Informe Tarea 6 - Métodos Numéricos: "Evolución poblacional de una especie y procesos de convección y combustión"

Ignacio Andrés Sánchez Barraza
Rut: 18933808-2

November 4, 2015

1 Introducción

- En este informe se buscará resolver las ecuaciones diferenciales parciales de Fisher-KPP (FKPP) y Newell-Whitehead-Segel (NWS) mediante el uso del método numérico de Crank-Nicolson y Euler explícito, esto con el fin de estudiar las soluciones y comportamientos de problemas que son descritos por estas EDP's.
  Para comenzar, la ecuación FKPP que corresponde a:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

describe el comportamiento de una especie animal en cuanto a migración y evolución poblacional de la misma. Consta de dos partes constituyentes que vale la pena destacar. La primera de ellas es el término difusivo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

que realiza la función de dispersar, por decirlo a grosso modo, la solución

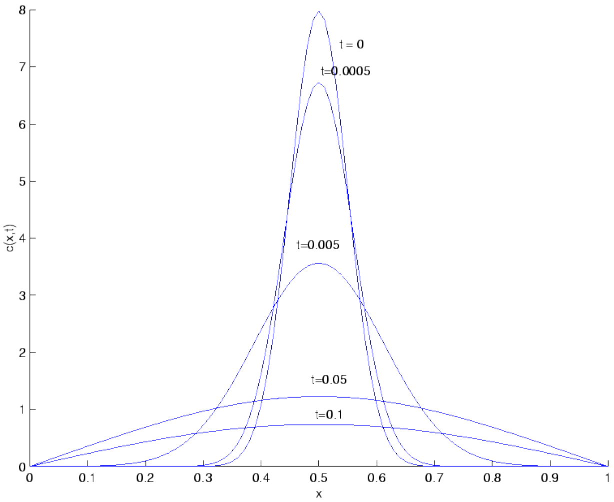

Figure 1: Ejemplo de difusión, donde se observa que mientras pasa el tiempo la amplitud de la curva disminuye y la curva o solución se "dispersa".

y el término reactivo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mu n - \mu n^2$$

que realiza la función de "trasladar" la solución de una posición a otra en un cierto intervalo de tiempo.

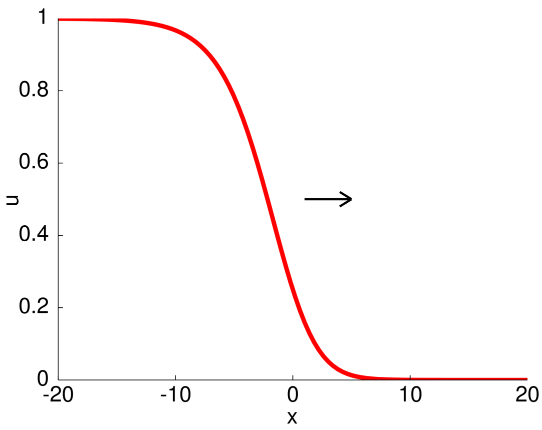

Figure 2: Ejemplo de reacción, donde se observa que mientras pasa el tiempo la curva o solución se desplazará en la direccion de la flecha conservando su forma pero cambiando de posición.

Dicho esto se puede notar entonces que cada uno de sus términos incide en el comportamiento como especie de una manera específica, entonces vale la pena explicar cada uno de estos:

μn: Corresponde a la tendencia que tiene la especie a crecer indefinidamente si posee los recursos para ello. Puede verse como reproducción o migración de mas integrantes de la especie a una misma posición debido a la abundancia de recursos.

$-\mu n^2$: Corresponde a las consecuencias de la competencia dentro de la especie por los recursos, que se nota mas aún cuando la densidad de la población es muy alta, debido a que la competencia aumenta al aumentar el número de inidividuos de dicha población, lo que generará una disminución en la densidad de la misma debido al aumento en el consumo de los recursos y a el deceso de parte de la población por escasez del mismo.

$\gamma\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$: Corresponde a la tendencia de la especie a dispersarse para encontrar recursos.

- Ahora para el caso de la ecuacion de NWS, se tiene que esta descrita por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

se tiene análogamente dos partes que se pueden distinguir a simple vista como en el caso de la ecuación FKPP, es decir, un término difusivo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

y uno reactivo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mu(n - n^3))$$

que cumplen con las mismas funciones que se describieron anteriormente pero de manera distinta en el término reactivo ya que este posee una componente de orden 3 en la ecuacion de NWS. Pero básicamente son bastante análogas.

- Ambas ecuaciones poseen constantes μ y γ que se asiganarán con los mismos valores para ambas ecuaciones.

- Para poder resolver estas ecuaciones diferenciales parciales se necesitarán de métodos numéricos que puedan resolver ese tipo de problemas. Uno de ellos es el método de Euler explicito, que ya se vió en tareas anteriores, y que será útil para resolver la parte de reacción de ambas ecuaciones. Y otro es el método de Crank-Nicolson. Este método de análisis numérico consiste en usar el método de diferencias finitas usado principalmente para resolver problemas de difusión como la ecuación de calor y similares. Su uso para este tipo de problemas se debe a que es un método que para dichos

problemas entrega soluciones muy estables, aunque puede contener errores como todo método debido a las discretizaciones y otros factores. Es un método usado principalmente en vez de los de Euler explícito e implícito cuando los intervalos de tiempo y espacio son relativamente pequeños, ya que para intervalos más grandes conviene usar los métodos de Euler.
A continuación se dara mas información del método explícitamente y su uso para obtner las soluciones de las ecuaciones de FKPP y NWS.

2 Procedmiento

- El procedimiento para la ecuacion FKPP y NWS es analogo ya que solo difieren en la forma del término reactivo, pero se sigue el mismo método para obtener sus soluciones.
  Primero que todo se realiza un cambio de variables para eliminar las constantes que aparecen en las ecuaciones μ y γ, esto para hacer más fácil el código y los pasos temporales y espaciale a usar, entonces:

  $$t^* = \mu t \ \text{ y } \ x^* = x\sqrt{\tfrac{\mu}{\gamma}}$$

  con lo que las ecuaciones anteriormente nombradas se reescriben como:

  $$\begin{aligned} \tfrac{\partial n}{\partial t^*} &= \tfrac{\partial^2 n}{\partial x^{*2}} + n - n^2 \text{ (FKPP)} \\ \tfrac{\partial n}{\partial t^*} &= \tfrac{\partial^2 n}{\partial x^{*2}} + n - n^3 \text{ (NWS)} \end{aligned}$$

  Con esto entonces se procede a discretizar el espacio en 500 puntos y 499 intervalos como se pide en el enunciado, empleando un paso espacial $dx = 1/499 \approx 0.002$. Para el tiempo se integrará hasta un tiempo t=4 con un paso temporal $dt = \frac{dx^2}{4}$ que garantiza la estabilidad de las soluciones.
  Ahora definimos un a clase *Fisher* que tome como objeto uno con argumentos de condiciones iniciales, de borde y pasos temporal y espacial. Con esto entonces, primero fijamos las condiciones iniciales para ambos problemas (FKPP y NWS) y las condiciones de borde para los mismos como:

  $$\begin{aligned} n(t,0) &= 1 \\ n(t,1) &= 0 \\ n(0,x) &= e^{-x^2/0.1} \end{aligned}$$

  para el problema de la ecuacion FKPP y

  $$\begin{aligned} n(t,0) &= 0 \\ n(t,1) &= 0 \\ n(0,x) &= \texttt{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)} \end{aligned}$$

  para el problema de la ecuación NWS.
  Ahora que se tienen las condiciones de borde e iniciales, se procede a definir el esqueleto del código que consta del método de Crank-Nicolson y el método de Euler explícito. Para ello definimos una función dentro de la clase *avanza_CN* que avanza en un tiempo dt la solución para cada problema. Esta función ejecuta el método de Crank-Nicolson y el de Euler explícito (este último implícitamente). Primero como el método de Crank-Nicolson se usa para resolver la parte difusiva de las ecuaciones utilizamos la forma:

  $$\tfrac{{u_i}^{k+1} - u_i}{dt} = \tfrac{1}{2}({F_i}^{k+1}(u, x, t, \tfrac{\partial u}{\partial x}, \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + {F_i}^{k}(u, x, t, \tfrac{\partial u}{\partial x}, \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2})) \ (1)$$

  Donde u es una solución cualquiera (para los problemas que se resolverán $u(x,t) = n(x,t)$), ${u_i}^{k+1}$ es el término i-ésimo de la solución siguiente a ${u_i}^k$ luego de un tiempo dt y ${F_i}^{k+1}$ el lado derecho de la ecuación de difusión mostrada anteriormente para la solución ${u_i}^{k+1}$ y análogamente ${F_i}^k$ para la solución ${u_i}^k$.
  Ahora como se vió en clases definimos las funciones *crea_d* y *crea_alpha_y_beta* que crean los vectores representantes de las matrices tridiagonales en el sistema de ecuaciones definido por (1):

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{n_x-1} & a_{n_x-1} & b_{n_x-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n_x} & a_{n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ u_3^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n_x-1}^{k+1} \\ u_{n_x}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n_x-1} \\ d_{n_x} \end{bmatrix}$$

Figure 3:

y para el método de Euler explicito, no definimos una nueva función externa que determine la solución para la parte reactiva, sino que incluimos dicha solución en la creación del vector d sumándosela al vector d que se había creado para la solución difusiva, y con esto se obtiene la solución del problema completo al iterar en los distintos intervalos temporales, esto mediante las funciones mencionadas anteriormente para definir el sistema de ecuaciones de la figura 3.

- Entonces teniendo estos resultados solo basta graficar para los distintos intervalos de tiempo las soluciones para ambos métodos, teniendo cuidado en como se definieron las condiciones iniciales, siendo en un caso (FKPP) una condición inicial exponencial sobre los puntos del espacio y en otro (NWS) una distribución al azar con el módulo $np.random.uniform$, para asi poder partir integrando a partir de esas condiciones iniciales manteniendo siempre las mismas condiciones de borde.

3 Resultados

- A partir del proceder anterior se obtuvieron los siguientes gráficos para el problema 1 y 2, mostrando los útlimos 3 gráficos distintas semillas para la condición inicial de la ecuación NWs a resolver.

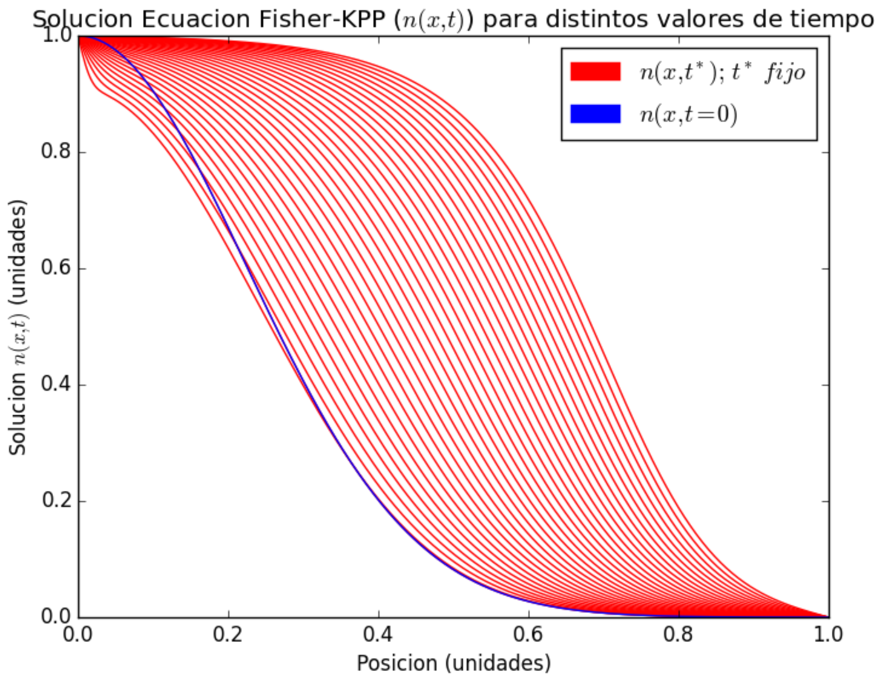

Figure 4: Gráfico que muestra las soluciones a tiempos fijos de la ecuación de FKPP, donde se ve que las curvas se dispersan y avanzan a la derecha a medida que el tiempo avanza. En color azul se muestra la condición inicial del sistema que evoluciona en el tiempo.

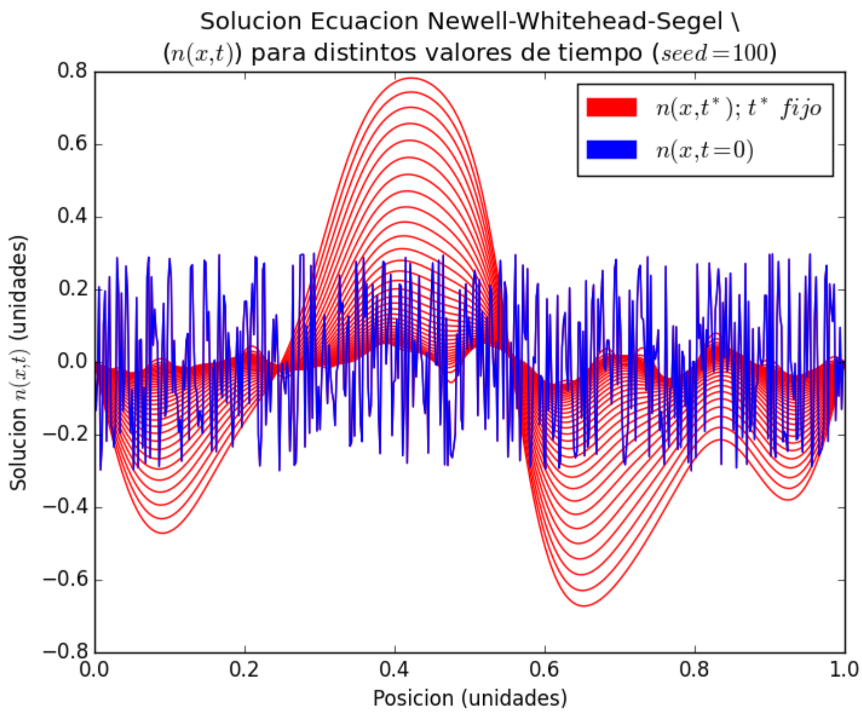

Figure 5: Gráfico que muestra las soluciones a tiempos fijos, en color rojo y con una semilla=100, de la ecuación de NWS, donde se ve que las curvas se dispersan a medida que avanza el tiempo. En color azul se ve la condición inicial que evoluciona en el tiempo.

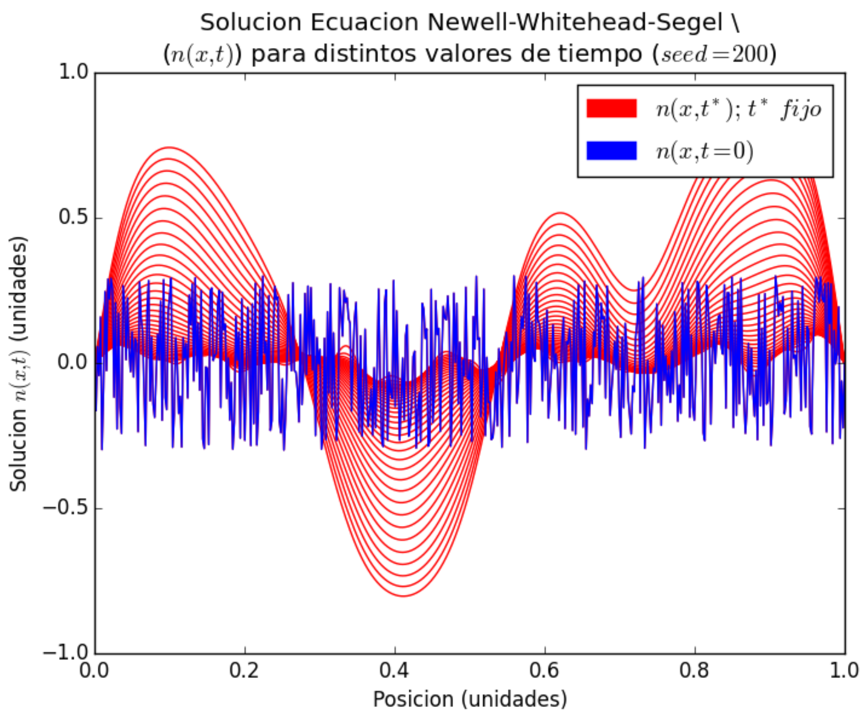

Figure 6: Gráfico que muestra las soluciones a tiempos fijos, en color rojo y con una semilla=200, de la ecuación de NWS, donde se ve que las curvas se dispersan a medida que avanza el tiempo. En color azul se ve la condición inicial que evoluciona en el tiempo.

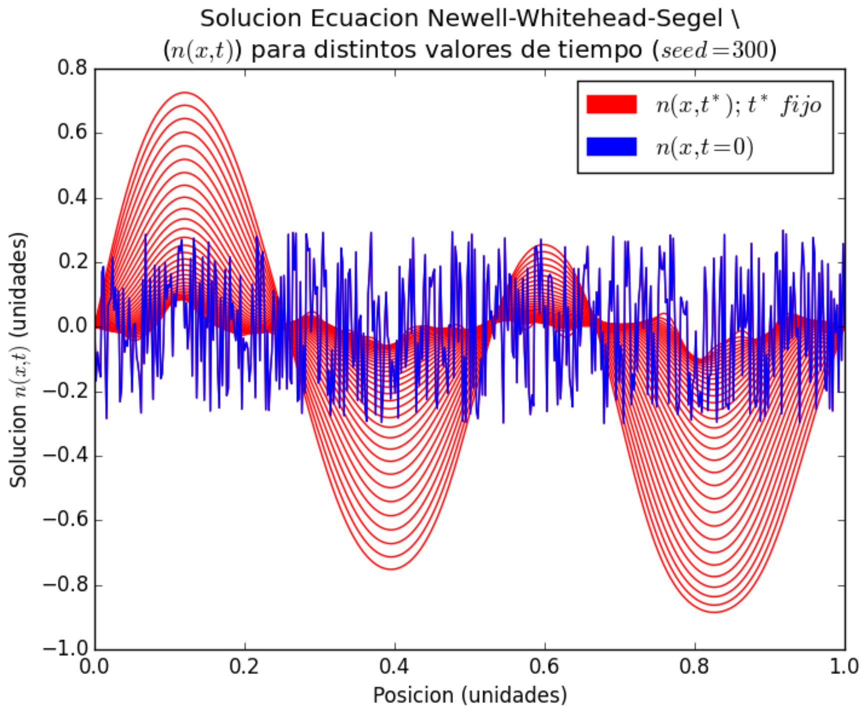

Figure 7: Gráfico que muestra las soluciones a tiempos fijos, en color rojo y con una semilla=300, de la ecuación de NWS, donde se ve que las curvas se dispersan a medida que avanza el tiempo. En color azul se ve la condición inicial que evoluciona en el tiempo.

4 Conclusiones

- Como primera conclusión a partir de esta experiencia se puede destacar que para el caso de FKPP se puede ver que la solución converge a la situación estable en $n(x,t) = 1$, partiendo desde $x = 0$ y desplazándose a la derecha como se esperaba por la acción del término reactivo, mostrando una especie de onda viajera que se desplaza hacia la derecha "difundiendo" población hacia el punto $x = 1$, ademas de dispersar levemente la población en los puntos anteriores. Esto se puede interpretar a nivel poblacional como una migración de individuos dentro de la población por algún motivo en un cierto periodo de tiempo.
  También se puede ver que la solución de FKPP mantiene relativamente bn su forma con respecto a las condiciones iniciales, aunque se ve una pequeña perturbación antes de dicha condición inicial que es probable que se deba a algún error sistemático en la creación del código o en la asignación de algún valor a alguna variable, pero que no entorpece mayormente la estabilidad a la que tiene la solución.

- En el caso de la ecuación de NWS se ve que la solución depende en gran medida de la condición inicial, debido a que al ser aleatoria esta solución puede moverse hacia la derecha o izquierda (puntos de estabilidad $n(x,t) = \pm 1$) dependiendo de como son dichas condiciones iniciales. También se puede ver que en ciertos puntos las densidades de población se acercan a sus puntos de estabilidad en distintas partes del espacio de manera estable y esperable, debido a que muestran como evoluciona la población en distintas partes del espacio (aleatorias) a medida que pasa el tiempo y debería de esperarse que en lugares con mejores recursos la densidad de población aumente y en lugares con menores recursos disminuya en ambos casos tendiendo a la estabilidad donde densidad de población y cantidad de recursos se equilibran.

- Como conclusión final se puede decir que estos resultados eran esperables debido a la naturaleza de las poblaciones y su evolución dependiente a distintos factores, aunque es el caso de NWS representaría de mejor manera una población de una especie que se encuentra segregada en distintas posiciones dentro del espacio[1].

[1] Es tarde y teníamos 3 tareas...mercy