

(**3 pont**)

A bástyák által elfoglalt vonalak számára teljesül, hogy

$$3x + 2y \leq 6n.$$

Ez alapján a bástyák lehetséges számára teljesül, hogy

$$2x + y \leq \frac{6x}{3} + \frac{4y}{3} = \frac{2(3x + 2y)}{3} \leq \frac{2 \cdot 6n}{3} = 4n,$$

vagyis legfeljebb $4n$ bástya helyezhető el a sakktáblán. (**3 pont**)
A $4n$ darab bástya valóban elhelyezhető. Az alábbi ábrán szemléltetünk egy lehetséges elrendezést $n = 3$ esetén, ami tetszőleges $n$ természetes számra kiterjeszthető.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | | | | | | | |
| | | B | | | | | | |
| | | B | | | | | | |
| | | | B | B | | | | |
| | | | | | B | | | |
| | | | | | B | | | |
| | | | | | | B | B | |
| | | | | | | | | B |
| | | | | | | | | B |

(**3 pont**)

$\blacksquare$