

Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería:

Informe Tarea n° 6

María Constanza Flores V.

3 de noviembre de 2015

1. Introducción

En la presente tarea se busca resolver dos ecuaciones de derivadas parciales del tipo parabólicas. Una de ellas, llamada la ecuación de Fisher-KPP, que busca modelar el comportamiento de una especie animal, tiene su versión 1D como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \quad (1)$$

Por otra parte, la otra ecuación, llamada ecuación de Newell-Whitehead-Segel, que sirve para describir fenómenos de convección, combustión, entre otros, es la siguiente:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3) \quad (2)$$

Ambas son ecuaciones del tipo reacción difusión. Para resolverlas, se discretiza la parte difusiva de ellas usando el método de Crank-Nicolson, y el método de Euler explícito para la parte de reacción. Las condiciones iniciales y de borde utilizadas para integrar la ecuación de Fisher-KPP son las siguientes:

$$n(t, 0) = 1$$

$$n(t, 1) = 0$$

$$n(0, x) = e^{-x^2/0,1}$$

Y para la ecuación de Newell-Whitehead-Segel:

$$n(t, 0) = 0$$

$$n(t, 1) = 0$$

$$n(0, x) = \text{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)}$$

En donde la condición inicial es un arreglo de números aleatorios, con un largo N_x , y definidos en el rango $[-0.3, 0.3]$.

2. Procedimiento

Para resolver el problema antes planteado, la ecuación de Fisher-KPP puede ser discretizada de la siguiente forma:

$$\frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2} \left[\frac{T_{k+1}^{n+1} - 2T_k^{n+1} + T_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{T_{k+1}^n - 2T_k^n + T_{k-1}^n}{h^2} \right] + \mu T^n - \mu T_k^n \cdot T_k^n$$

De la misma forma se puede expresar la discretización de la ecuación de Newell-Whitehead-Segel, cambiando el último término por $\mu T_k^n \cdot T_k^n$. Para el caso de ambas ecuaciones se escribió T en vez de n, pues así se evitan confusiones.

Como se puede ver en ambas ecuaciones, la última parte de la discretización (correspondiente a la parte reactiva de la ecuación), no depende de la posición en la cual se está discretizando, sino que solo del tiempo. Teniendo eso en cuenta, y sabiendo que, como se vio en clases, el problema se puede entender como:

$$A \cdot \vec{T} = \vec{b}$$

En donde A es una matriz tridiagonal, y la solución a dicho problema se traduce a $\vec{T} = A^{-1}\vec{b}$. Luego, \vec{b} puede escribirse como una suma de vectores $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$, donde \vec{b}_1 corresponde al vector asociado a la obtención de la solución mediante el método de Crank-Nicolson, y \vec{b}_2 a la obtención de la solución mediante Euler explícito.

Finalmente el algoritmo queda dado por iterar la siguiente solución:

$$T_k = \alpha_k T_k + \beta_k \tag{3}$$

Los valores α_k y β_k están dados por valores de A^+, A^-, A^0 , b_{k-1} , α_{k-1} y β_{k-1} . Los tres primeros son valores que están dados en función de $r = \frac{\gamma\epsilon}{2h^2}$.

Hasta aquí el método es análogo para ambas ecuaciones. Una consideración extra que se tiene es al momento de utilizar la condición inicial de la ecuación de Newell-Whitehead-Segel: se puede setear la *semilla* al principio del script para que el resultado obtenido sea reproducible y no cambie cada vez que se ejecute el código.

Todo lo anterior es llevado a un código para cada ecuación, con sus respectivas modificaciones correspondientes a las condiciones iniciales, de borde y modificaciones en las ecuaciones antes mencionadas. Para ambos problemas, los valores de μ y γ tomados fueron 1.5 y 0.001 respectivamente.

3. Resultados

Al graficar la ecuación de Fisher-KPP, se obtuvo el gráfico mostrado en la Figura 1, que luego fue corregido por el de la Figura 2, cambiando el tiempo total utilizado al iterar.

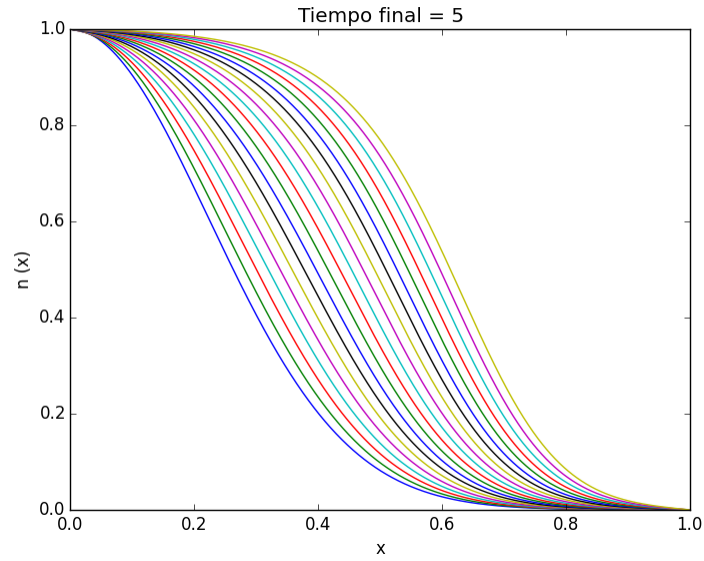


Figura 1: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Fisher-KPP

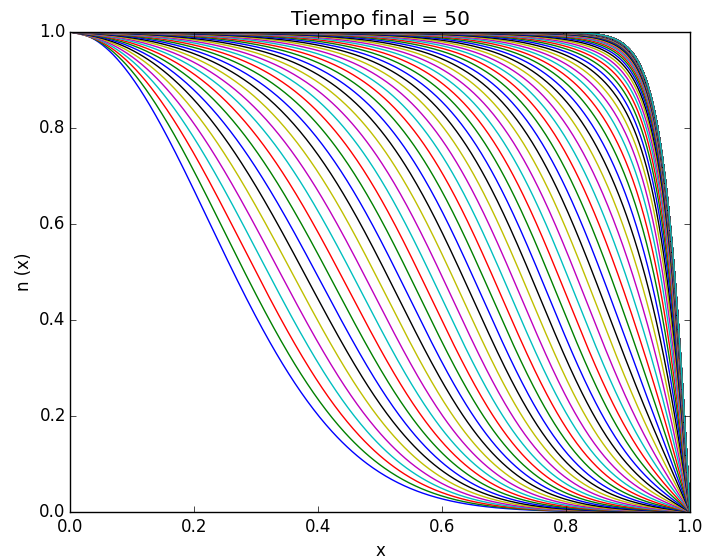


Figura 2: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Fisher-KPP

De la misma forma, en las Figuras 3 y 4 se muestran los gráficos para los mismos casos anteriores, pero correspondientes a la ecuación de Newell-Whitehead-Segel, para una misma *semilla*.

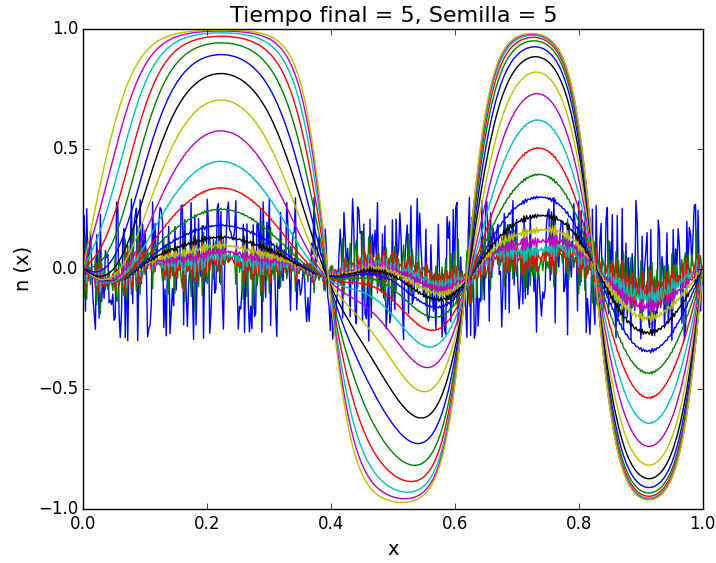


Figura 3: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Newell-Whitehead-Segel

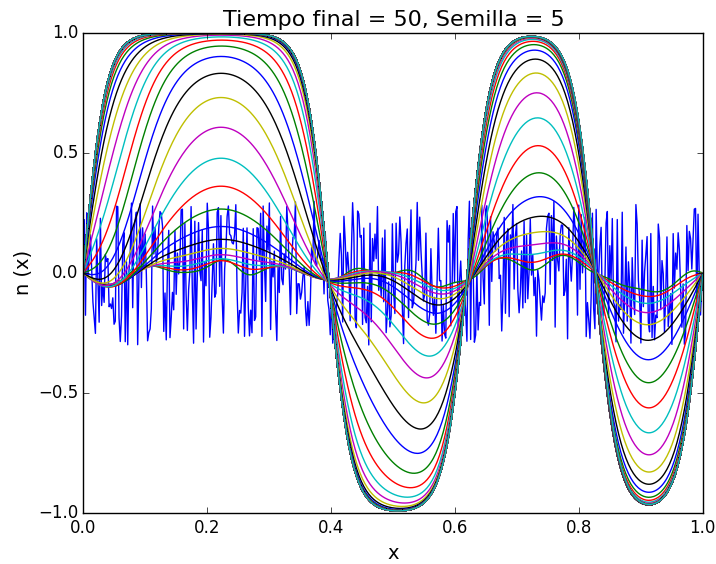


Figura 4: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Newell-Whitehead-Segel

Al cambiar la semilla para un mismo valor de tiempo, se pueden obtener los siguientes gráficos:

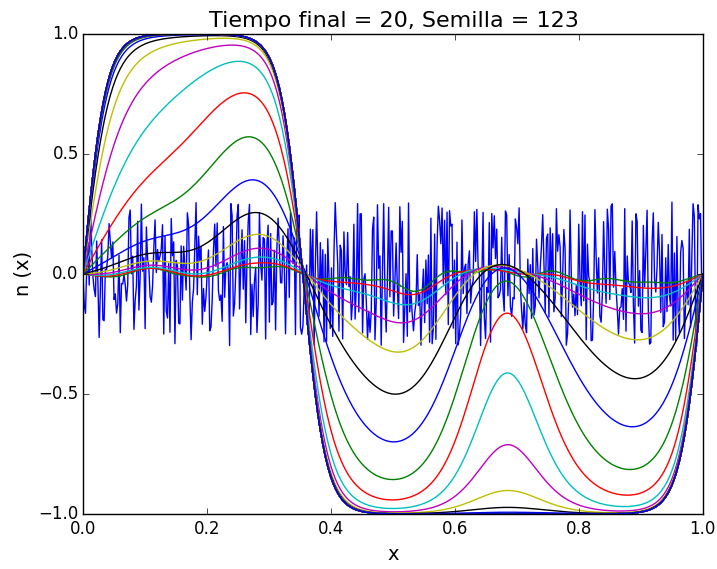


Figura 5: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Newell-Whitehead-Segel

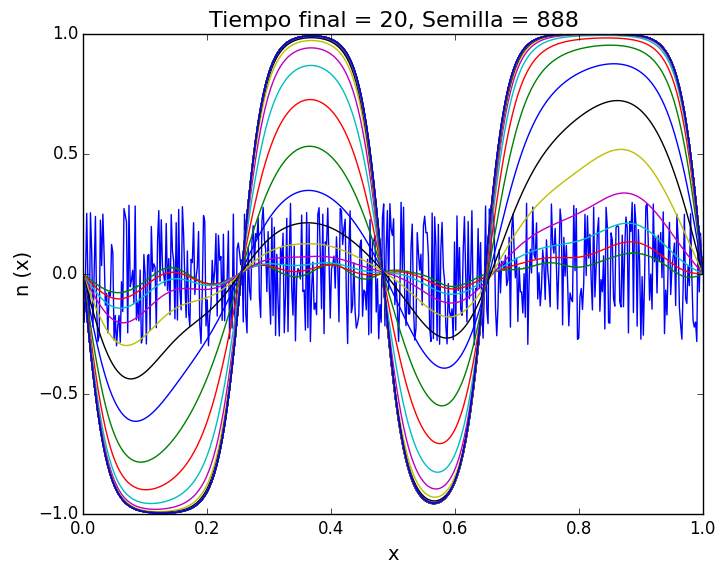


Figura 6: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Newell-Whitehead-Segel

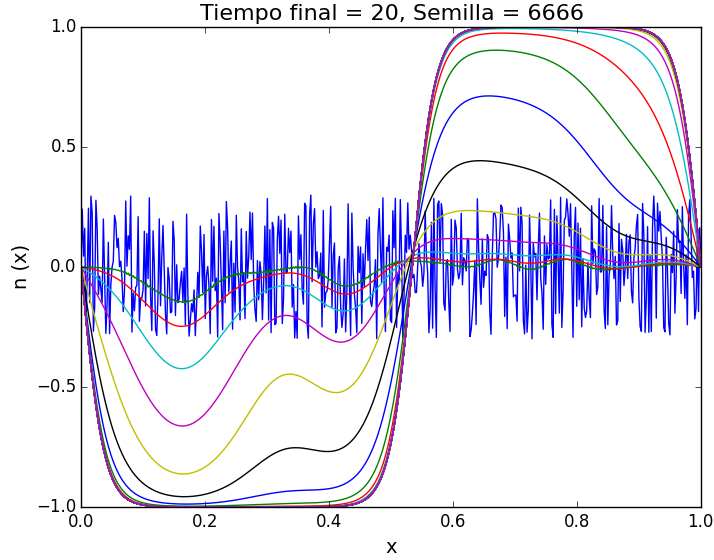


Figura 7: Curvas de $n(x,t)$, ecuación de Newell-Whitehead-Segel

4. Conclusiones

En los gráficos correspondientes a la ecuación de Fisher-KPP, se ve (debido al corte de tiempo producido entre los dos gráficos) que a medida de que avanza el tiempo, $n(x)$ se va trasladando hacia la derecha. Por ello es posible notar que n converge al valor de 1 y de 0. Esto tiene sentido, pues se sabe que esta función converge a dichos puntos, en donde $n = 1$ es un punto de equilibrio estable y $n = 0$ es inestable.

Por otro lado, de la ecuación de Newell-Whitehead-Segel, en las Figuras 3 y 4 se puede notar que $n(x)$ para la primera iteración corresponde a la línea azul que es visible en el fondo de las figuras, y a medida de que pasa el tiempo, $n(x)$ se traslada hacia los bordes de arriba. Esto es debido a que los puntos de equilibrio del sistema corresponden a $n = 0$, $n = 1$ y $n = -1$, en donde el primero corresponde a un equilibrio inestable, y los últimos dos son equilibrios estables.

Con respecto a la variación de las semillas se concluye que los valores obtenidos son los esperados, debido a que al ser la resolución de una ecuación de derivadas parciales, se sabe que cambiando las condiciones iniciales del problema se va a conseguir una solución distinta a la original (pero que conserva sus características, como la convergencia, debido a la forma de la ecuación).