

# Exalples

Wei November 15, 2025

## 1 举例

**Exalple 1.1.** 文章 P37 页:  $\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2})$ . 文章结果是 (共有 20 个):

$$\begin{aligned} P_\lambda = & M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

我们重现计算过程:

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}}$$

$$pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \otimes S^2V) = P_\lambda$$

但是, 事实上不是这样.

$$\begin{aligned} P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = & M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

然后用这个投射盖计算

$$\begin{aligned} pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \otimes S^2V) = & 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

我们对比公式(1)和(2). 我们知道公式(1)并不是正确的结果.

正确结果应该是:

$$\begin{aligned} P_\lambda = & M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

**Exalple 1.2.** 文章定理 4.3.16(61 页) 中,  $\lambda = (-c-1, c, a|-c-1)$ ,  $\mu = (-c, c, a|-c-1)$  其中  $b+1 = -c < a$ , 令  $\lambda' = (-a, c, c|c+1)$ . 文章计算得到 (顺序稍有不同):

$$\begin{aligned} P_\mu = & M_{a, -c, c|-c-1} + M_{a, -c, -c|-c-1} + M_{a, c, -c|-c-1} + M_{-c, c, a|-c-1} \\ & + M_{-c, a, c|-c-1} + M_{-c, a, -c|-c-1} + M_{-c, -c, a|-c-1} \end{aligned}$$

事实上, 计算应得到

$$\begin{aligned} P_\mu = & P_{\sigma\lambda'} = p_{\tau_1 w_0, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} + p_{\tau_2, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} + p_{\tau_3, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} + p_{\tau_4, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} \\ & + p_{\tau_5, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} + p_{\tau_6, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} + p_{\tau_7, \sigma w_0}(1)M_{\tau_1\lambda'} \\ = & M_{\tau_1\lambda'} + (1+q)M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} \\ = & M_{\tau_1\lambda'} + 2M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} + M_{\tau_1\lambda'} \\ = & M_{a, -c, c|-c-1} + 2M_{a, -c, -c|-c-1} + M_{a, c, -c|-c-1} + M_{-c, c, a|-c-1} \\ & + M_{-c, a, c|-c-1} + M_{-c, a, -c|-c-1} + M_{-c, -c, a|-c-1} \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_1 &= (w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_2 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_3 &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_4 &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_5 &= (w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_6 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_7 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3, w1)
\end{aligned}$$

## 2 遇到不能计算的情况一个举例

因为权的数量巨大, 并不好写, 因此仅举一例:

**Exalple 2.1.**  $\lambda = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2})$ ,  $\mu = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2})$ , 那么, 首先计算  $P_\mu$ , 文章 P42, 定理 4.2.10, (2.4) 应该也是有问题的, 跟例 1.2 相似, 正确结果应该是:

$$\begin{aligned}
P_\mu &= + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} \\
&+ 2M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} \\
&+ M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} \\
&+ M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}
pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V) &= (96items) + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} \\
&+ 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 4M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{3}{2}} \\
&+ M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} \\
&+ 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} \\
&+ M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}|\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

上面这个结果:

$$\begin{aligned}
pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V) &= pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} \otimes g) = pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}|\frac{3}{2}} \otimes g) = pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{3}{2}} \otimes g) \\
&= pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{3}{2}}) \otimes S^2V = pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}} \otimes V) = pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{3}{2}} \otimes V) \\
pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}|\frac{3}{2}}) \otimes S^2V &= pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V) + P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}|\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

判断这 96 项的时候, 我没有判断出来, 主要是不能确定  $M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}$  重数是 4 还是 5. 注意到

$$\begin{aligned} P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} = & + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

并不能判断  $P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}$  在不在  $pr_{\lambda}(P_{\mu} \otimes S^2V)$  里面.