XXX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Nagyvárad, 2024. április 24–28.

XI. osztály

1. feladat. Oldd meg a

$$\begin{cases} 27^{x+y} + 2 = 3^{y+z+1} \\ 27^{y+z} + 2 = 3^{z+x+1} \\ 27^{z+x} + 2 = 3^{x+y+1} \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

2. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben az A csúcsnál található szög mértéke $90°$, valamint $AB = BC = CD = 1$. Igazold, hogy $1 < AC \leq \sqrt{2}$.

3. feladat. Egy tetraéder éleire felírtuk rendre az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokat. Lehetséges-e, hogy minden oldallapon a számok összege azonos legyen? Hasonlóan, ha számozzuk egy kocka éleit rendre az $1, 2, \ldots, 12$ számokkal, lehetséges-e, hogy minden oldallapon a számok összege azonos legyen?

4. feladat. Igazold, hogy minden $n \geq 5$ természetes szám esetén

$$(n+1)^{n-1} < n^n < (n-1)^{n+1}.$$

5. feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában az A szög mértéke $60°$ és O az ABD háromszög köré írt körének középpontja. Jelölje E az AO egyenes és a BCD szög külső szögfelezőjének metszéspontját. Igazold, hogy $OE = 2AO$.

6. feladat. Kinga és Orsi találtak egy rubin- és zafírszemekből álló nyakláncot. Mindkét drágakőből páros számú szem található a nyakláncon. A lányok szeretnék egymás között elosztani a nyakláncot úgy, hogy mindkettejükhöz azonos számú rubin-, illetve zafírszem kerüljön, ugyanakkor minél kevesebb vágást ejtsenek rajta (a nyaklánc zárt, egy vágás mindig két ékkő között történik és csak egy helyen vágja át a láncot). A lányok azt állítják, hogy két vágás mindig elegendő, akármilyen sorrendben is helyezkednek el az ékkövek, és akármennyi darab található a bizonyos fajtákból. Bizonyítsd be, hogy a lányoknak igaza van!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér, amelyből 1 pont hivatalból jár. A feladatok általánosítására, illetve az első helyes megoldástól lényegesen különböző további megoldásokra feladatonként maximálisan további 5 pont szerezhető. Munkaidő: 4 óra.