Z-splines

Для построения z-spline необходимо вычислить значения производных в точках, по которым он строится, а затем провести эрмитову интерполяцию.

Вычисление производной

Пусть задан набор точек X и значений в точках f. Для вычисления Z-spline нужно вычислить базисные Z сплайны, для этого введем $f_l = \delta_{il}$. Z-spline построенные по точкам X и значениям в точках f_l будем называть базисный Z сплайн ассоциированный с точкой l и обозначать как $\tilde{Z}_{m,l}$, где m – порядок сплайна.

Производная в точках базисного Z-spline считается по формуле 1.

$$\tilde{Z}_{m,l}^{(p-1)}\left(x_j - x_l\right) = A_{m,j} f_{j,l} \qquad (1),$$

где $A_{m,j} = D_m V_{m,j}^{-1}$,$[D_m]_{a,b} = \delta_{a,b}(a-1)!$, $[V_{m,j}]_{a,b} = (\left[X_j\right]_a - x_j)^{b-1}$, X_j – подмножество X содержащие точки необходимые для вычисления производной в точке x_j, $f_{j,l}$ – вектор значений в точках необходимых для вычисления производной в точке x_j полученные из f_l.

Для получения точек необходимых для вычисления производной X_j необходимо следовать следующему алгоритму: если точек слева от x_j в наборе X меньше, чем справа, то $X_j = \{x_{j-\min(m-1,j)}, \dots, x_j, \dots x_{j+2m-2-\mathrm{mi}\quad(m-1,j)}\}$, если точек справа меньше, чем слева, то $X_j = \{x_{j-2m+2+\mathrm{m}\quad(m-1,n-j)} \dots, x_j, \dots, x_{j+\min(m-1,n-j)}\}$, где n максимальный индекс в X.

Исходя из формулы 1 для вычисления производных базисного Z-spline ассоциированного с точкой l в каждой точке необходимо чтобы значение x_l было равно нулю. Для этого можем из каждой точки вычесть x_l, значения x при вычислении производной используются только в матрице Вандермнода, подставим новые значения в ее формулу.

$$\left[V_{m,j}\right]_{a,b} = \left(\left[X_j\right]_a - x_l - \left(x_j - x_l\right)\right)^{b-1} = \left(\left[X_j\right]_a - x_j\right)^{b-1} \qquad (2).$$

Подставив новые значения в формулу для вычисления матрицы Вандермонда получаем туже формулу, следовательно перенос всех точек так, чтобы x_l был равен нулю выполнять не нужно.

Пример вычисления производной

Пусть задан набор точек $X = \{-2,-1,0,1,2\}$. Найдем наборы точек для вычисления производных в каждой точке базисного Z-spline 2-го порядка, ассоциированного с нулем.

$$X_0 = \{-2,-1,0\}, X_1 = \{-2,-1,0\}, X_2 = \{-1,0,1\}, X_3 = \{0,1,2\}, X_4 = \{0,1,2\} \qquad (3),$$

$$f_{0,2} = (0,0,1)^T, f_{1,2} = (0,0,1)^T, f_{2,2} = (0,1,0)^T, f_{3,2} = (1,0,0)^T, f_{4,2} = (1,0,0)^T \qquad (4)$$

По формулам 3, 4 получаем наборы точек и вектора значения для вычисления производной.

Эрмитова интерполяция

Z-spline строится на каждом интервале $x \in [x_j, x_{j+1}]$ по формуле 8.

$$\tilde{Z}_{m,i}(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \left(\tilde{Z}_{m,i}^{(p)}(x_j) B_{p0}(x) + \tilde{Z}_{m,i}^{(p)}(x_{j+1}) B_{p1}(x) \right) \quad (5),$$

где

$$B_{p0}(x) = \frac{1}{p!}(x - x_j)^p \sum_{v=0}^{m-p-1} (L_{v,0})\, l_0^m(x),$$

$$B_{p1}(x) = \frac{1}{p!}(x - x_{j+1})^p \sum_{v=0}^{m-p-1} (L_{v,1})\, l_1^m(x),$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, l_1(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j},$$

$$L_{v,0} = L_{v-1,0} \frac{(-1)^v (m + v - 1)(x - x_j)}{v(x_j - x_{j+1})}, L_{0,0} = 1,$$

$$L_{v,1} = L_{v-1,1} \frac{(m + v - 1)(x - x_{j+1})}{v(x_j - x_{j+1})}, L_{0,1} = 1.$$

После вычисления всех базисных Z-spline можно построить Z-spline по набору значений в точках f по формуле 6.

$$Z_m(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \tilde{Z}_{m,i}(x) \quad (6).$$