Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 6

Álvaro Osorio

4 de Noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

Esta pregunta tiene como objetivo resolver numéricamente la ecuación de Fisher-KPP, la cual es un modelo utilizado para describir la expansión de poblaciones biológicas, particularmente resolveremos su versión en una dimensión, la cual esta dada por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \tag{1}$$

La variable $n = n(t, x)$ describe la densidad de la especie como función del tiempo y la posición. Los términos al lado derecho corresponden a:

- $\gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$: Esta es la parte de la ecuación que difunde y representa la tendencia de la especie a dispersarse para encontrar más recursos.
- $\mu n - \mu n^2$: Y parte es la que modela la reacción, en especifico μn modela la tendencia de la especie a crecer indefinidamente y $-\mu n^2$ modela la competencia por recursos dado el aumento en la población.

1.2. Desarrollo

Para resolver la ecuación de Fisher-KPP se discretizara la parte de la difusión con el método de Crank–Nicolson y la parte de la reacción se utilizara un método explicito, el intervalo espacial será entre $x_{ini} = 0$ y $x_{fin} = 1$ tomando 500 puntos para la discretización y el intervalo espacial será entre $t_{ini} = 0$ y $t_{fin} = 10$ y tomando 100 puntos para su discretización, los valores para el tiempo fueron tomados en principio como una adivinanza y dado que eran estables se conservaron para la resolución del problema, adicionalmente se tomaran $\gamma = 0{,}001$ y $\mu = 1{,}5$ y tomaremos como condiciones iniciales y de borde las siguientes:

- $n(t, x_{ini}) = 1$
- $n(t, x_{fin}) = 0$
- $n(t_{ini}, x) = e^{-x^2/0,1}$

Usando el metodo de Crank-Nicholson para la parte que difunde tenemos que discretización queda de la forma:

$$rn_{i+1}^{j+1} + (1+2r)n_i^{j+1} - rn_{i-1}^{j+1} = rn_{i+1}^{j} + (1-2r)n_i^{j} + rn_{i-1}^{j} \tag{2}$$

Con $r = \frac{\gamma \Delta t}{2(\Delta x)^2}$, ahora agregando la parte de la reacción.

$$rn_{i+1}^{j+1} + (1+2r)n_i^{j+1} - rn_{i-1}^{j+1} = rn_{i+1}^{j} + ((1-2r) + \mu^{'}(1-n_i^{j}))n_i^{j} + rn_{i-1}^{j} \tag{3}$$

Con $\mu^{'} = \mu \Delta t$, esta sera nuestra ecuación a resolver numéricamente, podemos ver que este sistema de ecuaciones es de la forma:

$$A_k^{-}\phi_{k-1} + A_k^{0}\phi_k + A_k^{+}\phi_{k+1} = b_k \tag{4}$$

Ahora suponiendo una solución para ϕ de la forma:

$$\phi_k = \alpha_k \phi_{k+1} + \beta_k \tag{5}$$

Finalmente tenemos que las siguientes recurrencias que nos permitirán resolver el sistema:

$$\alpha_k = \frac{-A_k^{+}}{A_k^{0} + A_k^{-}\alpha_{k-1}} \tag{6}$$

$$\beta_k = \frac{b_k - \beta_{k-1}A_k^{-}}{A_k^{0} + A_k^{-}\alpha_{k-1}} \tag{7}$$

1.3. Resultados

Los resultados para el la resolución numérica para la ecuación Fisher-KPP son los siguientes:

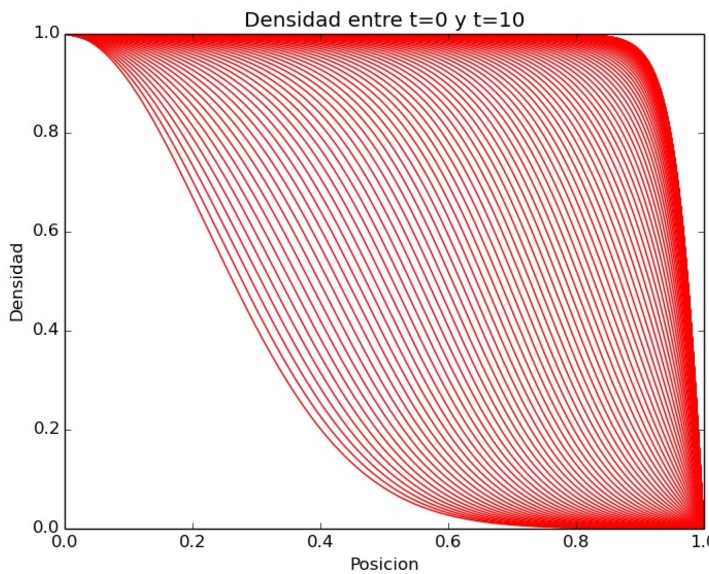

Figura 1: Solución Numérica para la ecuación de Fisher-KPP

Para un mayor detalle de como evoluciona la función $n(x, t)$ en el tiempo, el codigo P1.py entrega un gif con los sucesivos plots mostrados en la Figura 1.

Podemos interpretar los resultados como un aumento de la población a lo largo del espacio, ya que tenemos una condición de borde donde la densidad es 1 y esta se propaga al resto del espacio.

2. Pregunta 2

Ahora tenemos una ecuación similar a la Fisher-KPP, la ecuación de Newell-Whitehead-Segel la cual también sirve para modelar fenómenos de reacción y difusión, esta es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3) \tag{8}$$

El procedimiento para resolver esta ecuación es homologo al anterior solo cambia la parte de la reacción y las condiciones iniciales y de borde.

2.1. Desarrollo

Tenemos las siguientes condiciones iniciales y de borde:

- $n(t, x_{ini}) = 0$
- $n(t, x_{fin}) = 0$
- $n(t_{ini}, x) =$ `np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)`

Y la discretización sería de la forma:

$$rn_{i+1}^{j+1} + (1+2r)n_i^{j+1} - rn_{i-1}^{j+1} = rn_{i+1}^{j} + ((1-2r) + \mu^{'}(1-(n_i^j)^2))n_i^j + rn_{i-1}^{j} \tag{9}$$

El resto del desarrollo es homologo al expuesto en la pregunta 1.

2.2. Resultados

Los resultados para el la resolución numérica para la ecuación Newell-Whitehead-Segel son los siguientes:

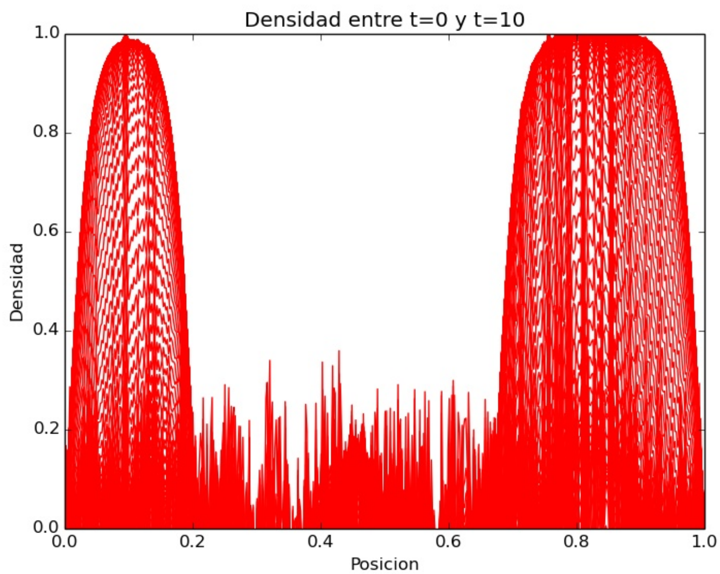

Figura 2: Solución Numérica para la ecuación de Newell-Whitehead-Segel

Al igual que la pregunta anterior el código P2.py entrega un gif con la evolución temporal de la ecuación $n(x,t)$.

En esta ecuación podemos ver que para los valores $n = 1$ y $n = -1$ la ecuación presenta un equilibrio estable, esto lo podemos ver dado que la condición inicial la cual a pesar de ser aleatoria esta bastante cerca de $n = 0$ ya que son valores entre -0.3 y 0.3, pero a pesar de eso las soluciones tienden a los equilibrios descritos anteriormente, y la tendencia final de cada solución depende de que tan cerca este la condición inicial de cada equilibrio.

3. Conclusión

Ambas ecuaciones fueron resueltas numéricamente de forma satisfactoria y los resultados están dentro de lo esperado, además cabe destacar lo bueno que es ver los resultados a lo largo del tiempo, lo cual hacer una animación es una muy buena herramienta para la exposición de los resultados