Tarea 06 - Métodos Numéricos

Luz Agüero Contreras 18.355.502-2
Profesor: Valentino Gonzales
Auxiliar: Felipe Pesce

Noviembre 2015

1 Introducción

Parte 1
La ecuación de Fisher-KPP, modela el comportamiento de una especie animal:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \tag{1}$$

Donde μn representa la tendencia a crecer de la especie suponiendo que hay recursos infinitos; $-\mu n^2$ indica la baja de la densidad de la especie ya que existe la competencia por recursos, dado el aumento de la densidad anteriormente; $\gamma \nabla^2 n$ muestra la tendencia de la especie a dispersarse por la recolección de recursos.
Además, se tiene las siguientes condiciones de borde para la ecuación (1):

- $n(t, 0) = 1$
- $n(t, 1) = 0$
- $n(0, x) = e^{-x^2/0.1}$

En esta primera parte, se pidió resolver la ecuación, partiendo por discretizar la parte de difusión por medio del método de Crank–Nicolson y luego usar el método de Euler explicito para la parte de reacción.

Parte 2
La ecuación de Newell-Whitehead-Segel es otra ecuación de reacción-difusión que describe fenómenos de convección y combustión entre otros:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3) \tag{2}$$

Condiciones iniciales ecuación (2):

- $n(t,0) = 0$
- $n(t,1) = 0$
- $n(0,x) =$ `np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)`

Se pidió resolver este sistema igualmente que el anterior, en la parte 1, fijando la semilla para comparar los resultados, ya que hay una condición aleatoria.

2 Procedimiento

Parte 1

Hay que destacar que el método de Crank Nicolson es una combinación del método de Euler explícito e implícito, por lo que se implemento directamente la parte de Euler explícito (para la parte de reacción) en las funciones para discretizar la parte de difusión (Cranck Nicolson).
Luego, la discretización está dada por:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\Delta t} = r\left((n_{i+1}^{j+1} - 2n_i^{j+1} + n_{i-1}^{j+1}) + (n_{i+1}^j - 2n_i^j + n_{i-1}^j)\right) \quad (3)$$

Donde $r = \frac{a}{2(\Delta x)^2}$

Para implementar Euler explícito, la ecuación a iterar queda:

$$-rn_{i+1}^{j+1} + (1+2r)n_i^{j+1} - rn_{i-1}^{j+1} = rn_{i+1}^j + rn_{i-1}^j + (1-2r)n_i^j + \mu(1-n_i^j)n_i^j dt \quad (4)$$

Donde queda que $r = \gamma dt/2h^2$. Se definieron funciones y se ocuparon para su posterior uso.

Parte 2

Se ocupo el mismo script, variando las condiciones de borde y fijando la semilla para poder comparar los resultados. Para la implementación de euler explícito se ocupo la misma formula (4), con la diferencia del último termino de la derecha, el cual queda $\mu(1-(n_i^j)^2)n_i^j dt$, ya que el el orden de la parte de reacción de la ecuació (2) son de un orden mayor.

Para ambas partes se usó el siguiente setup:

- $\mu = 1.5$; $\gamma = 0.001$
- $t_{final} = 4$; $t_{inicial} = 0$
- $N_{paso\_tiempo} = 200$; $N_{paso\_espacio} = 500$

3 Resultados

Parte 1

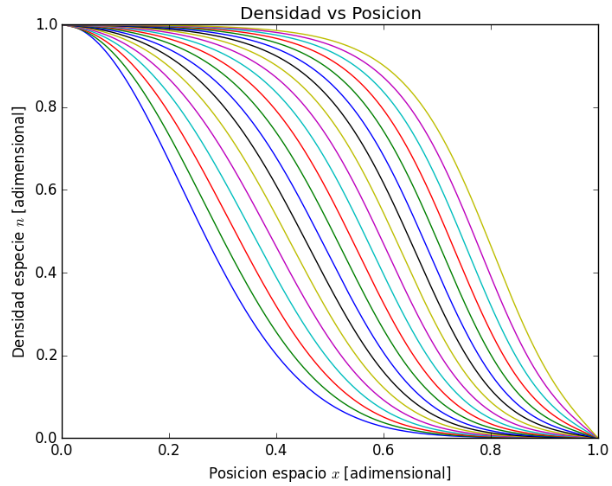

Figure 1: Iteración entre t=0 y t=4

Parte 2

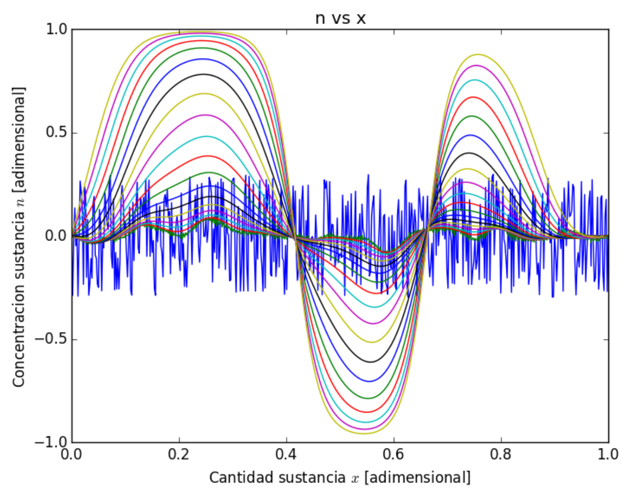

Figure 2: Iteración entre t=0 y t=4, semilla = 11

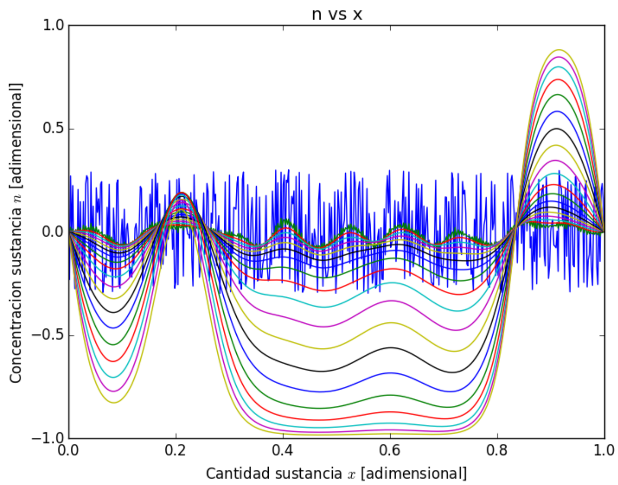

Figure 3: Iteración entre t=0 y t=4, semilla = 1000

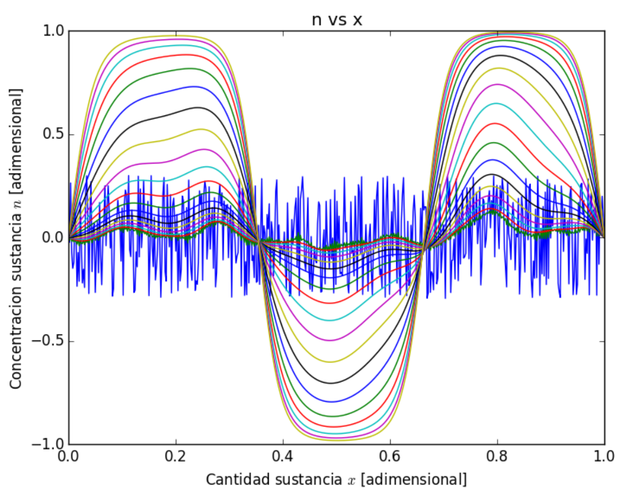

Figure 4: Iteración entre t=0 y t=4, semilla = 456764

4 Conclusiones

Las distintas lineas de colores en los gráficos representan el comportamiento de las funciones a distintos tiempos. En la Figura 1, se ve el resultado esperado, el tiempo avanza de izquierda a derecha, la densidad de la especie debiese crecer, pero dado que este aumento provoca una competición por los recursos, las densidad tiendes a disiparse.
En las Figuras 2, 3, 4, se puede apreciar que a medida que el tiempo avanza, las souciones se acercan a +1 y -1, siendo estas soluciones estables del sistema, además, se ve una clara oscilacion en torno a 0, siendo ésta también una solucion del sistema.
En conclusión general, se puede asegurar que el método de crank nicolson permite modelar las ecuaciones de difusión de manera correcta y con resultados fiables.