



## Országos Magyar Matematika Olimpia Megyei szakasz, 2019. január 26. XII. osztály

- **1. Feladat (10 pont)** Adottak az  $f,g:I\to\mathbb{R}$ ,  $I\subseteq\mathbb{R}$  deriválható függvények, amelyeknek deriváltjai folytonosak.
  - a) Igazold, hogy  $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x) \cdot e^{g(x)} + C;$
  - b) Számítsd ki:  $\int \frac{x^2 \ln x \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x + \frac{1}{x}} dx$  integrált, ahol x > 0!

(Matlap)

2. Feladat (10 pont) Számítsd ki:

a) az 
$$I - J$$
 integrált, ha  $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  és  $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ;

- b)  $\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x} dx, x > 0 \text{ integrált!}$
- **3. Feladat (10 pont)** Öt számkártyára felírtuk az 1,2,3,4 és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő X, Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)
- **4. Feladat (10 pont)** A  $G = (1, \infty)$  halmazon értelmezett az  $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 x^2 y^2 + 2}$  belső művelet  $\forall x, y \in G$  esetén.
  - a) Igazold, hogy  $(G, \circ)$  Ábel-féle csoport;
  - b) Határozd meg az m, n valós számokat úgy, hogy az  $f:(0,\infty)\to (1,\infty)$  függvény, ahol  $f(x) = \sqrt{mx+n}$  egy izomorfizmust valósítson meg az  $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$  és a  $\left(G,\circ\right)$  csoportok közt;
  - c) Számítsd ki  $\sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \dots \circ \sqrt{\frac{2 \cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$  értékét!







## Országos Magyar Matematika Olimpia Megyei szakasz, 2019. január 26.

# Javítókulcs XII. osztály

- **1. Feladat (10 pont)** Adottak az  $f,g:I\to\mathbb{R}$ ,  $I\subseteq\mathbb{R}$  deriválható függvények, amelynek deriváltjai folytonosak.
  - a) Igazold, hogy  $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}dx = f(x) \cdot e^{g(x)} + C;$
  - b) Számítsd ki:  $\int \frac{x^2 \ln x \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x + \frac{1}{x}} dx$  integrált, ahol x > 0!

(Matlap 10- L:2951/2018)

## Megoldás:

a) 
$$[f(x) \cdot e^{g(x)}]' = f'(x) \cdot e^{g(x)} + f(x) \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x) = [f'(x) + f(x) \cdot g'(x)]e^{g(x)}$$
. ....4p

#### 2. Feladat (10 pont) Számítsd ki:

a) az 
$$I - J$$
 integrált, ha  $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  és  $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ;

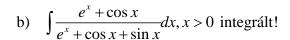




Centrul Național

De Evaluare și

**Examinare** 

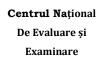


#### Megoldás:

3. Feladat (10 pont) Öt számkártyára felírtuk az 1,2,3,4 és 5 számokat, minden kártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett lévő X, Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5 -tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyán lévő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

#### Megoldás:

Ha az X dobozba nem kerül kártya, akkor az öt számkártyát az Y és Z dobozokba  $2^5$  -féleképpen Ha az X dobozba egy számkártya kerül, akkor az csak az 5 lehet, a fennmaradó négyet az Y és Z Ha az X dobozba két számkártya kerül, akkor azokon az 1 és 4 vagy a 2 és 3 szerepelhet. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2<sup>3</sup> -féleképpen tehetjük......2p Ha az X dobozba három számkártya kerül, akkor azokon 1,4,5 vagy 2,3,5 számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2<sup>2</sup> -féleképpen tehetjük......2p Ha az X dobozba négy számkártya kerül, akkor azokon 1,2,3 és 4 számok szerepelhetnek. Így a megmaradt számkártyákat az Y és Z dobozokba 2 -féleképpen tehetjük. .....1p Ha mind az 5 számkártya az X dobozba kerül, akkor ez egyféleképpen lehetséges. .....1p





Tehát az elhelyezések száma:  $2^5 + 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 75$ ......1p

- **4. Feladat (10 pont)** A  $G = (1, \infty)$  halmazon értelmezett az  $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 x^2 y^2 + 2}$  belső művelet  $\forall x, y \in G$  esetén.
  - a) Igazold, hogy  $(G, \circ)$  Ábel-féle csoport;
  - b) Határozd meg az m,n valós számokat úgy, hogy az  $f:(0,\infty)\to (1,\infty)$  függvény, ahol  $f(x)=\sqrt{mx+n}$  egy izomorfizmust valósítson meg az  $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$  és a  $\left(G,\circ\right)$  csoportok közöt;

Hivatalból ......1p

c) Számítsd ki  $\sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \dots \circ \sqrt{\frac{2 \cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$  értékét!

## Megoldás:

	111,44410-01
a)	Asszociativítás kimutatása
	$e = \sqrt{2} \in (1; \infty) \qquad 1p$
	$x' = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}} > 1 \text{ tehát } x' \in G \text{ szimmetrikus elem.} $
b)	$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y) \iff \sqrt{mxy + n} = \sqrt{mx + n} \circ \sqrt{my + n} =$
	$= \sqrt{m^2 xy + m(n-1)x + m(n-1)y + mn - 2n + 2}$ innen kapjuk, hogy
	$m^2 = m$
	$m(n-1) = 0$ ahonnan $m \in \{0,1\}$ , de mivel $f$ nem lehet konstans függvény.
	mn - 2n + 2 = n
	Innen következik, hogy $n = 0$
	$f(x) = \sqrt{x+1}$ bijektív
c)	Ha az $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$ , $f(x)=\sqrt{x+1}$ izomorfizmus a $\left(\mathbb{R}_+^*;\cdot\right)$ és $\left(G,\circ\right)$ között, akkor az
	$f^{-1}:(1,\infty)\to(0,\infty)$ , $f^{-1}(x)=x^2-1$ is izomorfizmus a $(G,\circ)$ és $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$ közöttlp
	Jelöljük $x_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}}$ , $x_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}}$ ,, $x_n = \sqrt{\frac{2 \cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$ ,
	ekkor $f^{-1}(x_1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1} - 1 = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1 + 1}, \ f^{-1}(x_2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1} - 1 = \frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 + 1}, \dots,$
	$f^{-1}(x_n) = \frac{2 \cdot n^2 + 2}{n^2 + n + 1} - 1 = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}.$



## MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

# **Centrul Na**țional De Evaluare și Examinare



$$\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k + 1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)^2 - (n-1) + 1}{(n-1)^2 + (n-1) + 1} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{1}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{n^2 + n + 1} \cdot \frac{1}{n^2 + n + 1$$