# Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería: Informe 6

Álvaro Césped

November 2015

# Introducción

En el presente informe se pretende resolver las ecuaciones

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu (n - n^3)$$

La primera ecuación, también conocida como ecuación de Fisher-KPP en 1D, busca modelar la densidad de población de alguna especie objeto, mientras que la segunda ecuación, conocida como ecuación de Newell-Whitehead-Segel (NWS), se relaciona con la caracterización de procesos de convección y combustión, entre otros. La particularidad de estas ecuaciones es que ambas clasifican como ecuaciones parabólicas, por lo que se propone un tipo de tratamiento específico en para su resolución.

Ambas ecuaciones se pueden separar en sus componentes difusiva y de reacción, y se propone discretizar la parte efusiva a través del método de Crank-Nickolson y la parte reactiva con el método de Euler explícito.

Para ello, se debe considerar que las condiciones iniciales y de borde son

$$\begin{aligned} n(t,0) &= 1 \\ n(t,1) &= 0 \\ n(0,x) &= e^{-x^2/0.1} \end{aligned}$$

Para la ecuación, y para la ecuación 2 son

$$\begin{aligned} n(t,0) &= 0 \\ n(t,1) &= 0 \\ n(0,x) &= \texttt{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)} \end{aligned} \tag{1}$$

## Procedimiento

La discretización sugerida para el método de Crank-Nickolson queda expresada como

$$\frac{n_k^{N+1}-n_k^N}{\epsilon}=[\frac{n_{k+1}^{N+1}-2n_k^{N+1}+n_{k-1}^{N+1}}{h^2}+\frac{n_{k+1}^N-2*n_k^N+n_{k-1}^N}{h^2}]+\mu n^N-\mu n_k^N n_k^N$$

donde $\mu n$ corresponde a la tendencia de la especie a crecer, $-\mu n^2$ representa una disminución de la densidad producto de la baja cantidad de recursos disponibles para la densidad creciente y $\gamma\nabla n$ la tendencia de la especie a dispersarse para encontrar más recursos.

Para el método de Euler explícito se utiliza la misma discretización, pero con un cambio en el último término, es decir, se utiliza lo siguiente

$$\frac{n_k^{N+1}-n_k^N}{\epsilon}=[\frac{n_{k+1}^{N+1}-2n_k^{N+1}+n_{k-1}^{N+1}}{h^2}+\frac{n_{k+1}^N-2*n_k^N+n_{k-1}^N}{h^2}]+\mu n^N-\mu n_k^N n_k^N n_k^N$$

*Nota: $N$ y $n$ son dos variables distintas, donde $n$ representa el término que queremos calcular y $N$ corresponde a la discretización.*

Se busca resolver ambas ecuaciones con una discretización espacial entre 0 y 1, mientras que los valores de las constantes son $\gamma = 0.001$ y $\mu = 1.5$.

# Resultados

Para la resolución de la ecuación de Fisher-KPP los resultados se muestran en las figuras 1,2 y 3.

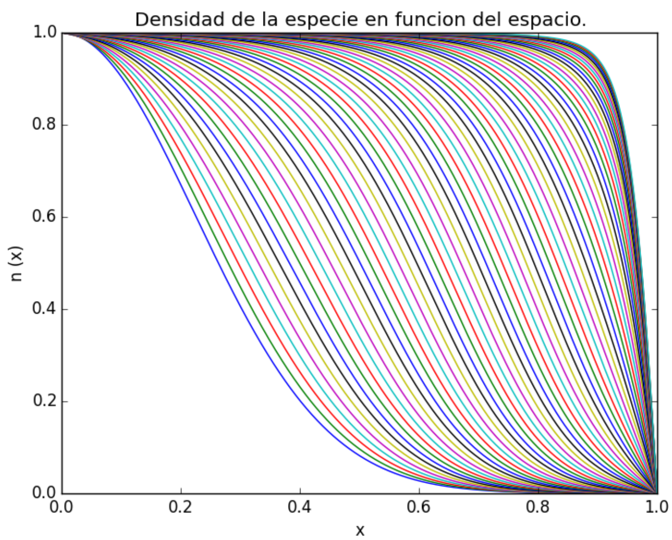


Figure 1: *Gráfico de la distribución de densidad de población en el espacio, considerando que el tiempo final de cálculo es* 15 [*unidades*]

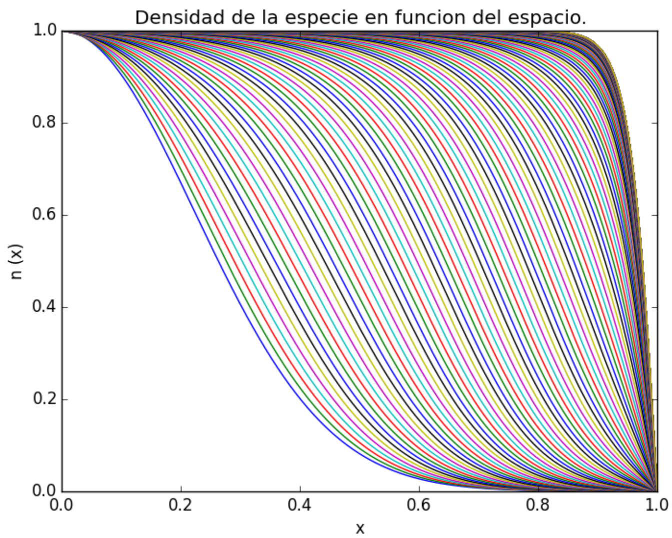


Figure 2: *Gráfico de la distribución de densidad de población en el espacio, considerando que el tiempo final de cálculo es* 30 [*unidades*]

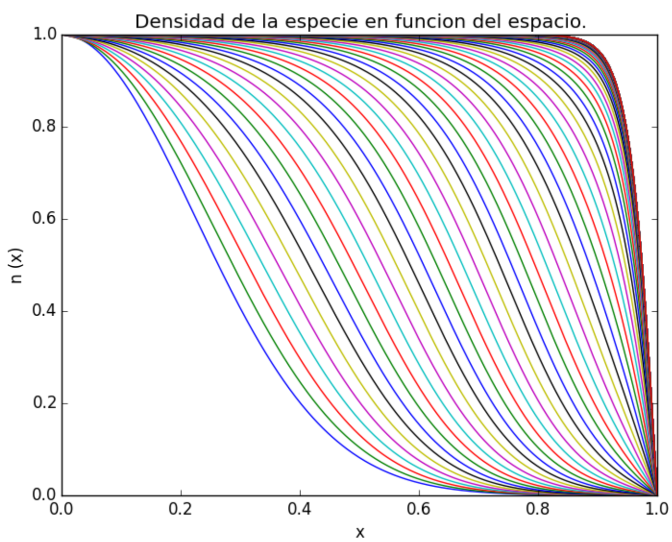


Figure 3: *Gráfico de la distribución de densidad de población en el espacio, considerando que el tiempo final de cálculo es* 50 [*unidades*]

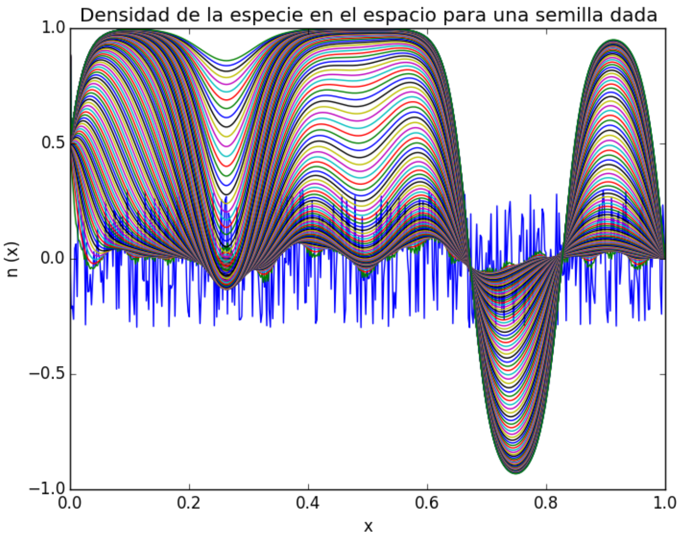


Figure 4: *Gráfico de la distribución de densidad de población en el espacio, considerando que el tiempo final de cálculo es* 5 [*unidades*] *y una semilla (aleatoria) con valor específico de 148.*

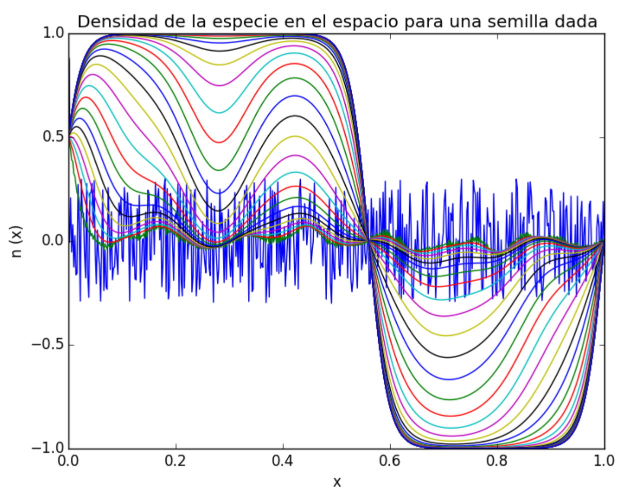


Figure 5: *Gráfico de la distribución de densidad de población en el espacio, considerando que el tiempo final de cálculo es* 10 [*unidades*] *y una semilla (aleatoria) con valor específico de 62.*

# Conclusiones

Se encuentra que el problema descrito para la ecuación de Fisher-KPP converge a los valores 1 y 0 (de acuerdo de la posición correspondiente) de manera "suave", por lo que se concluye que el algoritmo implementado cumple con resolver de manera satisfactoria dicho problema.

El valor 1 corresponde a un equilibrio estable, esto se puede entender básicamente ya que, a medida que la población va creciendo, los recursos solo darán abasto para una cantidad precisa de individuos, por lo que, a pesar de aumentar la densidad de población, existirá un grupo que se trasladará a otra región en busca de recursos dejando así la zona inicial con una población "estable", mientras que el valor 0 corresponde a un equilibrio inestable por el simple hecho de que, como no hay población, no existe forma alguna de que la densidad tienda a aumentar salvo por el hecho de que lleguen individuos de otra zona, lo que impulsará el crecimiento de la población hasta el punto estable 1.

Por otro lado, se observa que, para los distintos valores finales del tiempo utilizados, el gráfico pierde (o tiene mucha) resolución, por lo que se estima conveniente adaptar los pasos espaciales y temporales para obtener un resultado gráfico óptimo (Superposición de líneas).

Para el caso de la ecuación NWS, al igual que el caso anterior, se ve una convergencia a los valores borde $-1$ y $1$ y al valor intermedio $0$. Los primeros dos corresponden, al igual que el caso anterior, a puntos de equilibrio estables del crecimiento de la población y el 0 corresponde a un equilibrio inestable que se puede explicar de igual manera que para la ecuación Fisher-KPP.

Finalmente, se puede observar un comportamiento más caótico (Aunque sigue convergiendo) para la ecuación de NWS y esto se puede deber básicamente a la diferencia en las condiciones iniciales aleatorias proveídas por la semilla.