

Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Benjamín Oliva

03 de Noviembre, 2015

1 Introducción

La siguiente experiencia tiene como objetivo estudiar el método de Crank Nicolson para la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Específicamente se estudiarán las soluciones de la ecuación de Fisher-KPP, dada por

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \quad (1)$$

con $\mu = 1.5$, $\gamma = 0.001$ y condiciones de borde

$$\begin{aligned} n(t, 0) &= 1 \\ n(t, 1) &= 0 \\ n(0, x) &= e^{-x^2/0.1} \end{aligned}$$

para modelar el comportamiento de una especie animal tal que μn corresponde a la tendencia de la especie a crecer indefinidamente, $-\mu n^2$ corresponde a la disminución de la densidad producto de la competencia por los recursos, y $\gamma \nabla n$ es la tendencia de la especie a dispersarse para buscar mas recursos.

Y para la ecuación de Newell-Whitehead-Segel (que describe fenómenos de convección y combustión entre otros), dada por

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3) \quad (2)$$

con $\mu = 1.5$, $\gamma = 0.001$ y condiciones de borde

$$\begin{aligned} n(t, 0) &= 0 \\ n(t, 1) &= 0 \\ n(0, x) &= \text{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)} \end{aligned}$$

donde `np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)` corresponde a una lista con valores aleatorios.

2 Pregunta 1

En esta parte se pide resolver numéricamente la EDP dada por la ecuación 1, utilizando el método de Crank-Nicolson para la parte de difusión ($\gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$) y el método de Euler explícito para la parte de reacción ($\mu n - \mu n^2$) (detalles en el archivo *codigo.py*).

2.1 Procedimiento

Se utilizó el método de Crank-Nicolson a partir de la formula vista en clases, dada por

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{h^2} \quad (3)$$

a la cual se le debe agregar el término $\mu(n - n^2)$ que discretizado queda de la forma $\mu(n_j^n - n_j^n)n_j^n$. Luego, si aplicamos esta discretización a la fórmula de Crank Nicolson y dejamos en un lado los términos T_j^{n+1} (por determinar) y al otro lado los términos T_j^n (conocidos) obtenemos la siguiente ecuación

$$T_j^{n+1} - r(T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) = T_j^n(1 + \epsilon\mu(1 - T_j^n - 2r) + T_{j+1}^n r + T_{j-1}^n r) \quad (4)$$

de la cual la parte de la derecha es conocida y la parte de la izquierda es la parte a determinar numericamente. A la parte de la derecha se le llamó b y es calculada con la función *calcula_b* en el archivo *codigo.py*.

2.2 Resultados

Se obtuvo el grafico correspondiente a la figura 1.

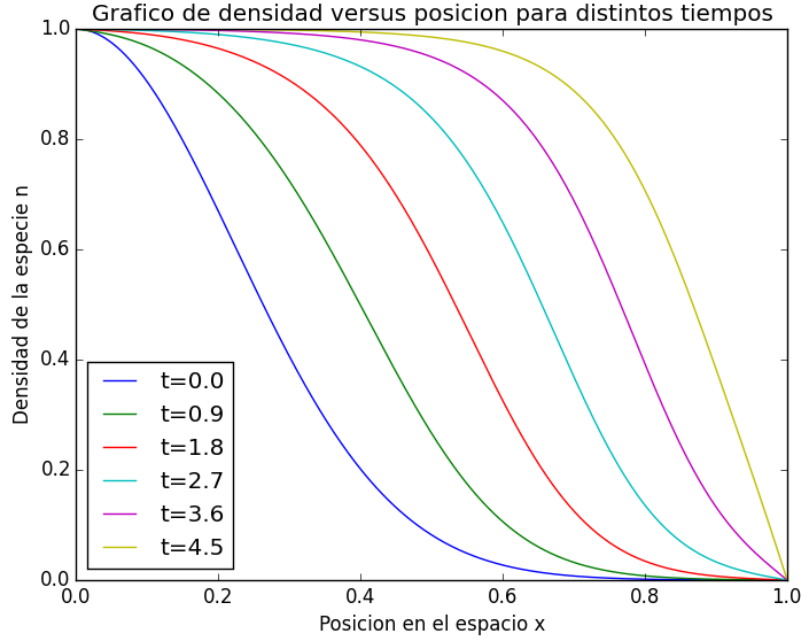


Figure 1: Gráfico de la solución n densidad de la especie versus la posición x en el espacio, para valores entre $t = 0$ y $t = 4.5$

En este gráfico se puede observar que a medida que aumenta el tiempo, la densidad de la especie se encuentra mas desplazada que para los tiempos iniciales, esta evolución viene dada por la tendencia de la especie a dispersarse para buscar recursos.

3 Pregunta 2

En esta parte se pide resolver numéricamente la EDP dada por la ecuación 2, utilizando el método de Crank-Nicolson para la parte de difusión $\gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ y el método de Euler explícito para la parte de reacción $\mu(n - n^3)$ (detalles en el archivo *codigo2.py*).

3.1 Procedimiento

Se procedió de manera similar a la pregunta 1, salvo que al agregar los términos discretizados $\mu(n - n^3)$ a $\mu T_j^n(1 + T_j^n T_{j^n})$ se obtiene

$$T_j^{n+1} - r(T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) = T_j^n(1 - 2r + \mu\epsilon(1 - T_j^n T_j^n)) + T_{j+1}^n r + T_{j-1}^n r \quad (5)$$

3.2 Resultados

Dado que una de las condiciones de borde incluía una lista de valores aleatorios, se realizaron varias pruebas, obteniéndose los gráficos de la figura 2, 3, 4 y 5.

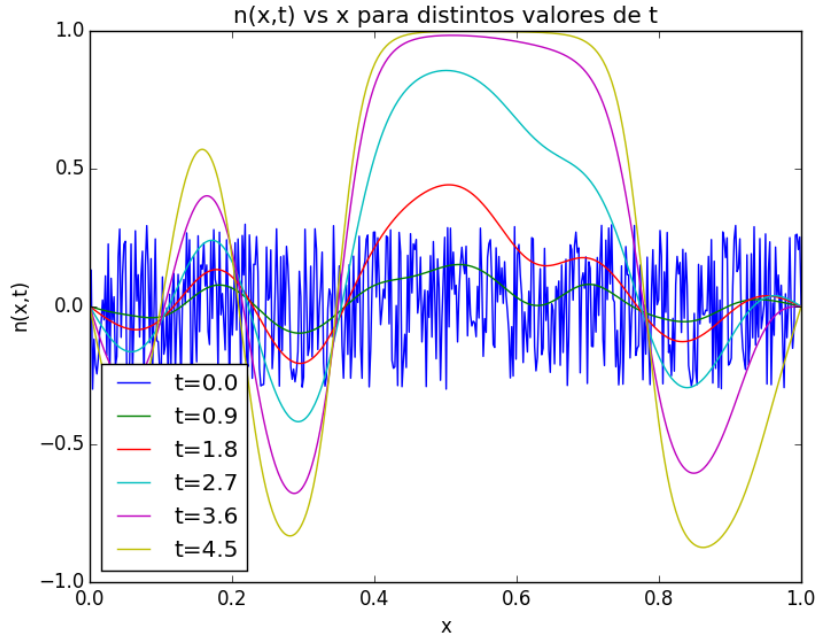


Figure 2: Gráfico de la solución n versus la posición x en el espacio, para valores entre $t = 0$ y $t = 4.5$

Para este caso, se tiene que los puntos ± 1 corresponden a puntos estables, esto ya que es ahí donde la parte reactiva se anula y queda la parte de la difusión y a medida que avanza el tiempo, la solución se acerca mas a estos puntos.

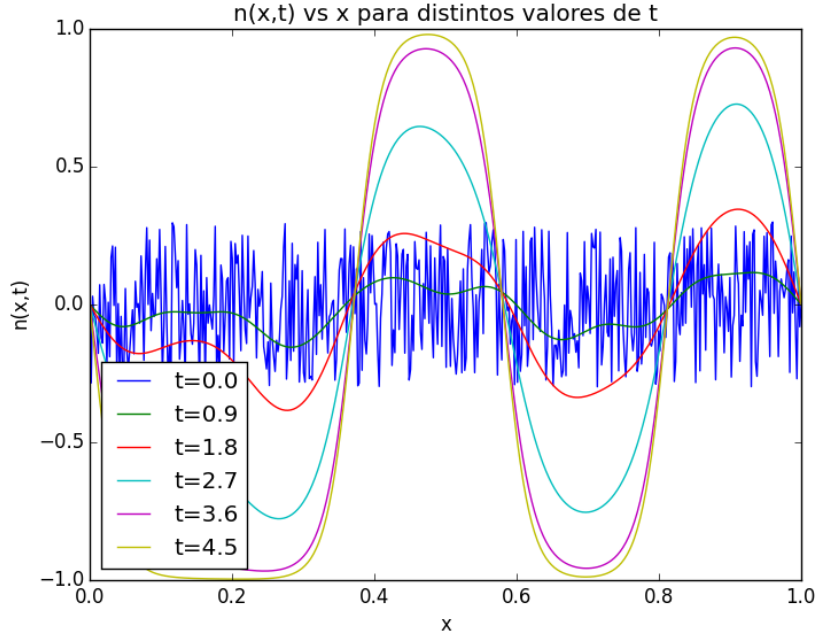


Figure 3: Gráfico de la solución n versus la posición x en el espacio, para valores entre $t = 0$ y $t = 4.5$

Es bastante clara también la diferencia entre cada gráfico, esto hace relación con el cambio en las condiciones de borde y con la sensibilidad del sistema a la variación de estas, teniendo mucha relación con la teoría del caos, la cual indica que una pequeña variación en las condiciones iniciales de un sistema puede derivar en resultados totalmente distintos.

4 Conclusiones

Para concluir de modo general sobre los dos problemas propuestos, podemos decir que el método de Crank-Nicolson es una herramienta muy eficiente al momento de resolver ecuaciones a derivadas parciales.

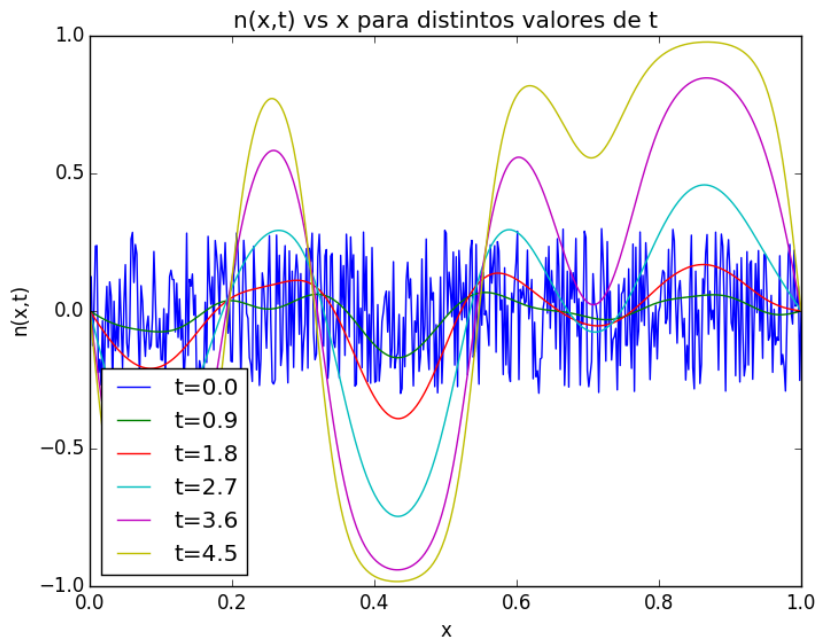


Figure 4: Gráfico de la solución n versus la posición x en el espacio, para valores entre $t = 0$ y $t = 4.5$

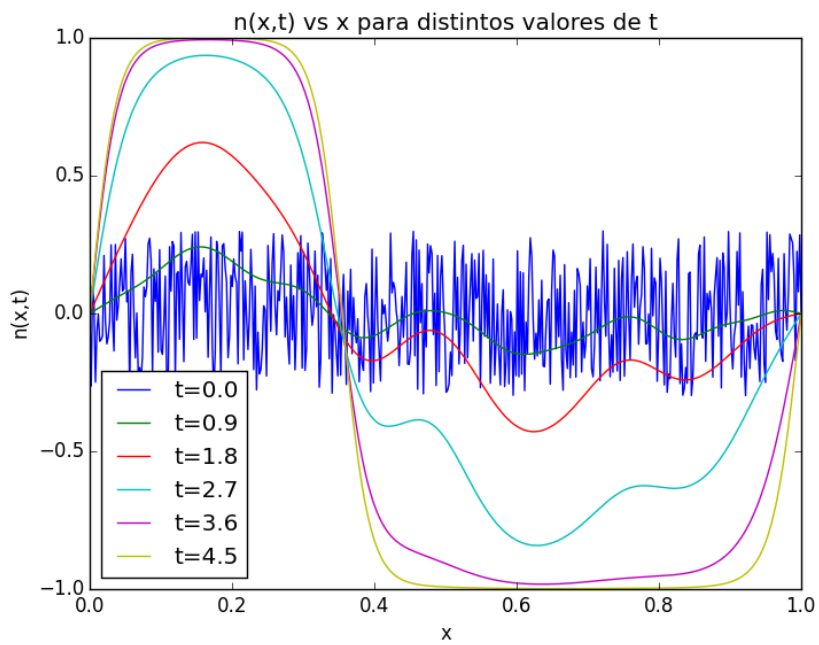


Figure 5: Gráfico de la solución n densidad de la especie versus la posición x en el espacio, para valores entre $t = 0$ y $t = 4.5$