Informe 05 - Resolución numérica de la ecuación de Poisson 2D

Profesor: Valentino González
Auxiliar: Felipe Pesce
Integrantes: Nicolás Troncoso[1]
[1] *Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física.*
(Dated: 29 de octubre de 2015)

I. INTRODUCCIÓN

En el siguiente informe se presenta la resolución de la ecuación de Poisson en dos dimensiones con condiciones de borde y tipo Neumann.

La motivación principal de este trabajo es la puesta en práctica de algoritmos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales o EDP, las cuales encontramos comúnmente en los problemas relacionados a la ciencia. Se busca estudiar el tiempo de convergencia y la factibilidad de la solución presentada. En este caso en específico utilizamos el algoritmo de sobre-relajación con un parámetro w variable, lo que nos permitirá analizar las diferencias en los resultados dependiendo de su valor.

En la sección II se presenta el algoritmo a utilizar, su implementación y las condiciones utilizadas para resolverlo. En la sección III se presentan los resultados obtenidos. En la sección IV se discutirán los resultados y se concluirá sobre ellos.

II. ALGORITMO SOBRE-RELAJACIÓN

El problema a resolver es de la forma:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y), \tag{II.1}$$

donde $\rho(x,y)$ representa la densidad de carga en la posición (x,y). La ecuación debe resolverse para una caja de longitud $L_x = 10$ y $L_y = 15$, con L_x y L_y el largo en x y en y de la caja, respectivamente; Dentro de esta caja se coloca una letra N de medidas $L_{Nx} = 5$ y $L_{Ny} = 7$, tal que la densidad dentro de la letra es no nula y su carga total es 1. Los bordes de la caja están conectados a tierra y por lo tanto el potencial es nulo en ellos. En la posición $y = -5{,}5$ hay una linea con condición de borde tipo Neumann:

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1 \tag{II.2}$$

donde la derivada es positiva para $y > -5{,}5$ y negativa para $y < -5{,}5$. La posición en x de esta línea va de -3 hasta 3. Para resolver se utilizó la aproximación de que la línea es un arreglo de cuadros de ancho que puede reducirse como parámetro de ingreso. Todas las medidas

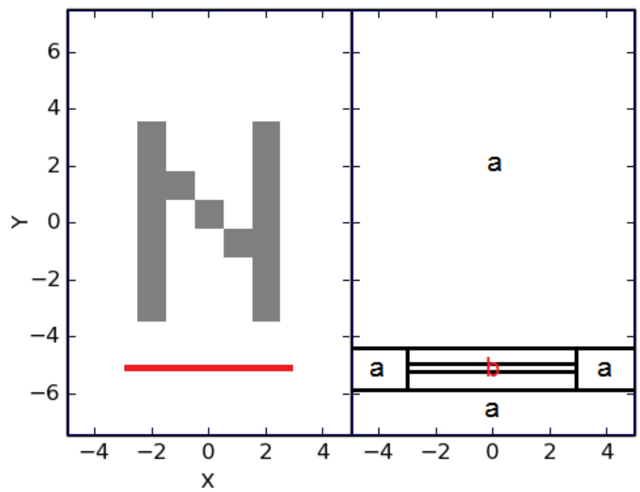

Figura 1: El esquema de la izquierda muestra la densidad de carga en la caja y la línea con condición de borde tipo Neumann. El gris representa densidad distinta de 0, mientras que el blanco es densidad 0. En la derecha vemos la separación de la caja para realizar la integración vía método de sobre-relajación. Las cajas con la letra “a” fueron integradas utilizando la ecuación (II.3), mientras que las cajas con la “b” fueron integradas con las ecuaciones (II.4) y (II.5).

están en unidades normalizadas que pueden ser reemplazadas por cualquier unidad física de carga y longitud a conveniencia.

Dado que el problema tiene la forma (II.1), se modela la caja como un conjunto de cuadros con carga $\rho_{i,j}$ donde i, j son las coordenadas del cuadrado dentro de la matriz. Estos cuadrados son de ancho h que puede reducirse según la precisión que se necesite. La solución utilizando el método de sobre-relajación viene dada por la iteración repetitiva en base a:

$$V_{i,j} = (1-w)\,V_{i,j} + \frac{w}{4}[\,V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\,]. \tag{II.3}$$

El parámetro w es ajustable, puede ir en un intervalo entre 0 y 2, aunque el óptimo se encuentra entre 1,2 y 1,4, lo cual será verificado más adelante. Si tomamos $w = 1$ recuperamos el método de relajación.

Para condiciones de tipo Neumann debemos utilizar otros métodos de iteración, dependiendo de si estamos integrando sobre la linea o sobre o bajo ella. Si integramos sobre la linea:

$$V_{i,N} = V_{i,N-1} + hg_i, \tag{II.4}$$

donde h es el ancho del paso y g es el valor de la derivada dada por la condición tipo Neumman. Si estamos inmediatamente sobre o bajo la linea utilizamos:

$$\begin{aligned} V_{i,N\pm1} = (1-w)\,V_{i,\pm1} + \frac{w}{3}\,[&V_{i-1,N\pm1} \\ &+ V_{i+1,N\pm-1} \\ &+ V_{i,N\pm2} \\ &+ hg_i + h^2\rho_{i,j}], \end{aligned} \tag{II.5}$$

donde el signo $\pm$ depende de si estamos sobre o bajo la línea.

Los parámetros utilizados para resolver fueron $h = 0{,}25$, $\rho_{ij} = 1/(16 * 17)$ tal que la sumatoria sobre todos los i, j fuese 1.

III. RESULTADOS

En la Figura 2 vemos el resultado del algoritmo para una caja que sólo contiene la letra N, y no hay líneas con condición tipo Neumann.

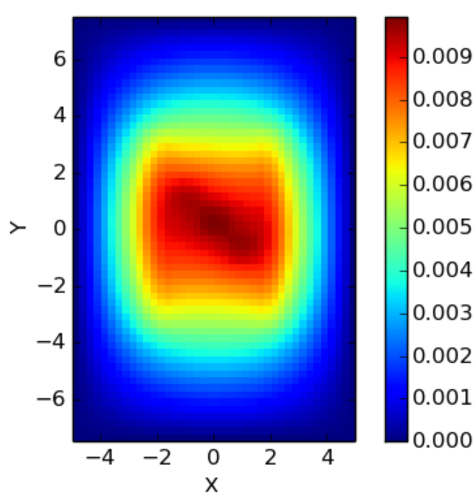

Figura 2: Gráfico de Potencial para una caja que sólo contiene la letra N. Las unidades están normalizadas.

Si hacemos la resolución para la caja con letra N y con línea, obtenemos la Figura 3.

Dado que la densidad es muy baja en la letra en comparación con la diferencia de potencial producida por la línea la letra pasa casi desapercibida. Podemos aumentar la densidad de la letra a 16 por unidad normalizada de área y obtenemos la Figura 4.

Las Figuras 2, 3 y 4 se obtuvieron utilizando $w = 1{,}2$ como parámetro de sobre-relajación. Si variamos este parámetro, los tiempos que tarda el algoritmo en converger cambian, lo cual se expresa en el Cuadro I.

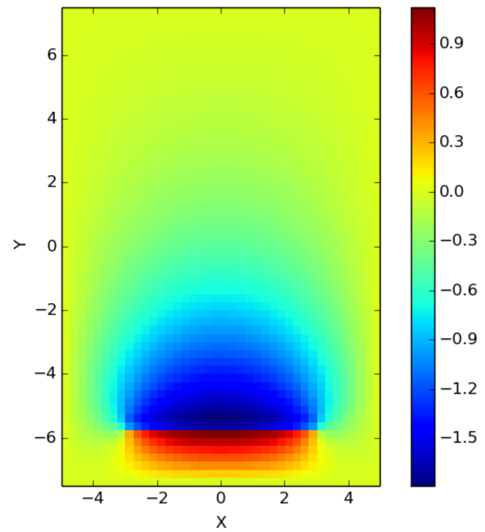

Figura 3: Gráfico de Potencial para una caja que contiene la letra N y la línea con condición tipo Neumann. Las unidades están normalizadas.

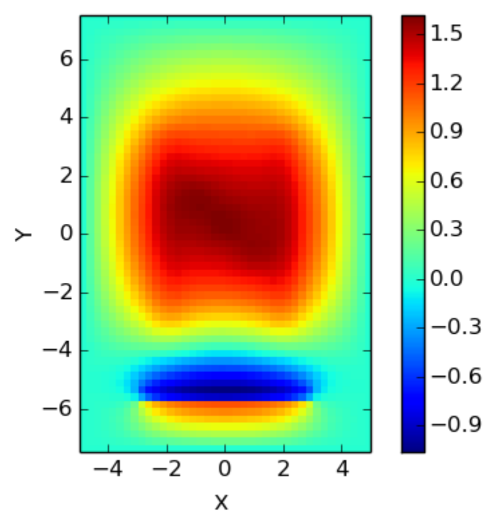

Figura 4: Gráfico de Potencial para una caja que contiene la letra N con carga aumentada y la línea con condición tipo Neumann. Las unidades están normalizadas.

Al variar w sólo cambian los tiempos de integración del algoritmo y no se ven cambios sustanciales en los resultados, en efecto, las variaciones son menores a 10^{-8} en escala normalizada de unidades, como se puede ver en la Figura 5.

w	i_N	i_{Nl}
0.8	3500	6810
1.0	2425	4640
1.2	1681	2440
1.4	1126	2071
1.6	689	1228
1.8	316	528

Cuadro I: w es el parámetro del método de sobre-relajación, mientras que i_N y i_{Nl} son el número de iteraciones necesarias para que el método converja utilizando como tolerancia 10^{-7} para una caja sólo con letra y otra con letra y línea respectivamente.

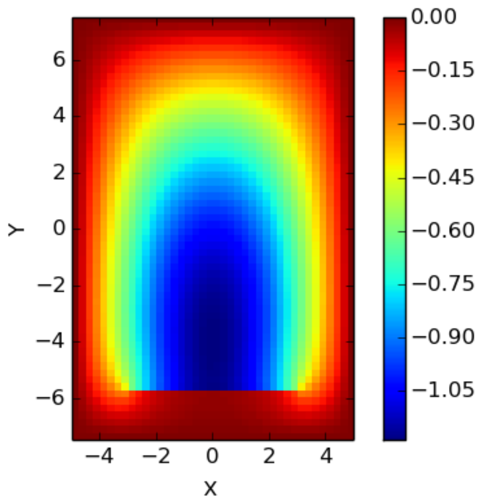

Figura 5: Diferencia entre los potenciales de una caja resuelta con $w = 1{,}2$ y $w = 1{,}8$. La escala de valores debe ser multiplicada por 10^{-8} para obtener el valor en unidades normalizadas.

IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Podemos ver que el algoritmo de sobre-relajación converge a los resultados esperados, tal y como se había estudiado durante cátedras, y además se pudo comprobar que variando el parámetro w también cambian los tiempos (asociado al número de iteraciones) que tarda en converger el algoritmo.

El bajo error asociado a la variación del parámetro w tiene que ver con la tolerancia exigida para resolver el problema, que en este caso fue de $\epsilon = 10^{-7}$ de diferencia entre cada iteración, lo que produce que la máxima diferencia sea del orden de 10^{-8}, lo cual es esperable. Vemos una diferencia de más de 1000 % en los tiempos de integración para $w = 0{,}8$ y $w = 1{,}8$, y sin embargo el error de ambos es menor a ϵ, lo que sugiere que para integraciones que requieran mayor capacidad de computador es recomendable utilizar valores de w mayores a 1.

A partir de los resultados obtenidos, que concuerdan con lo esperado y que puede ser visualizado en la Figura 4 donde vemos la influencia tanto de la densidad $\rho(x, y)$ como de la línea con condición tipo Neumman, concluimos que el método de sobre-relajación permite resolver EDPs de la forma de la ecuación de Poisson con la ventaja de tener tanto el error como el tiempo de integración controlables por el usuario.