Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Informe Tarea 6

Felipe Castillo Torrejón

4 de noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

Se busca resolver la ecuación de Fisher-KPP en 1 dimensión :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

Con $\mu = 1{,}5$ y $\gamma = 0{,}001$
Esta ecuación de reacción difusión busca modelar el comportamiento de una especie animal. Se resuelve utilizando los métodos de Crank-Nicolson para la difusión y Euler explícito para la reacción con las siguientes condiciones iniciales:

$$n(t,0) = 1$$
$$n(t,1) = 0$$
$$n(0,x) = e^{-x^2/0{,}1}$$

1.2. Procedimiento

Para resolver el problema se usa una discretización de Crank-Nicolson para la parte de difusión, y de Euler explícito para la parte de reacción. El algoritmo de solución de este método mixto se diferencia del método de Crank-Nicolson en el término b_j que está dado por:

$$b_j = rN_{j+1} + (1-2r)N_j + rN_{j-1} + \varepsilon\mu(N_j - N_j^2)$$

donde $\varepsilon = \Delta t$ y $r = \frac{\varepsilon\gamma}{2h^2}$, teniendo en cuenta esto se procede de la misma manera que el método de Crank-Nicolson.

1.3. Resultados

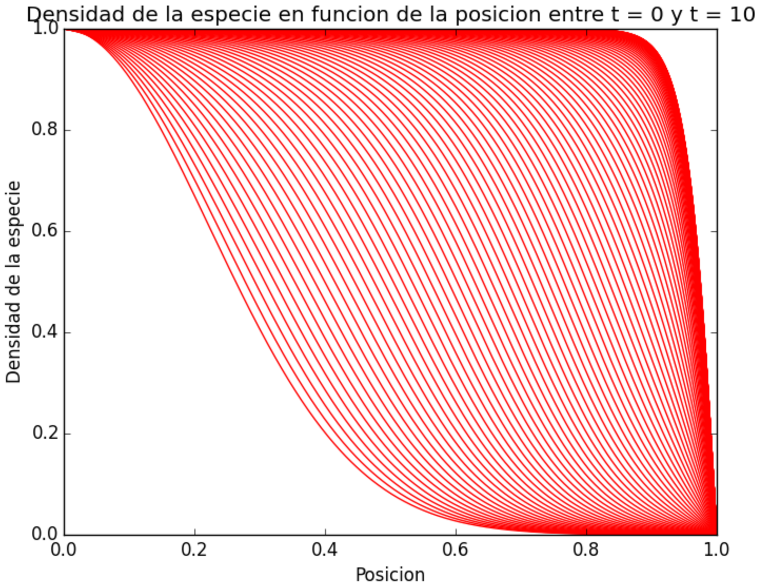

Figura 1: Densidad de la especie en función de la posición para t=0 a t=10.

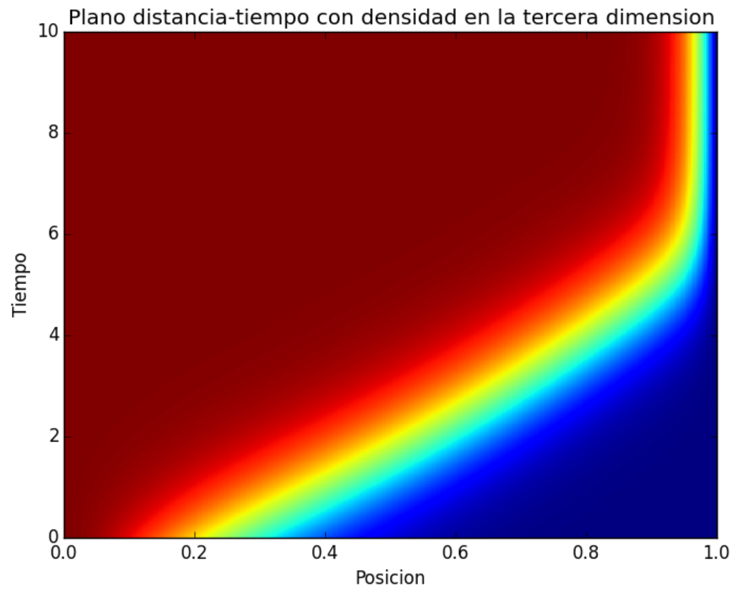

Figura 2: Plano Posición-Tiempo con $n(x,t)$ en la tercera dimensión.

1.4. Conclusiones

La soluciones encontradas son presentadas en las figuras 1 y 2, en ambas se puede apreciar que a medida que avanza en el tiempo la solución presenta el comportamiento de un pulso. En el contexto de la población de una especie, se puede interpretar que a medida que avanza el tiempo la especie se dispersa para encontrar mas recursos hasta alcanzar el equilibrio en 1. En suficiente tiempo la especie alcanza el equilibrio para todas las posiciones menos para x=1 (por condición de borde).

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

Se busca resolver la ecuación de Newell-Whitehead-Segel en 1 dimensión:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

con $\mu = 1{,}5$ y $\gamma = 0{,}001$, y con las condiciones iniciales:

$$n(t, 0) = 0$$
$$n(t, 1) = 0$$
$$n(0, x) = \texttt{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)}$$

2.2. Procedimiento

Se procede del mismo modo que en la pregunta uno, solo se diferencia en que se setea una semilla inicial para la función random y que el nuevo valor de b_j es:

$$b_j = rN_{j+1} + (1 - 2r)N_j + rN_{j-1} + \varepsilon\mu(N_j - N_j^3)$$

2.3. Resultados

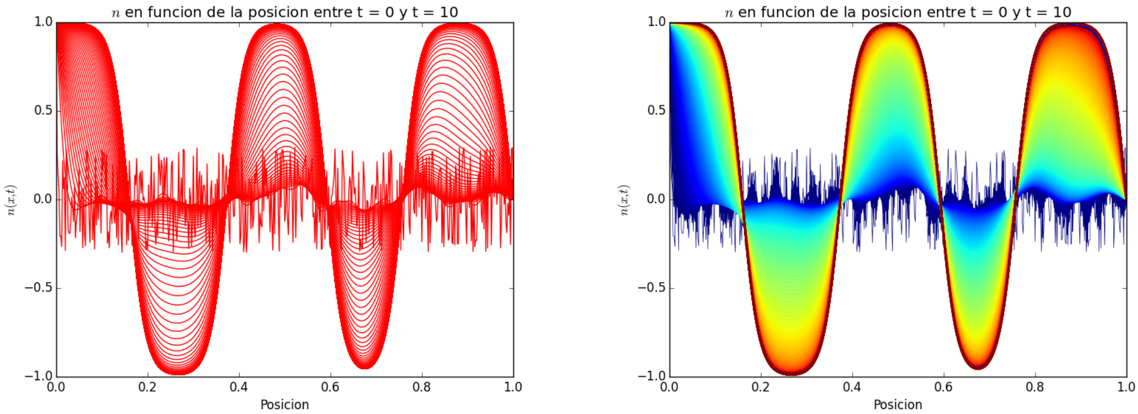

Figura 3: n en función de la posición para $t = 0$ a $t = 10$, semilla 42.

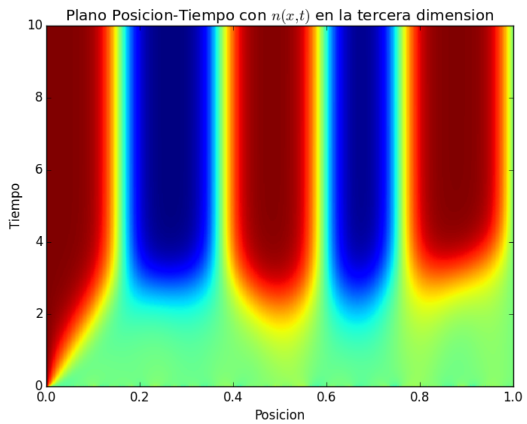

Figura 4: Plano Posición-Tiempo con $n(x, t)$ en la tercera dimensión, semilla 42.

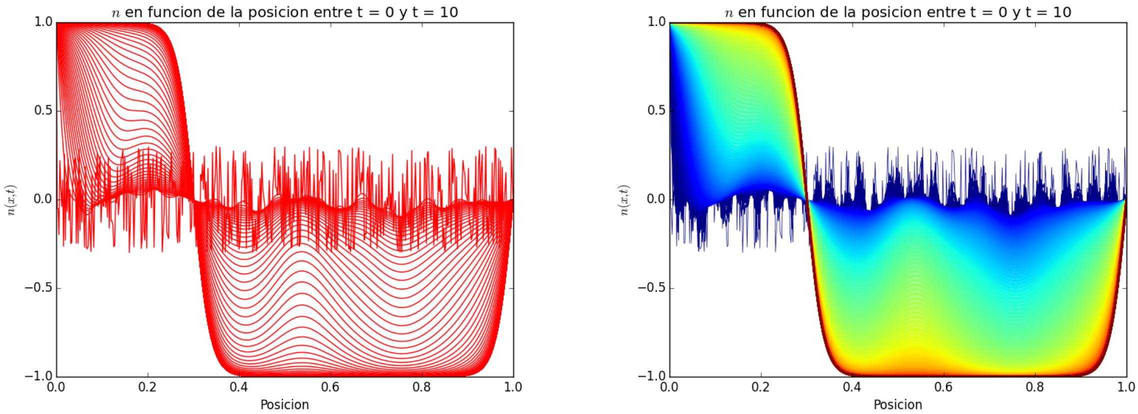

Figura 5: n en función de la posición para $t = 0$ a $t = 10$, semilla 312.

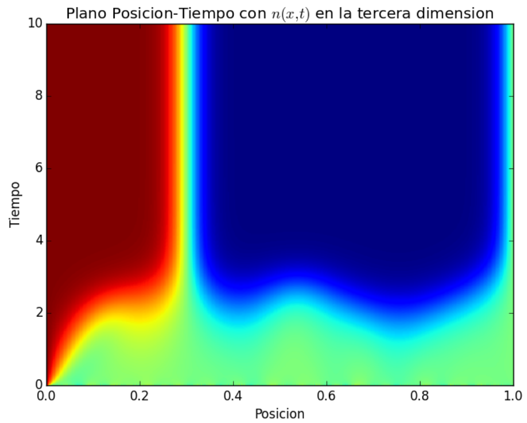

Figura 6: Plano Posición-Tiempo con $n(x, t)$ en la tercera dimensión, semilla 312.

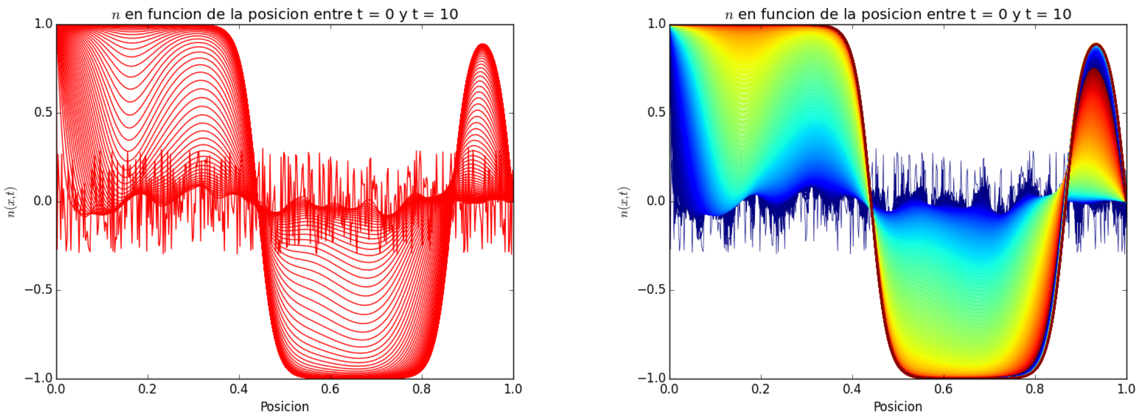

Figura 7: n en función de la posición para $t = 0$ a $t = 10$, semilla 555.

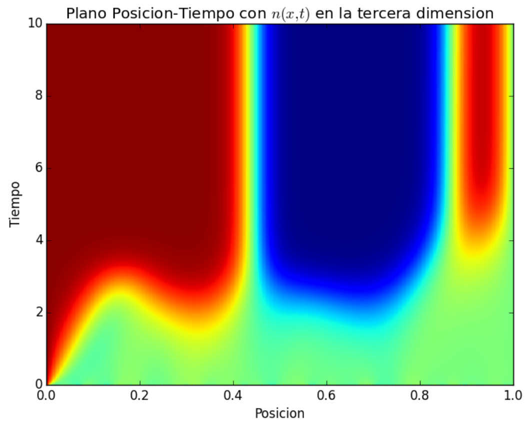

Figura 8: Plano Posición-Tiempo con $n(x, t)$ en la tercera dimensión, semilla 555.

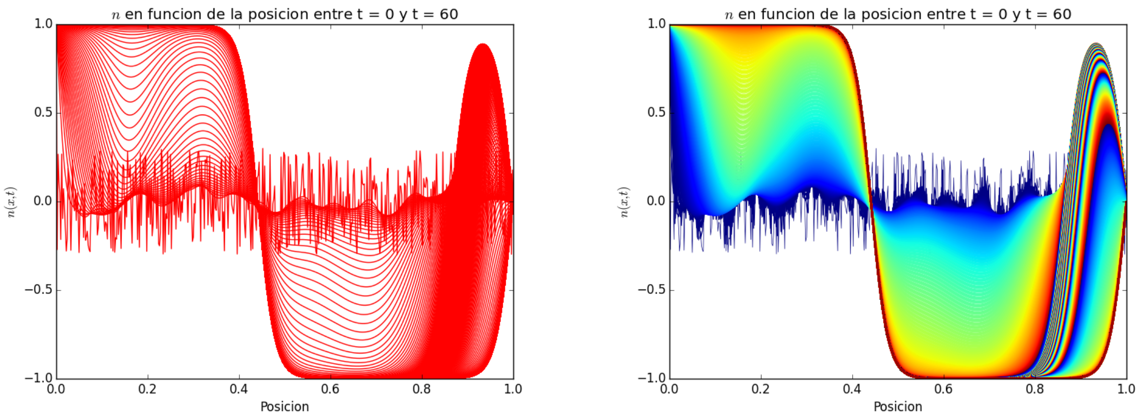

Figura 9: n en función de la posición para $t = 0$ a $t = 60$, semilla 555.

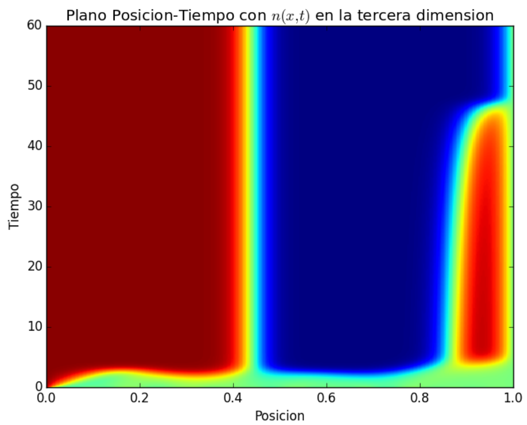

Figura 10: Plano Posición-Tiempo con $n(x, t)$ en la tercera dimensión, semilla 312.

2.4. Conclusiones

Este vez la ecuación tiene 3 puntos de equilibrio $n = 0, n = 1, n = -1$ y solo los últimos dos son estables, para estos puntos la ecuación pierde su componente de reacción por lo que tiende a un valor estable, sin embargo $n = 0$ es inestable y cualquier perturbación en el hace que se mueva hacia su punto de equilibrio mas cercano($+1$ o -1).
El comportamiento antes descrito se puede apreciar ampliamente en los distintos ejemplos presentados (figuras 3, 4, 5, 6, 7, 8) en los cuales cada perturbación tiende a un equilibrio. Cuando un grupo local en su conjunto está mas cerca de un equilibrio que del otro, tiende a aquel equlibrio quedante estable y creando que su vecindad tienda al mismo equilibrio por reacción.
Debido a este comportamiento en el cual los puntos fuera del no son estables y tarde o temprano tendrán que llegar a él, es que se crea las figuras 9 y 10, la cual tiene mayor tiempo de integración solo para apreciar el momento en el cual el conjunto completo alcanza el equilibrio. Se puede ver como un conjunto local que tendia a $n = +1$ termina por tender a $n = -1$.