Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea n° 5

María Constanza Flores V.

28 de octubre de 2015

1. Introducción

En esta pregunta se busca integrar la ecuación de Poisson en 2D para el potencial electostático:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y) \tag{1}$$

Este sistema debe ser integrado en una caja rectangular de dimensiones 10[cm] x 15[cm] conectada a tierra (es decir V=0 en el perímetro). También se define el centro de la caja como (x,y) = (0,0); y dentro de ella hay una linea en y = -5.5, y x entre -3 y 3 que cumple con las siguientes condiciones de borde derivativas:

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1$$

En donde el signo depende de a qué lado de la línea se está calculando la derivada.

Además en la caja está la letra M, contenida en un rectángulo centrado con lados 5[cm] x 7[cm]. La carga total dentro de la letra está dada por:

$$Q = \int \rho(x,y)dxdy = 1[C]$$

2. Procedimiento

Para resolver el problema antes planteado, se utiliza el método de sobre-relajación sucesiva. En este caso, se utiliza un reticulado con h = 0.2 [cm]. Para definir la imagen de la letra M, se utiliza la sugerencia dada en el enunciado de la Tarea (ver Figura 1), y dicha letra queda dividida en 20 cuadros de 1 [cm] x 1 [cm]

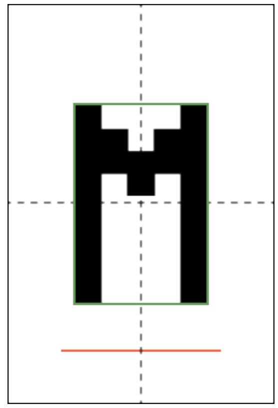

Figura 1: Imagen de referencia de la caja a utilizar

Como la ecuación de Poisson se clasifica dentro de las ecuaciones del tipo elípticas, se puede utilizar la siguiente discretización:

$$\phi_{i,k} = (1-w)\phi_{i,k} + \frac{w}{4}[\phi_{i+1,k} + \phi_{i-1,k} + \phi_{i,k+1} + \phi_{i,k-1} - h^2\rho_{i,k}] \tag{2}$$

En dicha discretización debe tomarse un valor de w entre 0 y 2. A este método de discretizar se le denomina algoritmo de sobre-relajación completo.

Se define una función `RHO`, la cual retorna la densidad ($\rho = Q/20$) de un punto situado en (i,j) cuando dicho punto está dentro de los cuadros que conforman M.

Luego se crea la función `una_iteración`, en donde se itera una vez el contorno a utilizar, pero dividiendo la caja para varias partes de la caja, que son las que se describen a continuación:

- **Rectángulo sobre la letra**: En esta sección se utiliza el algoritmo completo de sobre-relajación, eliminando el término $h^2\rho_{ij}$, pues el valor de ρ_{ij} en este caso es nulo.
- **Rectángulos a los costados de la letra**: Igual que en el caso anterior, se utiliza el algoritmo de sobre-relajación completo con $\rho_{ij} = 0$.
- **Dentro del rectángulo que contiene a la letra M**: Aquí se utiliza el algoritmo completo de sobre-relajación, tomando como valor $\rho_{ij} = 0$ aquel que retorna la función `RHO`
- **Rectángulos bajo la letra y a los costados de la línea**: Al estar ambos rectángulos alejados de las condiciones derivativas dadas para la línea, también se utiliza el metodo anteriormente descrito con la misma condición, pues no hay carga dentro de estas secciones.
- **Rectángulos bbajo y sobre la línea**: En esta sección se pregunta si se está cerca o lejos de la línea: al estar cerca se itera de la misma forma descrita en el primer punto, y al estar cerca se

utiliza la discretización para casos tipo Neuman, dada por la siguiente fórmula:

$$\phi_{i,N-1} = (1-w)\phi_{i,N-1} + \frac{w}{3}[\phi_{i+1,N-1} + \phi_{i-1,N-1} + \phi_{i,N-2} - h^2\rho_{i,N-1} + hg_i]$$

En donde g_i corresponde al valor de la derivada.

También se crea la función `no_ha_convergido`, la cual se utiliza más adelante en la iteración, para saber si, dada una cierta tolerancia, el sistema ha convergido o no. Dicha tolerancia utilizada en este caso fue de 10^{-2}.

Se itera el algoritmo, y se grafican los resultados obtenidos.

También se ve el comportamiento que tiene la cantidad de iteraciones al ir cambiando el valor de w.

3. Resultados

El gráfico obtenido se muestra en la Figuras 2 y 3

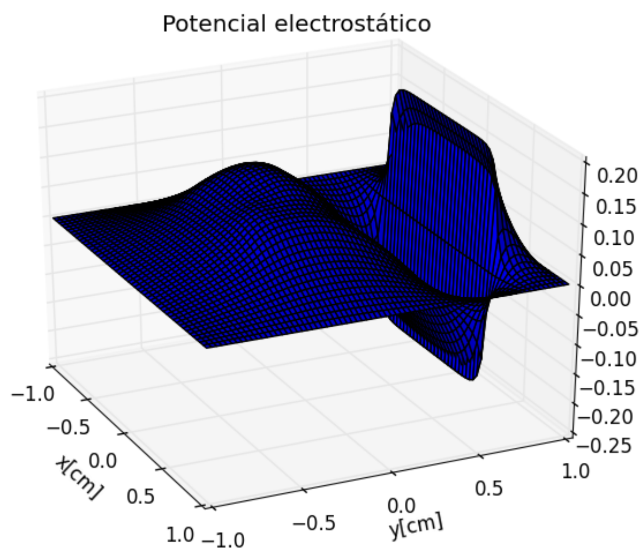

Figura 2: Valor del potencial electostático, dibujado como superficie

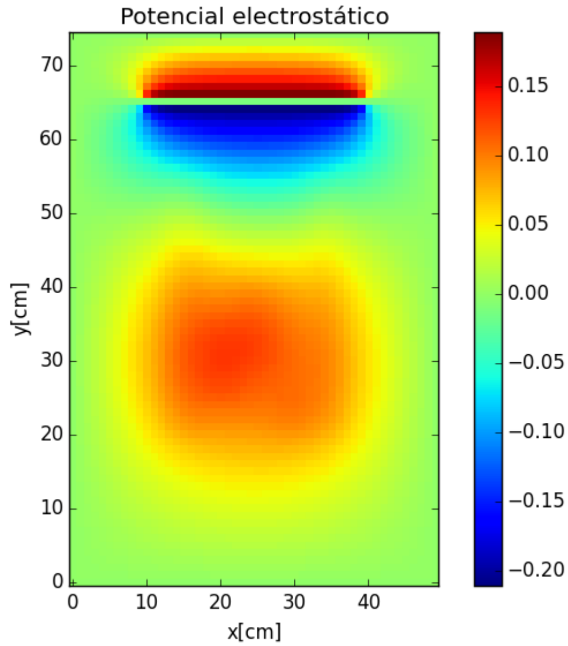

Figura 3: Valor del potencial electostático

Al cambiar el valor de w, se obtiene el siguiente número de iteraciones para alcanzar la convergencia:

Valor de w	Número de iteraciones
0.7	2566
0.9	1789
1	1513
1.2	1243
1.4	1285

Cuadro 1: Condiciones iniciales para la simulación

4. Conclusiones

En primer lugar se concluye que el método de sobre-relajación utilizado para calcular la ecuación de Poisson escrita en (1) efectivamente converge, y dependiendo de la tolerancia que se le de y del valor asignado a w va a ser más rápida o lenta la convergencia. En particular, se obtuvo que al cambiar el valor de w entre números cercanos a 1, para una convergencia de 10^{-2}, el menor valor de iteraciones fue obtenido para $w = 1{,}2$.Este valor era esperado, pues fue uno de los sugeridos en clases.

También es importante mencionar que a la hora de calcular la eficiencia, el código pudo haberse hecho mucho mejor, como por ejemplo al calcular los espacios en donde había densidad de carga y donde no, pues la forma de definirlo en el código presentaba muchas condiciones que el programa debía descartar y lo tornaba ineficiente.

Otra cosa importante de destacar es que no se pudo implementar de forma correcta el algoritmo para discretizar el potencial en la curva, por lo que en esa linea tomó el valor de 0 (es más claro al ver la Figura 3. De todas formas el problema sigue cumpliendo su discontinuidad pedida.