

Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием разностной несимметричной схемы *Ln(p)-СКОРОСТЬ*

Бекбулатов Рамзан
410 группа

6 июня 2016 г.

1 Тесты

1.1 Случай гладкого решения

Проверка работоспособности схемы производилась для следующего гладкого решения:

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, x_2) &= \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^t, \\ u_2(t, x_1, x_2) &= \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) e^{-t}, \\ \rho(t, x_1, x_2) &= (\cos(2\pi x_1) + 3/2)(\sin(2\pi x_2) + 3/2)e^t, \end{aligned}$$

2 Постановка задачи

Решение краевой задачи протекания газа через область Ω

Система уравнений, описывающая нестационарное движение баротропного газа в области Ω размерности 2 или 3, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \right] + \nabla p &= L \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \\ p &= p(\rho), \end{aligned}$$

где L есть линейный симметричный положительно определенный оператор

$$L \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla (\mu \operatorname{div} \mathbf{u})$$

Для построения разностной схемы в двумерном случае с односторонними разностями, направленными против потока, и вычисляемой функцией $g = \ln(p)$ запишем систему в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial g}{\partial t} + u_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \\
& \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_k}{\partial x_2} + p'_\rho(\rho) \frac{\partial g}{\partial x_k} = \\
& = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^s \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k, \quad k = 1, 2, \\
& p = p(\rho), \quad g = \ln \rho.
\end{aligned}$$

Неизвестные функции: плотность p и вектор скорости u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega$$

В начальный момент времени задаются функции, значения которых определяют плотность и скорость газа в каждой точке области Ω :

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

3 Область и граничные условия

Компоненты функции скорости на границе области Ω будем считать равными нулю, если явно не задано другое условие. На границе, где вектор скорости направлен во внутрь, будем считать известной функцию плотности, положив её значение равным ρ_γ . На остальных участках границы функция плотности считается неизвестной и подлежит определению.

Обозначим через Ω_{nm} квадрат, координаты точек которого удовлетворяют неравенствам $n < x < n+1$ и $m < y < m+1$. Множество точек, составляющее стороны квадрата Ω_{nm} обозначим $\Gamma_{nm}^{x-}, \Gamma_{nm}^{x+}, \Gamma_{nm}^{y-}$ и Γ_{nm}^{y+} , где индекс x или y означает, какая из координат на стороне является постоянной, а $+$ или $-$ означает максимальное или минимальное значение, которое принимает эта координата. С учетом этих обозначений область и начальные условия можно записать в следующем виде:

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{01} \cup \bar{\Omega}_{02} \cup \bar{\Omega}_{11} \cup \bar{\Omega}_{12} \cup \bar{\Omega}_{10} \cup \bar{\Omega}_{20};$$

$$u_1(x, y) = w, \quad \text{where } (x, y) \in \Gamma_{01}^{x-} \cup \Gamma_{02}^{x+};$$

$$\frac{\partial u_2(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \text{where } (x, y) \in \Gamma_{20}^{x+}$$

4 Алгоритм

Используемые обозначения:

Для поиска численного решения задачи предлагается использовать р.с.:

$$\delta_k\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2}W_{\bar{x}_k} + \frac{V - |V|}{2}W_{x_k} = \begin{cases} VW_{\bar{x}_k}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_{x_k}, & \text{если } V < 0. \end{cases}$$

$$g_t = \frac{g_{\bar{m}}^{n+1} - g_{\bar{m}}^n}{\tau}, \quad g_{x_k} = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n - g_{\bar{m}}^n}{h_k}, \quad g_x^\circ = \frac{g_{\bar{m}+1_k}^n - g_{\bar{m}-1_k}^n}{2h_k}, \quad g_{\bar{x}_k} = \frac{g_{\bar{m}}^n - g_{\bar{m}-1_k}^n}{h_k}.$$

$$G_t + \delta_1\{\hat{G}, V_1\} + \delta_2\{\hat{G}, V_2\} + (\hat{V}_1)_{\frac{0}{x_1}} + (\hat{V}_2)_{\frac{0}{x_2}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}};$$

$$G_t + \hat{V}_{kx_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, k = 1, 2;$$

$$G_t + \hat{V}_{k\bar{x}_k} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, k = 1, 2;$$

$$(V_k)_t + \delta_1\{\hat{V}_k, V_1\} + \delta_2\{\hat{V}_k, V_2\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\frac{0}{x_k}} = \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})\left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^s (V_m)_{\frac{0}{x_k\bar{x}_m}} + f_k, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}},$$

$$\hat{V}_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.$$

$$\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$$

Приведем индексную запись уравнений данной разностной схемы:

$$\begin{aligned} & \frac{G_{m_1, m_2}^{n+1} - G_{m_1, m_2}^n}{\tau} - \frac{|V_{2m_1, m_2}| + V_{2m_1, m_2}^n}{2h_2} G_{m_1, m_2-1}^{n+1} - \\ & - \frac{|V_{1m_1, m_2}| + V_{1m_1, m_2}^n}{2h_1} G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1, m_2}|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1, m_2}|}{h_2} \right) G_{m_1, m_2}^{n+1} + \\ & + \frac{V_{1m_1, m_2}^n - |V_{1m_1, m_2}|}{2h_1} G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + \frac{V_{2m_1, m_2}^n - |V_{2m_1, m_2}|}{2h_2} G_{m_1, m_2+1}^{n+1} + \\ & + \frac{V_{1m_1+1, m_2}^{n+1} - V_{1m_1-1, m_2}^{n+1}}{2h_1} + \frac{V_{2m_1, m_2+1}^{n+1} - V_{2m_1, m_2-1}^{n+1}}{2h_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{G_{0, m_2}^{n+1} - G_{0, m_2}^n}{\tau} + \frac{V_{11, m_2}^{n+1} - V_{10, m_2}^{n+1}}{h_1} = 0, \quad 0 < m_2 < M_2, \\ & \frac{G_{m_1, 0}^{n+1} - G_{m_1, 0}^n}{\tau} + \frac{V_{2m_1, 1}^{n+1} - V_{2m_1, 0}^{n+1}}{h_2} = 0, \quad 0 < m_1 < M_1, \\ & \frac{G_{M_1, m_2}^{n+1} - G_{M_1, m_2}^n}{\tau} + \frac{V_{1M_1, m_2}^{n+1} - V_{1M_1-1, m_2}^{n+1}}{h_1} = 0, \quad 0 < m_2 < M_2, \\ & \frac{G_{m_1, M_2}^{n+1} - G_{m_1, M_2}^n}{\tau} + \frac{V_{2m_1, M_2}^{n+1} - V_{2m_1, M_2-1}^{n+1}}{h_2} = 0, \quad 0 < m_1 < M_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{1m_1,m_2}^{n+1} - V_{1m_1,m_2}^n}{\tau} - \frac{|V_{2m_1,m_2}^n| + V_{2m_1,m_2}^n}{2h_2} V_{1m_1,m_2-1}^{n+1} - \\
& - \frac{|V_{1m_1,m_2}^n| + V_{1m_1,m_2}^n}{2h_1} V_{1m_1-1,m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1,m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1,m_2}^n|}{h_2} \right) V_{1m_1,m_2}^{n+1} + \\
& + \frac{|V_{1m_1,m_2}^n| - |V_{1m_1,m_2}^n|}{2h_1} V_{1m_1+1,m_2}^{n+1} + \frac{|V_{2m_1,m_2}^n| - |V_{2m_1,m_2}^n|}{2h_2} V_{1m_1,m_2+1}^{n+1} + \\
& + p'_\rho(e^{G_{m_1,m_2}^n}) \frac{G_{m_1+1,m_2}^{n+1} - G_{m_1-1,m_2}^{n+1}}{2h_1} = \\
& = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{V_{1m_1-1,m_2}^{n+1} - 2V_{1m_1,m_2}^{n+1} + V_{1m_1+1,m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{V_{1m_1,m_2-1}^{n+1} - 2V_{1m_1,m_2}^{n+1} + V_{1m_1,m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G_{m_1,m_2}^n}) \left(\frac{4}{3} \frac{V_{1m_1-1,m_2}^n - 2V_{1m_1,m_2}^n + V_{1m_1+1,m_2}^n}{h_1^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{V_{1m_1,m_2-1}^n - 2V_{1m_1,m_2}^n + V_{1m_1,m_2+1}^n}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} e^{-G_{m_1,m_2}^n} \frac{V_{2m_1-1,m_2-1}^n - V_{2m_1-1,m_2+1}^n - V_{2m_1+1,m_2-1}^n + V_{2m_1+1,m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{1m_1,m_2}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V_{2m_1,m_2}^{n+1} - V_{2m_1,m_2}^n}{\tau} - \frac{|V_{2m_1,m_2}^n| + V_{2m_1,m_2}^n}{2h_2} V_{2m_1,m_2-1}^{n+1} - \\
& - \frac{|V_{1m_1,m_2}^n| + V_{1m_1,m_2}^n}{2h_1} V_{2m_1-1,m_2}^{n+1} + \left(\frac{|V_{1m_1,m_2}^n|}{h_1} + \frac{|V_{2m_1,m_2}^n|}{h_2} \right) V_{2m_1,m_2}^{n+1} + \\
& + \frac{|V_{1m_1,m_2}^n| - |V_{1m_1,m_2}^n|}{2h_1} V_{2m_1+1,m_2}^{n+1} + \frac{|V_{2m_1,m_2}^n| - |V_{2m_1,m_2}^n|}{2h_2} V_{2m_1,m_2+1}^{n+1} + \\
& + p'_\rho(e^{G_{m_1,m_2}^n}) \frac{G_{m_1,m_2+1}^{n+1} - G_{m_1,m_2-1}^{n+1}}{2h_2} = \\
& = \tilde{\mu} \left(\frac{V_{2m_1-1,m_2}^{n+1} - 2V_{2m_1,m_2}^{n+1} + V_{2m_1+1,m_2}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{4}{3} \frac{V_{2m_1,m_2-1}^{n+1} - 2V_{2m_1,m_2}^{n+1} + V_{2m_1,m_2+1}^{n+1}}{h_2^2} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G_{m_1,m_2}^n}) \left(\frac{V_{2m_1-1,m_2}^n - 2V_{2m_1,m_2}^n + V_{2m_1+1,m_2}^n}{h_1^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} \frac{V_{2m_1,m_2-1}^n - 2V_{2m_1,m_2}^n + V_{2m_1,m_2+1}^n}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\mu}{3} e^{-G_{m_1,m_2}^n} \frac{V_{1m_1-1,m_2-1}^n - V_{1m_1-1,m_2+1}^n - V_{1m_1+1,m_2-1}^n + V_{1m_1+1,m_2+1}^n}{4h_1 h_2} + f_{2m_1,m_2}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_h,
\end{aligned}$$

Данные уравнения образуют СЛАУ, решая которую находим сеточное решение на очередном слое.

Из первого разностного уравнения получаем следующие алгебраические уравнения для всех внутренних узлов:

$$\begin{aligned}
& ag_G00 \cdot G_{m_1,m_2}^{n+1} + ag_GR0 \cdot G_{m_1+1,m_2}^{n+1} + ag_GL0 \cdot G_{m_1-1,m_2}^{n+1} + ag_G0R \cdot G_{m_1,m_2+1}^{n+1} + \\
& + ag_G0L \cdot G_{m_1,m_2-1}^{n+1} + ag_V1R0 \cdot V_{1m_1+1,m_2}^{n+1} + ag_V1L0 \cdot V_{1m_1-1,m_2}^{n+1} + \\
& + ag_V20R \cdot V_{2m_1,m_2+1}^{n+1} + ag_V20L \cdot V_{2m_1,m_2-1}^{n+1} = bg,
\end{aligned}$$

где коэффициенты определяются по формулам:

Из третьего уравнения получаем:

$$\begin{aligned}
ag_G00 &= 1 + \frac{\tau}{h_1} |V100| + \frac{\tau}{h_2} |V200|, \\
ag_GR0 &= \frac{\tau}{2h_1} (V100 - |V100|), \\
ag_GL0 &= -\frac{\tau}{2h_1} (V100 + |V100|), \\
ag_G0R &= \frac{\tau}{2h_2} (V200 - |V200|), \\
ag_G0L &= -\frac{\tau}{2h_2} (V200 + |V200|), \\
ag_V1R0 &= \frac{\tau}{2h_1}, \\
ag_V1L0 &= -\frac{\tau}{2h_1}, \\
ag_V20R &= \frac{\tau}{2h_2}, \\
ag_V20L &= -\frac{\tau}{2h_2}, \\
bg &= g00.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
av1_V100 \cdot (V_1)_{m_1, m_2}^{n+1} + av1_V1R0 \cdot (V_1)_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_V1L0 \cdot (V_1)_{m_1-1, m_2}^{n+1} + av1_V10R \cdot (V_1)_{m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
av1_V10L \cdot (V_1)_{m_1, m_2-1}^{n+1} + av1_GR0 \cdot G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av1_GL0 * G_{m_1-1, m_2}^{n+1} = bv1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
av1_V100 &= 1 + \frac{\tau}{h_1} |V100| + \frac{\tau}{h_2} |V200| + \tilde{\mu}\tau \left(\frac{8}{3h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) \\
av1_V1L0 &= -\frac{\tau}{2h_1} (|V100| + V100) - \frac{4\tilde{\mu}\tau}{3h_1^2} \\
av1_V10L &= -\frac{\tau}{2h_2} (|V200| + V200) - \frac{\tilde{\mu}\tau}{h_2^2} \\
av1_V1R0 &= \frac{\tau}{2h_1} (V100 - |V100|) - \frac{4\tilde{\mu}\tau}{3h_1^2} \\
av1_V10R &= \frac{\tau}{2h_2} (V200 - |V200|) - \frac{\tilde{\mu}\tau}{h_2^2} \\
av1_GR0 &= \frac{\tau}{2h_1} \rho'_p \\
av1_GL0 &= -\frac{\tau}{2h_1} \rho'_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bv1 = V100 + (-\tilde{\mu} + \mu e^{-g}) \left(\frac{4\tau}{3h_1^2} (V1L0 - 2V1 + \right. \right. \\
\left. \left. + V1R0) + \frac{\tau}{h_2^2} (V10L - 2V1 + V10R) \right) + \\
+ \frac{\mu\tau e^{-g}}{12h_1 h_2} (V2LL - V2LR - V2RL + V2RR) + \tau F_{v2}
\end{aligned}$$

Из четвертого уравнения получаем:

$$\begin{aligned}
av2_V200 \cdot (V_2)_{m_1, m_2}^{n+1} + av2_V2R0 \cdot (V_2)_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av2_V2L0 \cdot (V_2)_{m_1-1, m_2}^{n+1} + av2_V20R \cdot (V_2)_{m_1, m_2+1}^{n+1} + \\
av2_V20L \cdot (V_2)_{m_1, m_2-1}^{n+1} + av2_GR0 \cdot G_{m_1+1, m_2}^{n+1} + av2_GL0 * G_{m_1-1, m_2}^{n+1} = bv1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
av2_V200 &= 1 + \frac{\tau}{h_1} |V100| + \frac{\tau}{h_2} |V200| + \tilde{\mu}\tau \left(\frac{8}{3h_2^2} + \frac{2}{h_1^2} \right) \\
av2_V2L0 &= -\frac{\tau}{2h_1} (|V100| + V100) - \frac{\tilde{\mu}\tau}{h_1^2} \\
av2_V20L &= -\frac{\tau}{2h_2} (|V200| + V200) - \frac{4\tilde{\mu}\tau}{3h_2^2} \\
av2_V2R0 &= \frac{\tau}{2h_1} (V100 - |V100|) - \frac{\tilde{\mu}\tau}{h_1^2} \\
av2_V20R &= \frac{\tau}{2h_2} (V200 - |V200|) - \frac{4\tilde{\mu}\tau}{3h_2^2} \\
av2_G0R &= \frac{\tau}{2h_2} \rho'_p e^g
\end{aligned}$$

$$av2_G0L = -\frac{\tau}{2h_2}\rho'_p e^g$$

$$\begin{aligned} bv2 = V200 - (\tilde{\mu} - \mu e^{-g})(\frac{\tau}{h_1^2}(V2L0 - 2V2 + \\ + V2R0) + \frac{4\tau}{3h_2^2}(V20L - 2V2 + V20R)) + \\ + \frac{\mu\tau e^{-g}}{12h_1 h_2}(V1LL - V1LR - V1RL + V1RR) + \tau F_{v2} \end{aligned}$$

5 Результаты расчета для гладкого решения

Ниже представлена таблица точности расчетов для разных сеток. Из данных результатов следует, что точность вычислений возрастает при размельчении сетки.

Графики:

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.025$$



Рис. 1: Скорость

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.225$$

Рис. 2: Плотность

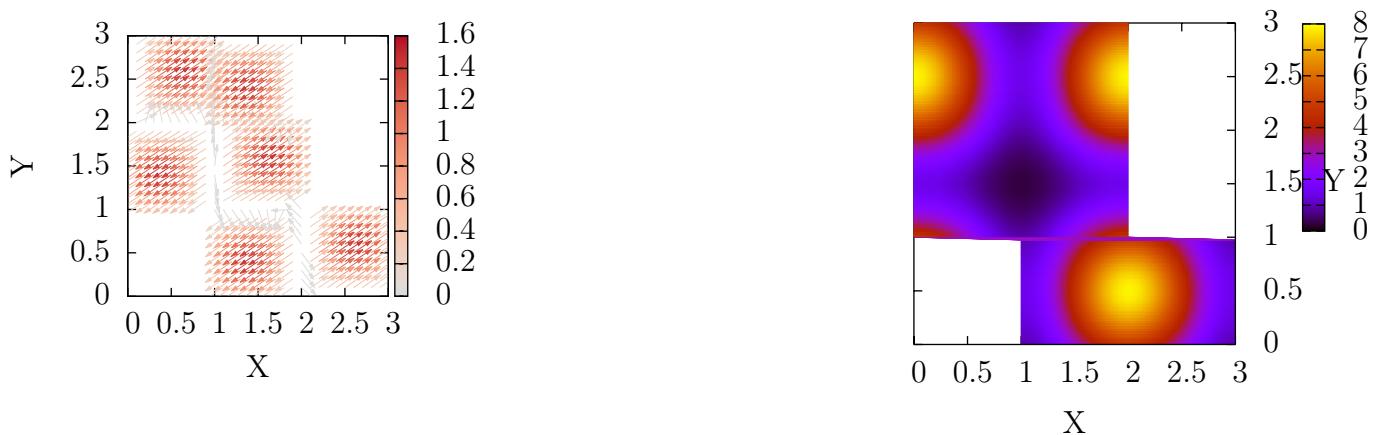


Рис. 3: Скорость

Рис. 4: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.425$$



Рис. 5: Скорость

Рис. 6: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.625$$

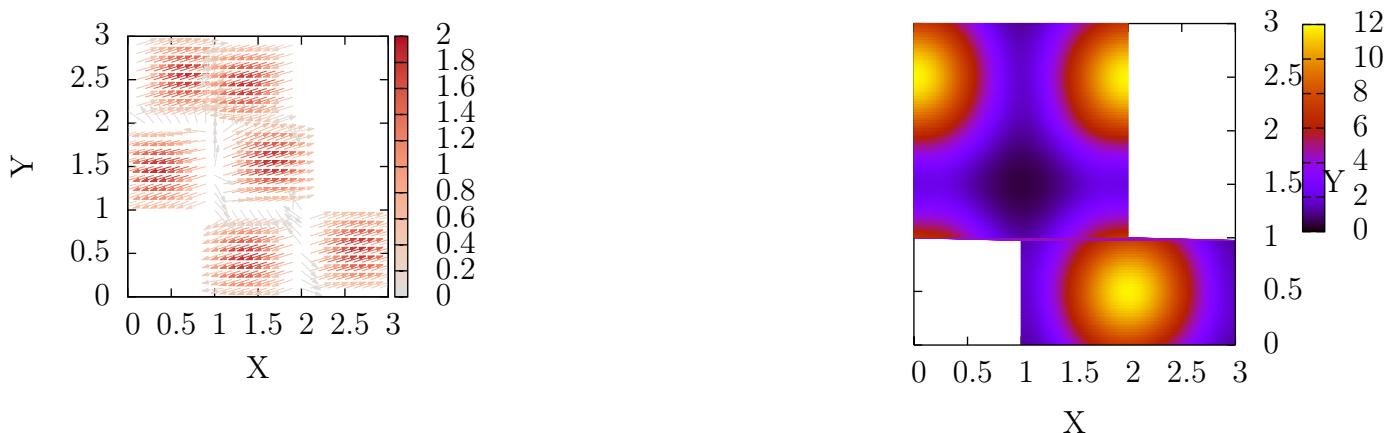


Рис. 7: Скорость

Рис. 8: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.825$$



Рис. 9: Скорость

Рис. 10: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 1.000$$



Рис. 11: Скорость

Рис. 12: Плотность

Таблицы:

norm of the error in C for g : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$9.918e - 01$	$6.834e - 01$	$5.375e - 01$
0.02500	$8.201e - 01$	$4.850e - 01$	$3.275e - 01$
0.01250	$7.405e - 01$	$4.017e - 01$	$2.383e - 01$

norm of the error in L_2 for g : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$1.840e - 01$	$1.263e - 01$	$1.007e - 01$
0.02500	$1.482e - 01$	$8.847e - 02$	$6.119e - 02$
0.01250	$1.321e - 01$	$7.177e - 02$	$4.345e - 02$

norm of the error in C for v_1 : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$4.645e - 01$	$3.466e - 01$	$2.857e - 01$
0.02500	$4.307e - 01$	$2.801e - 01$	$1.974e - 01$
0.01250	$4.201e - 01$	$2.553e - 01$	$1.559e - 01$

norm of the error in L_2 for v_1 : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$1.421e - 01$	$1.005e - 01$	$7.926e - 02$
0.02500	$1.309e - 01$	$8.201e - 02$	$5.521e - 02$
0.01250	$1.274e - 01$	$7.478e - 02$	$4.448e - 02$

norm of the error in C for v_2 : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$2.469e - 01$	$1.725e - 01$	$1.387e - 01$
0.02500	$2.147e - 01$	$1.256e - 01$	$9.038e - 02$
0.01250	$1.998e - 01$	$1.086e - 01$	$6.685e - 02$

norm of the error in L_2 for v_2 : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$7.627e - 02$	$5.377e - 02$	$4.237e - 02$
0.02500	$6.422e - 02$	$4.030e - 02$	$2.765e - 02$
0.01250	$5.859e - 02$	$3.411e - 02$	$2.078e - 02$

time, : $p_\rho = 1.000, \mu = 0.100$

$\tau \setminus h$	0.05000	0.02500	0.01250
0.05000	$5.603e - 01$	$5.755e + 00$	$6.567e + 01$
0.02500	$8.025e - 01$	$7.480e + 00$	$6.587e + 01$
0.01250	$1.173e + 00$	$1.170e + 01$	$8.197e + 01$

6 Результаты расчета задачи протекания

После отладки схемы на гладком решении были проведен расчет задачи протекания при различных значения параметров ρ_γ и w . Ниже представлены результаты.

6.1 Графики при $\rho_0 = 0.5, \rho_\gamma = 0.3, w = 0.1$

Графики:

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 0.050$$

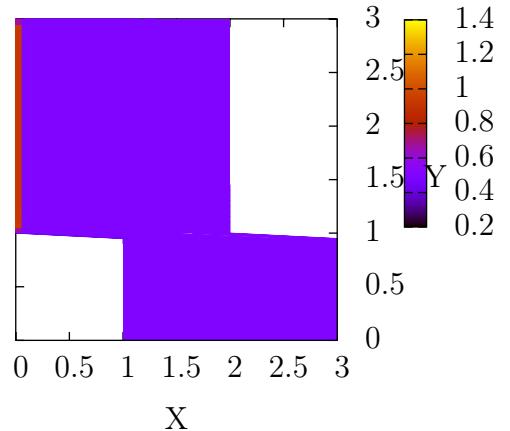
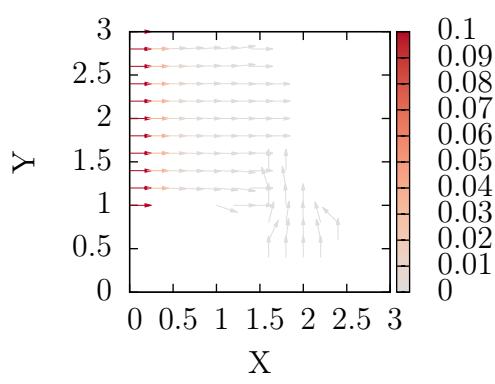


Рис. 1: Скорость

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 1.050$$

Рис. 2: Плотность

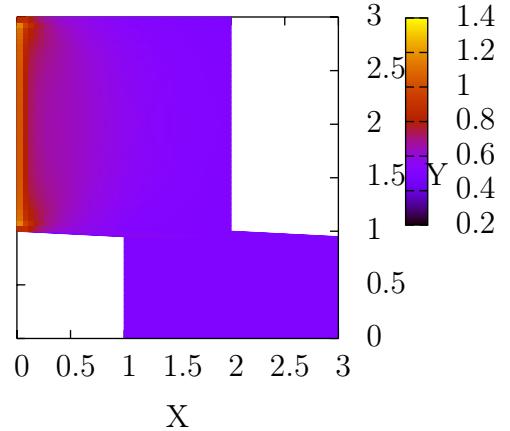
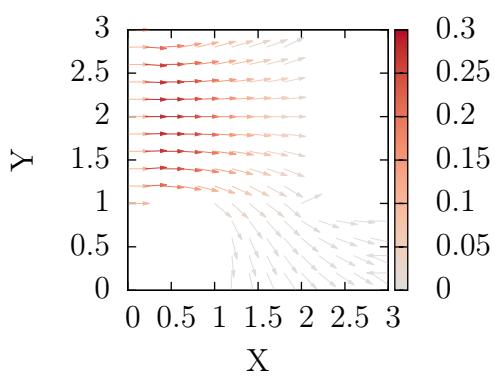


Рис. 3: Скорость

Рис. 4: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 2.050$$

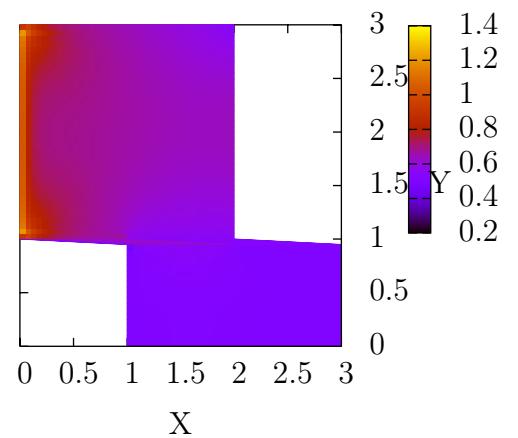
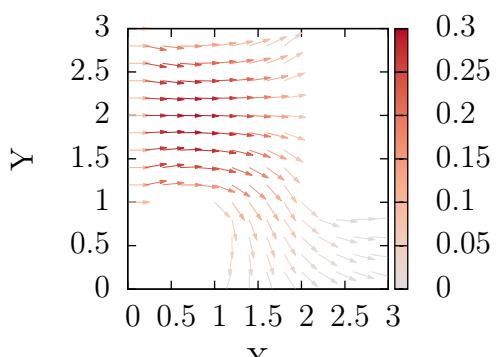


Рис. 5: Скорость

Рис. 6: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 3.050$$

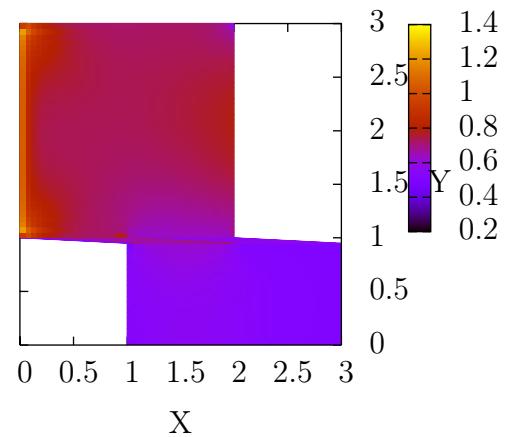
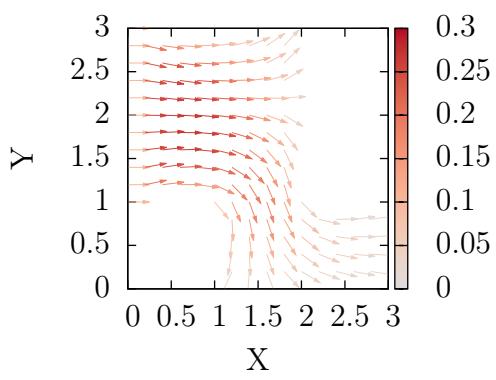


Рис. 7: Скорость

Рис. 8: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 4.050$$

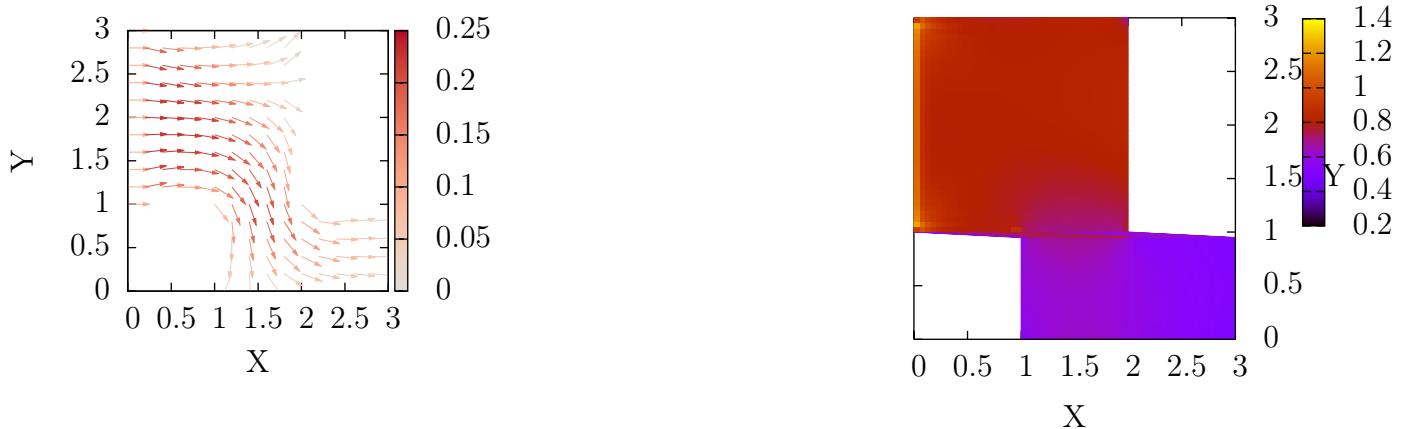


Рис. 9: Скорость

Рис. 10: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$

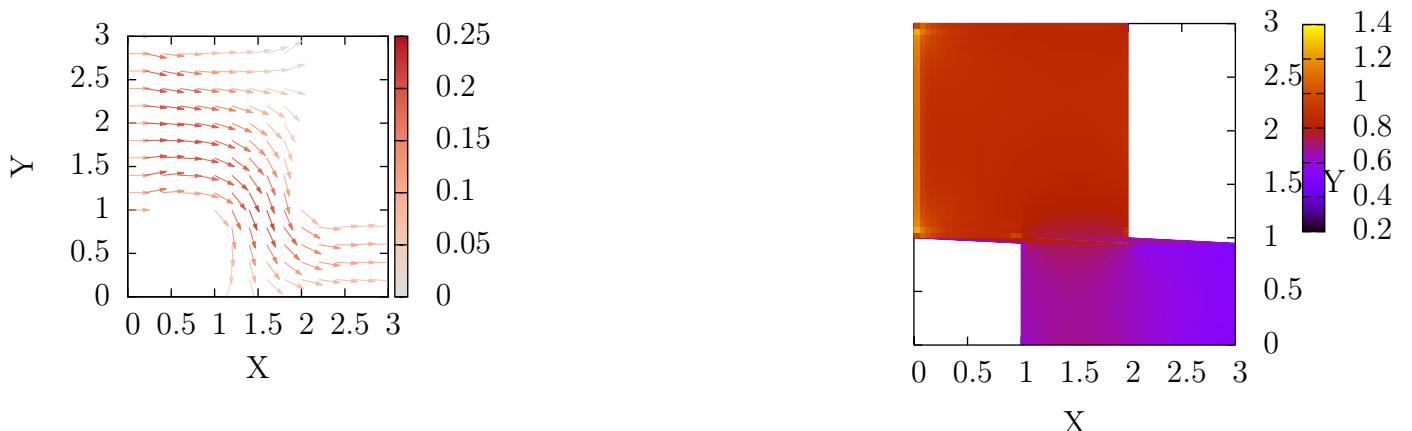


Рис. 11: Скорость

Рис. 12: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 0.050$$

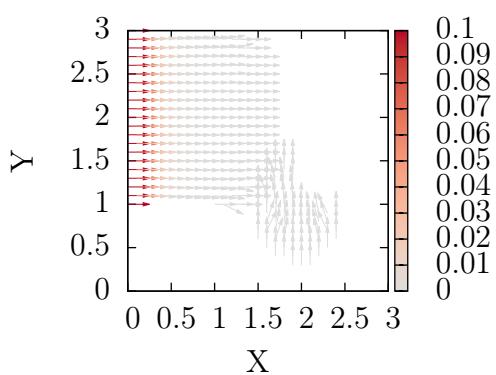


Рис. 13: Скорость

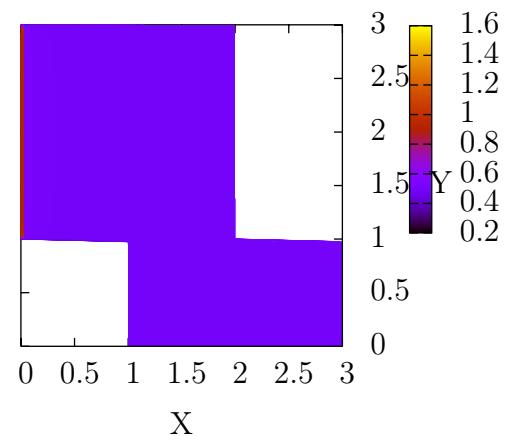


Рис. 14: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 1.050$$

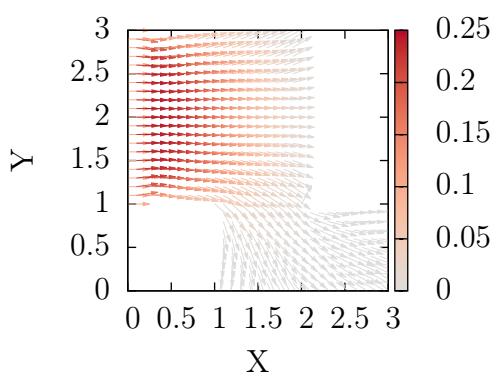


Рис. 15: Скорость

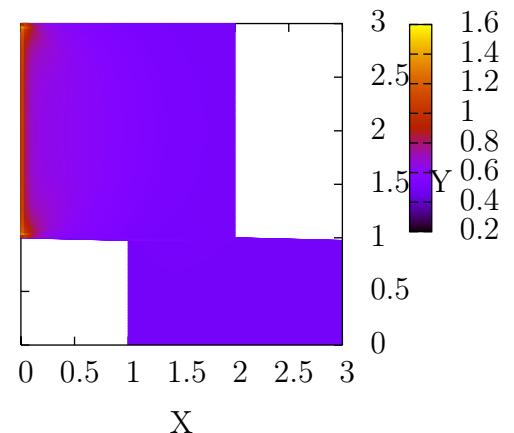


Рис. 16: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 2.050$$

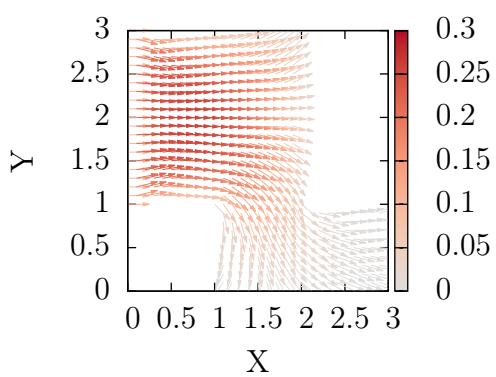


Рис. 17: Скорость

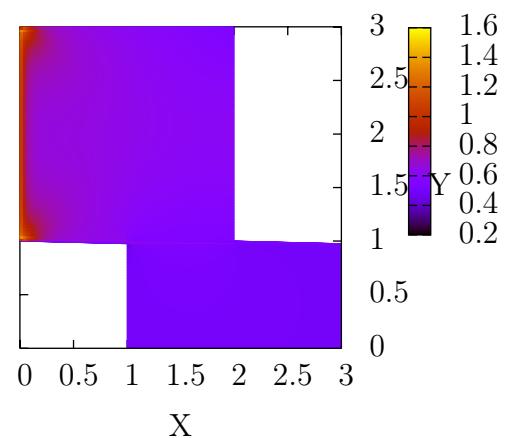


Рис. 18: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 3.050$$

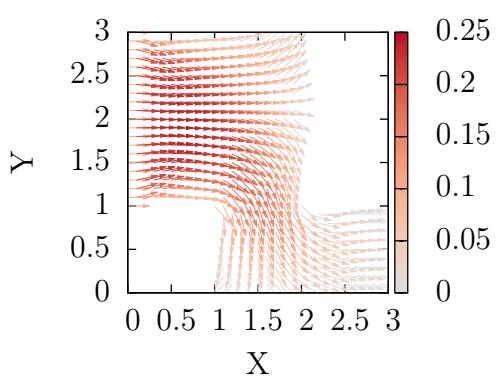


Рис. 19: Скорость

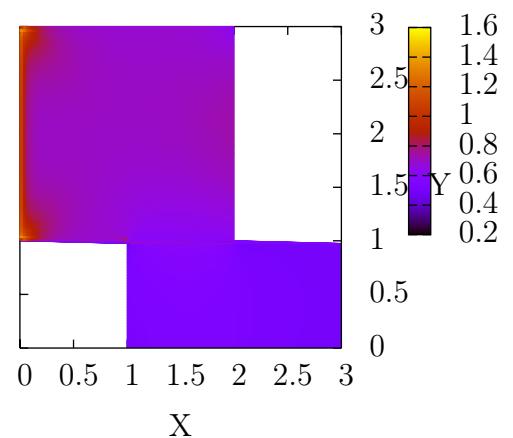


Рис. 20: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 4.050$$



Рис. 21: Скорость

Рис. 22: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$

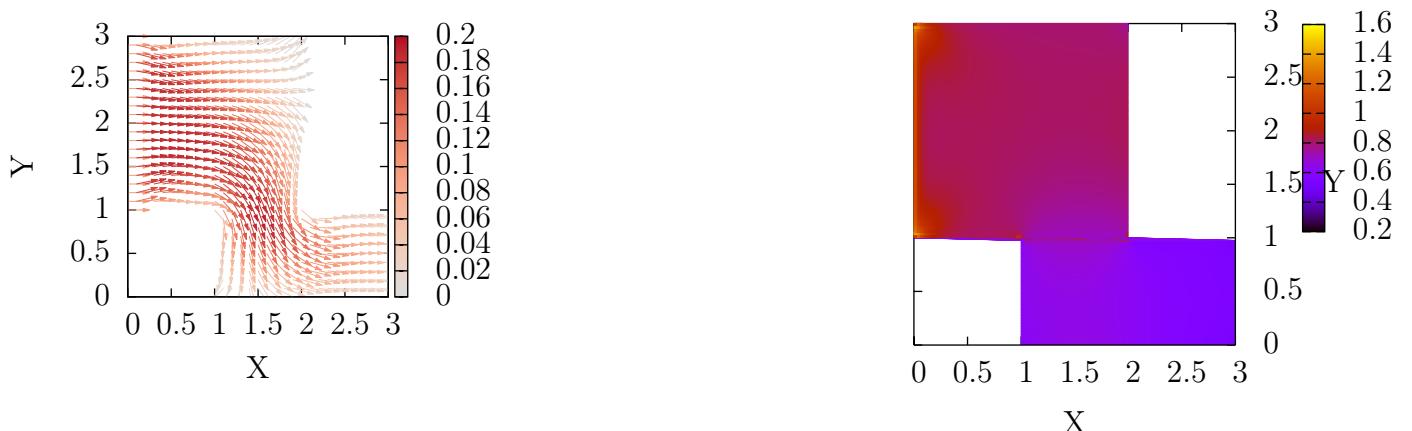


Рис. 23: Скорость

Рис. 24: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 0.025$$

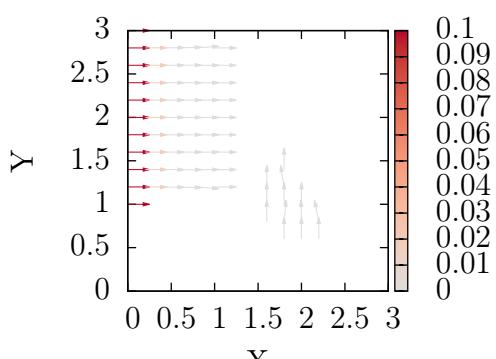


Рис. 25: Скорость

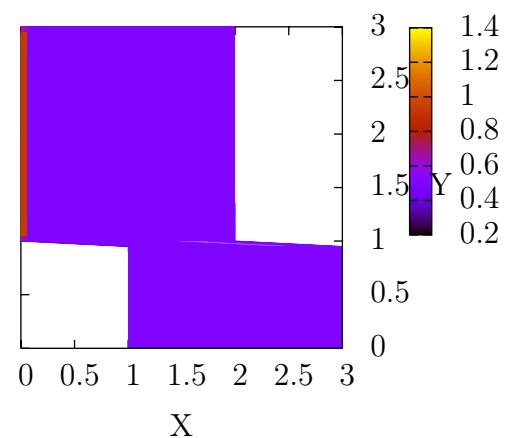


Рис. 26: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 1.025$$

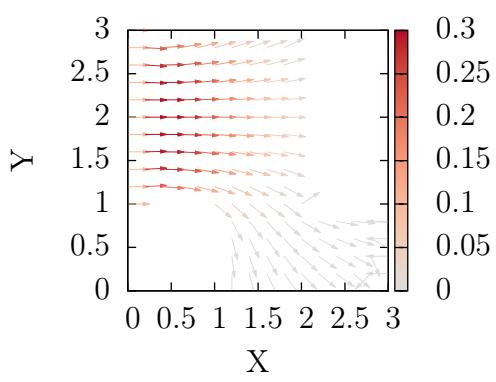


Рис. 27: Скорость

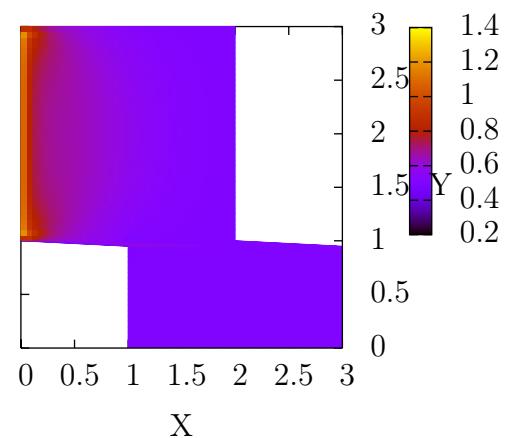


Рис. 28: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 2.025$$

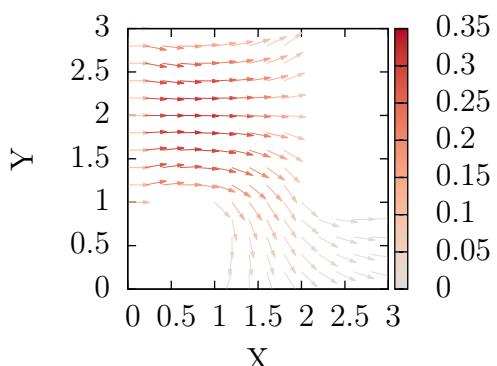


Рис. 29: Скорость

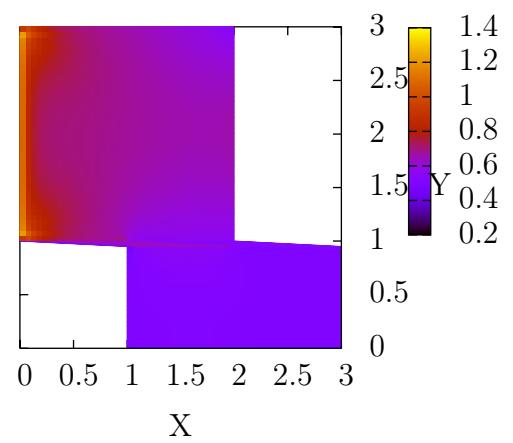


Рис. 30: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 3.025$$

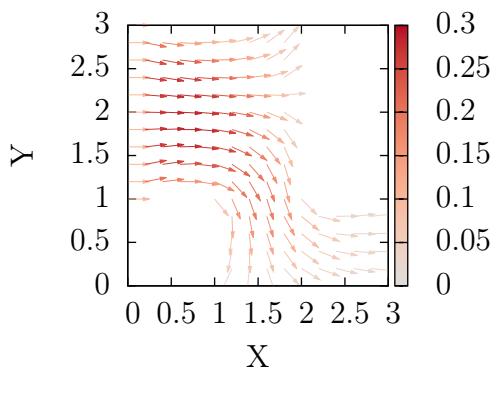


Рис. 31: Скорость

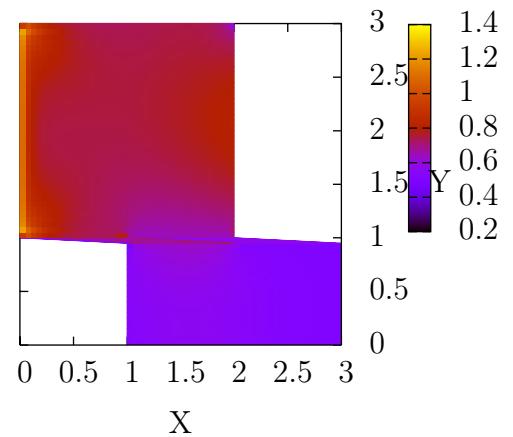


Рис. 32: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 4.025$$

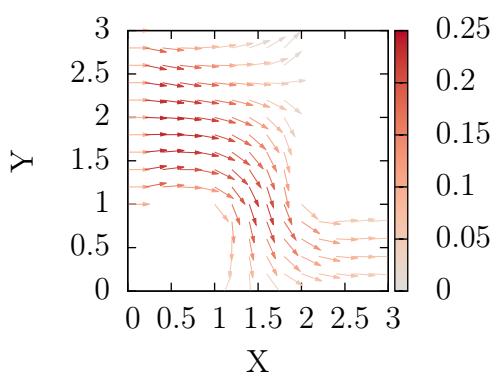


Рис. 33: Скорость

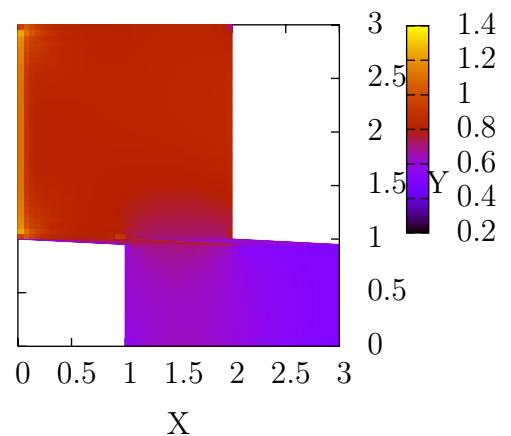


Рис. 34: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$

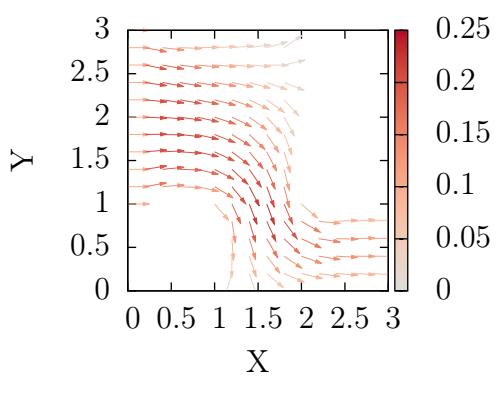


Рис. 35: Скорость

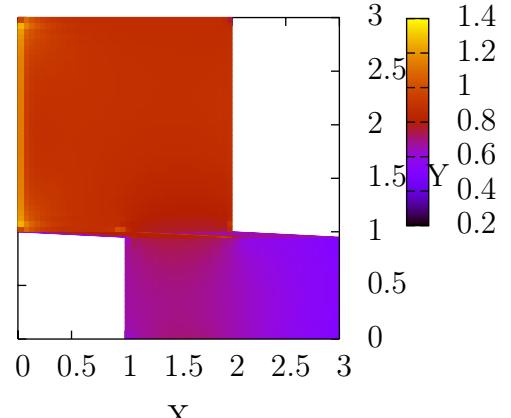


Рис. 36: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.025$$

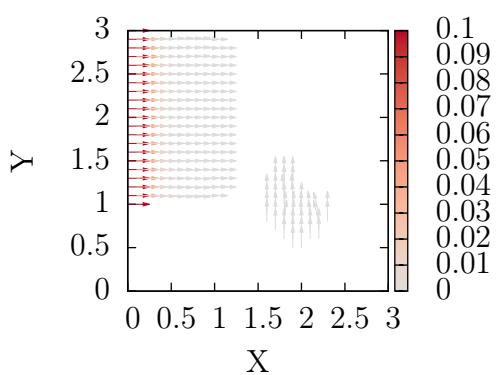


Рис. 37: Скорость

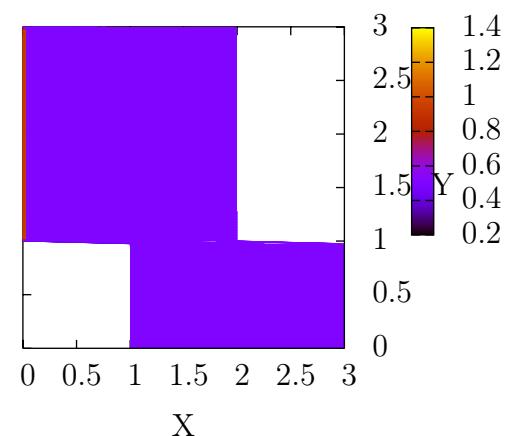


Рис. 38: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 1.025$$

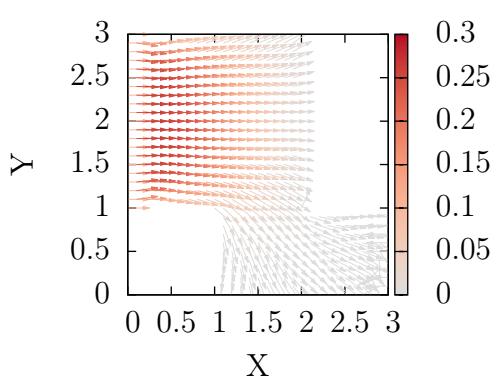


Рис. 39: Скорость

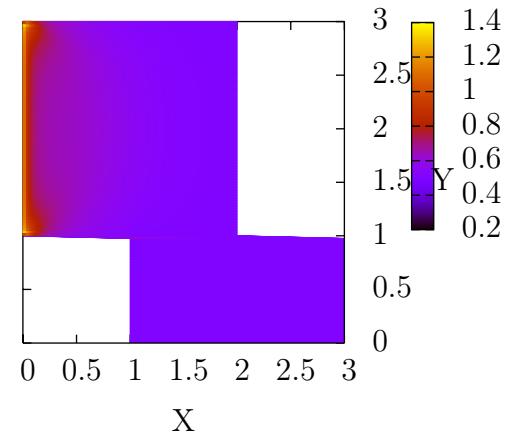


Рис. 40: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 2.025$$



Рис. 41: Скорость

Рис. 42: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 3.025$$



Рис. 43: Скорость

Рис. 44: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 4.025$$



Рис. 45: Скорость

Рис. 46: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$

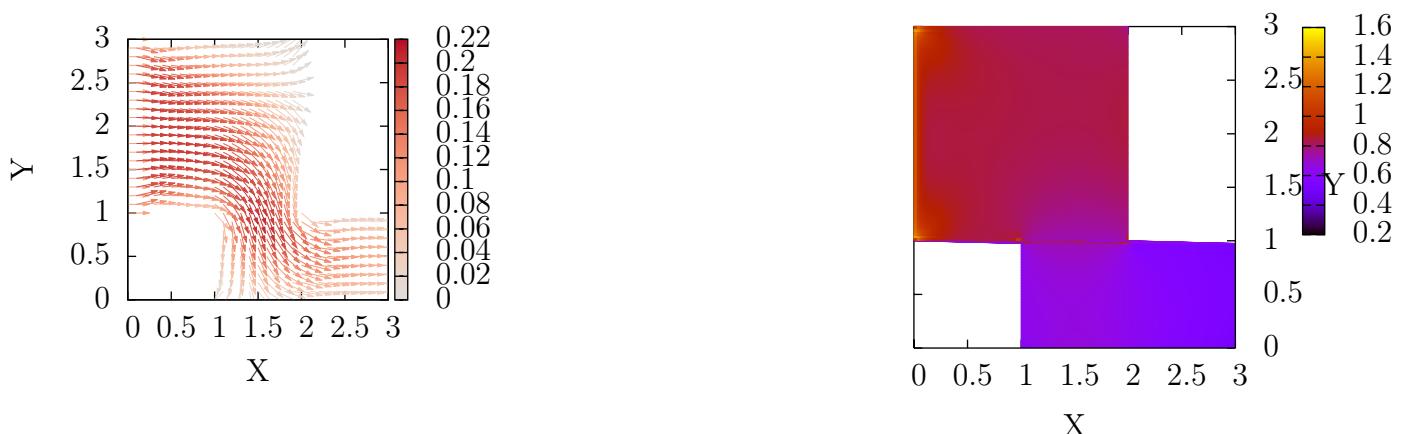


Рис. 47: Скорость

Рис. 48: Плотность

6.2 Графики при $\rho_0 = 0.5, \rho_\gamma = 0.3, w = 0.5$

Эти графики отображают моделирование более быстрого втекания газа.
Видны небольшие ударные волны.

Графики:

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 0.050$$

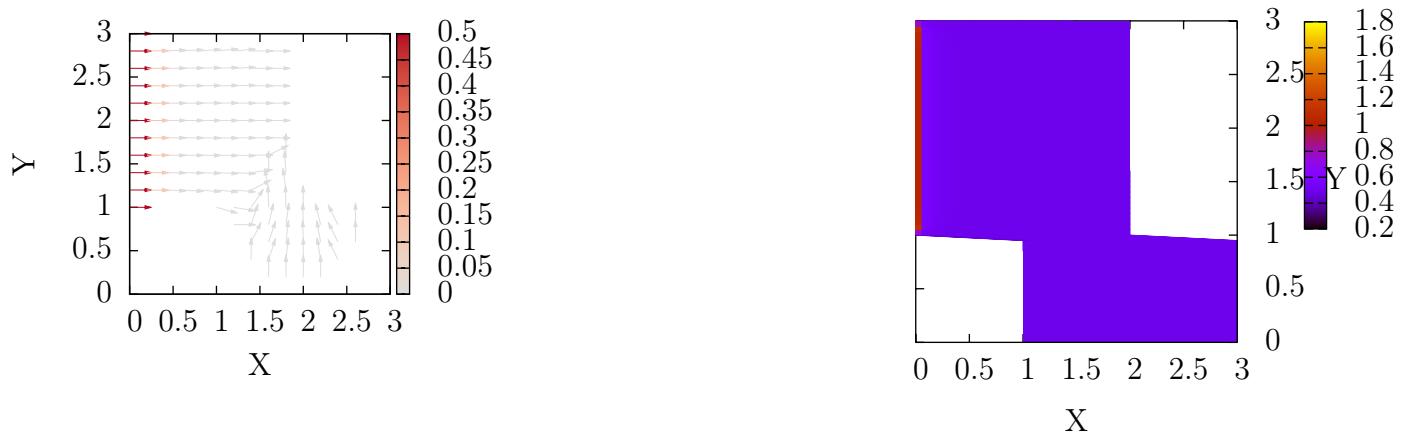


Рис. 1: Скорость

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 1.050$$

Рис. 2: Плотность

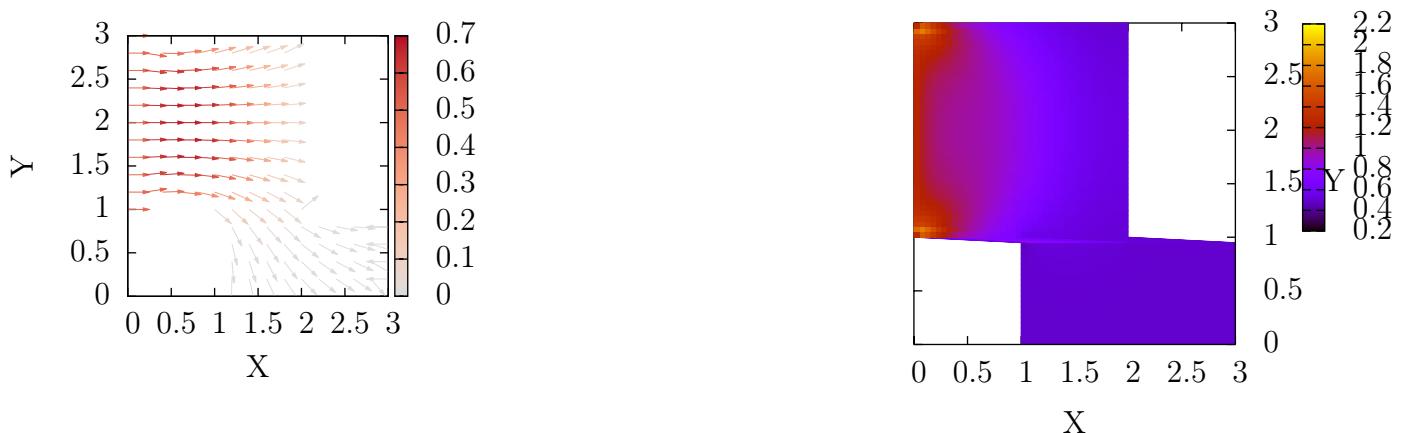


Рис. 3: Скорость

Рис. 4: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 2.050$$

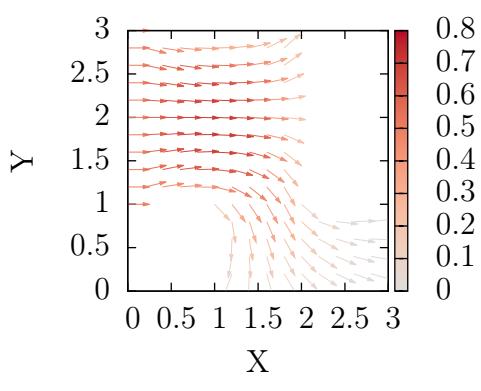


Рис. 5: Скорость

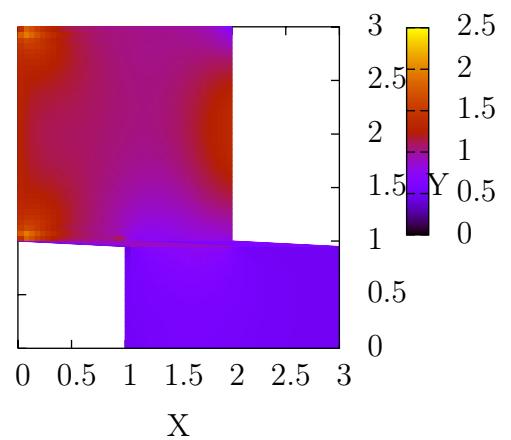


Рис. 6: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 3.050$$

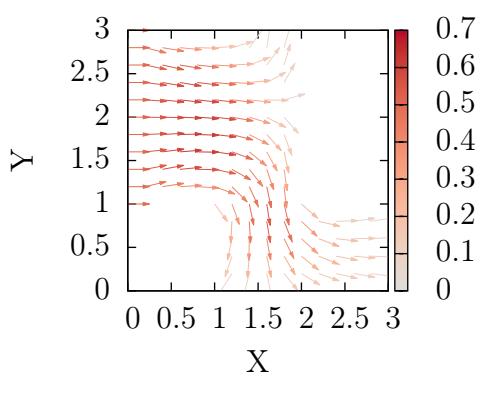


Рис. 7: Скорость

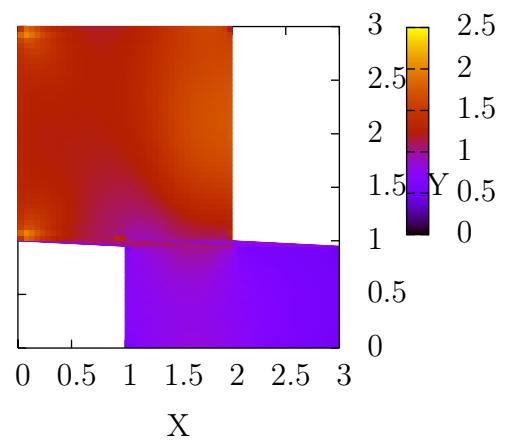


Рис. 8: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 4.050$$



Рис. 9: Скорость

Рис. 10: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$



Рис. 11: Скорость

Рис. 12: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 0.050$$

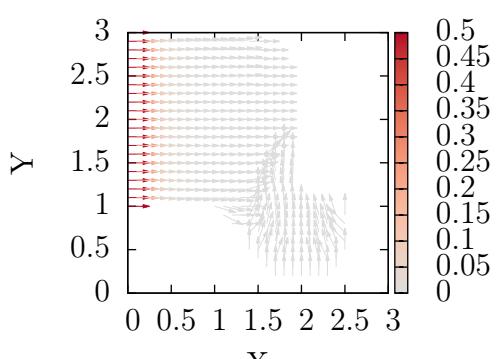


Рис. 13: Скорость

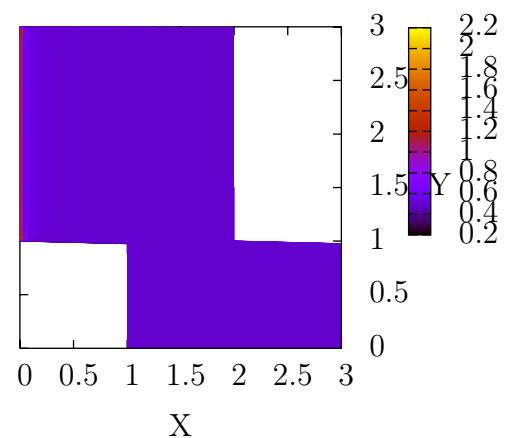


Рис. 14: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 1.050$$

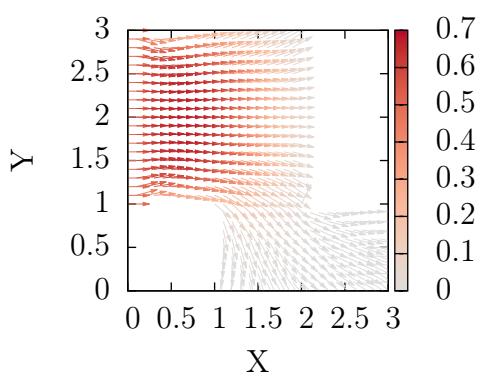


Рис. 15: Скорость

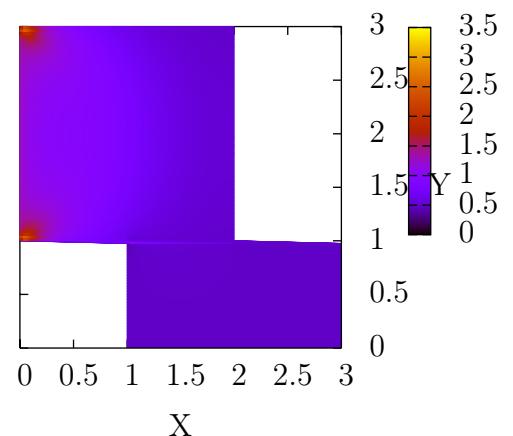


Рис. 16: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 2.050$$

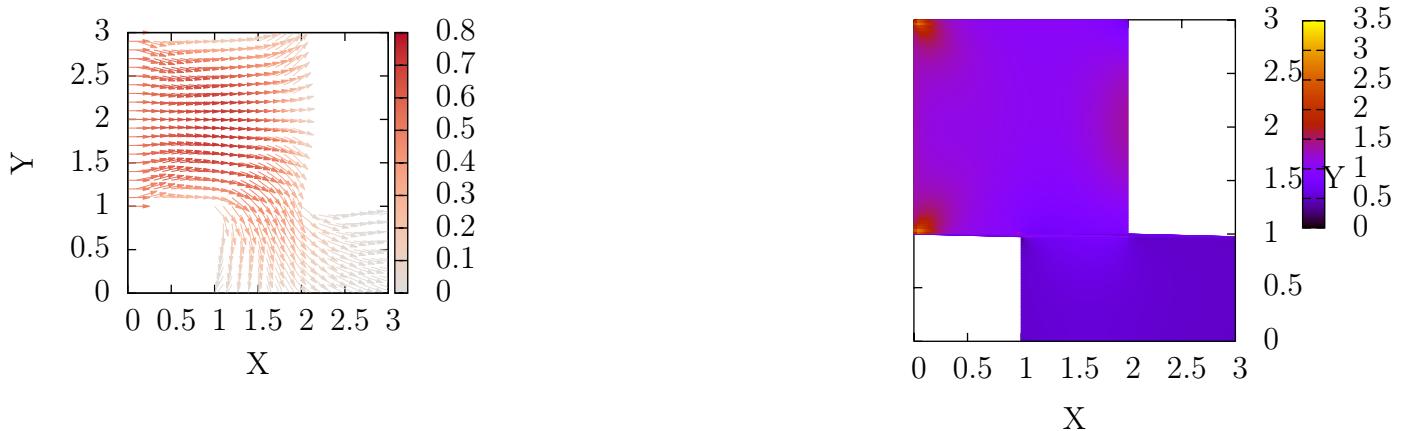


Рис. 17: Скорость

Рис. 18: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 3.050$$

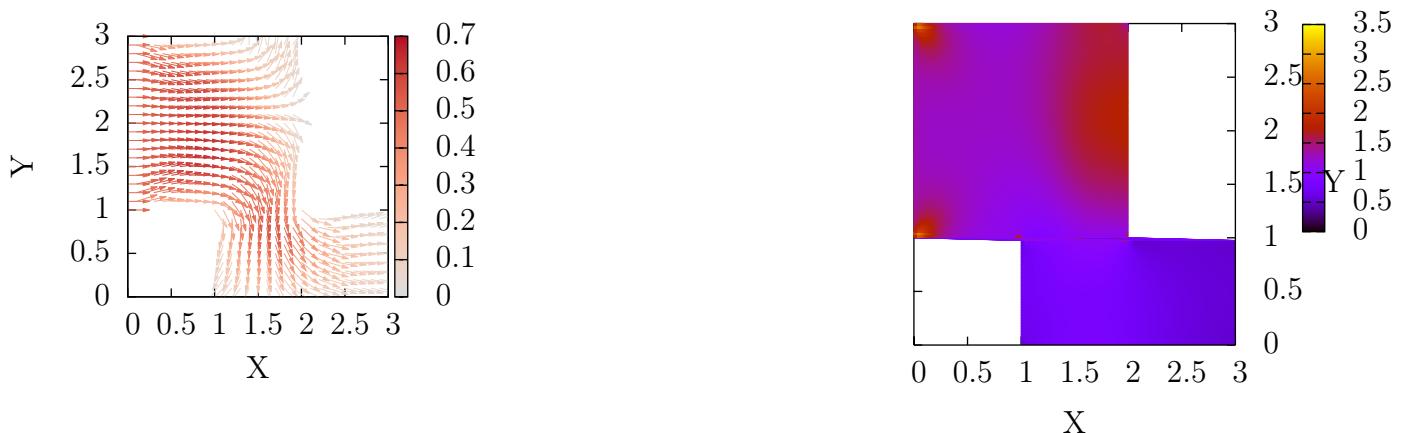


Рис. 19: Скорость

Рис. 20: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 4.050$$

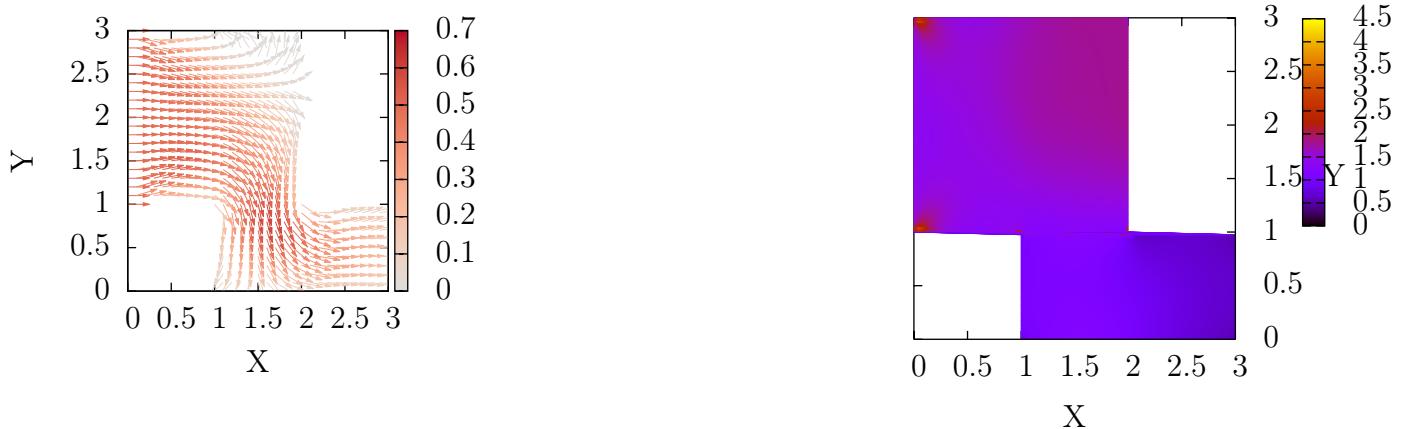


Рис. 21: Скорость

Рис. 22: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$



Рис. 23: Скорость

Рис. 24: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 0.025$$

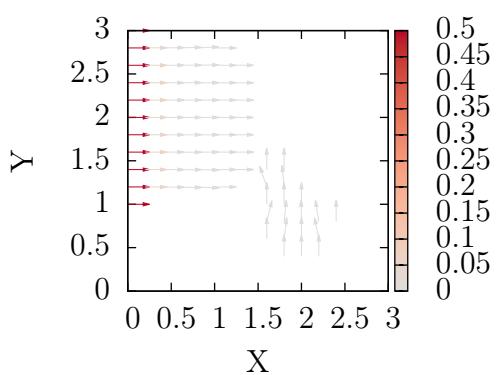


Рис. 25: Скорость

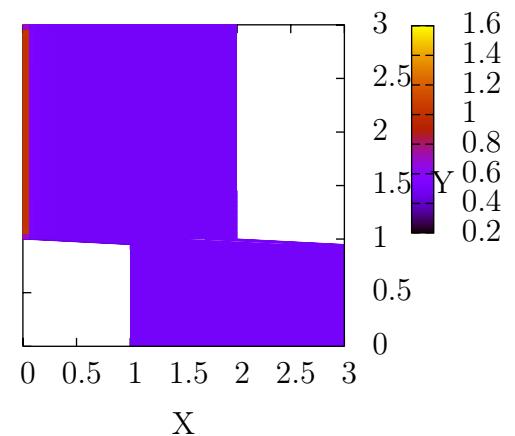


Рис. 26: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 1.025$$

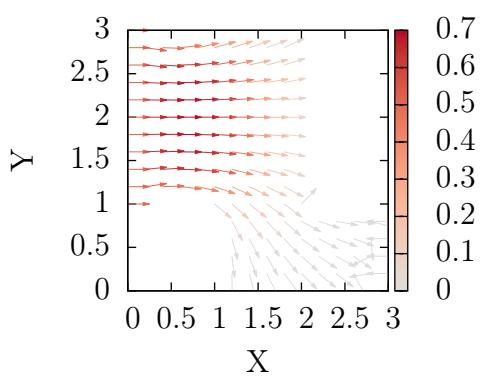


Рис. 27: Скорость

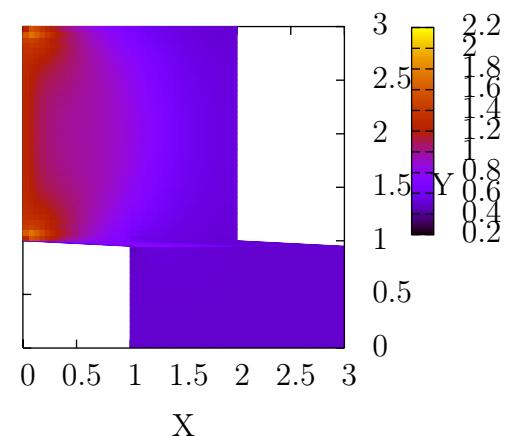


Рис. 28: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 2.025$$



Рис. 29: Скорость

Рис. 30: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 3.025$$



Рис. 31: Скорость

Рис. 32: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 4.025$$

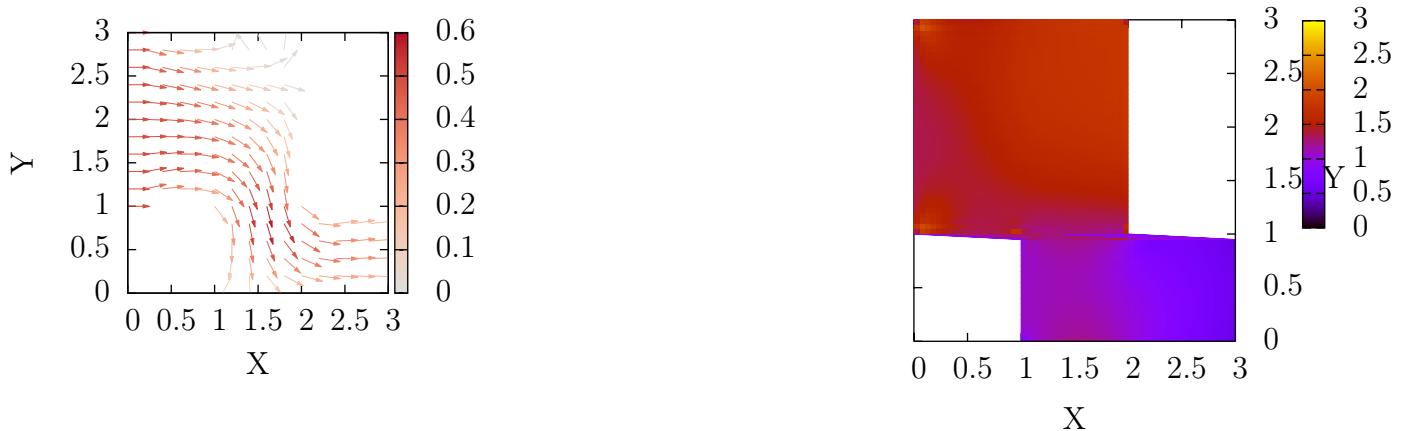


Рис. 33: Скорость

Рис. 34: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$

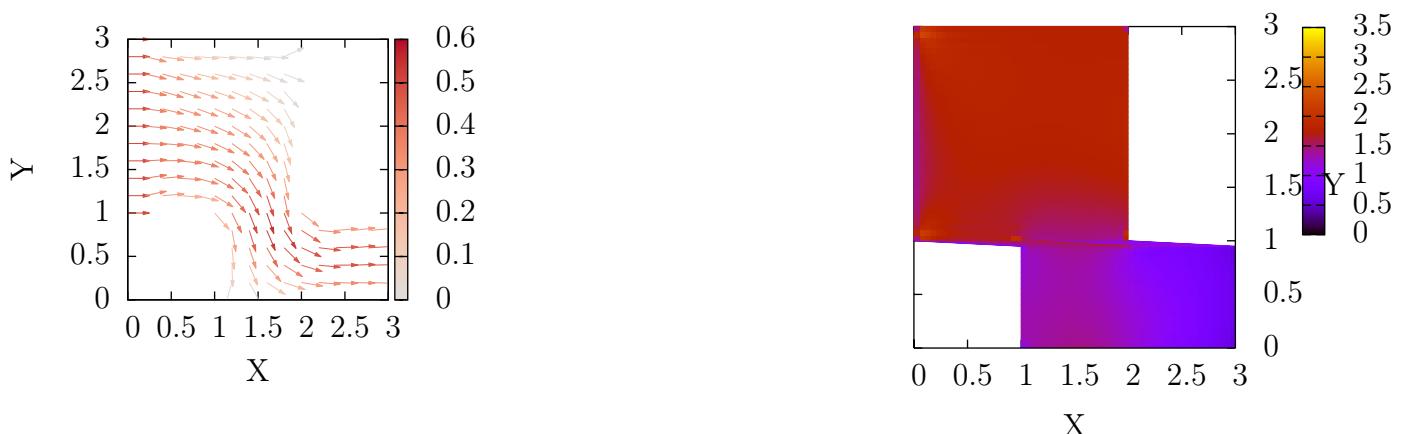


Рис. 35: Скорость

Рис. 36: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.025$$

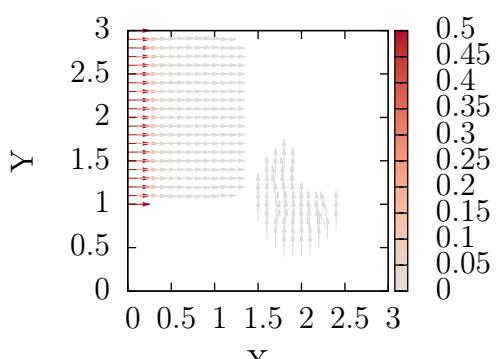


Рис. 37: Скорость

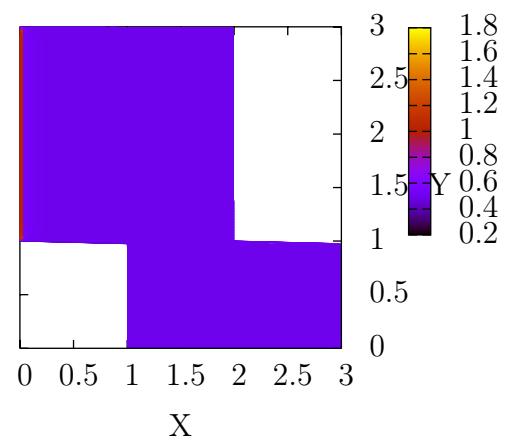


Рис. 38: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 1.025$$

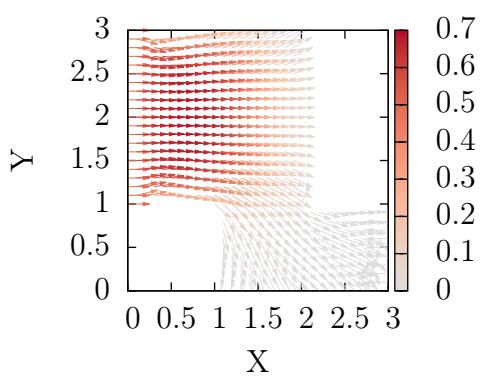


Рис. 39: Скорость

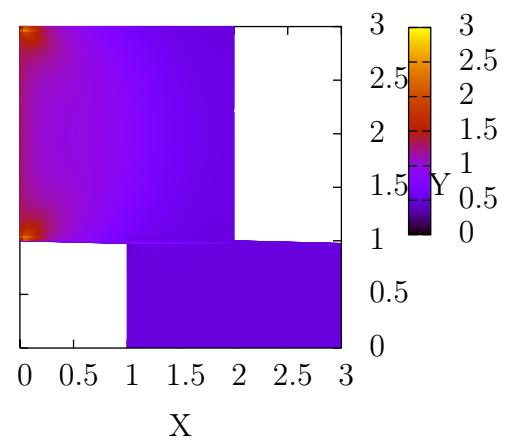


Рис. 40: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 2.025$$



Рис. 41: Скорость

Рис. 42: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 3.025$$

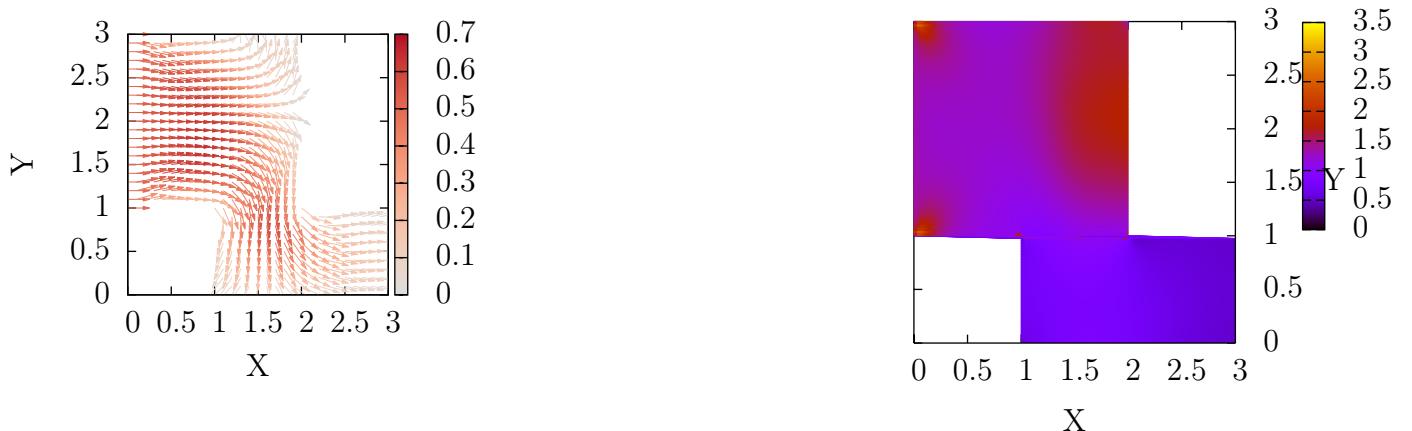


Рис. 43: Скорость

Рис. 44: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 4.025$$

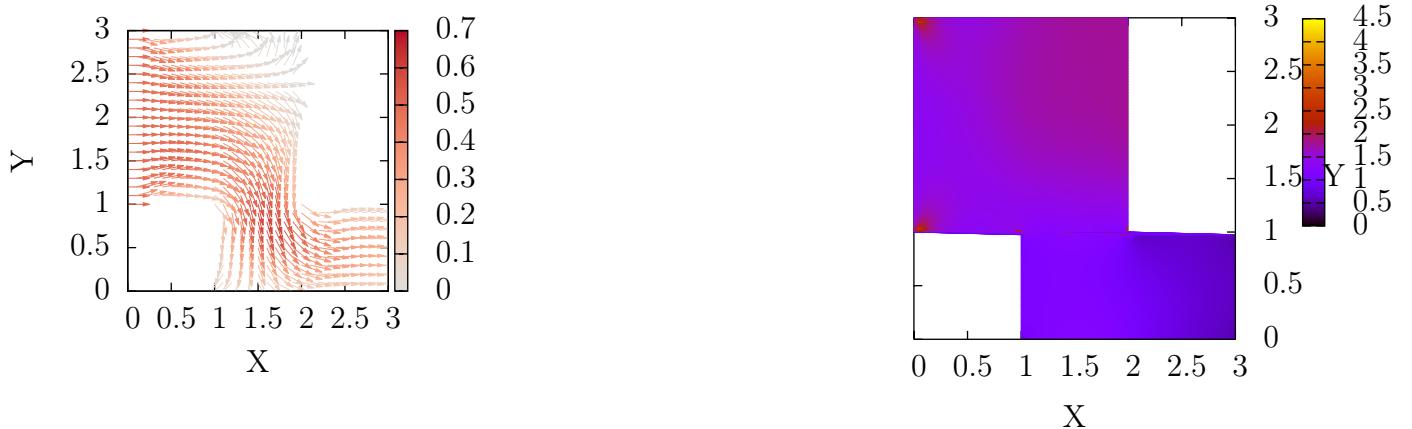


Рис. 45: Скорость

Рис. 46: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$



Рис. 47: Скорость

Рис. 48: Плотность

6.3 Графики при $\rho_0 = 0.5, \rho_\gamma = 0.3, w = 1.0$

Эти графики отображают моделирование еще более быстрого втекания газа. Видны сильные ударные волны и завихрения.

Графики:

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 0.050$$

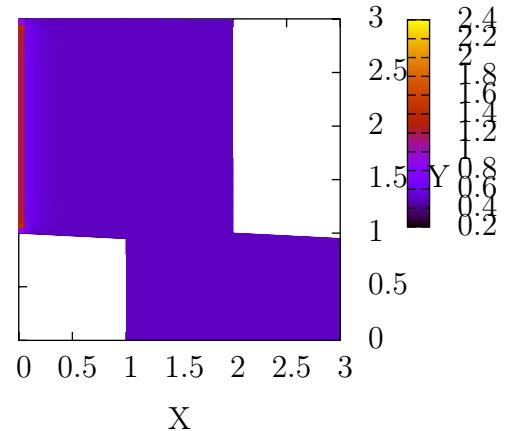
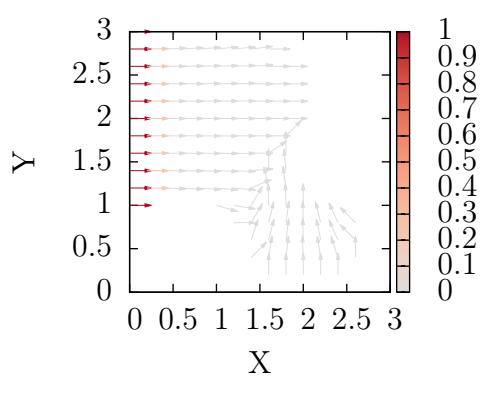


Рис. 1: Скорость

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 1.050$$

Рис. 2: Плотность

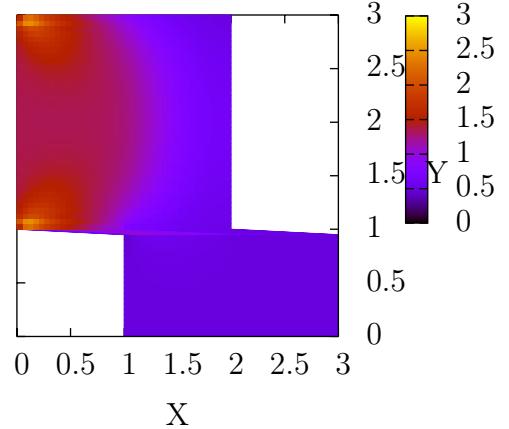
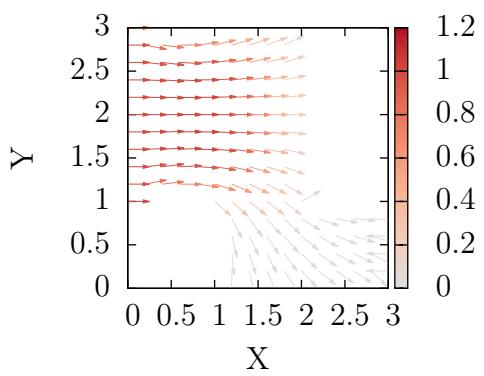


Рис. 3: Скорость

Рис. 4: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 2.050$$

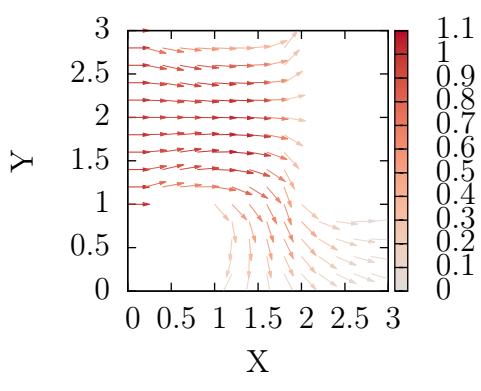


Рис. 5: Скорость

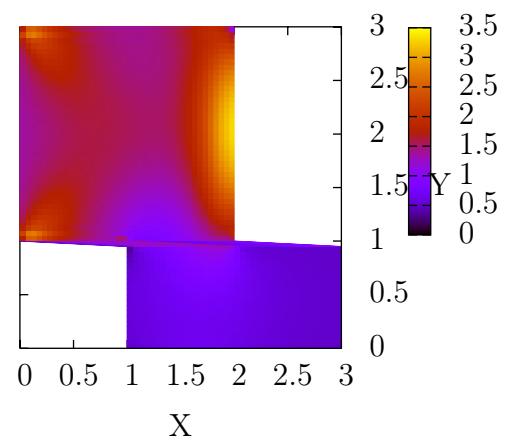


Рис. 6: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 3.050$$

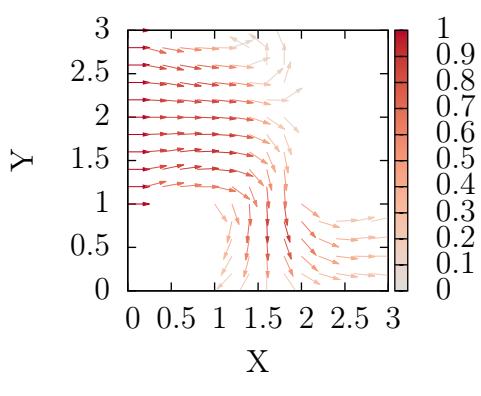


Рис. 7: Скорость

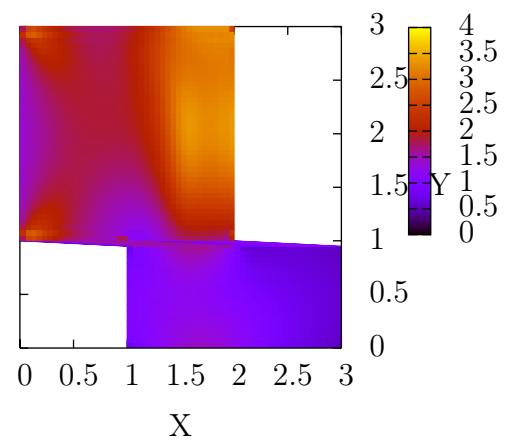


Рис. 8: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 4.050$$

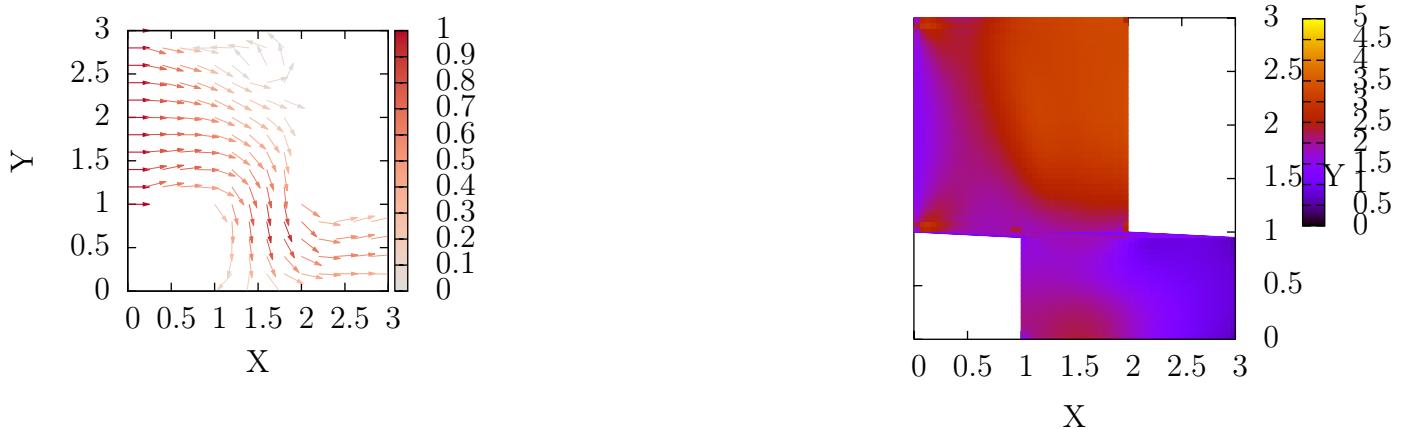


Рис. 9: Скорость

Рис. 10: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$



Рис. 11: Скорость

Рис. 12: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 0.050$$

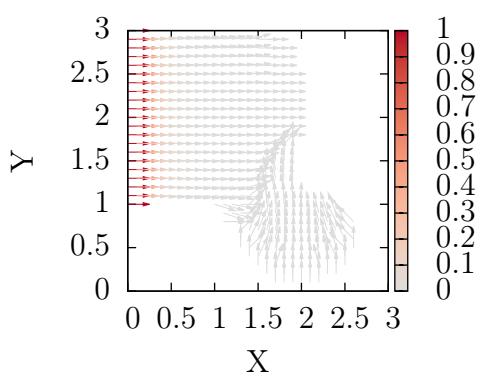


Рис. 13: Скорость

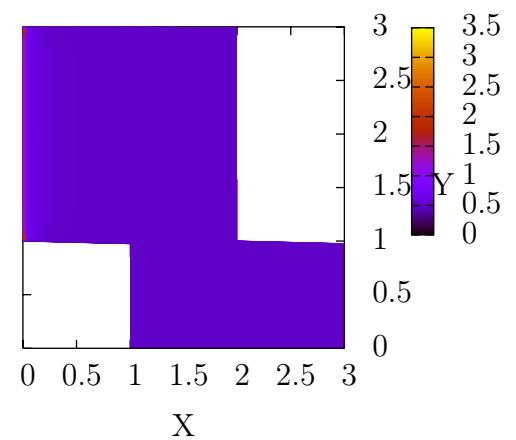


Рис. 14: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 1.050$$

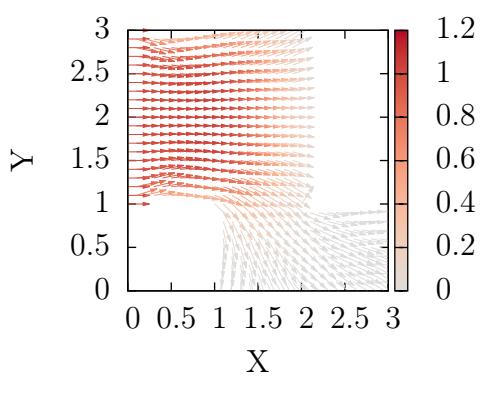


Рис. 15: Скорость

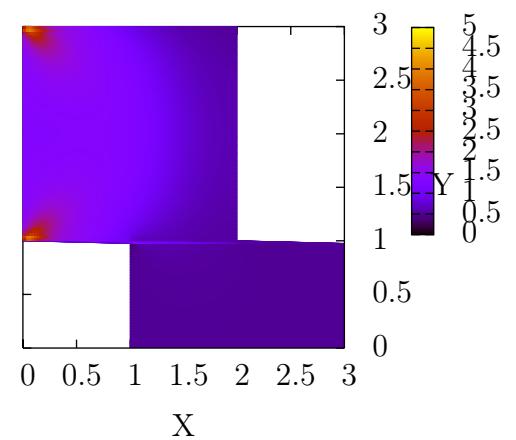


Рис. 16: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 2.050$$

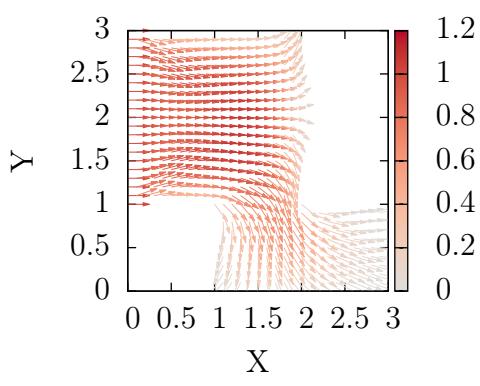


Рис. 17: Скорость

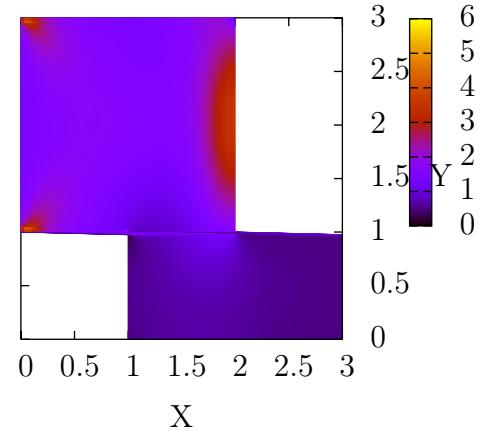


Рис. 18: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 3.050$$

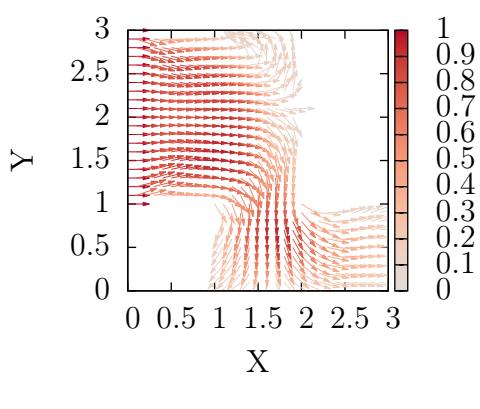


Рис. 19: Скорость

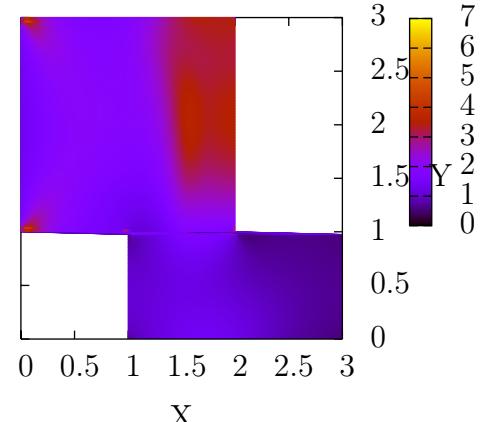


Рис. 20: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 4.050$$



Рис. 21: Скорость

Рис. 22: Плотность

$$\tau = 0.050, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$



Рис. 23: Скорость

Рис. 24: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 0.025$$

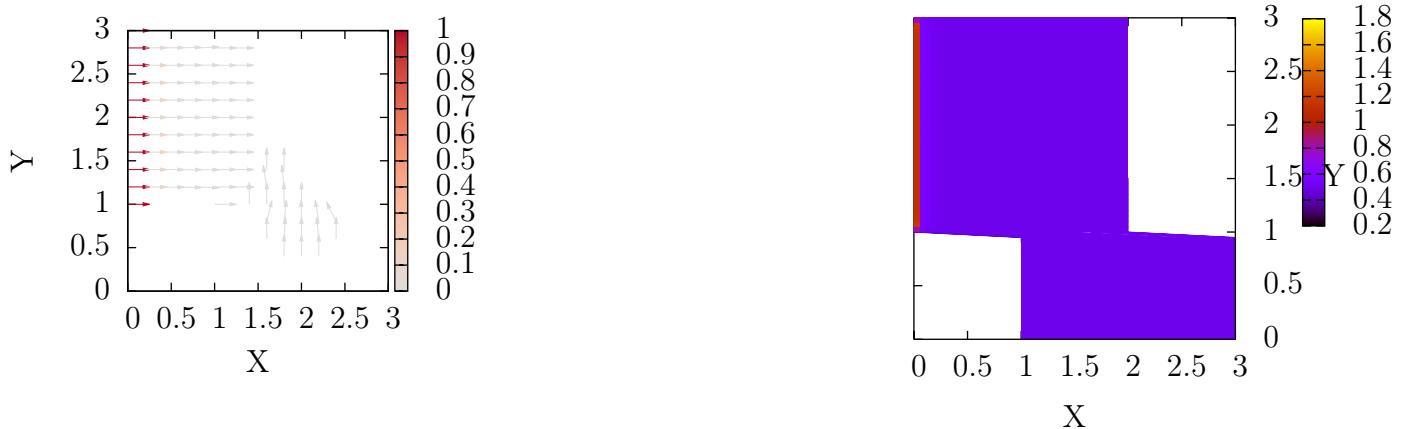


Рис. 25: Скорость

Рис. 26: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 1.025$$



Рис. 27: Скорость

Рис. 28: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 2.025$$

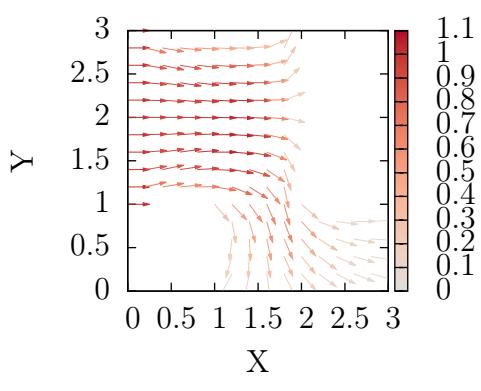


Рис. 29: Скорость

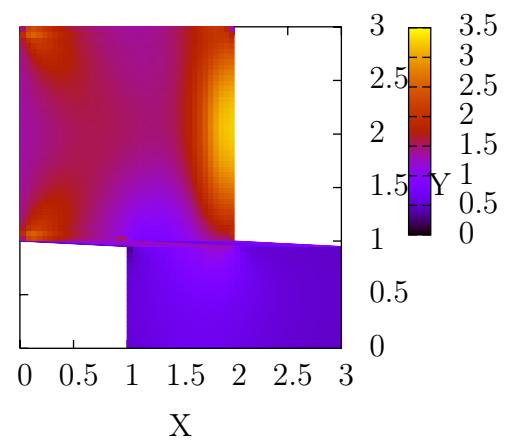


Рис. 30: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 3.025$$

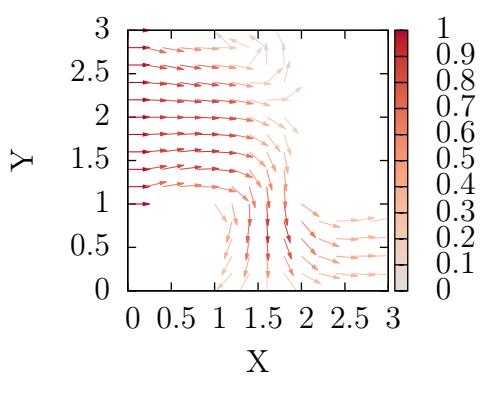


Рис. 31: Скорость

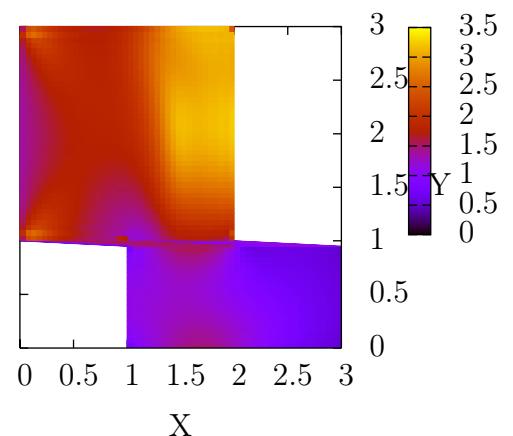


Рис. 32: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 4.025$$

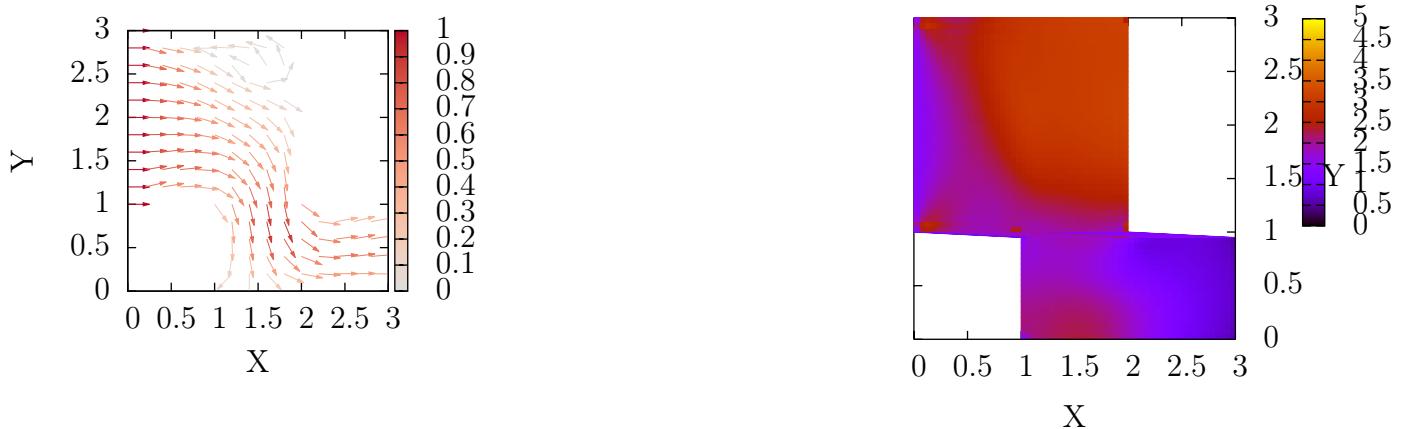


Рис. 33: Скорость

Рис. 34: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$



Рис. 35: Скорость

Рис. 36: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 0.025$$

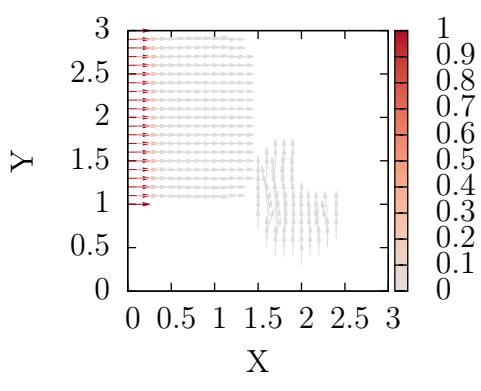


Рис. 37: Скорость

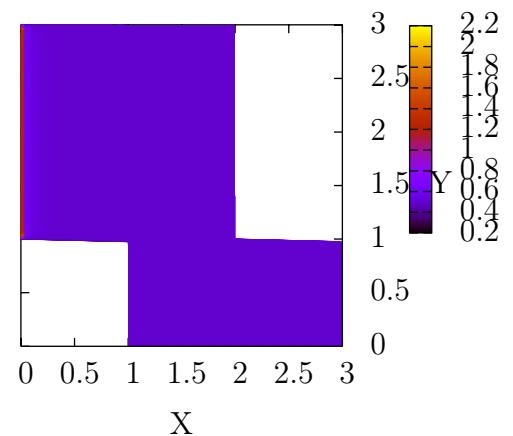


Рис. 38: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 1.025$$

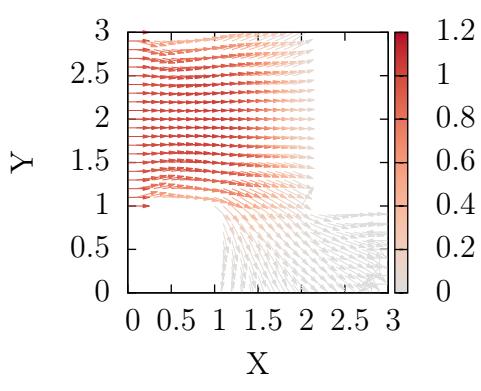


Рис. 39: Скорость

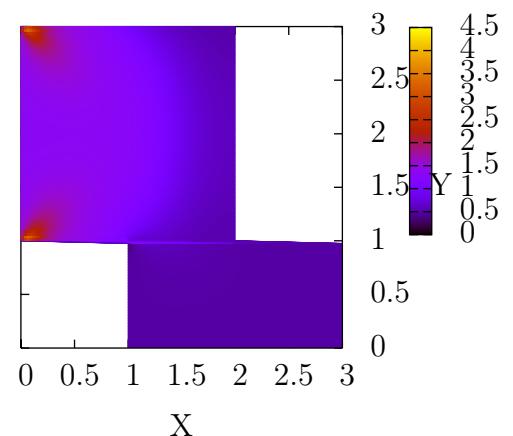


Рис. 40: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 2.025$$

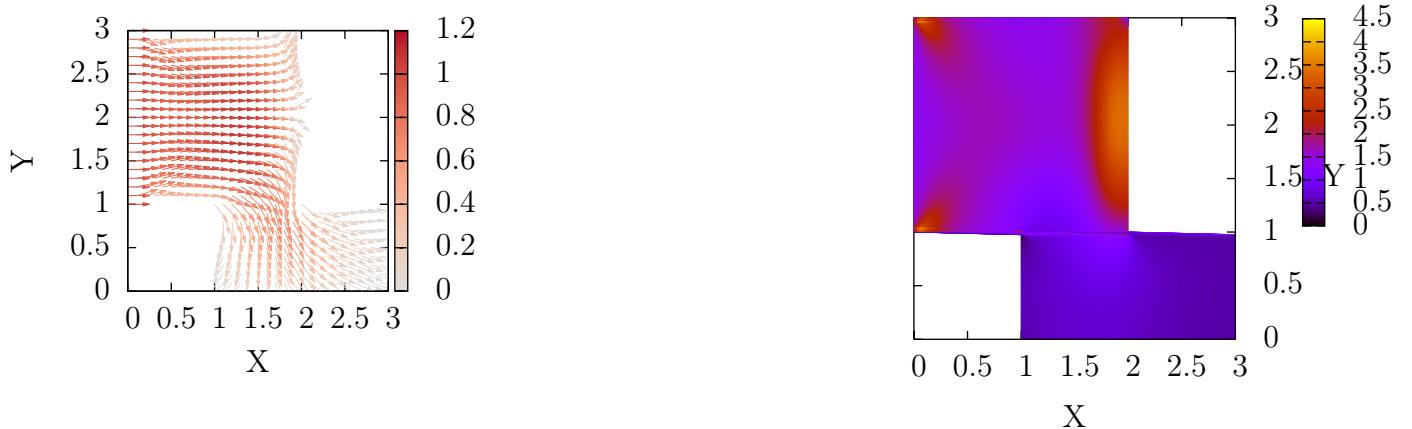


Рис. 41: Скорость

Рис. 42: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 3.025$$



Рис. 43: Скорость

Рис. 44: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 4.025$$



Рис. 45: Скорость

Рис. 46: Плотность

$$\tau = 0.025, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$



Рис. 47: Скорость

Рис. 48: Плотность

6.4 Графики при $\rho_0 = 0.1, \rho_\gamma = 0.5, w = 0.1$

Эти графики отображают моделирование медленного втекания плотного газа в разреженную среду.

Графики:

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 0.033$$

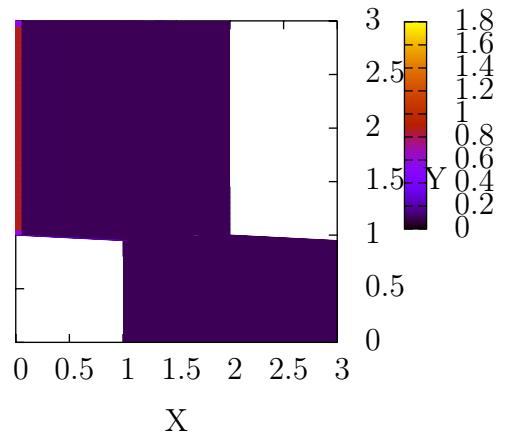
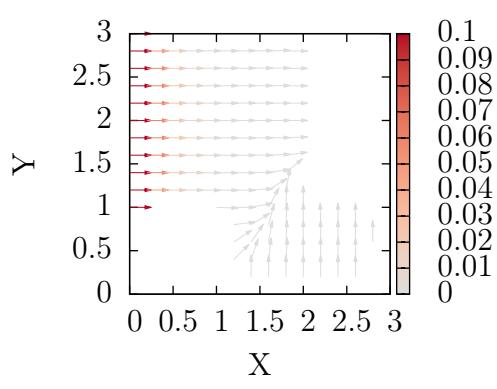


Рис. 1: Скорость

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 1.033$$

Рис. 2: Плотность

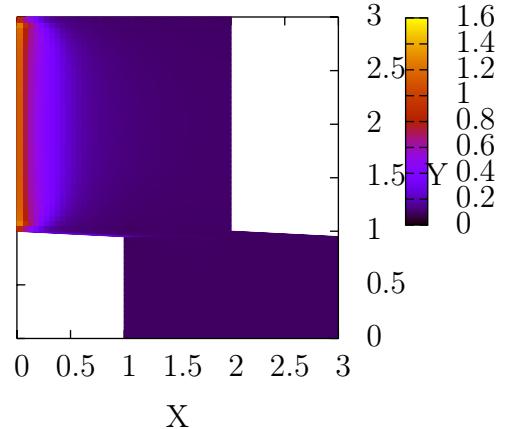
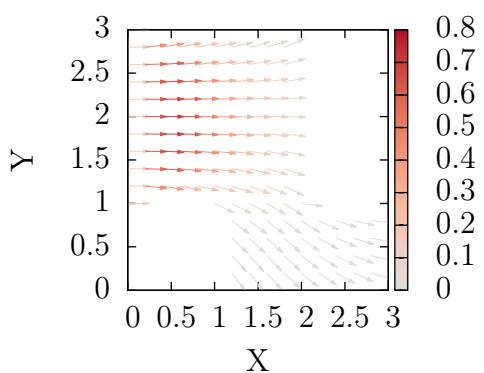


Рис. 3: Скорость

Рис. 4: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 2.033$$

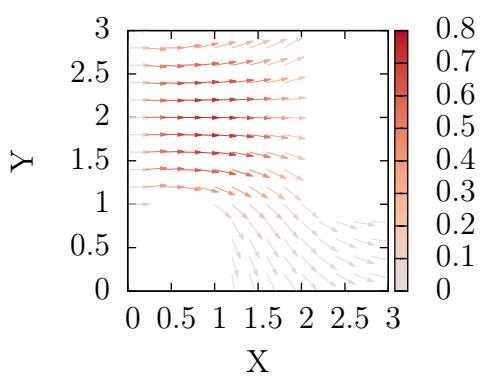


Рис. 5: Скорость

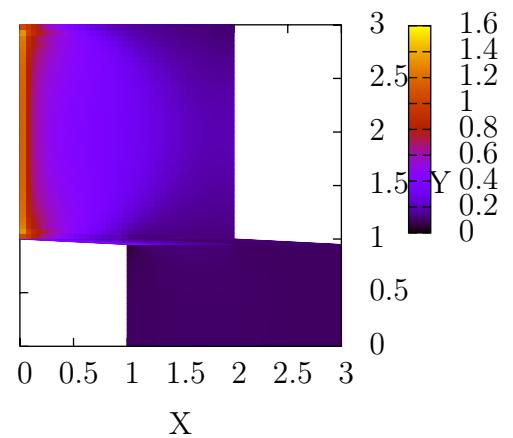


Рис. 6: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 3.033$$

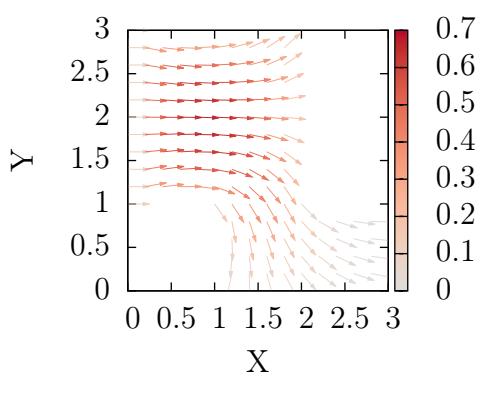


Рис. 7: Скорость

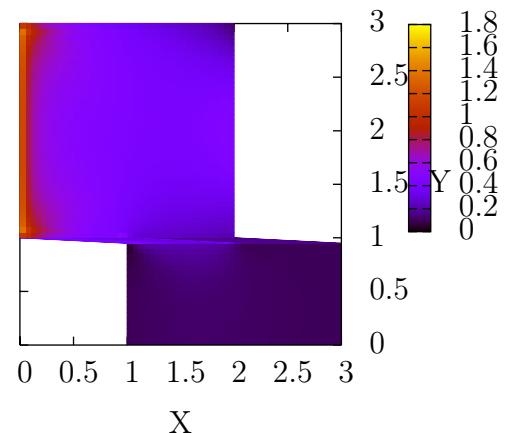


Рис. 8: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 4.033$$



Рис. 9: Скорость

Рис. 10: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$



Рис. 11: Скорость

Рис. 12: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 0.033$$



Рис. 13: Скорость

Рис. 14: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 1.033$$



Рис. 15: Скорость

Рис. 16: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 2.033$$

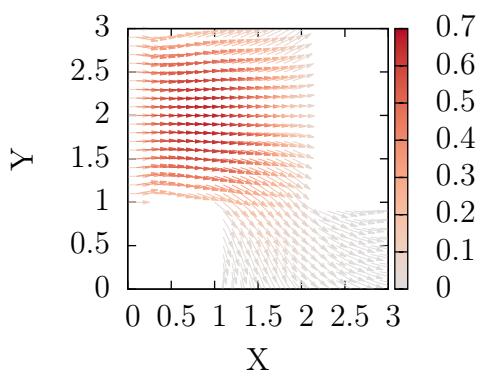


Рис. 17: Скорость

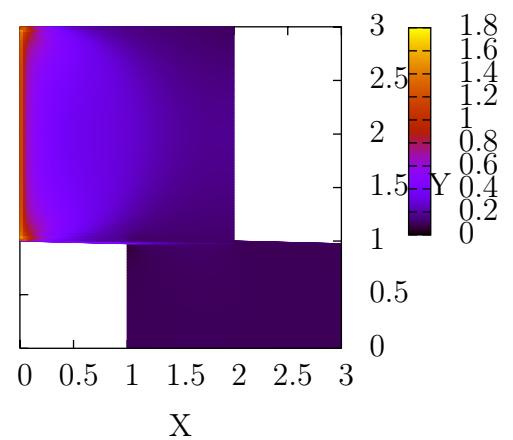


Рис. 18: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 3.033$$

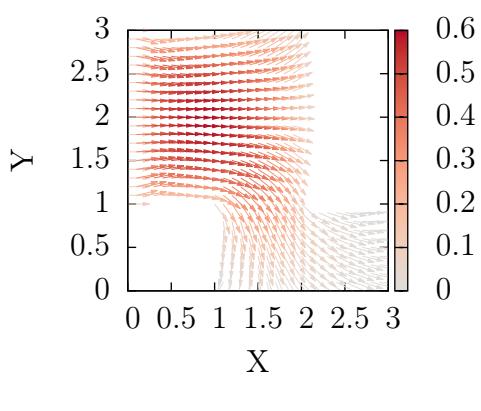


Рис. 19: Скорость

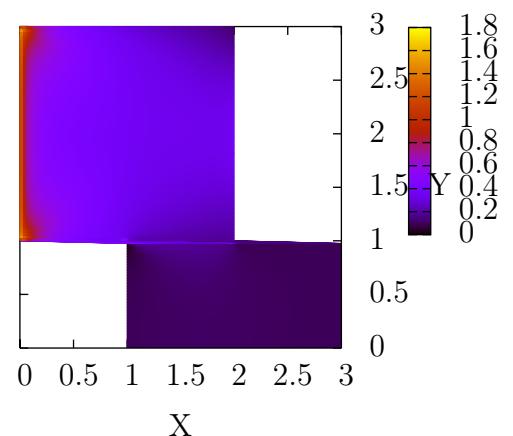


Рис. 20: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 4.033$$

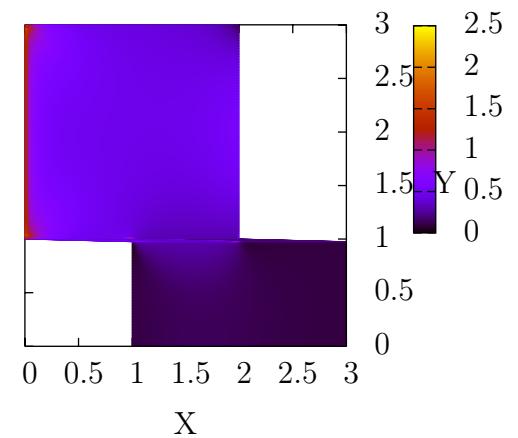
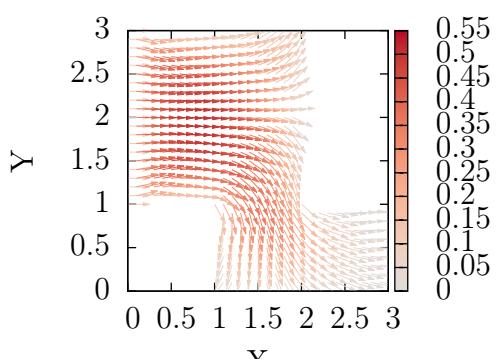


Рис. 21: Скорость

Рис. 22: Плотность

$$\tau = 0.033, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$

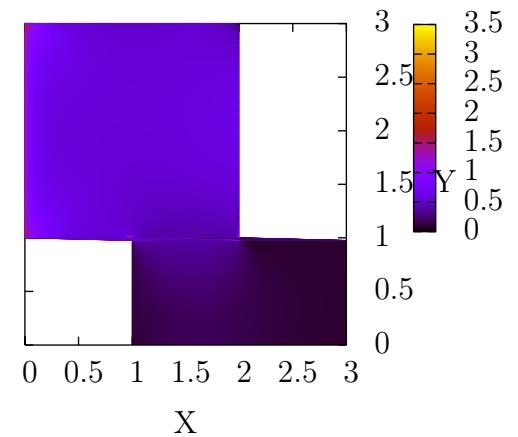
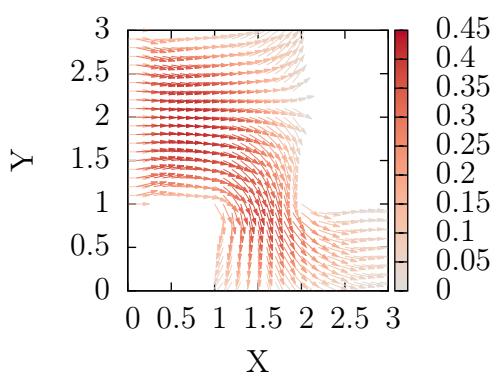


Рис. 23: Скорость

Рис. 24: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 0.017$$

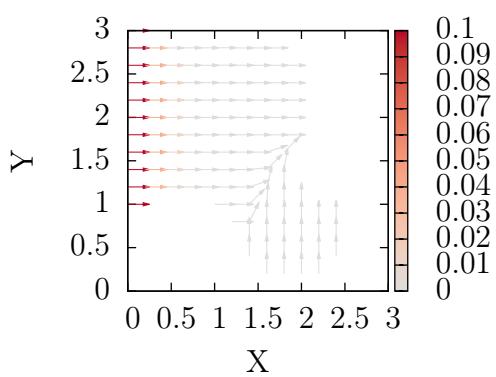


Рис. 25: Скорость

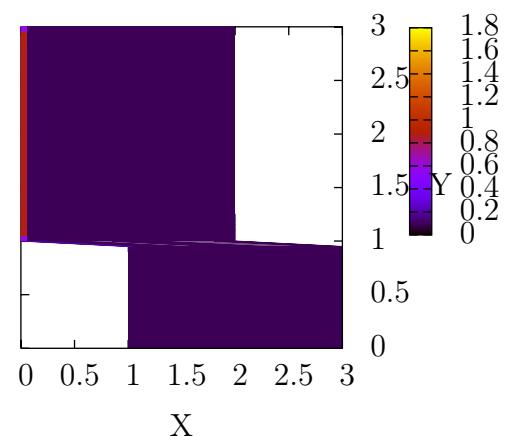


Рис. 26: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 1.017$$

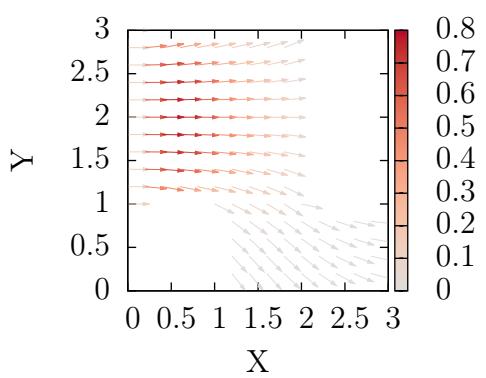


Рис. 27: Скорость

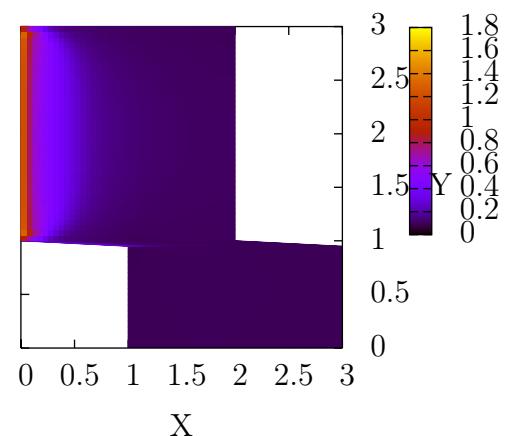


Рис. 28: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 2.017$$



Рис. 29: Скорость

Рис. 30: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 3.017$$



Рис. 31: Скорость

Рис. 32: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 4.017$$

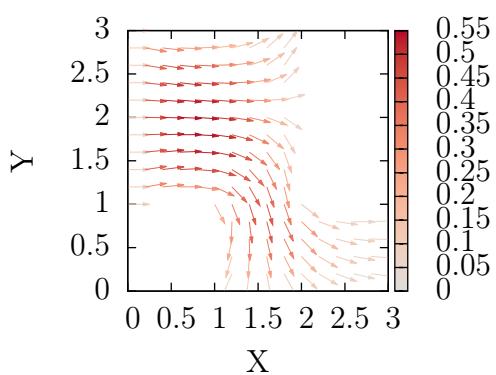


Рис. 33: Скорость

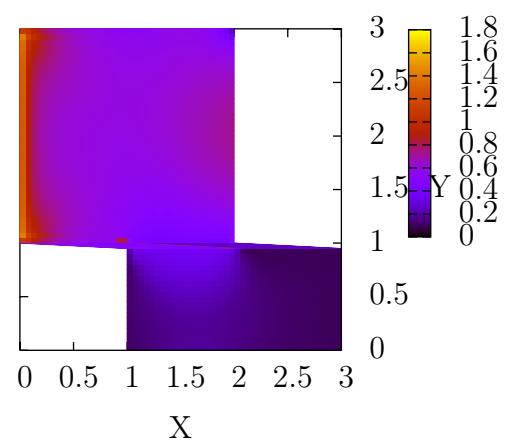


Рис. 34: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.050, 0.050), t = 5.000$$

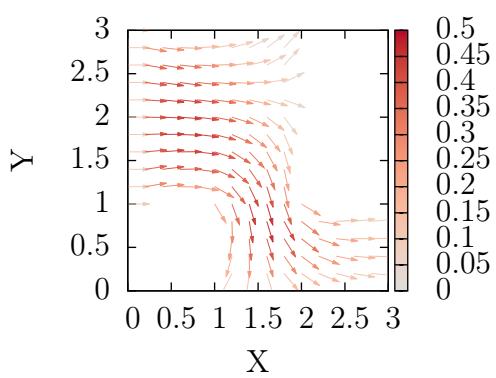


Рис. 35: Скорость

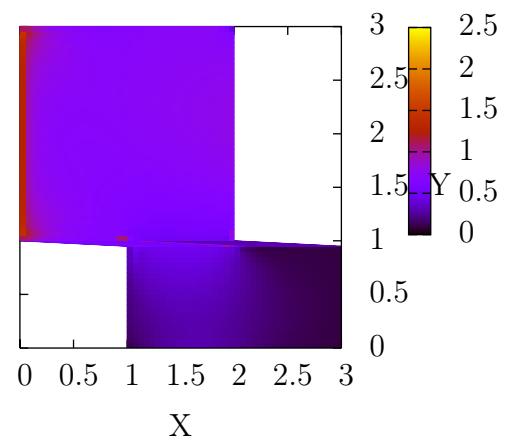


Рис. 36: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 0.017$$



Рис. 37: Скорость

Рис. 38: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 1.017$$



Рис. 39: Скорость

Рис. 40: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 2.017$$

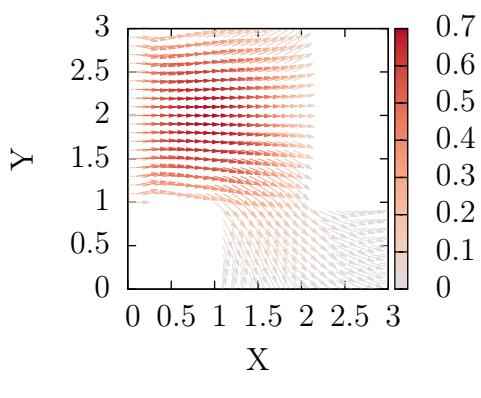


Рис. 41: Скорость

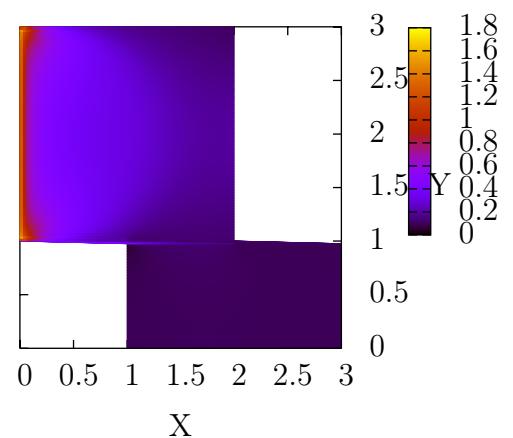


Рис. 42: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 3.017$$

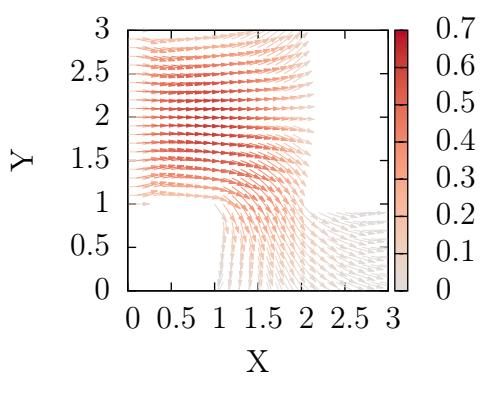


Рис. 43: Скорость

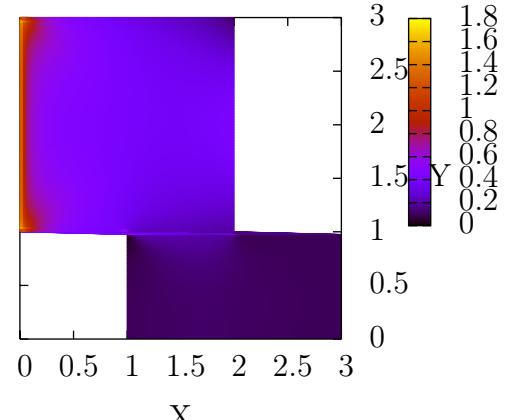


Рис. 44: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 4.017$$

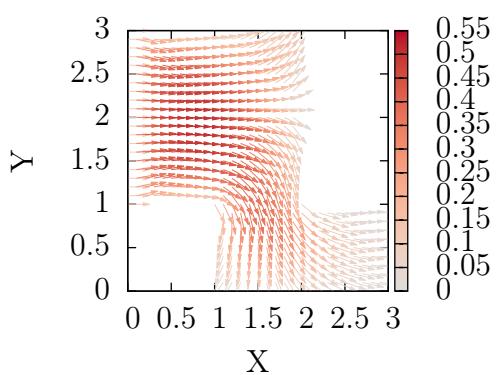


Рис. 45: Скорость

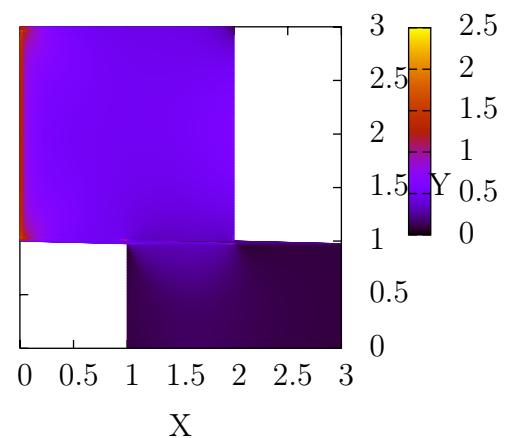


Рис. 46: Плотность

$$\tau = 0.017, h = (0.025, 0.025), t = 5.000$$

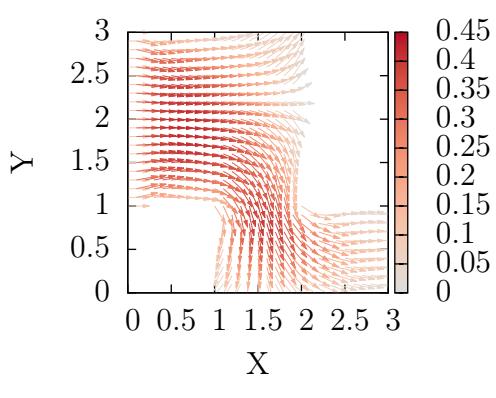


Рис. 47: Скорость

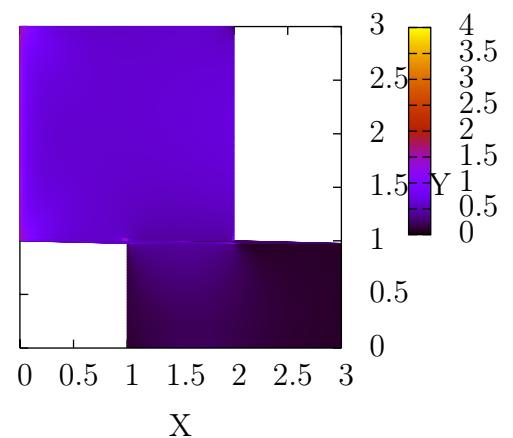


Рис. 48: Плотность

7 Спектр линеризованного разностного оператора

Стационарное решение было найдено следующим способом: на итерациях проверялась норма текущего решения по сравнению с предыдущим. Критерием выхода было выбрано значение $eps = 1.e - 12$. Стационарное решение было найдено:

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2521.

```
t = 1, norm = 1.072538e-01
t = 100, norm = 1.942510e-03
t = 200, norm = 9.581218e-04
t = 300, norm = 5.200315e-04
t = 400, norm = 2.968678e-04
t = 500, norm = 1.745928e-04
t = 600, norm = 1.046111e-04
t = 700, norm = 6.341809e-05
t = 800, norm = 3.872874e-05
t = 900, norm = 2.375964e-05
t = 1000, norm = 1.461777e-05
t = 1100, norm = 9.009206e-06
t = 1200, norm = 5.558587e-06
t = 1300, norm = 3.431910e-06
t = 1400, norm = 2.119779e-06
t = 1500, norm = 1.309666e-06
t = 1600, norm = 8.092901e-07
t = 1700, norm = 5.001458e-07
t = 1800, norm = 3.091189e-07
t = 1900, norm = 1.910678e-07
t = 2000, norm = 1.181082e-07
t = 2100, norm = 7.301506e-08
t = 2200, norm = 4.513974e-08
t = 2300, norm = 2.790872e-08
t = 2400, norm = 1.725944e-08
t = 2500, norm = 1.067561e-08
t = 2600, norm = 6.602656e-09
t = 2700, norm = 4.090830e-09
t = 2800, norm = 2.530869e-09
t = 2900, norm = 1.569131e-09
t = 3000, norm = 9.622032e-10
t = 3100, norm = 5.999068e-10
t = 3200, norm = 3.692501e-10
t = 3300, norm = 1.493756e-10
t = 3400, norm = 6.684053e-11
```

Stationary solution has been found at T = 3485.

Current norm = 0.000000e+00, criteria norm = 1.000000e-12.

Elapsed time: 30.28 sec.

Рассмотрим линеризацию разностного оператора на стационарном решении:

$$\begin{aligned} & \frac{V_m + |V_m|}{2} \frac{G_m - G_{m-1}}{h} + \frac{V_m - |V_m|}{2} \frac{G_{m+1} - G_m}{h} + \frac{V_{m+1} - V_{m-1}}{2h} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ & V_1 = V_0, \quad V_M = V_{M-1}, \end{aligned} \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_m + |V_m|}{2} \frac{V_m - V_{m-1}}{h} + \frac{V_m - |V_m|}{2} \frac{V_{m+1} - V_m}{h} + \tilde{p}'(G_m) \frac{G_{m+1} - G_{m-1}}{2h} = \\ & = \mu e^{-G_m} \frac{V_{m+1} - 2V_m + V_{m-1}}{h^2} + f_m, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ & V_0 = 0, \quad V_M = 0. \end{aligned} \tag{23.2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_m + |V_m|}{2} \frac{J_m - J_{m-1}}{h} + \Xi(V_m) G_{\bar{x},m} W_m + \frac{V_m - |V_m|}{2} \frac{J_{m+1} - J_m}{h} + \Xi(-V_m) G_{x,m} W_m + \\ & + \frac{W_{m+1} - W_{m-1}}{2h} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ & W_1 = W_0, \quad W_M = W_{M-1}, \end{aligned} \tag{23.3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_m + |V_m|}{2} \frac{W_m - W_{m-1}}{h} + \Xi(V_m) V_{\bar{x},m} W_m + \frac{V_m - |V_m|}{2} \frac{W_{m+1} - W_m}{h} + \Xi(-V_m) V_{x,m} W_m + \\ & + \tilde{p}'(G_m) \frac{J_{m+1} - J_{m-1}}{2h} + \tilde{p}''(G_m) G_{x,m}^{\circ} J_m = \\ & = \mu e^{-G_m} \frac{W_{m+1} - 2W_m + W_{m-1}}{h^2} - \mu e^{-G_m} V_{x\bar{x},m} J_m + f_m, \quad m = 1, \dots, M-1, \\ & W_0 = 0, \quad W_M = 0. \end{aligned} \tag{23.4}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left(\frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{J - J^{-1_k}}{h_k} + \Xi(V_k) G_{\bar{x}_k} W_k + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{J^{+1_k} - J}{h_k} + \right. \\ & \left. + \Xi(-V_k) G_{x_k} W_k + \frac{W_k^{+1_k} - W_k^{-1_k}}{2h_k} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\bar{h}}, \\ & W_k^{+1_k} = W_k, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^-, \quad W_k^{-1_k} = W_k, \quad \mathbf{x} \in \gamma_k^+, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{23.5}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left(\frac{V_k + |V_k|}{2} \frac{W_q - W_q^{-1_k}}{h_k} + \Xi(V_k) V_{q\bar{x}_k} W_k + \frac{V_k - |V_k|}{2} \frac{W_q^{+1} - W_k}{h_k} + \right. \\ & + \Xi(-V_k) V_{q,x_k} W_k + \tilde{p}'(G) \frac{J^{+1_q} - J^{-1_q}}{2h_q} + \tilde{p}''(G) G_{x_q}^{\circ} J \Big) = \\ & = \mu e^{-G} \left(\frac{4}{3} \frac{W_q^{+1_q} - 2W_q + W_q^{-1_q}}{h_q^2} - \frac{4}{3} V_{q,x_q\bar{x}_q} J + \right. \\ & + \sum_{k=1, k \neq q}^2 \left(\frac{W_q^{+1_k} - 2W_q + W_q^{-1_k}}{h_k^2} - V_{q,x_k\bar{x}_k} J + \right. \\ & \left. \left. + \frac{W_{km_1+1, m_2+1} - W_{km_1-1, m_2+1} - W_{km_1+1, m_2-1} + W_{km_1-1, m_2-1}}{4h_1 h_2} - V_{x_1 x_2, \mathbf{m}}^0 J \right) \right) + f_q, \\ & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \quad q = 1, 2, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_{\mathbf{h}}. \end{aligned} \tag{23.6}$$

С помощью метода Арнольди было найдены собственные значения задачи. Приведем 6 значений с максимальным модулем действительной части:

$$\begin{aligned} & Accuracy = 1.00e - 12 \\ & \lambda_1 = 3.45916e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_1| = 3.45916e + 02 \\ & \lambda_2 = 3.43587e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_2| = 3.43587e + 02 \\ & \lambda_3 = 3.43352e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_3| = 3.43352e + 02 \\ & \lambda_4 = 3.41391e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_4| = 3.41391e + 02 \\ & \lambda_5 = 3.35196e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_5| = 3.35196e + 02 \\ & \lambda_6 = 3.35173e + 02 + 0.00000e + 00 * i, |\lambda_6| = 3.35173e + 02 \end{aligned}$$

Далее собственная функция, соответствующая λ_1 , была добавлена к стационарному решению исходной задачи протекания для проверки стабилизации.

После применения первой собственной функции решение стабилизировалось:

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.

t = 1, norm = 9.215979e-03

t = 50, norm = 1.518452e-06

t = 100, norm = 3.177534e-07

t = 150, norm = 7.196107e-08

t = 200, norm = 1.957946e-08

t = 250, norm = 6.958395e-09

t = 300, norm = 3.082941e-09

t = 350, norm = 1.640359e-09

t = 400, norm = 7.533327e-10

t = 450, norm = 4.580188e-10

t = 500, norm = 3.245409e-10

t = 550, norm = 1.305495e-10

t = 600, norm = 1.155570e-10

t = 650, norm = 6.031444e-11

t = 700, norm = 5.705633e-11

t = 750, norm = 5.282850e-11

Solution has stabilized at T = 765.

Accuracy = 1.000000e-12.

Elapsed time: 2.99 sec.

Для второй собственной функции решение также стабилизировалось:

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.

t = 1, norm = 1.011079e-02

t = 50, norm = 1.417708e-06

t = 100, norm = 4.218732e-07

t = 150, norm = 2.141778e-07

t = 200, norm = 1.073394e-07

t = 250, norm = 6.270735e-08

t = 300, norm = 4.627349e-08

t = 350, norm = 3.026252e-08

t = 400, norm = 2.535985e-08

t = 450, norm = 1.995482e-08

t = 500, norm = 1.575544e-08

t = 550, norm = 1.284315e-08

t = 600, norm = 1.021578e-08

t = 650, norm = 8.217876e-09

t = 700, norm = 6.610261e-09

t = 750, norm = 5.300305e-09

t = 800, norm = 4.264015e-09

t = 850, norm = 3.424477e-09

t = 900, norm = 2.740526e-09

t = 950, norm = 2.204339e-09

t = 1000, norm = 1.772738e-09

t = 1050, norm = 1.425979e-09

t = 1100, norm = 1.147007e-09

t = 1150, norm = 9.225735e-10

```

t = 1200, norm = 7.154950e-10
t = 1250, norm = 5.940779e-10
t = 1300, norm = 4.452441e-10
t = 1350, norm = 3.760065e-10
t = 1400, norm = 2.590215e-10
t = 1450, norm = 1.568099e-10
t = 1500, norm = 1.335894e-10
t = 1550, norm = 1.159368e-10
t = 1600, norm = 5.868843e-11
t = 1650, norm = 5.481610e-11
Solution has stabilized at T = 1700.
Accuracy = 1.000000e-12.
Elapsed time: 6.50 sec.

```

Для третьей собственной функции решение также стабилизировалось:

```

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.
t = 1, norm = 9.912132e-03
t = 50, norm = 1.449576e-06
t = 100, norm = 3.966946e-07
t = 150, norm = 1.852152e-07
t = 200, norm = 9.138744e-08
t = 250, norm = 5.380196e-08
t = 300, norm = 3.989353e-08
t = 350, norm = 2.634723e-08
t = 400, norm = 2.208830e-08
t = 450, norm = 1.737300e-08
t = 500, norm = 1.373932e-08
t = 550, norm = 1.119461e-08
t = 600, norm = 8.905537e-09
t = 650, norm = 7.165152e-09
t = 700, norm = 5.763338e-09
t = 750, norm = 4.621504e-09
t = 800, norm = 3.717908e-09
t = 850, norm = 2.972228e-09
t = 900, norm = 2.386171e-09
t = 950, norm = 1.919893e-09
t = 1000, norm = 1.543961e-09
t = 1050, norm = 1.242012e-09
t = 1100, norm = 9.990294e-10
t = 1150, norm = 8.035519e-10
t = 1200, norm = 6.463658e-10
t = 1250, norm = 5.175611e-10
t = 1300, norm = 3.917659e-10
t = 1350, norm = 2.996897e-10
t = 1400, norm = 2.493009e-10
t = 1450, norm = 1.878360e-10
t = 1500, norm = 1.556930e-10
t = 1550, norm = 6.017516e-11
t = 1600, norm = 5.600955e-11
t = 1650, norm = 5.231857e-11

```

Solution has stabilized at T = 1666.
Accuracy = 1.000000e-12.
Elapsed time: 6.34 sec.

Для четвертой собственной функции решение также стабилизировалось:

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.
t = 1, norm = 1.014023e-02
t = 50, norm = 1.520263e-06
t = 100, norm = 4.294082e-07
t = 150, norm = 2.072974e-07
t = 200, norm = 9.915863e-08
t = 250, norm = 5.018681e-08
t = 300, norm = 3.102233e-08
t = 350, norm = 1.662699e-08
t = 400, norm = 1.369804e-08
t = 450, norm = 1.040108e-08
t = 500, norm = 8.050092e-09
t = 550, norm = 6.651140e-09
t = 600, norm = 5.224934e-09
t = 650, norm = 4.220633e-09
t = 700, norm = 3.398249e-09
t = 750, norm = 2.702803e-09
t = 800, norm = 2.179913e-09
t = 850, norm = 1.751594e-09
t = 900, norm = 1.408692e-09
t = 950, norm = 1.133770e-09
t = 1000, norm = 9.115799e-10
t = 1050, norm = 7.333935e-10
t = 1100, norm = 5.765073e-10
t = 1150, norm = 4.620610e-10
t = 1200, norm = 3.438024e-10
t = 1250, norm = 2.623456e-10
t = 1300, norm = 1.406415e-10
t = 1350, norm = 1.719932e-10
t = 1400, norm = 1.476308e-10
t = 1450, norm = 5.828311e-11
t = 1500, norm = 5.445164e-11
Solution has stabilized at T = 1546.
Accuracy = 1.000000e-12.
Elapsed time: 5.87 sec.

Для пятой собственной функции решение также стабилизировалось:

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.
t = 1, norm = 9.142406e-03
t = 50, norm = 2.048954e-06
t = 100, norm = 4.258540e-07
t = 150, norm = 9.387426e-08
t = 200, norm = 2.342738e-08
t = 250, norm = 7.580249e-09
t = 300, norm = 3.920671e-09

```

t = 350, norm = 3.003094e-09
t = 400, norm = 2.045663e-09
t = 450, norm = 1.701500e-09
t = 500, norm = 1.353527e-09
t = 550, norm = 1.064288e-09
t = 600, norm = 8.708926e-10
t = 650, norm = 6.725304e-10
t = 700, norm = 5.532713e-10
t = 750, norm = 4.075822e-10
t = 800, norm = 3.572455e-10
t = 850, norm = 2.921970e-10
t = 900, norm = 2.284302e-10
t = 950, norm = 1.642103e-10
t = 1000, norm = 6.579885e-11
t = 1050, norm = 5.768013e-11
t = 1100, norm = 5.386698e-11
Solution has stabilized at T = 1132.
Accuracy = 1.000000e-12.
Elapsed time: 3.84 sec.

```

Для шестой собственной функции решение также стабилизировалось:

```

N = 4000, M1 = 60, M2 = 60, Dim = 2921.
t = 1, norm = 9.921207e-03
t = 50, norm = 1.579346e-06
t = 100, norm = 4.347833e-07
t = 150, norm = 2.039629e-07
t = 200, norm = 9.631162e-08
t = 250, norm = 4.664720e-08
t = 300, norm = 2.623964e-08
t = 350, norm = 1.270969e-08
t = 400, norm = 1.000848e-08
t = 450, norm = 7.254256e-09
t = 500, norm = 5.529269e-09
t = 550, norm = 4.608453e-09
t = 600, norm = 3.575317e-09
t = 650, norm = 2.890150e-09
t = 700, norm = 2.325523e-09
t = 750, norm = 1.858544e-09
t = 800, norm = 1.501712e-09
t = 850, norm = 1.205667e-09
t = 900, norm = 9.696615e-10
t = 950, norm = 7.805736e-10
t = 1000, norm = 6.241177e-10
t = 1050, norm = 4.746564e-10
t = 1100, norm = 3.655697e-10
t = 1150, norm = 2.774617e-10
t = 1200, norm = 2.449538e-10
t = 1250, norm = 1.389234e-10
t = 1300, norm = 1.204065e-10
t = 1350, norm = 5.985902e-11

```

```
t = 1400, norm = 5.583457e-11
t = 1450, norm = 5.215090e-11
Solution has stabilized at T = 1463.
Accuracy = 1.000000e-12.
Elapsed time: 5.58 sec.
```

Рассмотренные собственные значения отличаются по модулю в пределах 2%, однако времена стабилизации (T) решения при соответствующих возмущениях могут отличаться существенно.