学习报告：四元数与离散傅里叶变换

组员:

- 202518014628074 蒋康
- 2025E8017483006 何鹏程
- 202528013229093 廖思清
- 202518020629020 郑钦元
- 202528013229038 崔晨宇
- 202528013229031 秦超洋

一、四元数（Quaternions）

1.1 基本定义与表示

四元数是复数在四维空间中的推广，由**一个实部**和**三个虚部**构成：

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

其中：

- a 为实部（scalar part）
- $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ 为虚部（vector part）
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为四元数单位元，满足以下乘法规则：

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} \\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{ijk} = -1 \end{aligned}$$

1.2 核心运算

1.2.1 四元数乘法

给定两个四元数 $q_1 = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$，$q_2 = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$：

$$q_1 q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i} + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\mathbf{j} + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\mathbf{k}$$

这个公式可通过乘法分配律和单位元规则推导得出。

1.2.2 共轭与模长

- **共轭四元数**：$q^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$
- **模长**：$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$
- **单位四元数**：$\|q\| = 1$，用于表示旋转

1.3 几何意义：三维旋转表示

1.3.1 旋转公式

对于一个三维向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)$，可视为纯四元数 $v = 0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$。
绕单位轴 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ 旋转角度 θ 的操作为：

$$v' = qvq^*$$

其中 $q = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2}$ 为单位四元数。

1.3.2 理解思考：为何用半角？

这是四元数表示中最巧妙也最令人困惑的地方。推导过程显示：

1. 旋转操作需要两次乘法（qvq^*）
2. 每个乘法都引入一半的旋转效果
3. 因此旋转角度需要减半来补偿
   实际验证：设 v 为与旋转轴垂直的向量，计算 v' 会得到旋转 θ 后的结果。

1.4 优势与应用

1.4.1 相比于欧拉角

- **无万向节死锁**：四元数用四个参数表示三维旋转，不会出现奇异点
- **插值自然**：球面线性插值（SLERP）在四元数单位球面上沿大圆路径移动，旋转平滑
- **计算高效**：旋转组合只需四元数乘法，比矩阵乘法计算量小

1.4.2 相比于旋转矩阵

- **存储更省**：四元数（4个浮点数） vs 旋转矩阵（9个浮点数）
- **数值稳定**：容易保持单位长度，矩阵可能因累积误差失去正交性

1.4.3 主要应用领域

- 计算机图形学：相机控制、角色动画
- 机器人学：姿态估计、路径规划
- 航空航天：飞行器姿态控制
- VR/AR：头部追踪与方向计算

二、离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT）

2.1 基本定义与公式

对于长度为 N 的离散序列 $x[n]$ $(n = 0, 1, ..., N-1)$，其DFT定义为：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, ..., N-1$$

逆变换（IDFT）为：

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

2.2 傅里叶矩阵：理解DFT的线性代数视角

2.2.1 定义傅里叶矩阵

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$（旋转因子，第 N 次单位根），则 $N \times N$ 的傅里叶矩阵 F_N 定义为：

$$F_N = \begin{bmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & \cdots & W_N^{0\cdot(N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix}$$

即 $(F_N)_{k,n} = W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$。

2.2.2 DFT的矩阵表示

将信号向量化：$\mathbf{x} = [x[0], x[1], ..., x[N-1]]^T$
将频谱向量化：$\mathbf{X} = [X[0], X[1], ..., X[N-1]]^T$

则DFT可表示为：

$$\mathbf{X} = F_N \mathbf{x}$$

IDFT可表示为：

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} F_N^* \mathbf{X}$$

其中 F_N^* 是 F_N 的共轭转置。

2.2.3 傅里叶矩阵的性质

1. **对称性**：F_N 是对称矩阵（但非Hermitian）
2. **正交性**：$\frac{1}{\sqrt{N}} F_N$ 是酉矩阵，即：

$$F_N F_N^* = F_N^* F_N = N I_N$$

   其中 I_N 是 $N \times N$ 单位矩阵。
3. **可逆性**：$F_N^{-1} = \frac{1}{N} F_N^*$
4. **循环结构**：矩阵的每一行（或列）都是上一行（或列）的循环移位，乘上 W_N 的幂次。

2.3 DFT的深入理解

2.3.1 频率分量的物理意义

- $X[0]$：直流分量，序列的平均值
- $X[1]$：基频分量，周期为 N
- $X[k]$：第 k 次谐波，频率为基频的 k 倍
- $X[N-k]$：与 $X[k]$ 共轭，表示负频率成分（由于对称性）

2.3.2 周期性假设

DFT隐含假设信号以 N 为周期延拓。这意味着：

- 频域离散化对应时域周期化
- 时域离散化对应频域周期化（周期为采样率 f_s）
- 实际应用中需注意**频谱泄漏**和**栅栏效应**

2.4 快速傅里叶变换（FFT）原理

2.4.1 分治思想

FFT基于Cooley-Tukey算法，核心是将DFT分解为更小的DFT：

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}=\sum_{m=0}^{N/2-1}x[2m]W_N^{k(2m)}+\sum_{m=0}^{N/2-1}x[2m+1]W_N^{k(2m+1)}$$

令 $W_N^2=W_{N/2}$，则：

$$X[k]=\sum_{m=0}^{N/2-1}x[2m]W_{N/2}^{km}+W_N^k\sum_{m=0}^{N/2-1}x[2m+1]W_{N/2}^{km}$$

2.4.2 矩阵分解视角

FFT相当于对傅里叶矩阵进行因式分解：

$$F_N=P_N\begin{bmatrix}F_{N/2} & D_{N/2}F_{N/2}\\ F_{N/2} & -D_{N/2}F_{N/2}\end{bmatrix}$$

其中：

- P_N：置换矩阵（重排偶数和奇数索引）
- $D_{N/2}$：对角矩阵，元素为 $W_N^0,W_N^1,...,W_N^{N/2-1}$

2.4.3 算法复杂度

- 直接DFT：$O(N^2)$ 次复数乘法
- FFT：$O(N\log_2 N)$ 次复数乘法
- 当 $N=1024$ 时，加速比约为 $1024/\log_2 1024\approx 100$

2.5 DFT的应用领域

2.5.1 信号处理

- **频谱分析**：语音识别、振动分析
- **滤波**：频域乘法等效于时域卷积
- **相关分析**：计算信号相似度

2.5.2 图像处理

- **二维DFT**：图像频域分析
- **图像压缩**：JPEG使用DCT（DFT的实部变换）
- **图像滤波**：高通/低通/带通滤波

2.5.3 通信系统

- **OFDM**：正交频分复用，利用DFT/IDFT实现多载波调制
- **信道估计**：通过导频信号估计频率响应

三、概念对比与综合思考

3.1 数学结构的相似性

特性	四元数	DFT（傅里叶矩阵）
维度扩展	复数→四元数（四维）	实数/复数→频域表示
乘法规则	非交换代数	矩阵乘法（可交换，因傅里叶矩阵可对角化）

特性	四元数	DFT（傅里叶矩阵）
正交性	单位四元数构成三维球面	傅里叶矩阵列向量正交
变换操作	共轭乘法表示旋转	矩阵乘法表示时频变换

3.2 理解难点的共性分析

3.2.1 抽象维度

- 四元数：用四维代数对象表示三维旋转，需建立几何直观
- DFT：时域到频域的变换，需理解复数频率的物理意义

3.2.2 符号与记法

- 四元数：三个虚单位 i, j, k 及其非交换乘法
- DFT：旋转因子 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 的幂次运算

3.2.3 隐含假设

- 四元数旋转：默认向量表示为纯四元数
- DFT：默认信号周期延拓，采样定理前提

3.3 工程应用的互补性

在实际系统中，两者可能协同工作：

1. **运动捕捉系统**：传感器数据（加速度、角速度）通过DFT分析频率特征，姿态通过四元数融合
2. **机器人控制**：路径规划中的轨迹用DFT分析，末端执行器姿态用四元数插值
3. **计算机视觉**：图像处理用DFT/FFT，三维重建中的旋转用四元数表示

3.4 学习心得与启示

3.4.1 四元数学习要点

1. 从复数旋转（二维）类比到四元数旋转（三维）
2. 用具体例子验证旋转公式，建立几何直观
3. 理解SLERP插值的几何意义：四维单位球面上的大圆弧

3.4.2 DFT学习要点

1. 从傅里叶级数→连续FT→离散FT的演变过程
2. 通过傅里叶矩阵理解DFT的线性代数本质
3. 手动推导小N值（如N=4）的FFT蝶形图，理解分治策略

3.4.3 计算实现建议

- 四元数：实现四元数类，重载乘法运算符，验证旋转性质
- DFT/FFT：先实现直接DFT（理解原理），再实现递归FFT，最后迭代优化

四、总结

四元数和离散傅里叶变换虽然属于不同数学分支，但都体现了**用巧妙数学工具解决实际问题**的思想：

1. **四元数**通过扩展复数系统，以紧凑、稳定的方式处理三维旋转问题，避免了欧拉角的万向节死锁和旋转矩阵的冗余。
2. **DFT**通过傅里叶矩阵将信号分解为频率分量，FFT算法极大提升了计算效率，成为现代数字信号处理的基石。

理解这两个概念的关键在于：

- 把握从简单到复杂的推广过程（复数→四元数，连续FT→离散FT）
- 建立几何/物理直观，而不仅停留在公式层面
- 通过编程实现加深理解，观察参数变化的影响

这两项技术将继续在计算机图形学、机器人、通信等领域发挥核心作用，是现代工程师和研究人员的重要数学工具。

参考文献：

1. Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and Rotation Sequences*
2. Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2010). *Discrete-Time Signal Processing*
3. Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*