

Metodos numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Tarea 02

Felipe Toledo B.

October 2, 2015

1 Introducción

Esta tarea consiste en la modelación y posterior análisis de la trayectoria unidimensional que sigue una partícula al rebotar inelásticamente sobre una superficie que oscila sinusoidalmente.

Las ecuaciones más relevantes usadas en este programa son:

- Ecuación de movimiento 1-D partícula

$$y_p(t) = -g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + y_0 \quad (1)$$

Donde g es la constante gravitacional, y y_0 , v_0 la posición y velocidad inicial de la partícula al comenzar a elevarse en el instante t_0 .

- Ecuación de movimiento del suelo

$$y_s(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (2)$$

Con A la amplitud de oscilación, ω la frecuencia y δ el desfase en el inicio del movimiento.

- Ecuación de choque inelástico

$$v'_p(t^*) = (1 + \eta)v_s(t^*) - \eta v_p(t^*) \quad (3)$$

Permite calcular la velocidad luego de un choque con el suelo en el instante t^* . En esta ec. v_p es la velocidad de la partícula antes del bote y v'_p después del bote. η es el coeficiente de restitución, relacionado con la inelasticidad del choque ($\eta = 0$ para choque completamente inelástico y $\eta = 1$ para el caso elástico).

Las velocidades de la partícula y el suelo se calculan a partir de las ecuaciones de trayectoria, calculando las derivadas analíticas.

Conocido esto, el sistema está caracterizado por las siguientes constantes: $(A, \omega, \delta, \eta, g)$, y posee las condiciones iniciales $y_p(t = 0)$ y $v_p(t = 0)$. Las condiciones iniciales del suelo quedan determinadas por parámetros del sistema.

2 Cálculos

2.1 Trayectoria de la partícula

La Figura 1 muestra la trayectoria calculada para una partícula. Durante todas las pruebas realizadas en este informe se tiene la resolución temporal $\Delta t = 0.01$ [s], y se usan las siguientes condiciones iniciales:

- $y_p(t = 0) = y_s(t = 0) = 0$ [m]
- $v_p(t = 0) = 2v_s(t = 0) + 1$ [$\frac{m}{s}$]

Además se fijan los siguientes parámetros del sistema:

- $A = 1$ [m]
- $\delta = 0$
- $g = -1$ [$\frac{m}{s^2}$]

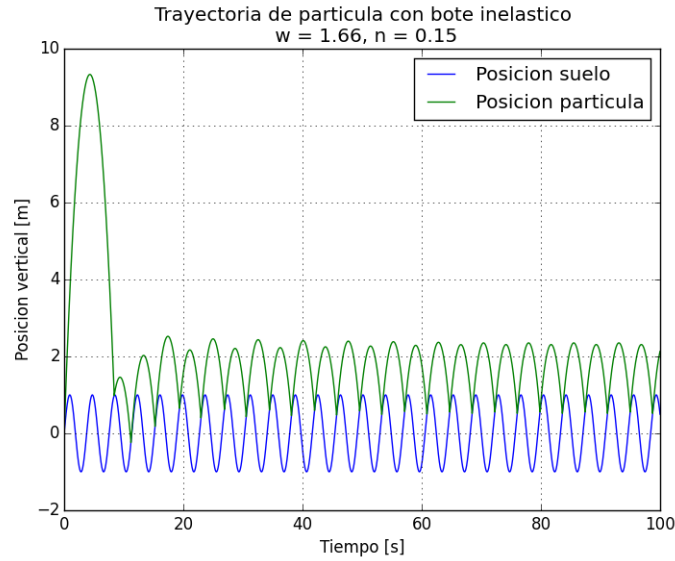


Figure 1: Ejemplo de trayectoria calculada numéricamente.

Para obtener este resultado se usa el siguiente algoritmo:

- Calcular trayectoria de partícula usando y_0 , v_0 y t_0
- Buscar $t = t^*$ de choque con suelo. Al encontrarlo se hace el cambio $y_0 = v_s(t^*)$, $t_0 = t^*$ y v_0 se recalcula usando la ecuación de choque inelástico

El método para encontrar choques con el suelo es buscar, a partir de $t_{anterior}^* + \Delta t$, el siguiente valor de t^* en que $y_{dif}(t) = y_p(t) - y_s(t)$ se anula. Para esto se revisa cada valor de t hasta que se cumple la condición $y_{dif}(t^*) * y_{dif}(t^* + \Delta t) < 0$, a partir de la cual se obtiene t^* .

El problema de este algoritmo es que es de orden n , por lo que para grandes cantidades de datos puede resultar muy lento. En este caso se recomienda implementar un algoritmo de búsqueda de raíz más rápido, como el método de Newton, el cual puede aprovechar que son conocidas las propiedades de la función trayectoria para alcanzar la raíz correcta de $y_{dif}(t)$.

2.2 Número de botes necesarios para relajar el sistema

Para esta prueba se usa $\eta = 0.15$ y $w = 1.66$. La trayectoria para esta configuración fue expuesta en la Figura 1. Como es sugerido, se estudia el gráfico de la velocidad tras cada bote, expuesto en la Figura 2.

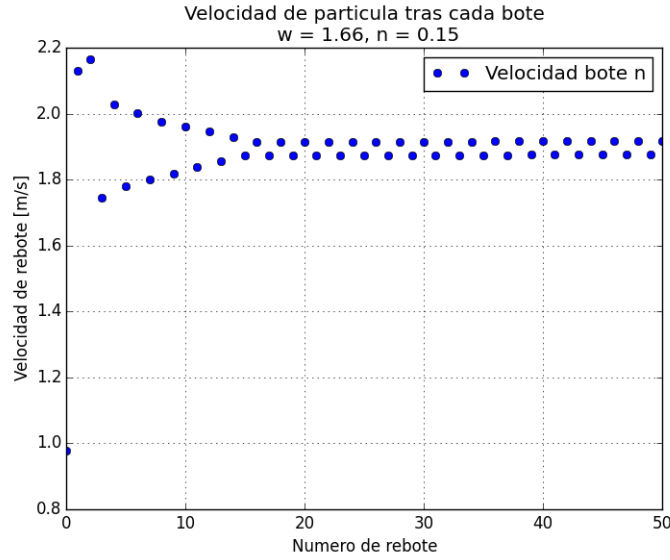


Figure 2: Velocidad tras cada bote de la partícula.

Se observa que ocurre estabilización a partir de $N_{relax} \approx 15$ con dos velocidades alternantes $v_p^+ = 1.92$ y $v_p^- = 1.88$

Se usa el mismo procedimiento para $\omega = 1.7$ y $\omega = 1.77$ y se obtiene:

- $\omega = 1.7 \rightarrow N_{relax} \approx 103$

Igual que en el caso anterior, para cada bote alcanza alternadamente dos velocidades distintas, $v_p^+ = 2.15[m/s]$ y $v_p^- = 1.52[m/s]$.

- $\omega = 1.77 \rightarrow N_{relax} \approx 140$

En este caso existen muchas velocidades en el régimen de relajación. Para ilustrar esto, se incluyen los resultados para este valor de ω en la Figura 3.

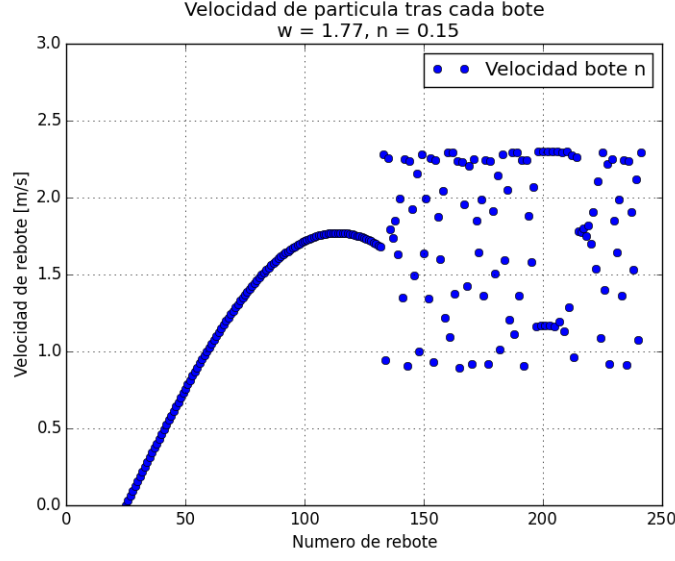


Figure 3: Se observa que en el régimen permanente coexisten varios valores de velocidad, con la característica distintiva de que todos están acotados en un rango fijo.

Se observa gran diferencia tanto en los valores de N_{relax} como en el comportamiento de régimen permanente. A priori pareciera que existen valores de ω para los que el valor de N_{relax} es particularmente bajo, probablemente debido a efectos de resonancia.

2.3 Velocidad de bote vs ω

En la Figura 4 se pueden apreciar las bandas de velocidad de bote para distintos valores de ω . Se observa que, en general, las velocidades quedan acotadas en torno a $v_p^+ = 1.906$ y $v_p^- = 1.889$, sin embargo existen frecuencias como $\omega = 1.66$ y $\omega = 1.7$ donde las velocidades escapan de estas bandas, lo que refuerza la hipótesis de que existen frecuencias de resonancia para el sistema.

El cálculo de las velocidades para cada ω se realizó de forma sucesiva, tomando como condición inicial de cada cálculo el final del estado anterior. Con ello se aprovecha que el régimen en $\omega + \delta\omega$ debiesen ser cercano al previo si $\delta\omega$ es pequeño, acelerando la relajación. Esto incluso se sostiene para frecuencias cercanas a las resonancias, ya que existe disipación debido al término η .

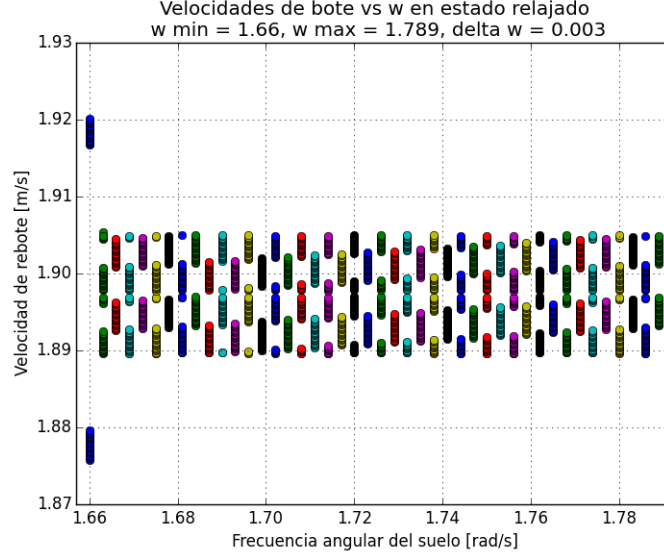


Figure 4: Bandas de velocidad para distintos valores de frecuencia angular del suelo. Todas las velocidades de bote fueron tomadas en los períodos de relajación del sistema.

3 Conclusiones

En este tipo de sistemas aparecen bandas acotadas de velocidad de bote en el estado de relajación, característica típica de sistemas pseudoperiódicos. En el caso en que la frecuencia de bote se acerca mucho a la frecuencia angular del sistema pueden ocurrir fenómenos de resonancia. En estos casos las velocidades de bote en estado de relajación son notoriamente mayores respecto a las que ocurren para otras frecuencias. Observando las trayectorias, el fenómeno parece deberse a que para ciertos valores de ω el rebote ocurre permanentemente en momentos donde la velocidad del suelo es positiva, entregando constantemente energía a la partícula. De todas formas este aumento continuo queda atenuado por η , que al final estabiliza el sistema a un valor más elevado, pero acotado, de velocidades de bote respecto a frecuencias no resonantes.

Otro fenómeno observado es que aparentemente no existe una relación directa entre el tiempo de relajación y si la frecuencia es resonante, ya que para los dos valores de frecuencias de resonancia detectadas ($\omega = 1.66$ y $\omega = 1.7$), el valor de N_{relax} es de ≈ 15 y ≈ 103 respectivamente. De todas formas para verificar esta hipótesis es necesario encontrar más frecuencias de resonancia y comparar sus N_{relax} .