

Exalbles

Wei November 15, 2025

1 前言

我写了一个计算的代码, 使用的是 python+sagemath. 代码已上传 github:

2

举例

Exalble 2.1. 文章 P37 页: $\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2})$. 文章结果是 (共有 20 个):

$$\begin{aligned} P_\lambda = & M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

我们重现计算过程:

$$P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}}$$

$$pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \otimes S^2 V) = P_\lambda$$

但是, 事实上不是这样.

$$\begin{aligned} P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = & M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

然后我们用这个投射盖计算

$$\begin{aligned} pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \otimes S^2 V) = & 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{3}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

我们对比公式(1)和(2). 我们知道公式(1)并不是正确的结果.

正确结果应该是:

$$\begin{aligned} P_\lambda = & M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | -\frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} \\ & + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Exalble 2.2. 文章定理 4.3.16(61 页) 中, $\lambda = (-c - 1, c, a | -c - 1)$, $\mu = (-c, c, a | -c - 1)$ 其中 $b + 1 = -c < a$, 令 $\lambda' = (-a, c, c | c + 1)$. 文章计算得到 (顺序稍有不同):

$$\begin{aligned} P_\mu = & M_{a, -c, c | -c - 1} + M_{a, -c, -c | -c - 1} + M_{a, c, -c | -c - 1} + M_{-c, c, a | -c - 1} \\ & + M_{-c, a, c | -c - 1} + M_{-c, a, -c | -c - 1} + M_{-c, -c, a | -c - 1} \end{aligned}$$

事实上, 计算应得到

$$\begin{aligned}
P_\mu = P_{\sigma\lambda'} &= p_{\tau_1 w_0, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} + p_{\tau_2, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} + p_{\tau_3, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} + p_{\tau_4, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} \\
&\quad + p_{\tau_5, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} + p_{\tau_6, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} + p_{\tau_7, \sigma w_0}(1) M_{\tau_1 \lambda'} \\
&= M_{\tau_1 \lambda'} + \boxed{(1+q)M_{\tau_1 \lambda'}} + M_{\tau_1 \lambda'} \\
&= M_{\tau_1 \lambda'} + \boxed{2M_{\tau_1 \lambda'}} + M_{\tau_1 \lambda'} \\
&= M_{a, -c, c|-c-1} + \boxed{2M_{a, -c, -c|-c-1}} + M_{a, c, -c|-c-1} + M_{-c, c, a|-c-1} \\
&\quad + M_{-c, a, c|-c-1} + M_{-c, a, -c|-c-1} + M_{-c, -c, a|-c-1}
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_1 &= (w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_2 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_3 &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w2 * w1, w1), \\
\tau_4 &= (w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_5 &= (w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_6 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3 * w1, w1), \\
\tau_7 &= (w3 * w2 * w3 * w1 * w2 * w3, w1)
\end{aligned}$$

3 遇到不能计算的情况一个举例

因为权的数量巨大, 并不好写, 因此仅举一例:

Exaple 3.1. $\lambda = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2})$, $\mu = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2})$, 那么, 首先计算 P_μ , 文章 P42, 定理 4.2.10, (2.4) 应该也是有问题的, 跟例 2.2 相似, 正确结果应该是:

$$\begin{aligned}
P_\mu = & + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} \\
& + 2M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} \\
& + M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} \\
& + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}
pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2 V) = & (96 items) + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + 4M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| -\frac{1}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{3}{2}} \\
& + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + 3M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + 3M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} \\
& + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{1}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + 5M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{1}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}| -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} \\
& + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}| -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}| -\frac{1}{2}} + 2M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + 2M_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}| \frac{3}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} \\
& + M_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}| \frac{5}{2}} + M_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| \frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}| -\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

上面这个结果：

$$\begin{aligned}
pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V) &= pr_\lambda(P_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes g = pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes g = pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes g \\
&= pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes S^2V = pr_\lambda(P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes V = pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} | \frac{3}{2}}) \otimes V \\
pr_\lambda(P_{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} | \frac{1}{2}}) \otimes S^2V) &= pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V) + P_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} | -\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

判断这 96 项的时候，我没有判断出来，主要是不能确定 $M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}$ 重数是 4 还是 5。注意到

$$\begin{aligned}
P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} &= + M_{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} \\
&\quad + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}} + M_{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{5}{2}} + M_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

并不能判断 $P_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} | \frac{3}{2}}$ 在不在 $pr_\lambda(P_\mu \otimes S^2V)$ 里面。