IV. országos magyar matematikaolimpia
XXXI. EMMV
országos szakasz, Kolozsvár, 2022. április 20–23.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat (10 pont)**.** Adott a $G = (-2022, 2022)$ halmaz és az

$$x * y = \frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}, \quad \forall x, y \in G$$

művelet.

a) Igazold, hogy $(G, *)$ csoport és az $f\colon (G, *) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$,

$$f(x) = \frac{2022 - x}{2022 + x}$$

függvény csoportizomorfizmus!

b) Számítsd ki tetszőleges $n \geq 2$ természetes szám esetén a

$$\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2 - 1}$$

kifejezés értékét! *(***)*

Megoldás. a) Igazoljuk, hogy „$*$” belső művelet G-n. Legyenek $x, y \in G$ tetszőlegesek. Ekkor $|x| < 2022$ és $|y| < 2022$, ezért $|xy| < 2022^2$, tehát $2022^2 + xy > 0$. Innen következik, hogy az alábbi egyenlőtlenségek rendre ekvivalensek egymással:

$$\begin{gathered}
-2022 < x * y < 2022, \\
-1 < \frac{2022(x+y)}{2022^2 + xy} < 1, \\
-2022^2 - xy < 2022(x+y) < 2022^2 + xy, \\
-(x+2022)(y+2022) < 0 < (2022-x)(2022-y),
\end{gathered} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ami igaz minden $x, y \in G$ esetén. Tehát beláttuk, hogy „$*$” belső művelet G-n.

Belátjuk, hogy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, minden $x, y \in G$ esetén. Valóban, minden $x, y \in G$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x * y) &= f\left(\frac{2022^2(x+y)}{2022^2 + xy}\right) = \frac{2022 - \frac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}}{2022 + \frac{2022^2(x+y)}{2022^2+xy}} \\
&= \frac{1 - \frac{2022(x+y)}{2022^2+xy}}{1 + \frac{2022(x+y)}{2022^2+xy}} = \frac{2022^2 + xy - 2022(x+y)}{2022^2 + xy + 2022(x+y)} \\
&= \frac{(2022-x)(2022-y)}{(2022+x)(2022+y)} = f(x) \cdot f(y).
\end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az f függvény folytonos és deriválható a $(-2022, 2022)$ intervallumon, és

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot 2022}{(2022+x)^2} < 0,$$

minden $x \in G$ esetén, tehát f szigorúan csökkenő a G-n, és ezért injektív is. Másrészt, $\lim\limits_{x \searrow -2022} f(x) = +\infty$ és $\lim\limits_{x \nearrow 2022} f(x) = 0$, ezért $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, vagyis f szürjektív. Tehát f bijektív. (**1 pont**)

Mivel $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ csoport, ezért az előbbi tulajdonságok alapján $(G, *)$ is csoport és f csoportizomorfizmus. (**1 pont**)

b) Az a) alpont alapján minden $n \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2-1}\right) = f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right). \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Viszont minden $k \geq 2$ természetes szám esetén

$$f\left(\frac{2022}{2k^2-1}\right) = \frac{2022 - \frac{2022}{2k^2-1}}{2022 + \frac{2022}{2k^2-1}} = \frac{2 \cdot 2022k^2 - 2 \cdot 2022}{2 \cdot 2022k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

ezért

$$f\left(\frac{2022}{7}\right) \cdot f\left(\frac{2022}{17}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{2022}{2n^2-1}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \ (\mathbf{2\ pont})$$

Legyen $a_n = \frac{2022}{7} * \frac{2022}{17} * \cdots * \frac{2022}{2n^2-1}$. Ekkor $f(a_n) = \frac{n+1}{2n}$, de ugyanakkor $f(a_n) = \frac{2022-a_n}{2022+a_n}$, tehát $a_n = \frac{2022(n-1)}{3n+1}$, minden $n \geq 2$ természetes szám esetén. (**1 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

Megjegyzés. Annak a bizonyítása, hogy „$*$" belső művelet G-n, valamint $(G, *)$ csoport, az f felhasználása nélkül összesen (**3 pont**)

2. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az $f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)}$$

függvény primitívjeit! *Kovács Béla, Szatmárnémeti*

Első megoldás. Az adott trigonometriai törtfüggvényt egyszerűbb törtekre bontjuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x \cdot (3 - \sin 2x)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos x}{3 - \sin 2x}\right). \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Ekkor

$$I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \int \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2\cos x}{3 - \sin 2x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2,$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x - 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + \mathcal{C} = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \mathcal{C} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \mathcal{C} \qquad (\mathbf{2\ pont}) \end{aligned}$$

és $I_2=\int\frac{\cos x}{3-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$. Legyen $J_2=\int\frac{\sin x}{3-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$. Ekkor

$$I_2+J_2=\int\frac{\cos x+\sin x}{3-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(\sin x-\cos x)'}{2+(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}+\mathcal{C},\quad (\mathbf{2\ pont})$$

valamint

$$I_2-J_2=\int\frac{\cos x-\sin x}{3-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{4-(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sin x+\cos x}{2-\sin x-\cos x}\right|+\mathcal{C}.\quad (\mathbf{2\ pont})$$

Összeadva az előbbi két eredményt, következik, hogy

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2+\sin x+\cos x}{2-\sin x-\cos x}\right|+\mathcal{C},$$

tehát

$$I=\frac{1}{3}I_1+\frac{2}{3}I_2=\frac{1}{3}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+\sin x+\cos x}{2-\sin x-\cos x}\right|+\mathcal{C}.\quad (\mathbf{1\ pont})$$

Hivatalból (**1 pont**)

■

Második megoldás. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{\sin x\cdot(3-\sin 2x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin x\cdot(4-(1+\sin 2x))}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sin x\cdot(4-(\sin x+\cos x)^2)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sin x\cdot(2-(\sin x+\cos x))(2+(\sin x+\cos x))}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\quad (\mathbf{2\ pont})$$

A $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ helyettesítést és a $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, valamint $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ képleteket használva következik, hogy

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2-\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)\left(2+\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\quad (\mathbf{2\ pont})\\&=\int\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{6}\int\frac{t-1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az

$$\frac{(1+t^2)^2}{t(3t^2-2t+1)(t^2+2t+3)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{3t^2-2t+1}+\frac{Dt+E}{t^2+2t+3}$$

felbontást, ahonnan azt kaptuk, hogy $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$ és $E=-\frac{1}{6}$. A kapott integrálokat a következő módon számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}\int\frac{t-1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{6}\int\frac{(6t-2)-4}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{3}\cdot\int\frac{1}{3t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{9}\cdot\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}+\mathcal{C}\\&=\frac{1}{6}\cdot\ln(3t^2-2t+1)-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3t-1}{\sqrt{2}}+\mathcal{C},\end{aligned}$$

$$\int \frac{t-1}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{(2t+2)-4}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+2t+3) - 2\int \frac{1}{(t+1)^2+2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+2t+3) - \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát az eredeti integrál

$$I = \frac{1}{3}\ln t - \frac{1}{12}\ln(3t^2-2t+1) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{3t-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12}\cdot\ln(t^2+2t+3) - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + \mathcal{C},$$

ahol $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont)**.** Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeknek létezik $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitív függvényük úgy, hogy $[f(x)] - \{f(x)\} = F(x)$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, $\{a\}$ pedig a törtrészét jelöli!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Az eredeti összefüggés ekvivalens az $[f(x)] - f(x) + [f(x)] = F(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, vagyis az $f(x)+F(x) = 2\cdot[f(x)]$, $\forall x\in\mathbb{R}$ összefüggéssel. (**1 pont**)
A feltétel alapján az f függvény folytonos, az F deriválható, tehát folytonos, ezért az $f+F$ függvény is folytonos. (**1 pont**)
Mivel $[f(x)]\in\mathbb{Z}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, az előbbi észrevételek alapján létezik olyan $k\in\mathbb{Z}$, amelyre $[f(x)] = k$, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)
Innen kapjuk, hogy $f(x)+F(x) = 2k$, $\forall x\in\mathbb{R}$, és beszorozva ezt az összefüggést e^x-nel, az

$$\big(e^x\cdot F(x)\big)' = (2k\cdot e^x)', \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

összefüggéshez jutunk. (**2 pont**)
Innen következik, hogy $e^x\cdot F(x) = 2k\cdot e^x + c$, $\forall x\in\mathbb{R}$, vagyis

$$F(x) = 2k + c\cdot e^{-x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A előbbi össszefüggés alapján $f(x) = -ce^{-x}$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. (**1 pont**)
Mivel $[f(x)] = k$, $\forall x\in\mathbb{R}$, következik, hogy $[-ce^{-x}] = k$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Viszont $\lim\limits_{x\to\infty} -ce^{-x} = 0$, ezért $k=0$. Másrészt $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, ezért $c=0$. Tehát az egyetlen feltételnek megfelelő függvény a konstans nulla függvény. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Legyen $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ egy olyan primitív függvénnyel rendelkező függvény, amelynek valamely $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ primitívjére a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} tF\left(\frac{1}{t}\right)$ határérték véges. Jelöljük ezt a határértéket L-el. Bizonyítsd be, hogy a $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ c, & x = 0\end{cases}$$

függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha $c = L$.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. Tekintsük a $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvényt. (**3 pont**)

Az értelmezés és a megadott feltételek alapján

$$H'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}F\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}L. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ugyanakkor $x \neq 0$ esetén

$$H'(x) = -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right) + f\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

tehát írhatjuk, hogy

$$H'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2F\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ -\frac{3}{2}L, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} f\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel ebben a felírásban a jobb oldalon megjelenő első függvény folytonos, a második függvény két primitiválható függvény különbsége, tehát ő maga is primitiválható. (**1 pont**)
Másrészt csak egy konstans esetén lehet a g-nek primitívje, tehát a g pontosan akkor primitiválható, ha $c = L$. (**1 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)

■