XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

I. forduló

9. osztály

1. feladat:

a) Igazold, hogy $(1+x)^n + \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, bármely $x > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén!

Mikor áll fenn az egyenlőség?

b) Igazold, hogy $\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n + \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n \geq 2^{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. feladat: Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 = 2$ és $(n-1)x_n = (n+1)(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})$, bármely $n \geq 2$ természetes szám esetén. Igazold, hogy:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k+1} = 2^n - 1$, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén;

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{kx_k} = \frac{n}{n+1}$, bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

3. feladat: Az ABC háromszög oldalain felvesszük a következő pontokat: $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (AC), C_1, C_2 \in (AB)$ úgy, hogy $BA_1 = A_2C,\ AB_2 = B_1C,\ AC_1 = C_2B$. Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Mutasd ki, hogy az ABC háromszög síkjának bármely P pontja esetén fennáll a következő összefüggés:

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PB_2} + \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PC_2} = 6 \cdot \overrightarrow{PG}$$

4. feladat: Adott 7 pont egy kör kerületén. Bármely 4 pont által meghatározott négyszög súlypontját összekötjük a maradék 3 pont által meghatározott háromszög magasságpontjával. Bizonyítsd be, hogy a kapott egyenesek egy ponton mennek át!

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

I. forduló

10. osztály

1. feladat:

Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{5^x-4x+1}+\frac{1}{4^x-3x-3}+\frac{1}{12+3x-5^x}=\frac{1}{4^x-4x+10}$$

2. feladat:

Oldd meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$|z-1|+|z-2|+\ldots+|z-2016|=1008^2,\ z\in\mathbb{C}.$$

3. feladat:

Adott az ABC háromszög, amelyben A_1, B_1, C_1 a BC, CA, AB oldalak felezőpontjait jelöli.

Igazold, hogy a sík bármelyik M pontja esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$4MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1\le MA\cdot MB\cdot MC+MA^2\cdot MA_1+MB^2\cdot MB_1+MC^2\cdot MC_1$$

4. feladat:

Mutasd ki, hogy bármely ABC háromszögben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge\frac{a^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2-a^2-c^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Megjegyzések:

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

I. forduló
11. osztály

1. feladat

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $A = \begin{pmatrix} a+c & 0 & a \\ 0 & b+c & 0 \\ a & 0 & a+c \end{pmatrix}$.

Határozd meg az A^n mátrixot, ha $n \in \mathbb{N}^*$.

2. feladat

Adott az $a_1 = p$ és $a_{n+1} = p \cdot a_n + \sqrt{\left(p^2-1\right)a_n^2 - \left(p^2-1\right)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sorozat, ahol $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Igazold, hogy a sorozat minden tagja természetes szám!

3. feladat

a) Határozd meg az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját, ha $a_1 = 1$ és

$$(n+1)!a_n - n!a_{n+1} = \frac{2n}{n^4+n^2+1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \text{ bármely } n \geq 1 \text{ esetén.}$$

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{a_n}$ határértéket.

4. feladat

Ha x_1, x_2, x_3 harmadrendű egységgyökök és $A \in M_3(\mathbb{C})$, igazold, hogy

$$\det\left(x_1 I_3 - A\right) + \det\left(x_2 I_3 - A\right) + \det\left(x_3 I_3 - A\right) = 3 \cdot \left(1 - \det A\right).$$

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

I. forduló
12. osztály

1. feladat

a) Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x+1} = 8x^2 + 12x + 5$ egyenletet !

b) Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$f(x) + F(x) \cdot \ln 5 = 8x^2 + 12x + 5$ ahol az F függvény f-nek egy primitív függvénye.

2. feladat:

Legyen $G = (0, +\infty), n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$ és
$(\log_3(x \circ y))^n = (\log_3 x)^n + (\log_3 y)^n - 3^n$, $(\forall)\, x, y \in G$ esetén.

a) Bizonyítsd be, hogy $(G, \circ)$ Ábel féle csoport !

b) Bizonyítsd be, hogy $(G, \circ) \cong (\mathbb{R}, +)$!

3. feladat:

Adott $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos és (a,b) intervallumon deriválható függvény úgy, hogy $f(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in [a,b]$ esetén és $f(a) = f(b)$. Igazold, hogy $(\exists)$ $\alpha \in (a,b)$ úgy, hogy

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = a + b - 2\alpha$$

4. feladat:

Határozd meg az öszes $f, g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt, amelyekre :

$$\begin{cases} f'(x) + f(x).cosx = \left(g'(x) + cosx\right).e^{-sinx} \\ g'(x) - g(x).sinx = \left(f'(x) - sinx\right).e^{-cosx} \end{cases}$$

Megjegyzések:

- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II. forduló
9. osztály

1. feladat: Szupercsiga egy függőleges falon mászik felfelé. Első nap 4 cm-t tesz meg, éjszaka 1 cm-t visszacsúszik. Második napon 9 cm-t tesz meg, éjszaka 4 cm-t csúszik vissza, harmadik napon 16 cm-t mászik, éjszaka 9 cm-t csúszik vissza, és így tovább. Ha felér a fal tetejére, akkor megkapaszkodik, és nem csúszik vissza.
a) Hányadik napon ér fel a fal tetejére, ha az 140 cm magas?
b) Legkevesebb hány cm és legtöbb hány cm lehet a fal magassága, ha a csiga a 15. napon ér fel a tetejére? Csak egész centimétereket veszünk figyelembe.

2. feladat: Egy szabályos hatszög alakú kertbe gyümölcsfacsemetéket ültettek úgy, hogy minden csemete a kerítés valamelyik két szomszédos oldalától illetve bármely más csemetétől azonos távolságra kerüljön. Hányféle módon ültethették el a csemetéket? Ha összesen három csemetét ültettek el, és a kert területe $162\sqrt{3}\ m^2$, legtöbb mennyi lehet két csemete közötti távolság?

3. feladat: Igazold, hogy $2n$-nél kisebb $n+1$ darab ($n \geq 2$) különböző természetes szám közül kiválasztható három úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

4. feladat: Adott a p prímszám, és az a, b, c olyan p-nél kisebb, különböző pozitív egészek, amelyeknek köbei p-vel osztva ugyanazt a maradékot adják. Igazold, hogy az a, b, c számok összege osztja a négyzetösszegüket!

5. feladat: Igazold, hogy tetszőleges háromszög belső szögfelezőinek metszéspontján át bármelyik oldal tartóegyeneséhez húzott párhuzamosnak a háromszög belsejébe eső szakasza kisebb, mint a háromszög kerületének negyede!

6. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögben BD és CE magasságok, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$ és F a BC oldal felezőpontja. Az AF és DE szakaszok a P pontban metszik egymást. Igazold, hogy $EP = 4PD$ akkor és csakis akkor, ha $AC = 2AB$.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

---

1. feladat:

a) Igazold, hogy $\left(3+\sqrt{10}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{10}$, ahol $A_n, B_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Legyen $a = \left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}$. Igazold, hogy $a \cdot \{a\} = 1$, ahol $\{a\}$ az *a* szám törtrészét jelöli.

2. feladat:

Adottak az $f, g : \mathbb{R} \to (0,\infty), f(x) = a^{2x} + \left(ab\right)^x + b^{2x}$ és $g(x) = a^{2x} - \left(ab\right)^x + b^{2x}$ függvények, ahol $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy $f\left(x\right) \cdot g\left(x\right) = f\left(2x\right)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ esetén.

b) Igazold, hogy $f\left(2^{n+k}\right) \vdots f\left(2^n\right)$, $(\forall) n, k \in \mathbb{N}$ esetén.

3. feladat:

Határozd meg azt a legkisebb *n* pozitív természetes számot, amelyre 5^{2016} osztja az $\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(5n-1\right)\cdot 5n$ számot!

4. feladat:

Az ABC hegyesszögű háromszög $\left(BC\right)$ oldalán felvesszük az M mozgó pontot. Az E és F pont az AB illetve AC egyenesen úgy helyezkedik el, hogy $EB = EM$ és $FC = FM$.

Határozd meg az M pont helyzetét úgy, hogy az EMF háromszög területe maximális legyen és számítsd ki e maximális területet az ABC háromszög oldalai és szögei függvényében.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

5. feladat:

Legyen M egy ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges pontja valamint P és T az M pont vetületei az AB, illetve az AC oldalakra. A következő jelöléseket használva:

$AP = t$, $AT = l$, $m(\widehat{MTP}) = \sim$, $m(\widehat{MPT}) = \quad$, $AM = k$, igazold, hogy:

a) $l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) \leq k^2$.

b) ha $\sim + \quad = 60^\circ$, akkor $l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) = \dfrac{k^2\sqrt{3}}{2}$.

6. feladat:

Határozd meg azt a 41 darab egymásutáni természetes számot, amelyek négyzetes középarányosa természetes szám.

Értelmezés szerint $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok négyzetes középarányosa: $\sqrt{\frac{1}{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)}$.

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

---

2. forduló
11-12. osztály

1. **feladat:**
   Oldd meg a valós számok halmazán a
   $2\cdot\left(\sqrt{2^x-1}+\sqrt{3^x-2^x}+\ldots+\sqrt{2016^x-2015^x}\right)=2016^x+2014$ egyenletet.

2. **feladat:**
   Jelölje a,b,c az R sugarú körbe írt háromszög oldalait. Igazold, hogy
   $$\left(a^2+b^2\right)^2+4R^2c^2\le 8R^2\left(a^2+b^2\right) .$$

3. **feladat:**
   Igazold, hogy az $a_n=3^n+20$ (ahol $n\in\mathbb{N}$) sorozat:
   a) végtelen sok összetett számot tartalmaz,
   b) egyetlen köbszámot sem tartalmaz!

4. **feladat:**
   Az ABC háromszögben $m\left(\widehat{BAC}\right)=60^\circ$. Legyen A_1 a BC szakasz felezőpontja, I a háromszögbe írt kör középpontja, és D az I pont A_1 szerinti szimmetrikusa. Igazold, hogy:
   a) az $ABDC$ négyszög körbeírható,
   b) $DA=DB+DC$.

5. **feladat:**
   Egy táblára felírjuk 1-től 2015-ig a számokat. Két játékos felváltva letöröl lépésenként 11 számot. 183 lépés után a táblán 2 szám marad. Ha a táblán maradt 2 szám különbsége 1013, akkor az első játékos nyer, különben a második játékos. Kinek van nyerő stratégiája?

6. **feladat:**
   Hányféleképp lehet 10 darab egyforma méretű golyót sorbarakni, ha a golyók közül 4 zöld, 3 fehér és 3 piros, és nincs két azonos színű szomszédos golyó?

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

1. feladat:

a) Igazold, hogy $\left(1+x\right)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, bármely $x>0$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén!

Mikor áll fenn az egyenlőség?

b) Igazold, hogy $\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n \geq 2^{n+1}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén!

Kozinger Éva, Szatmárnémeti

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás:

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségét:

$$\left(1+x\right)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2\sqrt{\left(1+x\right)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}=2\sqrt{\left(2+x+\frac{1}{x}\right)^n}\geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}$$ **(4 pont)**

$"="\ \Leftrightarrow\ x=1$ vagy $n=0$ **(2 pont)**

a. Az **a)** alpontban $x=1+\frac{1}{n}$ értékre kapjuk a kért egyenlőtlenséget. **(3 pont)**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

2. feladat: Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 = 2$ és $(n-1)x_n = (n+1)(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})$, bármely $n \geq 2$ természtes szám esetén. Igazold, hogy:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k+1} = 2^n - 1$**,** bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén;

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{kx_k} = \frac{n}{n+1}$**,** bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén!

Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Mivel a feltételben szereplő összefüggés minden $n \geq 2$ esetén igaz, felírhatjuk,

hogy $\begin{matrix} x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = \dfrac{(n-1)x_n}{n+1} \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = \dfrac{n \cdot x_{n+1}}{n+2} \end{matrix}$ **(1 pont)**

A két összefüggést kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$x_n = \frac{n \cdot x_{n+1}}{n+2} - \frac{(n-1) \cdot x_n}{n+1}$ **(1 pont)**

, ahonnan $(n+1)x_{n+1} = 2(n+2)x_n$ **(1 pont)**,minden $n \geq 2$. Innen kapjuk, hogy $x_n = 2^{n-1}(n+1)$ minden $n \geq 1$ esetén**(2 pont)**

. Ezt felhasználva $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ **(2 pont)**

és $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{kx_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n}{n+1}$**.(2 pont)**

Megjegyzés: 1) Ha az első alpontnál kért azonosságot a matematikai idukció módszerével próbáljuk igazolni, akkor az n-ről $(n+1)$-re való bizonyításánál azt kell igazolnunk, hogy $x_n = 2^{n-1}(n+1)$ minden $n \geq 1$ esetén, amit szintén indukcióval igazolhatunk.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

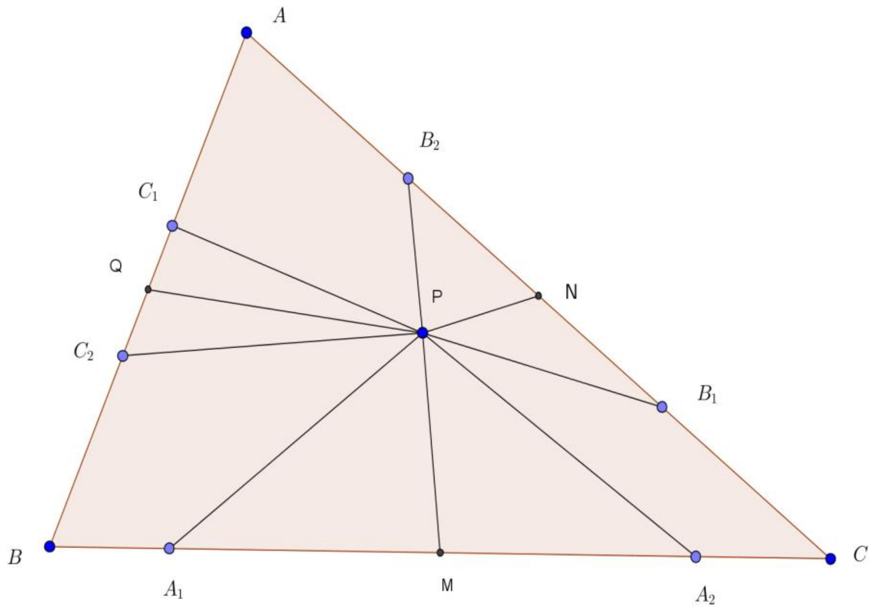
2) Az hogy $x_n = 2^{n-1}(n+1)$ minden $n \geq 1$ esetén, induktív módon is megfejthető, felírva a feladat feltételében szereplő összefügést rendre $n = 1, 2, 3, 4$ -re. Így rendre kapjuk, hogy $x_1 = 2^0 \cdot 2$, $x_2 = 2^1 \cdot 3$, $x_3 = 2^2 \cdot 4$, $x_4 = 2^3 \cdot 5$, ...

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

3. feladat: Az ABC háromszög oldalain felvesszük a következő pontokat: $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (AC), C_1, C_2 \in (AB)$ úgy, hogy $BA_1 = A_2C,\ AB_2 = B_1C,\ AC_1 = C_2B$. Legyen G az ABC háromszög súlypontja. Mutasd ki, hogy az ABC háromszög síkjának bármely P pontja esetén fennáll a következő összefüggés: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PB_2} + \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PC_2} = 6 \cdot \overrightarrow{PG}$

Mastan Eliza és Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás:



Legyenek M, N és Q pontok az BC, AC, illetve AB oldalak felezőpontjai.

PBC háromszögben PM oldalfelező, ezért: $\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} = 2 \cdot \overrightarrow{PM}$ **.(2 pont)**

Hasonlóan írhatunk még két összefüggést a PN és PQ oldalfelezőkre:

$\overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PB_2} = 2 \cdot \overrightarrow{PN},\ \ \overrightarrow{PC_1} + \overrightarrow{PC_2} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$ **.(2 pont)**

Összeadva az utóbbi három összefüggés megfelelő oldalait, kapjuk:

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PB_2}+\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{PC_2}=2\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ})=2\cdot\left(\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}+\frac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}}{2}+\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2\cdot 3\cdot\overrightarrow{PG}$$

Innen következik a kért összefüggés. **(5 pont)**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
9. osztály -- I. forduló

4. feladat: Adott 7 pont egy kör kerületén. Bármely 4 pont által meghatározott négyszög súlypontját összekötjük a maradék 3 pont által meghatározott háromszög magasságpontjával. Bizonyítsd be, hogy a kapott egyenesek egy ponton mennek át!

Borbély József, Székesfehérvár

Megoldás: Legyen a kör középpontja az origó, legyen a 7 pont a körön A, B, C, D, E, F, G, a pontok helyvektorai rendre a,b,c,d,e,f,g . **(1 pont)**

Az ABCD négyszög súlypontjába mutató vektor $\frac{a+b+c+d}{4}$ **(1 pont)**, a GEF háromszög magasságpontjába mutató vektor g+e+f (a Sylvester-összefüggés miatt) **(1 pont)**.
Tehát azon pontok helyvektorai, amik rajta vannak az ABCD súlypontját és a GEF háromszög magasságpontját összekötő e egyenesen, éppen

$$t\cdot\frac{a+b+c+d}{4} + (1-t)(g+e+f).$$ **(2 pont)**

Ha $\frac{t}{4}$ = 1-t, akkor t=4/5. **(2 pont)**

Ha t=4/5-öt helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{5}$ rajta van az e egyenesen. **(1 pont)**

Betűcserével kapjuk, hogy a többi ilyen egyenesen is rajta van. **(1 pont)**

Általánosítás: n db pont van a körön, bármely (n-3) által meghatározott sokszög súlypontját összekötve a maradék három által feszített háromszög magasságpontjával, az így kapott egyenesek egy ponton mennek át .

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló - 10. osztály

---

1. **feladat:**

Oldd meg a következő egyenletet:

$$\frac{1}{5^x-4x+1}+\frac{1}{4^x-3x-3}+\frac{1}{12+3x-5^x}=\frac{1}{4^x-4x+10}$$

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás:

Felírjuk a létezési feltételeket: $5^x-4x+1\neq 0,\ 4^x-3x-3\neq 0,\ 12+3x-5^x\neq 0,\ 4^x-4x+10\neq 0$.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $a=5^x-4x+1,\ b=4^x-3x-3, c=12+3x-5^x$, akkor $a+b+c=4^x-4x+10.$

Így az eredeti egyenlet a következőképpen alakul: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, amely ekvivalens az $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ egyenlőséggel. ...**3p**

Ha $a+b=0$ akkor az $5^x+4^x=7x+2$ (1) egyenletet kapjuk. Észrevesszük, hogy $x=0$ és $x=1$ megoldás, és mivel az $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=5^x+4^x$ konvex függvény és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=7x+2$ elsőfokú függvény grafikus képének legfenebb két közös pontja lehet $\Rightarrow$ az (1) egyenletnek csak ez a két megoldása van. ...**2p**

Ha $b+c=0$, akkor az $4^x+9=5^x$ (2) egyenletet kapjuk.

Észrevesszük, hogy $x=2$ megoldás. Mivel a (2) egyenlet átírható a $\left(\frac{4}{5}\right)^x+9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x=1$ alakba és a $h:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ h(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^x+9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x$ függvény szigorúan csökkenő $\Rightarrow h(x)=1$ egyenletnek legfenebb egy megoldása van $\Rightarrow$ (2) egyenletnek az egyedüli megoldása az $x=2$. ...**2p**

Ha $c+a=0$, akkor a $-x+13=0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldása $x=13$.

Mivel $x=0,\ x=1,\ x=2$ *és* $x=13$ teljesíti a létezési feltételeket $\Rightarrow$ az egyenlet megoldáshalmaza $\{0,1,2,13\}$. ...**2p**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló - 10. osztály

2. feladat:

Oldd meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$|z-1|+|z-2|+\ldots+|z-2016|=1008^2,\ z\in\mathbb{C}.$$

dr.Szenkovits Ferenc Kolozsvár

Megoldás:

A $|z-1|+|z-2016| \geq |(z-1)-(z-2016)|=2015$

$|z-2|+|z-2015| \geq |(z-2)-(z-2015)|=2013,$

...

$|z-1007|+|z-1010| \geq |(z-1007)-(z-1010)|=3$

$|z-1008|+|z-1009| \geq |(z-1008)-(z-1009)|=1$

egyenlőtlenségeket összegezve:

$S(z)=|z-1|+|z-2|+\ldots+|z-2016|\geq 1+3+5+\ldots+2015=1008^2.$ **...5p**

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha az összes egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül, aminek a feltétele:

$z\in[1,2016]\cap[2,2015]\cap\ldots\cap[1008,1009]=[1008,1009].$ **...2p**

Tehát a megoldások halmaza az $[1008,1009]$ valós intervallum

Megjegyzés: $|z-a|+|z-b|=|b-a|,\ a\leq b,\ a,b\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in[a,b].$ **...2p**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló - 10. osztály

3. feladat:

Adott az ABC háromszög, amelyben A_1, B_1, C_1 a BC, CA, AB oldalak felezőpontjait jelöli.

Igazold, hogy a sík bármelyik M pontja esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$4MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1 \le MA \cdot MB \cdot MC + MA^2 \cdot MA_1 + MB^2 \cdot MB_1 + MC^2 \cdot MC_1$$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Jelölje $A(a), B(b), C(c), A_1\left(\frac{b+c}{2}\right), B_1\left(\frac{a+c}{2}\right), C_1\left(\frac{a+b}{2}\right)$ illetve $M(t)$ a megfelelő pontokat és affixumait.

Felírjuk az egyenlőtlenséget az affixumok segítségével:

$$4 \cdot \left|t - \frac{b+c}{2}\right| \cdot \left|t - \frac{a+c}{2}\right| \cdot \left|t - \frac{a+b}{2}\right| \le |t-a| \cdot |t-b| \cdot |t-c| + |t-a|^2 \cdot \left|t - \frac{b+c}{2}\right| + |t-b|^2 \cdot \left|t - \frac{a+c}{2}\right| + |t-c|^2 \cdot \left|t - \frac{a+b}{2}\right|$$ **4p**

vagyis

$$|2t-(b+c)| \cdot |2t-(a+c)| \cdot |2t-(a+b)| \le 2|t-a| \cdot |t-b| \cdot |t-c| + |t-a|^2 \cdot |2t-(b+c)| + |t-b|^2 \cdot |2t-(a+c)| + |t-c|^2 \cdot |2t-(a+b)|.$$

Jelölje $x = t-a$, $y = t-b$, $z = t-c$, akkor a fenti egyenlőtlenség a következőképpen alakul:

$$|z+y| \cdot |x+z| \cdot |x+y| \le 2 \cdot |x \cdot y \cdot z| + |x|^2 \cdot |y+z| + |y|^2 \cdot |x+z| + |z|^2 \cdot |x+y|.$$ **...2p**

Igazoljuk, hogy $(y+z)(x+z)(x+y) = 2xyz + x^2(x+y) + y^2(x+z) + z^2(x+y)$.

Felhasználva a $|a+b| \le |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{C}$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy :

$|2xyz + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)| \le 2|xyz| + |x|^2 \cdot |y+z| + |y|^2 \cdot |x+z| + |z|^2 \cdot |x+y|$ amely egyenértékű a kért egyenlőtlenséggel. **...3p**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló - 10. osztály

4. feladat:

Mutasd ki, hogy bármely *ABC* háromszögben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \ge \frac{a^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2-a^2-c^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Zákány Mónika és Mastan Eliza, Nagybánya

Megoldás:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \ge \frac{a^2-b^2-c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2-a^2-c^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2-a^2-b^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow$$

$$(\cos 2A+1)+(\cos 2B+1)+(\cos 2C+1) \ge \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right) \ge \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$ **...3p**

Igazolnunk kell, hogy $\cos^2 A+\cos^2 B \ge \frac{c^2}{a^2+b^2}$, $\cos^2 B+\cos^2 C \ge \frac{a^2}{b^2+c^2}$ illetve

$\cos^2 A+\cos^2 C \ge \frac{b^2}{a^2+c^2}$, amelyek egyenértékűek a következő egyenlőtlenséggel:

$\left(a^2+b^2\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right) \ge c^2$, $\left(b^2+c^2\right)\left(\cos^2 B+\cos^2 C\right) \ge a^2$ illetve

$\left(a^2+c^2\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 C\right) \ge b^2$. **....2p**

Alkalmazzuk a Cauchy -Schwarz egyenlőtlenséget:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right) \ge \left(a\cos A+b\cos B\right)^2 = c^2$$

$$\left(b^2+c^2\right)\left(\cos^2 B+\cos^2 C\right) \ge \left(b\cos C+c\cos B\right)^2 = a^2$$

$\left(a^2+c^2\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 C\right) \ge \left(a\cos C+c\cos A\right)^2 = b^2$, amely összegéből következik a kért egyenlőtlenség. **...2p**

Egyenlőség akkor áll fenn, amikor a Cauchy - Schwarz egyenlőtlenségben is fenn áll, vagyis

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló - 10. osztály

$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} \Rightarrow a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Rightarrow a = b$.

Hasonlóan igazoljuk, hogy $b = c$

Tehát egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn az egyenlőség. **...2p**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló
11. osztály

1. feladat

Legyen $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $A=\begin{pmatrix} a+c & 0 & a \\ 0 & b+c & 0 \\ a & 0 & a+c \end{pmatrix}$.

Határozd meg az A^n mátrixot, ha $n\in\mathbb{N}^*$.

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

Legyen $M=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$. Ekkor $A=M+c\cdot I_3$. ………………………………………….1 p

Indukcióval igazolható, hogy $M^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 0 & 2^{n-1}a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 2^{n-1}a^n & 0 & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ……………………3 p

$A^n=\left(M+c\cdot I_3\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kM^{n-k}\cdot c^k=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kM^{n-k}\cdot c^k+c^n\cdot I_3$ ……………………………..1 p

Mivel $\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\cdot 2^{n-k-1}\cdot a^{n-k}\cdot c^k=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\cdot(2a)^{n-k}\cdot c^k=\frac{1}{2}\left[\left(2a+c\right)^n-c^n\right]$ ………………...2 p

és $\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\cdot b^{n-k}\cdot c^k=(b+c)^n-c^n$ ……………………………………………………..1 p

Így $A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(2a+c\right)^n+c^n\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[\left(2a+c\right)^n-c^n\right] \\ 0 & (b+c)^n & 0 \\ \frac{1}{2}\left[\left(2a+c\right)^n-c^n\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[\left(2a+c\right)^n+c^n\right] \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ……………..…….1 p

Hivatalból ……………………………………………………………………….………………… 1 p

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló
11. osztály

2. feladat

Adott az $a_1 = p$ és $a_{n+1} = p \cdot a_n + \sqrt{(p^2-1)a_n^2 - (p^2-1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sorozat, ahol $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Igazold, hogy a sorozat minden tagja természetes szám!

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás:

A sorozat értelmezéséből $a_{n+1} = p \cdot a_n + \sqrt{(p^2-1)(a_n^2-1)}$ következik, hogy $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

A sorozat első két tagja: $a_1 = p \in \mathbb{N}$, $a_2 = 2p^2 - 1 \in \mathbb{N}$ ……………………………………1 p

A rekurziós összefüggés megfelelő négyzetre emeléséből:

$a_{n+1}^2 + 2pa_{n+1} \cdot a_n + a_n^2 + p^2 - 1 = 0$ ……………………………………………………….2 p

Felírva az összefüggést n-1-re $a_n^2 + 2pa_n \cdot a_{n-1} + a_{n-1}^2 + p^2 - 1 = 0$ …………………………1 p

majd a két összefüggést kivonva egymásból

$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 - 2p(a_{n+1} - a_{n-1}) \cdot a_n = 0$ egyenlőséget kapjuk…………………………………..1 p

$\Leftrightarrow (a_{n+1} - a_{n-1}) \cdot (a_{n+1} + a_{n-1} - 2p \cdot a_n) = 0 \quad (1)$ ……………………………………………...1 p

Mivel $a_{n+1} = p \cdot a_n + \sqrt{(p^2-1)(a_n^2-1)} \geq 2a_n + \sqrt{3(a_n^2-1)} > 2a_n > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Tehát a sorozat szigorúan növekvő……………………………………………………1 p

Így az (1) egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a_{n+1} = 2p \cdot a_n - a_{n-1}$ …………………………..1 p

A kapott rekurencia reláció segítségével a matematikai indukcióval igazolható, hogy a sorozat tagjai természetes számok…………………………………………………………..1 p

Hivatalból ………………………………………………………………………………… 1 p

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló
11. osztály

3. feladat

a) Határozd meg az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagját, ha $a_1 = 1$ és

$$(n+1)!a_n - n!a_{n+1} = \frac{2n}{n^4+n^2+1}\cdot a_n \cdot a_{n+1}, \text{ bármely } n\geq 1 \text{ esetén.}$$

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_n}$ határértéket.

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás:

a) A sorozat tagjai az összefüggés alapján nullától különböznek……………………1 p

Átírva a rekurziós összefüggést $\frac{(n+1)!}{a_{n+1}} - \frac{n!}{a_n} = \frac{2n}{n^4+n^2+1}$ ………………………………..1 p

$n^4+n^2+1 = \left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)$……………………………………………………. 1 p

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{a_{n+1}} - \frac{n!}{a_n} = \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}$ ……………………………………………………1 p

Összeadjuk a kapott összefüggéseket 1, 2, 3, …, n-1 értékekre és felhasználjuk, hogy $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$.

Így az $\frac{n!}{a_n} - 1 = 1 - \frac{1}{n^2-n+1}$ összefüggést kapjuk…………………………………………2 p

$\Rightarrow \frac{n!}{a_n} = \frac{2n^2-2n+1}{n^2-n+1} \Rightarrow a_n = \frac{n^2-n+1}{2n^2-2n+1}\cdot n!$…………………………………………….1 p

b) Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$……………………………………………………………….1 p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-2n+1}{n^2-n+1}\cdot\frac{2^n}{n!}\right) = 0$$ …………………………………………………1 p

Hivatalból ………………………………………………………………………………. 1 p

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
I. forduló
11. osztály

4. feladat

Ha x_1, x_2, x_3 harmadrendű egységgyökök és $A \in M_3(\mathbb{C})$, igazold, hogy

$$\det\left(x_1 I_3 - A\right) + \det\left(x_2 I_3 - A\right) + \det\left(x_3 I_3 - A\right) = 3 \cdot \left(1 - \det A\right).$$

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

$\det\left(xI_3 - A\right) = x^3 + \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ……………………………………………2 p

ahol $\gamma = -\det A$ ………………………………………………………………….......2 p

Így $\sum_{i=1}^{3} \det\left(x_i I_3 - A\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + \alpha \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{3} x_i - 3 \cdot \det A$ ……………………………………1 p

Mivel x_1, x_2, x_3 harmadrendű egységgyökök $\Rightarrow x_i^3 = 1,\ i = \overline{1,3}$ ……………………………1 p

$x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ ……………………………………......…………………………...1 p

és $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 0$ ……………………………………………………………1 p

Így $\sum_{i=1}^{3} \det\left(x_i I_3 - A\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 + \alpha \sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{3} x_i - 3 \cdot \det A = 3 - 3\det A$ ……………………..1 p,

Hivatalból ……………………………….………………………………………….……………… 1 p

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

I.forduló
12. osztály

1. **feladat**

a) Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x+1} = 8x^2 + 12x + 5$ egyenletet !

b) Határozd meg azokat az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$f(x) + F(x) \cdot \ln 5 = 8x^2 + 12x + 5$, ahol az F fügvény f-nek egy primitiv függvénye.

dr.Szenkovits Ferenc, Kolozsvár
Mastan Eliza, Nagybánya

Megoldás:

a) Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5^{x+1} - 8x^2 - 12x - 5$ függvenyt. f akárhányszor deriválható $\mathbb{R}$ -en, mivel elemi függvény.

$f'(x) = 5^{x+1} \cdot \ln 5 - 16x - 12 \qquad f''(x) = 5^{x+1} \cdot (\ln 5)^2 - 16$

$f'''(x) = 5^{x+1} \cdot (\ln 5)^3 > 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''$ szigorúan növekvő

$\Rightarrow f''$ -nek legfennebb egy zérushelye van (*)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f''(x) = -16 < 0$ és $\lim\limits_{x \to \infty} f''(x) = +\infty > 0$ és f'' folytonos (**)

(*) és (**) $\Rightarrow f''$ -nek egyetlen zérushelye van $\mathbb{R}$ -en $\Rightarrow f'$ -nek legfennebb két zérushely van $\mathbb{R}$ -en

$\Rightarrow f$ -nek legfennebb három zérushelye van $\mathbb{R}$ -en (Rolle tétel következménye) (1)

Másreszt : észrevehető, hogy $f(-1) = f(1) = f(0) = 0$ (2)

(1) és (2) $\Rightarrow$ az adott egyenletnek pontosan három megoldása van : $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

b) Az $f(x) + F(x) \cdot \ln 5 = 8x^2 + 12x + 5$ egyenlőség mindkét oldalát szorozva 5^{x+1} -el kapjuk, hogy $f(x) \cdot 5^{x+1} + F(x) \cdot 5^{x+1} \cdot \ln 5 = 5^{x+1} \cdot (8x^2 + 12x + 5)$

$\Leftrightarrow F'(x) \cdot 5^{x+1} + F(x) \cdot 5^{x+1} \cdot \ln 5 = 5^{x+1} \cdot (8x^2 + 12x + 5) \ \Leftrightarrow [F(x) \cdot 5^{x+1}]' = 5^{x+1} \cdot (8x^2 + 12x + 5)$

$$\Rightarrow F(x) \cdot 5^{x+1} = \int (8x^2 + 12x + 5) \cdot 5^{x+1} dx = \frac{1}{\ln 5} \int (8x^2 + 12x + 5) \cdot (5^{x+1})' dx$$

$$= \frac{1}{\ln 5}(8x^2 + 12x + 5) \cdot 5^{x+1} - \frac{1}{\ln 5} \int (16x + 12) \cdot 5^{x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}(8x^2 + 12x + 5) \cdot 5^{x+1} - \frac{1}{(\ln 5)^2} \int (16x + 12) \cdot (5^{x+1})' dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}(8x^2 + 12x + 5) \cdot 5^{x+1} - \frac{1}{(\ln 5)^2}(16x + 12) \cdot 5^{x+1} + \frac{16}{(\ln 5)^2} \int 5^{x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}(8x^2 + 12x + 5) \cdot 5^{x+1} - \frac{1}{(\ln 5)^2}(16x + 12) \cdot 5^{x+1} + \frac{16}{(\ln 5)^3} 5^{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\ln 5}(16x + 12) + c \cdot 5^{-x-1} - \frac{16}{(\ln 5)^2}, c \in \mathbb{R}$$

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

---

2. feladat:

Legyen $G=(0,+\infty), n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$ és
$(\log_3(x\circ y))^n=(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n-3^n\ \forall x,y\in G$ esetén.
a)Bizonyitsd be, hogy $(G,\circ)$ Ábel féle csoport.
b) Bizonyitsd be, hogy $(G,\circ)\cong(\mathbb{R},+)$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

a) Írhatjuk, hogy $x\circ y=3^{\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n-3^n}}$. Nyilvánvaló, hogy $x\circ y\in(0,\infty)=G$. (1)

A valós számok összeadása kommutatív művelet, amiből következik, hogy
$(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n=(\log_3 y)^n+(\log_3 x)^n,\quad \forall\ x,y\in G$, azaz $x\circ y=y\circ x,\ \ \forall\ x,y\in G$. Innen adódik, hogy a művelet kommutatív. (2)

Másrészt $(x\circ y)\circ z=\left(3^{\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n-3^n}}\right)\circ z=3^{\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n-3^n}\right)^n+(\log_3 z)^n-3^n}}=$

$=3^{\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 y)^n+(\log_3 z)^n-2\cdot 3^n}}=3^{\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+\left(\sqrt[n]{(\log_3 y)^n+(\log_3 z)^n-3^n}\right)^n-3^n}}=x\circ 3^{\sqrt[n]{(\log_3 y)^n+(\log_3 z)^n-3^n}}=x\circ(y\circ z)$

$\forall\ x,y,z\in G$, tehát a művelet asszociatív. (3)

Semleges elem meghatározása $\exists e\in G,$ úgy, hogy $e\circ x=x\quad\forall\ x\in G$ esetén

$\Leftrightarrow\ 3^{\sqrt[n]{(\log_3 e)^n+(\log_3 x)^n-3^n}}=x,\ \ \forall x\in G\quad\Leftrightarrow\sqrt[n]{(\log_3 e)^n+(\log_3 x)^n-3^n}=\log_3 x,\ \forall x\in G\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad(\log_3 e)^n+(\log_3 x)^n-3^n=(\log_3 x)^n,\ \forall x\in G\ \Leftrightarrow\ \log_3 e=3\quad\Leftrightarrow\ e=27\in G$ (4)

Invertálható elemek meghatározása $\forall x\in G,\ \exists x'\in G$ úgy, hogy $x\circ x'=e$.

$x\circ x'=3^{\sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 x')^n-3^n}}=3^3\ \Leftrightarrow\ \sqrt[n]{(\log_3 x)^n+(\log_3 x')^n-3^n}=3\ \Leftrightarrow(\log_3 x)^n+(\log_3 x')^n-3^n=3^n\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (\log_3 x')^n=2\cdot 3^n-(\log_3 x)^n\ \Leftrightarrow\ x'=3^{\sqrt[n]{2\cdot 3^n-(\log_3 x)^n}}\in G$ (5)

Az (1), (2), (3), (4) és (5) –ből következik, hogy $(G,\circ)$ Abel-féle csoport.

b) Tekintsük az $f:G\to\mathbb{R},\quad f(x)=(\log_3 x)^n-3^n$ függvényt.

$f'(x)=n(\log_3 x)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{x\cdot\ln 3}>0,\quad\forall x\in G-\{1\}$ és $n-1$ páros esetén, tehát f szigorúan növekvő a $(0,1)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon, ugyanakkor folytonos az $x=1$ pontban, tehát szigorúan növekvő a $(0,\infty)$ intervallumon, azaz injektív. (6)

f folytonos a $(0,\infty)$ intervallumon, $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=-\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, tehát f szürjektív (7)

$f(x\circ y)=\left[\log_3(x\circ y)\right]^n-3^n=\log_3(x)^n+\log_3(y)^n-3^n-3^n=\left[\log_3(x)^n-3^n\right]+\left[\log_3(y)^n-3^n\right]=$
$f(x)+f(y),\quad\forall x,y\in G$ (8)

A (6), (7) és (8) összefüggésekből adódik, hogy f egy izomorfizmus $\Rightarrow\ (G,\circ)\cong(\mathbb{R},+)$.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

---

3. feladat:

Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos és (a,b) intervallumon deriválható függvény úgy, hogy $f(x)\neq 0$ $\forall\ x\in[a,b]$ esetén és $f(a)=f(b)$. Igazold, hogy $\exists\ \alpha\in(a,b)$ úgy, hogy $\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}=a+b-2\alpha$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

Legyen $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{(x-a)(x-b)}\cdot f(x)$ függvény, amely Rolle tulajdonságú. $g(a)=f(a)$ és $g(b)=f(b)$, tehát $g(a)=g(b)$.

Akkor Rolle tételéből következik, hogy $\exists\ \alpha\in(a,b)$ úgy, hogy $g'(\alpha)=0$ legyen.

De $g'(x)=e^{(x-a)(x-b)}\cdot(2x-a-b)\cdot f(x)+e^{(x-a)(x-b)}\cdot f'(x)$. Akkor $g'(\alpha)=e^{(\alpha-a)(\alpha-b)}\cdot(2\alpha-a-b)\cdot f(\alpha)+e^{(\alpha-a)(\alpha-b)}\cdot f'(\alpha)=0$. A jobboldali egyenlőséget elosztva a $e^{(\alpha-a)(\alpha-b)}$ nullától különböző számmal kapjuk, hogy $-(2\alpha-a-b)\cdot f(\alpha)=f'(\alpha)$. Ez utóbbi kifejezést elosztva $f(\alpha)\neq 0$ számmal, kapjuk a bizonyítandó összefüggést: $\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}=a+b-2\alpha$.

Megjegyzés: a g függvényre a következőképpen is „ráérezhetünk”:

Integráljuk a bizonyítandó összefüggést α helyett egy x változót használva:

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c_1=\int(a+b-2x)dx=ax+bx-x^2+c_2$. Elfogadjuk, hogy az $f(x)$ függvény pozitív, következik, hogy $\ln f(x)=ax+bx-x^2+c_2-c_1$. Legyen $c_2-c_1=-ab$, hogy a jobboldalt tudjuk szorzattá alakítani. Akkor $\ln f(x)=-(x-a)(x-b)$ lesz, vagyis $0=\ln f(x)+(x-a)(x-b)=\ln f(x)+\ln e^{(x-a)(x-b)}=\ln f(x)\cdot e^{(x-a)(x-b)}$. Ez utóbbi kifejezés pedig legyen $\ln g(x)$, ekkor a $\ln$ függvényt elhagyva, nem kell az f függvény pozitívitásával foglalkozni.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

4. feladat:

Határozd meg az összes $f,g:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ deriválható függvényt, melyekre igazak a következő egyenlőségek:

$$\begin{cases} f'(x)+f(x).cosx=\left(g'(x)+cosx\right).e^{-sinx} \\ g'(x)-g(x).sinx=\left(f'(x)-sinx\right).e^{-cosx} \end{cases}$$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Az egyenletrendszer felirható a következő alakban is:

$$\begin{cases} (f(x).e^{\sin x})'=\left(g(x)+\sin x\right)' \\ (g(x).e^{\cos x})'=\left(f(x)+\cos x\right)' \end{cases}$$

majd $\begin{cases} f(x).e^{\sin x}=a+g(x)+\sin x \\ g(x).e^{\cos x}=b+f(x)+\cos x \end{cases}$, ahol $a,b\in\mathbb{R}$

és végül

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{b+e^{\cos x}\cdot\sin x+a\cdot e^{\cos x}+\cos x}{e^{\sin x+\cos x}-1} \\ g(x)=\dfrac{a+e^{\sin x}\cdot\cos x+b\cdot e^{\cos x}+\sin x}{e^{\sin x+\cos x}-1} \end{cases}$$

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

---

1. feladat: Szupercsiga egy függőleges falon mászik felfelé. Első nap 4 cm-t tesz meg, éjszaka 1 cm-t visszacsúszik. Második napon 9 cm-t tesz meg, éjszaka 4 cm-t csúszik vissza, harmadik napon 16 cm-t mászik, éjszaka 9 cm-t csúszik vissza, és így tovább. Ha felér a fal tetejére, akkor megkapaszkodik, és nem csúszik vissza.
a) Hányadik napon ér fel a fal tetejére, ha az 140 cm magas?
b) Legkevesebb hány cm és legtöbb hány cm lehet a fal magassága, ha a csiga a 15. napon ér fel a tetejére? Csak egész centimétereket veszünk figyelembe.

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás: a) Szupercsiga haladása a következő: I. nap fel 2^2, le 1^2, II. nap fel 3^2, le 2^2, III. nap fel 4^2, le 3^2, azaz az *n*-edik napon fel $(n+1)^2$ és le n^2. Így az elért maximális magasságok naponként: I nap 2^2, II nap $(2^2-1)+3^2=2^2+3^2-1$, III. nap $(2^2-1)+(3^2-2^2)+4^2=3^2+4^2-1$, általában az *n*-edik napon $n^2+(n+1)^2-1$, ezt indukcióval igazoljuk. **(3pont)**

Így ha az *n*-edik napon ér fel a 140 cm magas fal tetejére, akkor $(n-1)^2+n^2-1<140\le n^2+(n+1)^2-1$, ahonnan $n^2-n<70\le n^2+n$, ennek egyedül az $n=8$ a megoldása. **(3pont)**

b) Ha a 15. napon elérhető magasság *x* cm, akkor $(15-1)^2+15^2-1<x\le 15^2+(15+1)^2-1$ azaz $420<x\le 480$, tehát $x\in\{421,422,...,480\}$ azaz a lehető legkisebb magasság 421, a legnagyobb pedig 480. **(3pont)**

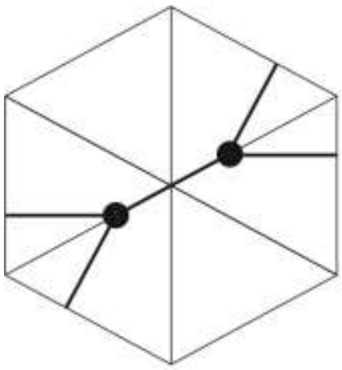
XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

---

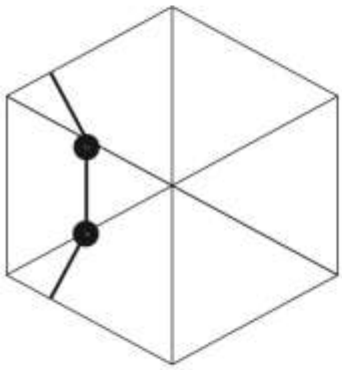
2. feladat: Egy szabályos hatszög alakú kertbe gyümölcsfacsemetéket ültettek úgy, hogy minden csemete a kerítés valamelyik két szomszédos oldalától illetve bármely más csemetétől azonos távolságra kerüljön. Hányféle módon ültethették el a csemetéket? Ha összesen három csemetét ültettek el, és a kert területe $162\sqrt{3}\ m^2$, legtöbb mennyi lehet két csemete közötti távolság?

Császár Sándor, Csíkszereda

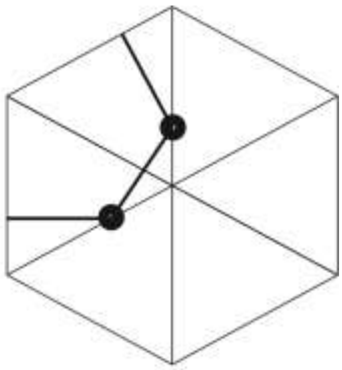
Megoldás:



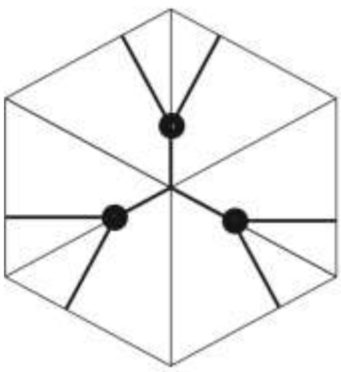
1. ábra



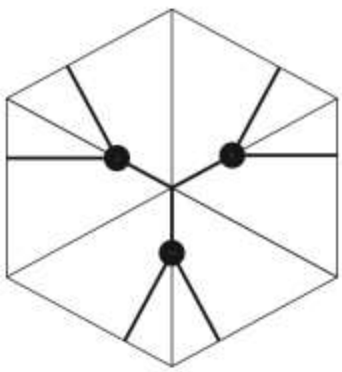
2. ábra



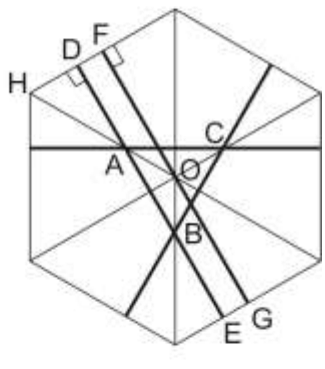
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Nyilván, ha a csemeték közötti távolság azonos, a kertben legkevesebb 2 csemete, legtöbb három csemete lehet. **(1pont)**
Mivel a kerítés valamely két szomszédos oldalától egyenlő távolságra vannak, a csemeték a hatszög köré írt kör sugarán helyezkedhetnek el minden esetben, két illetve három csemete esetén is. **(1pont)**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

A fenti ábrákon látható a csemeték lehetséges elhelyezkedése. A kertben való elhelyezkedésük az 1. ábra szerint 3, (középpont szerinti $60°$-os szöggel való forgatás), a 2. és 3. ábra szerint 6 (középpont szerinti $60°$- $60°$-os szöggel való forgatás), az 4. ábra szerint 2, (középpont szerinti $60°$-os szöggel való forgatás) különféle módon lehetséges, összesen tehát $3+6+6+2=17$ eset lehetséges a csemeték elhelyezésére. **(1pont)**
Három csemete esetén ezek egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban helyezkedhetnek el. Mivel két szomszédos csemete és a csemete kerítéstől való távolsága azonos, a 6. ábrán látható módon felírható, hogy $DA=AB=BE$ szakasszal, ahol *AD* és *BE* a hatszög egy-egy oldalára merőleges szakasz. Legyen *FG* az *O* ponton áthaladó, a hatszög oldalára merőleges szakasz, és *a* a hatszög oldalhossza.

A hatszög területe: $T=6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Felírható: $162\sqrt{3}=6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, ahonnan $a=\sqrt{108}=6\sqrt{3}m$.

Könnyen bizonyítható, hogy a *D, A*, *B* és *E* pontok kollineárisak*, és *DE* párhuzamos az *FG* szakasszal **, aminek hossza: $2\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$. Tehát két csemete közötti távolság:

$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=\dfrac{6\sqrt{3}\sqrt{3}}{3}=6m$.

* *OAB* és *HAD* szögek mértéke $30°$, tehát kongruens csúcsszögek.
** *DE* és *FG* ugyanarra az egyenesre merőleges szakasz, tehát párhuzamosak.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

---

3. feladat: Igazold, hogy $2n$-nél kisebb $n+1$ darab ($n \geq 2$) különböző természetes szám közül kiválasztható három úgy, hogy ezek közül kettő összege megegyezzen a harmadikkal.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: Legyenek $a_1 < a_2 < ... < a_{n+1}$ ezek a számok. Képezzük az $a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{n+1} - a_1$ számokat, amelyek pozitívak, külöönbözőek és kisebbek, mint $2n$. Így keletkezett $2n+1$ természetes szám: $a_1, a_2, ..., a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{n+1} - a_1,$ amelyek kisebbek, mint $2n$. A skatulyaelv értelmében ezek közül kettő megegyezik, az egyik eleme a $\{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$ halmaznak, a másik pedig a $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{n+1} - a_1\}$ halmaznak. Legyenek ezek a_k és $a_m - a_1$, így $a_k = a_m - a_1$, azaz $a_k + a_1 = a_m$.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

---

4. feladat: Adott a p prímszám, és az a,b,c olyan p-nél kisebb, különböző pozitív egészek, amelyeknek köbei p-vel osztva ugyanazt a maradékot adják. Igazold, hogy az a,b,c számok összege osztja a négyzetösszegüket!

Borbély József, Székesfehérvár

Megoldás: $p \mid \left(a^3-b^3\right)=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Mivel p nem osztója $(a-b)$-nek, ezért $p \mid \left(a^2+ab+b^2\right)$.

Hasonlóan $p \mid \left(a^2+ac+c^2\right)$ és $p \mid \left(b^2+bc+c^2\right)$. **(3pont)**

Ekkor $p \mid \left(a^2+ab+b^2\right)-\left(b^2+bc+c^2\right)=(a-c)(a+b+c)$.

Mivel $a-c$ nem osztható p-vel, ezért $p \mid (a+b+c)$. **(2pont)**

Sőt, $p \mid (a+b+c)^2-2\left(a^2+ab+b^2\right)-2\left(b^2+bc+c^2\right)-2\left(a^2+ac+c^2\right)=-\left(a^2+b^2+c^2\right)$, tehát $p \mid \left(a^2+b^2+c^2\right)$. **(2pont)**

Mivel a,b és c p-nél kisebb pozitív számok, ezért összegük p vagy $2p$ lehet. Mivel $a+b+c$ és $a^2+b^2+c^2$ paritása megegyezik, ezért $(a+b+c) \mid \left(a^2+b^2+c^2\right)$. **(2pont)**

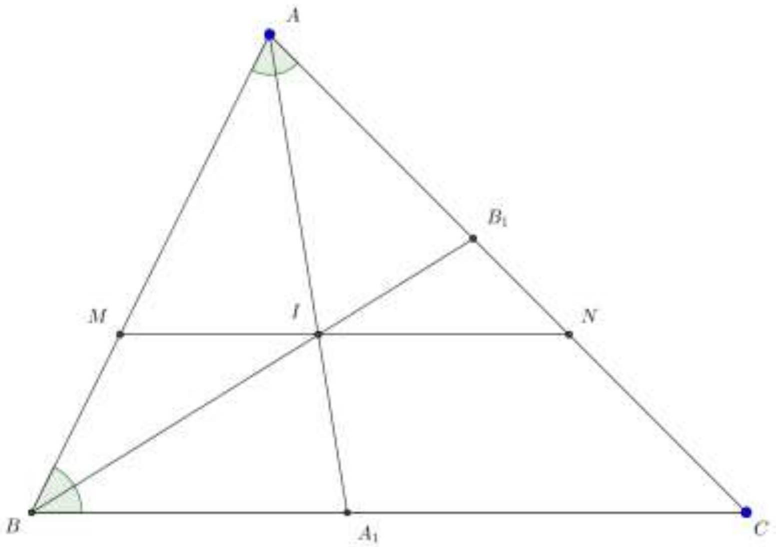
XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

---

5. feladat: Igazold, hogy tetszőleges háromszög belső szögfelezőinek metszéspontján át bármelyik oldal tartóegyeneséhez húzott párhuzamosnak a háromszög belsejébe eső szakasza kisebb, mint a háromszög kerületének negyede!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:



Legyen

$MN \parallel BC,\ I \in MN \Rightarrow AMN_\Delta \sim ABC_\Delta$ és $AMI_\Delta \sim ABA_{1\Delta} \Rightarrow \dfrac{MN}{a} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AI}{AA_1}\,(1)$ **.(3pont)**

A szögfelező tételét alkalmazva az ABC_Δ-ben az AA_1 szögfelezőre, valamint az $ABA_{1\Delta}$-ben a BI szögfelezőre kapjuk, hogy $BA_1 = \dfrac{ac}{b+c}$ és $\dfrac{AI}{AA_1} = \dfrac{b+c}{a+b+c}\,(2)$ **.(3pont)**

Az (1) és (2) egybevetéséből adódik, hogy $MN = \dfrac{a(b+c)}{a+b+c}\,(3)$. **(1pont)**

Igazolni kell, hogy $MN < \dfrac{a+b+c}{4}$, ami a (3) alapján egyenértékű a

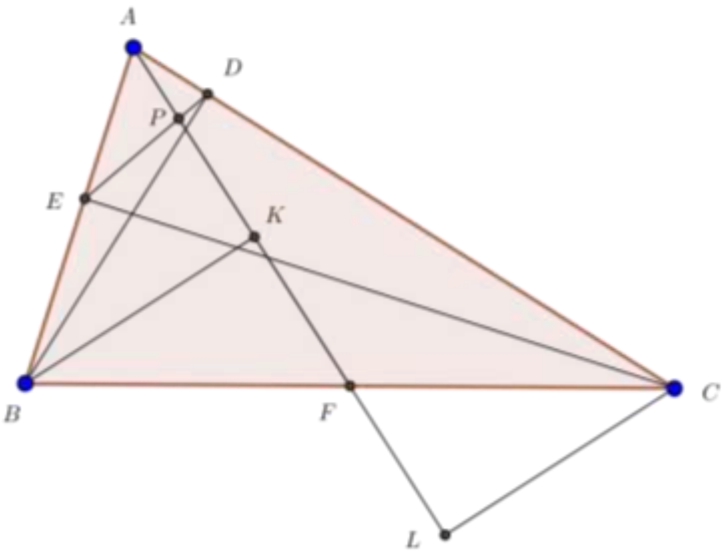
$4ab + 4ac < (a+b+c)^2 \Leftrightarrow (a-b-c)^2 > 0,$ ami nyilvánvalóan igaz, mert a háromszög-egyenlőtlenség miatt $a \neq b+c.$ **(2pont)**

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.
II. forduló -- 9. osztály

6. feladat: Az ABC hegyesszögű háromszögben BD és CE magasságok, $D\in(AC)$, $E\in(AB)$ és F a BC oldal felezőpontja. Az AF és DE szakaszok a P pontban metszik egymást. Igazold, hogy $EP=4PD$ akkor és csakis akkor, ha $AC=2AB$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás:



Az AED háromszög, hasonló az ACB háromszöghöz, ahonnan kapjuk, hogy $\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$ **(1pont)**.

Rendre felírható, hogy

$$\frac{PE}{PD}=\frac{T_{AEP}}{T_{ADP}}=\frac{AE\cdot AP\cdot\sin EAP}{AD\cdot AP\cdot\sin DAP}=\frac{AE\cdot\sin EAP}{AD\cdot\sin DAP}=\frac{AC\cdot\sin EAP}{AB\cdot\sin DAP}$$ **(3pont).**

A B és C pontokból az AF egyenesre húzott merőlegesek talppontjai jelöljük K és L-lel, Mivel F a BC oldal felezőpontja, következik, hogy a BKF és CLF hasoló háromszögek egybevágóak, tehát $BK=CL$. Az AKB háromszögben $\sin EAP=\frac{BK}{AB}$, az ACL háromszögben $\sin DAP=\frac{CF}{AC}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $\frac{\sin EAP}{\sin DAP}=\frac{AC}{AB}$ **(3pont)**.

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $\frac{PE}{PD}=\frac{AC\cdot\sin EAP}{AB\cdot\sin DAP}=\frac{AC^2}{AB^2}$ **(1pont)**.

Innen már azonnal belátható, hogy $EP=4PD$ akkor és csakis akkor, ha $AC=2AB$ **(1pont)**.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

1. feladat:

a) Igazold, hogy $\left(3+\sqrt{10}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{10}$, ahol $A_n, B_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Legyen $a = \left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}$. Igazold, hogy $a \cdot \{a\} = 1$, ahol $\{a\}$ az a szám törtrészét jelöli.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

a) A matematikai indukció módszerével bizonyítjuk.

Ellenőrizzük $n=1$-re, $\left(3+\sqrt{10}\right)^1 = 3+\sqrt{10} = A_1 + B_1\sqrt{10} \Rightarrow A_1 = 3 \in \mathbb{N}, B_1 = 1 \in \mathbb{N}$.

Feltételezzük $n=k$-ra vagyis $A_n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítjuk $n=k+1$-re, $A_{k+1} \in \mathbb{N}, B_{k+1} \in \mathbb{N}$.

$\left(3+\sqrt{10}\right)^{k+1} = \left(3+\sqrt{10}\right)^k \cdot \left(3+\sqrt{10}\right) = \left(A_k + B_k\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)$.

Tehát $\left(3+\sqrt{10}\right)^{k+1} = \left(3A_k + 10B_k\right) + \sqrt{10}\left(A_k + 3B_k\right)$, ahonnan kapjuk, hogy

$A_{k+1} = 3A_k + 10B_k \in \mathbb{N}$ *és* $B_{k+1} = A_k + 3B_k \in \mathbb{N}$. **…4p**

b) $\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017} = A_{2017} + B_{2017}\sqrt{10}$, ahol $A_n, B_n \in \mathbb{N}^*$, hasonlóan

$\left(3-\sqrt{10}\right)^{2017} = A_{2017} - B_{2017}\sqrt{10}$.

Összeadva a fenti egyenlőségeket: $\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017} + \left(3-\sqrt{10}\right)^{2017} = 2A_{2017} \in \mathbb{N}$, ahonnan kapjuk, hogy

$\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017} = 2A_{2017} - \left(3-\sqrt{10}\right)^{2017} \Rightarrow \left(3+\sqrt{10}\right)^{2017} = 2A_{2017} + \left(-3+\sqrt{10}\right)^{2017}$, tehát

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

$$\left\{\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}=\left\{2A_{2017}+\left(-3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}\Rightarrow\left\{\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}=\left\{\left(-3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}.(1)$$ **…3p**

De

$$\left(3+\sqrt{10}\right)\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)=-1,\Rightarrow\sqrt{10}-3=\frac{1}{\sqrt{10}+3}\Rightarrow\left\{\left(\sqrt{10}-3\right)^{2017}\right\}=$$

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}+3}\right)^{2017}\right\}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}+3}\right)^{2017}\quad(2)$$

(1) és (2) kapjuk, hogy

$$a\cdot\{a\}=\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\cdot\left\{\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}=\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\cdot\left\{\left(-3+\sqrt{10}\right)^{2017}\right\}=$$

$$\left(3+\sqrt{10}\right)^{2017}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}+3}\right)^{2017}=1$$ **…2p**

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

2. feladat:

Adottak az $f,g:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^{2x}+\left(ab\right)^{x}+b^{2x}$ és $g(x)=a^{2x}-\left(ab\right)^{x}+b^{2x}$

függvények, ahol $a,b\in\mathbb{N}^{*}$.

a) Igazold, hogy $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=f\left(2x\right)$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ esetén.

b) Igazold, hogy $f\left(2^{n+k}\right)\vdots f\left(2^{n}\right)$, $(\forall)n,k\in\mathbb{N}$ esetén.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

a) $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=\left(a^{2x}+\left(ab\right)^{x}+b^{2x}\right)\left(a^{2x}-\left(ab\right)^{x}+b^{2x}\right)=a^{4x}+\left(ab\right)^{2x}+b^{4x}=f\left(2x\right)$

...**3p**

b) az a) alpont gondolatát ismételve kapjuk:

$f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=f\left(2x\right)$

$f\left(2x\right)\cdot g\left(2x\right)=f\left(2^{2}x\right)$

$f\left(2^{2}x\right)\cdot g\left(2^{2}x\right)=f\left(2^{3}x\right)$

....

$f\left(2^{k-1}x\right)\cdot g\left(2^{k-1}x\right)=f\left(2^{k}x\right)$

Összeszorozva a fenti egyenlőségeket kapjuk, hogy:

$f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\cdot g\left(2x\right)\cdot\ldots\cdot g\left(2^{k-1}x\right)=f\left(2^{k}x\right)\ (\forall)k\geq 2.$

$x=2^{n}\Rightarrow f\left(2^{n}\right)\cdot g\left(2^{n}\right)\cdot g\left(2^{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot g\left(2^{n+k-1}\right)=f\left(2^{n+k}\right)$ **...4p**

Tehát $f\left(2^{n+k}\right)\vdots f\left(2^{n}\right)$ $(\forall)n,k\in\mathbb{N}$ esetén. **...2p**

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

3. feladat:

Határozd meg azt a legkisebb *n* pozitív természetes számot, amelyre 5^{2016} osztja az $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(5n-1)\cdot 5n$ számot!

dr.Szenkovits Ferenc, Kolozsvár

Megoldás:Az $E_n=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(5n-1)\cdot 5n=\dfrac{(5n)!}{n!}$

$$=5^n\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(5n-1)\cdot(5n)}{5\cdot 10\cdot\ldots\cdot(5n-5)\cdot(5n)}$$

$$=5^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(5n-2)\cdot(5n-1)$$ **…6p**

összefüggések alapján látható, hogy $E_n \vdots 5^n$ és $E_n \not\vdots 5^{n+1}$, tehát a legkisebb olyan pozitív természetes szám *n*=2016, amelyre 5^{2016} osztja az $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(5n-1)\cdot(5n)$ számot.

…3p

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

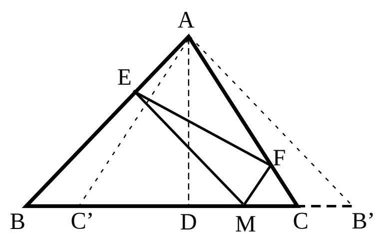
4. feladat:

Az ABC hegyesszögű háromszög (BC) oldalán felvesszük az M mozgó pontot. Az E és F pont az AB illetve AC egyenesen úgy helyezkedik el, hogy $EB = EM$ és $FC = FM$.

Határozd meg az M pont helyzetét úgy, hogy az EMF háromszög területe maximális legyen és számítsd ki e maximális területet az ABC háromszög oldalai és szögei függvényében.

Olosz Ferenc, *Szatmárnémeti*

***1.* Geometriai megoldás:** Az EBM és FCM egyenlő szárú háromszögek, így az alapjaikon fekvő szögek egyenlők, tehát



$$m\left(EMF\measuredangle\right)=180^o-m\left(EMB\measuredangle\right)-m\left(FMC\measuredangle\right)==180^o-B-C=A$$

Az EMF háromszög területe $T=\dfrac{EM\cdot FM\cdot\sin A}{2}$. **…3p**

Legyen D az A pontnak a BC-re eső vetülete és B', C' a B illetve C pontnak a D-re nézve vett szimmetrikusa.

E szerkesztés alapján az ABB' és ACC' egyenlő szárú háromszögek.

$EBM_\Delta \sim ABB'_\Delta$ mert mindkettő egyenlő szárú háromszög és az alapon fekvő egyik szögük közös.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

Következik $\dfrac{EM}{AB'} = \dfrac{BM}{BB'}$ vagyis $\dfrac{EM}{AB} = \dfrac{BM}{2BD}$, ahonnan

$EM = \dfrac{AB \cdot BM}{2BD} = \dfrac{AB \cdot BM}{2AB \cdot \cos B} = \dfrac{BM}{2\cos B}$. Hasonlóan $FCM_\Delta \sim ACC'_\Delta$, ahonnan

$FM = \dfrac{CM}{2\cos C}$. Tehát $T = EM \cdot FM \cdot \dfrac{\sin A}{2} = \dfrac{BM \cdot CM \cdot \sin A}{8 \cdot \cos B \cdot \cos C}$.

A mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből tudjuk, hogy

$\sqrt{BM \cdot CM} \le \dfrac{BM + CM}{2} = \dfrac{BC}{2}$, vagyis $BM \cdot CM \le \dfrac{BC^2}{4}$, így $T \le \dfrac{BC^2 \cdot \sin A}{32 \cdot \cos B \cdot \cos C}$. **…4p**

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $BM = CM$.

A bizonyítást nem befolyásolja, ha az E, F az $(AB), (AC)$ szakasz belsejébe, vagy azon kívülre esik, vagy ha a háromszög egyenlő szárú vagy egyenlő oldalú.

Az EMF háromszög területe maximális, ha M a (BC) oldal felezőpontja,

$T_{\max} = \dfrac{BC^2 \cdot \sin A}{32 \cdot \cos B \cdot \cos C}$. **…2p**

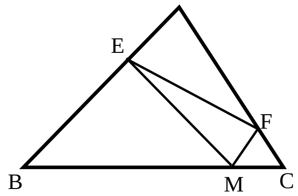
***2.* Trigonometriai megoldás:**

Az EBM és FCM egyenlő szárú háromszögek, így az alapjaikon fekvő szögek egyenlők, tehát

$m(EMF\measuredangle) = 180^o - m(EMB\measuredangle) - m(FMC\measuredangle) == 180^o - B - C = A$.

Az EMF háromszög területe $T = \dfrac{EM \cdot FM \cdot \sin A}{2}$. **…3p**

Az EBM egyenlő szárú háromszögben alkalmazzuk a szinusztételt:



$\dfrac{EM}{\sin B} = \dfrac{BM}{\sin\left(180^o - 2B\right)}$, ahonnan

$EM = \dfrac{BM \cdot \sin B}{\sin 2B} = \dfrac{BM}{2\cos B}$.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

Hasonlóan $FM = \frac{CM}{2\cos C}$. Tehát $T = EM \cdot FM \cdot \frac{\sin A}{2} = \frac{BM \cdot CM \cdot \sin A}{8 \cdot \cos B \cdot \cos C}$.

A mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből tudjuk, hogy

$\sqrt{BM \cdot CM} \le \frac{BM + CM}{2} = \frac{BC}{2}$, vagyis $BM \cdot CM \le \frac{BC^2}{4}$, így $T \le \frac{BC^2 \cdot \sin A}{32 \cdot \cos B \cdot \cos C}$. **…4p**

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $BM = CM$.

Az EMF háromszög területe maximális, ha M a (BC) oldal felezőpontja,

$T_{\max} = \frac{BC^2 \cdot \sin A}{32 \cdot \cos B \cdot \cos C}$. **…2p**

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

5. feladat:

Legyen M egy ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges pontja valamint P és T az M pont vetületei az AB, illetve az AC oldalakra. A következő jelöléseket használva:

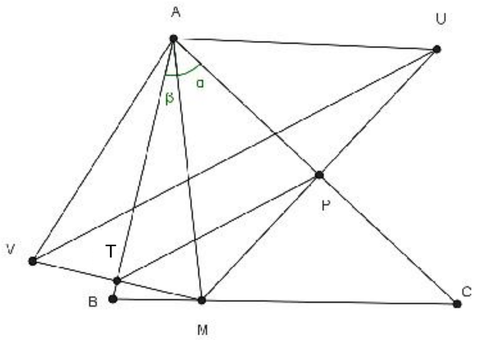
$AP = t$, $AT = l$, $m(\widehat{MTP}) = \sim$, $m(\widehat{MPT}) = \quad$, $AM = k$, igazold, hogy:

a) $l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) \le k^2$.

b) ha $\sim + \quad = 60^\circ$, akkor $l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) = \dfrac{k^2\sqrt{3}}{2}$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:



a) az $ATMP$ négyszög körbeírható, mert

$m(\widehat{ATM}) + m(\widehat{APM}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Ezért

$m(\widehat{MTP}) = m(\widehat{MAP}) = \sim$ és

$m(\widehat{MPT}) = m(\widehat{MAT}) = \quad$. Legyen $MP = x$ és

$MT = y$, akkor $tg\sim = \dfrac{x}{t}$ és $tg \quad = \dfrac{y}{l}$.

$l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) = l \cdot t \cdot tg\sim + l \cdot t \cdot tg \quad = l \cdot t \cdot \dfrac{x}{t} + l \cdot t \cdot \dfrac{y}{l} = l \cdot x + t \cdot y$. Tehát

$l \cdot t \cdot (tg\sim + tg \quad) = l \cdot x + t \cdot y$ (1)

Másrészt $t = \sqrt{k^2 - x^2}$ és $l = \sqrt{k^2 - y^2}$ akkor figyelembe véve az (1) -es relációt

$$l \cdot x + t \cdot y = x\sqrt{k^2 - y^2} + y\sqrt{k^2 - x^2} =$$
$$\sqrt{x^2(k^2 - y^2)} + \sqrt{y^2(k^2 - x^2)} \le$$
$$\frac{x^2 + k^2 - y^2}{2} + \frac{y^2 + k^2 - x^2}{2} = k^2$$

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

Alkalmaztuk a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenséget. **…5p**

b). Legyenek U és V az M pontnak az AC, illetve AB oldalakra vonatkozó szimmetrikusai. Ha $TP = u$, akkor $VU = 2u$, $m(V\widehat{A}U) = 2(\sim + \quad) = 120^\circ$ és $VA = MA = UA = k$.

Alkalmazzuk a koszinusz tételt a VAU háromszögben az A szögre:

$-\frac{1}{2} = \frac{k^2 + k^2 - 4u^2}{2k^2}$, innen $4u^2 = 3k^2$, vagyis $u = \frac{k\sqrt{3}}{2}$.

Végül alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét az $ATMP$ körbeírható négyszögben:

$AM \cdot TP = AP \cdot TM + AT \cdot MP$. Alkalmazva a fenti jelöléseket: $l \cdot x + t \cdot y = \frac{k^2\sqrt{3}}{2}$,

figyelembe véve az (1)-es összefüggést is, következik, hogy $l \cdot t \cdot (tg\sim + tg\quad) = \frac{k^2\sqrt{3}}{2}$. . **…4p**

Megjegyzés :

A feladat megoldható segédszerkesztés nélkül az $APMT$ négyszög körbeírhatóságára támaszkodva.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

6. feladat:

Határozd meg azt a 41 darab egymásutáni természetes számot, amelyek négyzetes középarányosa természetes szám.

Értelmezés szerint $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok négyzetes középarányosa: $\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$.

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

Legyen $p = 41$ és a keresett számok $n+1, n+2, ..., n+p$.

Ezen számok négyzetösszege:

$$S_n = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+p)^2 = p \cdot n^2 + 2n \cdot (1+2+\ldots+p) + (1^2 + 2^2 + \ldots + p^2) =$$

$$p \cdot n^2 + 2n \cdot \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} =$$

$$p \cdot \left[n^2 + 2n \cdot \frac{(p+1)}{2} + \frac{(p+1)^2}{4} + \frac{(p+1)(2p+1)}{6} - \frac{(p+1)^2}{4} \right] = p \cdot \left[\left(n + \frac{p+1}{2} \right)^2 + \frac{p^2-1}{12} \right]$$

Az $(n+1), (n+2), \ldots, (n+p)$ számok négyzetes középarányosa: $\sqrt{\left[n + \frac{(p+1)}{2} \right]^2 + \frac{p^2-1}{12}}$

…2p

Ez a szám akkor és csakis akkor természetes szám, ha létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\left(n + \frac{p+1}{2} \right)^2 + \frac{p^2-1}{12} = m^2. \qquad p = 41\text{-re: } (n+21)^2 + 140 = m^2$$

Legyen $x = m, y = n+21; x, y \in \mathbb{N}$. Ekkor $x^2 = y^2 + 140$, ahonnan $x^2 - y^2 = 140$ azaz $(x-y) \cdot (x+y) = 140$. **…4p**

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

II.forduló -10. osztály

Innen következik, hogy $x > y$. Ekkor jelöljük $u = x - y, v = x + y$ innen $x = \frac{u+v}{2}$,

$y = \frac{v-u}{2}$ $u, v \in \mathbb{N}$ Innen következik, hogy u és v azonos paritásúak kell legyenek. De

$u \cdot v = 140$, tehát párosak kell legyenek. Legyen $u = 2u_1$, $v = 2v_1$ $\left(u_1, v_1 \in \mathbb{N}\right)$.

Ekkor $u_1 \cdot v_1 = 35$, $(35 = 5 \cdot 7 \; vagy \; 35 = 1 \cdot 35)$. Ugyanakkor $y = n + 21 \geq 21$.

De $y = \frac{v-u}{2} = v_1 - u_1$, ahonnan $v_1 - u_1 \geq 21$. Innen következik, hogy csak az $u_1 = 1$ és $v_1 = 35$ lehetséges. Ekkor viszont $y = v_1 - u_1 = 35 - 1 = 34$. De $y = n + 21$, ahonnan $n + 21 = 34, n = 13$

Ugyanakkor $m = x = \frac{u+v}{2} = u_1 + v_1 = 36$. Tehát a keresett számok: $n + 1 = 14$, $n + 2 = 15$, ..., $n + 41 = 54$. **…3p**

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

1. **feladat:**

   Oldd meg a valós számok halmazán a $2\cdot\left(\sqrt{2^x-1}+\sqrt{3^x-2^x}+\ldots+\sqrt{2016^x-2015^x}\right)=2016^x+2014$ egyenletet.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás

Az adott egyenlet átírható a következő alakba:

$$\left(2^x-1-2\sqrt{2^x-1}+1\right)+\left(3^x-2^x-2\sqrt{3^x-2^x}+1\right)+\ldots+\left(2016^x-2015^x-2\sqrt{2016^x-2015^x}+1\right)=0$$

Vagyis $\left(\sqrt{2^x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{3^x-2^x}-1\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{2016^x-2015^x}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 2^x-1=1,\ 3^x-2^x=1, \ldots, 2016^x-2015^x=1,$

melyek egy időben csak $x=1$ esetén teljesülnek, ami az egyenlet egyetlen megoldása.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

2. feladat:

Jelölje a,b,c az R sugarú körbe írt háromszög oldalait. Igazold, hogy

$$\left(a^2+b^2\right)^2+4R^2c^2\le 8R^2\left(a^2+b^2\right) .$$

Zákány Mónika és Mastan Eliza, Nagybánya

Megoldás

A sinus tétel alapján $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$, az egyenlőtlenség átírható mint:

$$\left[4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\right]^2+4R^2\cdot 4R^2\cdot\sin^2 C\le 8R^2\cdot 4R^2\cdot\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)^2+\sin^2 C\le 2\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 C\le\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(2-\sin^2 A-\sin^2 B\right)\Leftrightarrow\sin^2 C\le\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right)$$

amit elegendő igazolni.

Valóban a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség alapján

$$\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right)\ge\left(\sin A\cos B+\cos A\sin B\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right)\ge\sin^2\left(A+B\right)\Leftrightarrow\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right)\ge\sin^2 C$$

amit igazolni kellett.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

3. feladat:

Igazold, hogy az $a_n = 3^n + 20$ (ahol $n \in \mathbb{N}$) sorozat:

a) végtelen sok összetett számot tartalmaz,

b) egyetlen köbszámot sem tartalmaz!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás

a) Tekintsük a következő részsorozatot:

$a_{6n} = 3^{6n} + 20 = 729^n + 20 = \left(7 \cdot 104 + 1\right)^n + 20 = \left(7k + 1\right) + 20 = 7\left(k + 3\right)$(ahol k természetes szám) osztható 7 -el bármely n természetes szám esetén.

Másrészt $f(n) = 3^{6n}$ (n természetes) függvény szigorúan növekvő exponenciális függvény, ezért $i \neq j$ esetén $f(i) \neq f(j)$. Következésképpen az $\left(a_{6n}\right)$ részsorozat tagjai páronként különböznek, s így ezen részsorozat tagjai az $\left(a_n\right)$ sorozatban végtelen sok összetett számot generálnak.

b) Ismeretes, hogy minden köbszám (egész szám köbe) $9k$ vagy $9k \pm 1$ alakú, ahol k egész szám.

Viszont $\left(a_n\right)$ sorozat tagjai: $a_n = 3^n + 20 = 3^n + 18 + 2 = 9k + 2$ alakúak (ahol k természetes szám), ha $n \geq 2$. Tehát $n \geq 2$ esetén a sorozatban nincsen köbszám.

Hasonlóan $a_0 = 21$ és $a_1 = 23$ sem köbszámok.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

4. feladat:

Az ABC háromszögben $m(BAC)=60°$. Legyen A_1 a BC szakasz felezőpontja, I a háromszögbe írt kör középpontja, és D az I pont A_1 szerinti szimmetrikusa. Igazold, hogy:

a) az $ABDC$ négyszög körbeírható.
b) $DA=DB+DC$.

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás

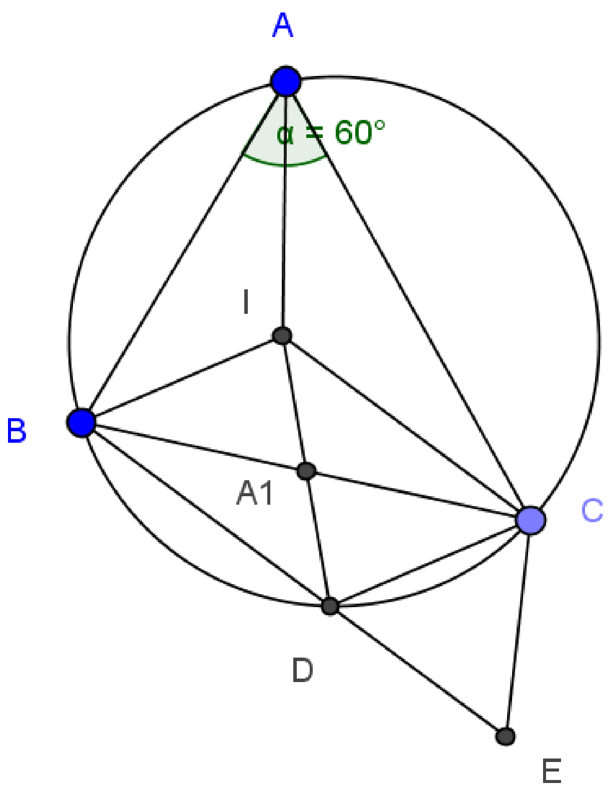
Először megmutatjuk, hogy az $ABDC$ négyszög körbeírható. $m(BCD)=\frac{1}{2}m(ABC)$ és $m(CBD)=\frac{1}{2}m(ACB)$. Innen

$m(BDC)=180^\circ-m(BCD)-m(CBD)=$
$=180^\circ-\frac{1}{2}m(ABC)-\frac{1}{2}m(ACB)=$
$=180^\circ-\frac{1}{2}\left[180^\circ-m(BAC)\right]=120^\circ$.

Innen következik, hogy $ABDC$ négyszög körbeírható. Legyen E a BD egyenesen, D legyen a BE szakasz belsejében úgy, hogy $DE=DC$. Ekkor ECD háromszög egyenlő oldalú. A BCE háromszögben alkalmazzuk a sin tételt:

$\frac{BE}{\sin(BCE)}=\frac{BC}{\sin(BEC)}$, de $m(BCE)=\frac{m(B)}{2}+60^\circ$ és $m(BEC)=60^\circ$, így

$\frac{BE}{\sin\left(60^\circ+\frac{B}{2}\right)}=\frac{BC}{\sin 60^\circ}$. (1)



Az ABC és ABD háromszögben $\frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{BC}{\sin A}=2R=\frac{AD}{\sin(ABD)}=\frac{AD}{\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)}=\frac{AD}{\sin\left(60^\circ+\frac{B}{2}\right)}$ (2)

Itt felhasználtuk azt, hogy $m(ABD)=m(ABC)+m(CBD)=m(B)+\frac{m(C)}{2}=\frac{m(B)}{2}+\frac{m(B)}{2}+\frac{m(C)}{2}=$
$=\frac{m(B)}{2}+\frac{\left[180^\circ-m(A)\right]}{2}=\frac{m(B)}{2}+\frac{120^\circ}{2}=60^\circ+\frac{m(B)}{2}$. Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy $DA=BE$. Viszont $BE=DB+DE=DB+DC$, így $DA=DB+DC$.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

5. **feladat:**

Egy táblára felírjuk 1-től 2015-ig a számokat. Két játékos felváltva letöröl lépésenként 11 számot. 183 lépés után a táblán 2 szám marad. Ha a táblán maradt 2 szám különbsége 1013, akkor az első játékos nyer, különben a második játékos. Kinek van nyerő stratégiája?

Szilágyi Judit, Kolozsvár és Szilágyi Emőke, Marosvásárhely

Megoldás

A számokat párosítjuk úgy, hogy a különbségük 1013 legyen. A párok: (1,1014), (2,1015), ..., (1002,2015). Pár nélkül maradnak az 1003, 1004,..., 1013 számok.

Az első játékosnak van nyerő stratégiája: első lépésben leveszi a pár nélküli 11 számot. Ezek után bármelyik 11 számot veszi le a második játékos, ő leveszi ezek közül a pár nélkül választott számok párját és a többit párosával. Így az ő lépései után mindig csak $(i, 1013+i)$ párok maradnak a táblán. Mivel 183 lépés van, utolsónak az első játékos lép, így a táblán egy előző típusú pár marad és így a különbség 1013.

XXVI. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Zilah, 2016. február 11 –14.

2. forduló
11-12. osztály

6. feladat:

Hányféleképp lehet 10 darab egyforma méretű golyót sorbarakni, ha a golyók közül 4 zöld, 3 fehér és 3 piros, és nincs két azonos színű szomszédos golyó?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás

Először elhelyezzük a 3 fehér és 3 piros golyót, majd közéjük helyezzük a 4 zöld golyót. A 3 fehér és 3 piros golyó elhelyezési lehetőségei $C_6^3 = 20$.

Jelöljük f – el a fehér golyók helyét, p–vel a piros golyók helyét, z – vel a kötelezően behelyezendő zöld golyók helyét, illetve * –al a zöld golyóklehetséges helyeit.

Az első tíz lehetőség:

Elhelyezési rend	Lehetőségek száma
f z f zf pz p z p	1
* f z f * p * f * p z p *	$C_5^2 = 10$
* f z f * p z p * f * p *	$C_5^2 = 10$
* f z f * p z p z p * f *	$C_4^1 = 4$
* f * p * f z f * p z p *	$C_5^2 = 10$
* f * p * f * p * f * p *	$C_7^4 = 35$
* f * p * f * p z p * f *	$C_6^3 = 20$
* p * f z f z f * p z p *	$C_4^1 = 4$
* p * f z f * p * f * p *	$C_6^3 = 20$
* p * f z f * p z p * f *	$C_5^2 = 10$
Összesen:	**124**

A fehér és piros golyókat felcserélve ugyanennyi esetet kapunk.

Így a lehetséges esetek száma: $2 \cdot 124 = 248$.