

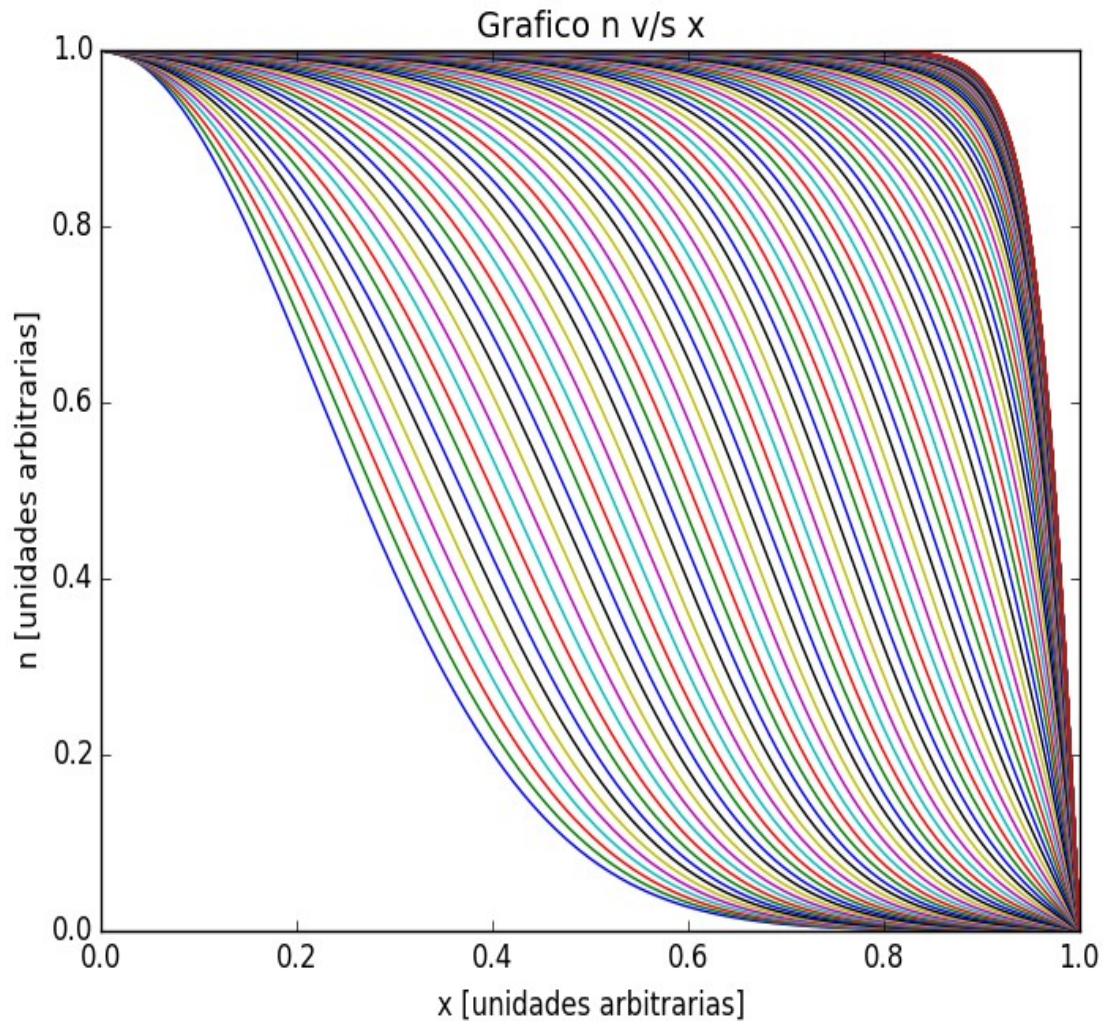
Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA CIENCIA Y LA INGENIERÍA

TAREA 6

“Buscando resolver ecuaciones en derivadas parciales aplicado a la biología”

*Benjamín Venegas Ríos
4 de noviembre de 2015*



1.1 INTRODUCCIÓN

En la primera parte de este trabajo había que resolver la ecuación de Fisher-KPP para $n=n(x,t)$, la densidad de una especie como función del tiempo y de la posición, discretizando la parte de difusión de ésta usando el método de Crank–Nicolson, y el método de Euler explícito para la parte de reacción. La ecuación se definía como:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

donde los términos de la derecha venían dados como:

$-\mu n$: la tendencia de la especie a crecer indefinidamente (suponiendo que los recursos sean infinitos).

$-\mu n^2$: Después de un tiempo, el aumento en densidad creará competencia por los recursos, lo que tenderá a disminuir la densidad.

$-\nabla^2 n$: La tendencia de la especie a dispersarse para encontrar más recursos.

y también se consideraron las condiciones :

$$n(t, 0) = 1$$

$$n(t, 1) = 0$$

$$n(0, x) = e^{-x^2/0.1}$$

La ecuación presentaba dos puntos de equilibrio $n=0$ y $n=1$, pero solo el segundo era estable. Las soluciones (como se comprobará) poseían un comportamiento que era una mezcla de difusión y un pulso viajero.

1.2 PROCEDIMIENTO

Para iniciar el proceso de integración, se ocupó la discretización de Crank-Nicolson vista en clases: (con ϕ =densidad de población)

$$(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)/\varepsilon = (\gamma/2)(\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1}/h^2 + \phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n/h^2) \\ \dots + \mu \phi_j^n - \mu \phi_j^n \phi_j^n$$

donde la última suma se debe a que se consideró la reacción con el método de Euler explícito. Además, separando los terminos del tiempo $(n+1)$ del tiempo (n) la ecuación anterior quedaba como:

$$(1) = -r \phi_{j+1}^{n+1} + (1 + 2r) \phi_j^{n+1} - r \phi_{j-1}^{n+1}$$

igual a:

$$(2) = r \phi_{j+1}^n + r \phi_{j-1}^n + \phi_j^n (\varepsilon \mu (1 - \phi_j^n) + 1 - 2r)$$

donde :

$$r = (\gamma \varepsilon)/h^2$$

Des esta forma ,lo único que cambiaba respecto de una ecuación puramente difusiva era el componente de reacción que se añadía al lado derecho, Con esto se lograba

inferir el valor de b_k dado por (2). Y gracias a este valor, se procedió a calcular el arreglo que contenía a las soluciones, donde cada fila correspondía a un tiempo específico para $n(x,t)$. Para generar esta matriz se ocupó la siguiente recurrencia:

$$\phi_k = \alpha_k \phi_{k+1} + \beta_k$$

Y dadas las condiciones de borde señaladas anteriormente junto a la condición inicial,, se pudo integrar en reversa esta ecuación , para finalmente, obtener los ϕ_k buscados, que en definitiva era la densidad de la especie para cada tiempo y posición en particular.

Una nota importante que vale la pena mencionar es que para todo el trabajo se consideraron los siguientes valores para los parámetros del problema y las discretizaciones:

$$\mu = 1.5$$

$$\gamma = 0.001$$

$$\varepsilon = dt = 0.01$$

$$t_0 = 0$$

$$t_f = 10$$

$$N^\circ \text{ pasos } x = 500$$

$$N^\circ \text{ pasos } t = 1001$$

$$x_0 = 0$$

$$x_f = 1$$

$$h = 0.002$$

1.3 RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la pregunta 1 dadas ciertas condiciones iniciales y parámetros que se fueron modificando.

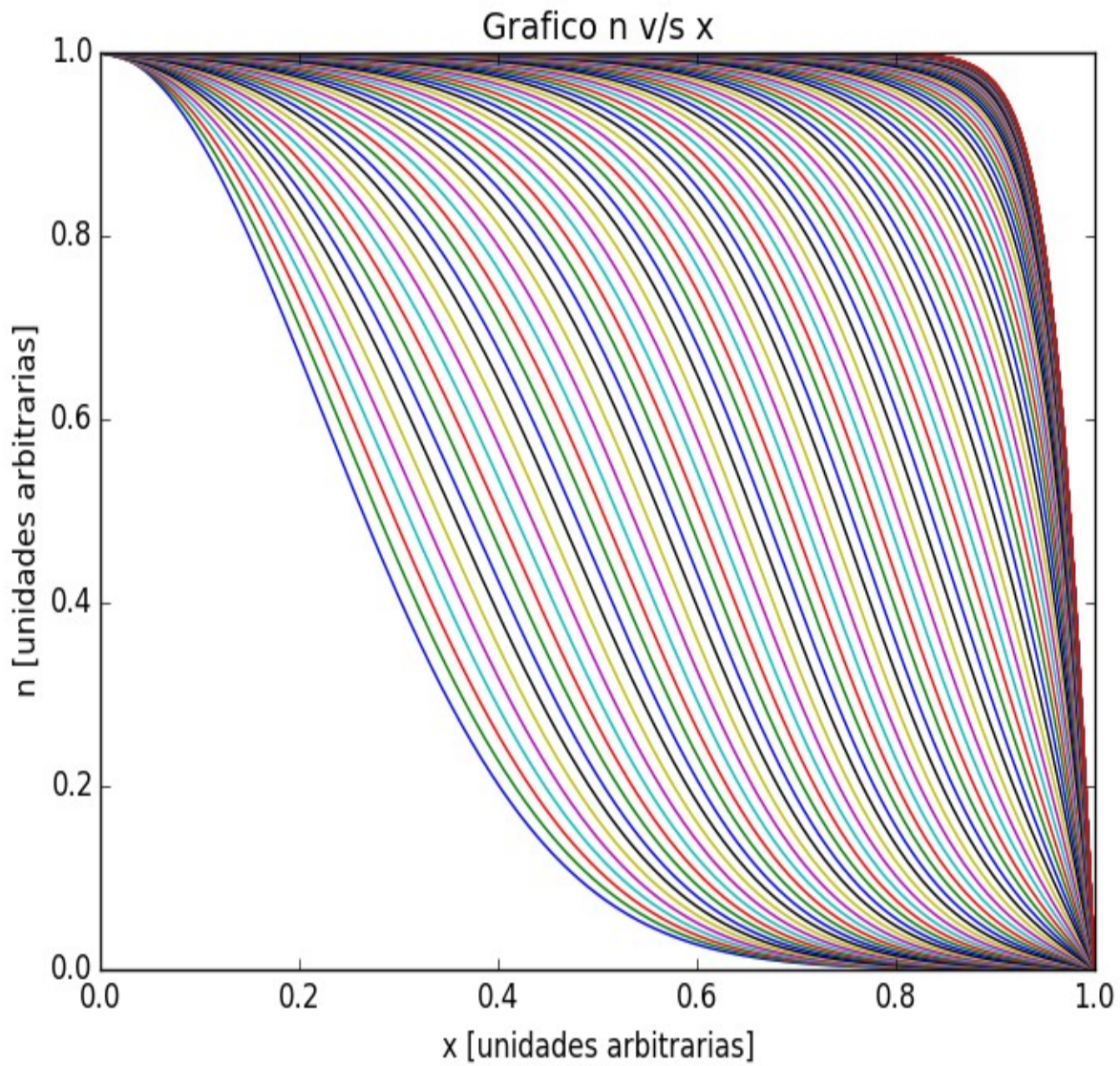


Figura1. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=1.5$, $\gamma=0.001$ y la condición inicial dada por el enunciado.

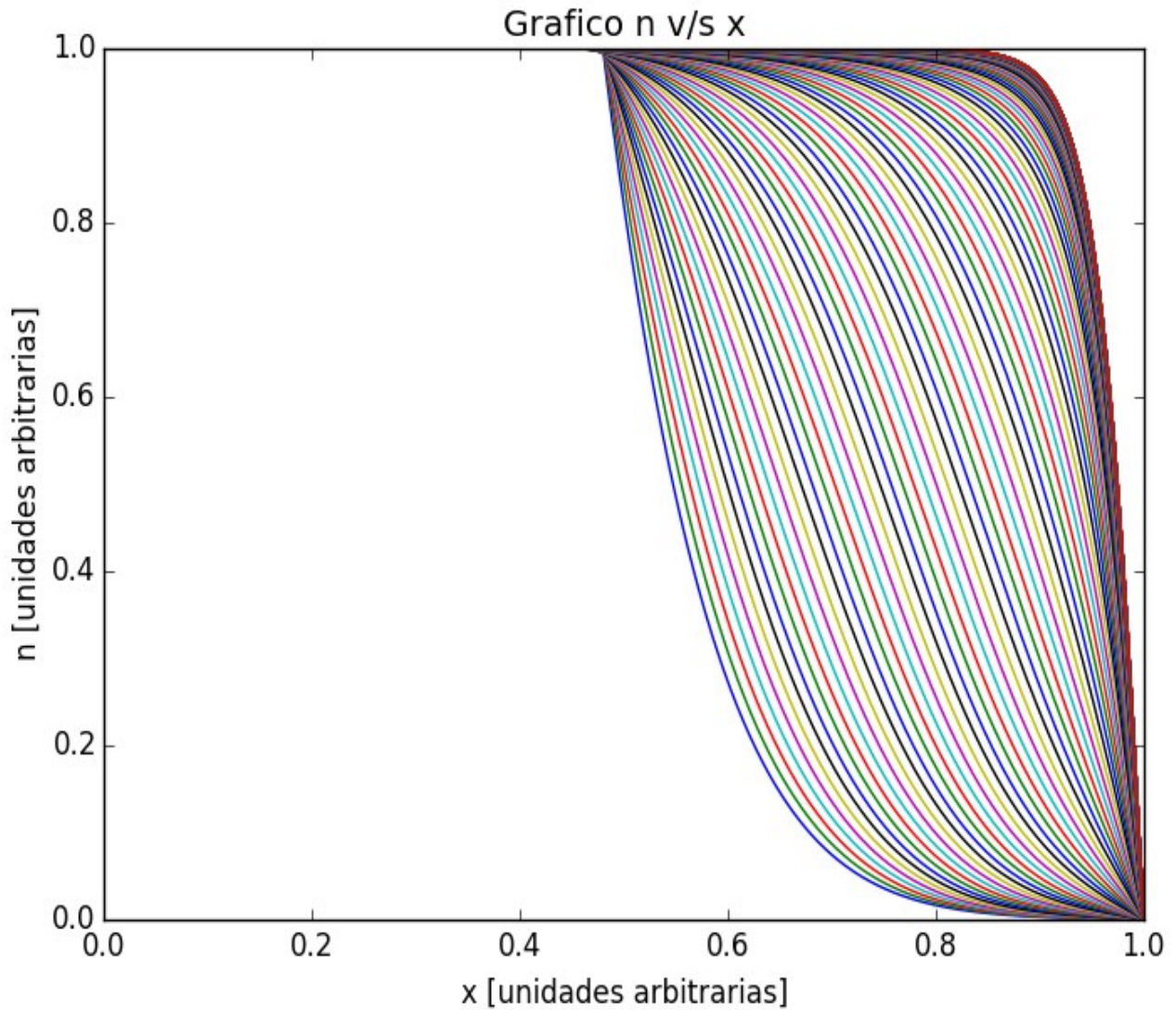


Figura2. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=1.5$, $\gamma=0.001$ y la condición inicial dada por el enunciado amplificada por un factor 10, es decir, supera el valor 1 de densidad en algunos valores de x .

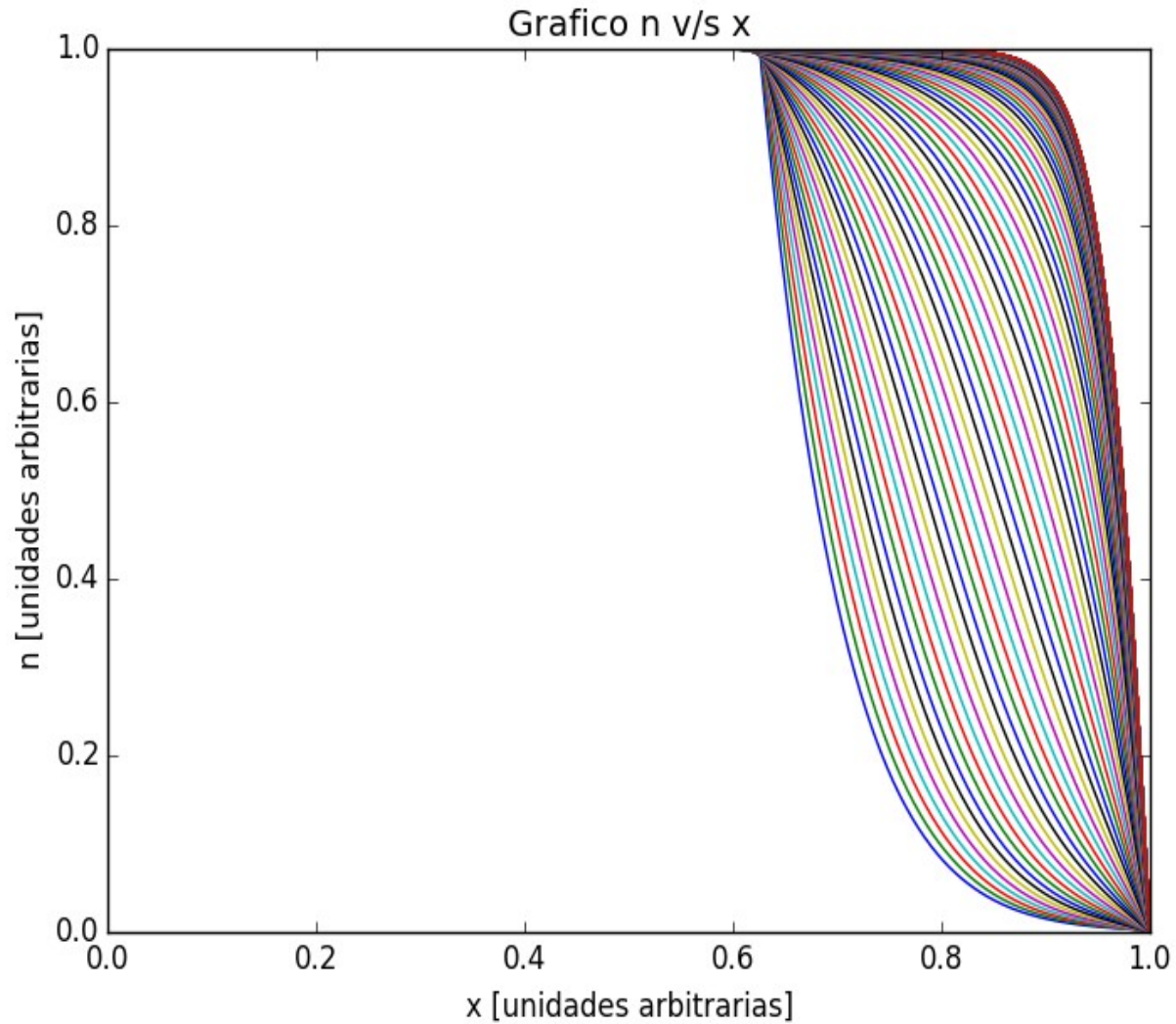


Figura3. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=1.5$, $\gamma=0.001$ y la condición inicial dada por el enunciado amplificada por un factor de 50, es decir, supera el valor de 1 durante varias posiciones.

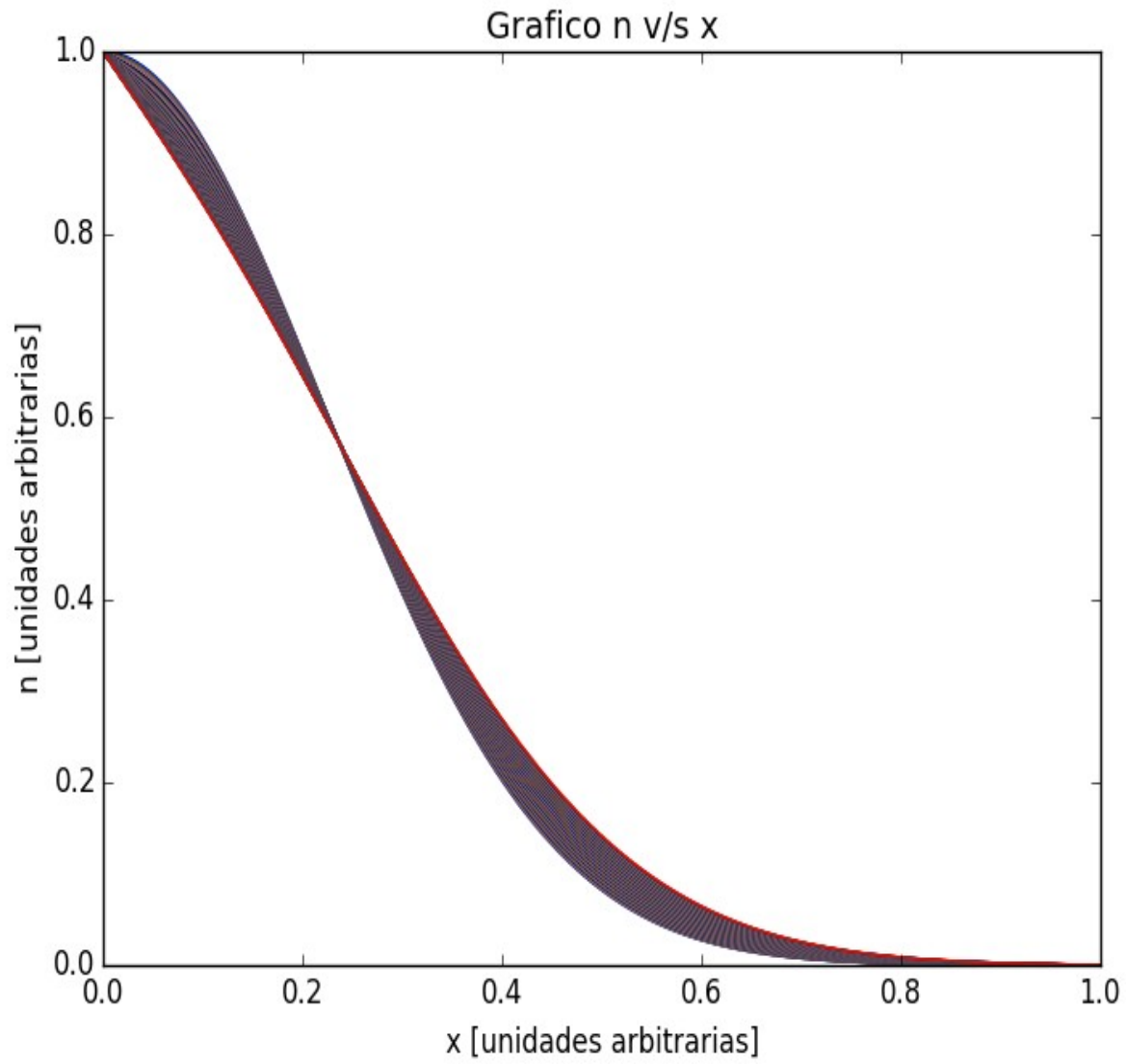


Figura4. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=0$, $\gamma=1$ y la condición inicial dada por el enunciado.

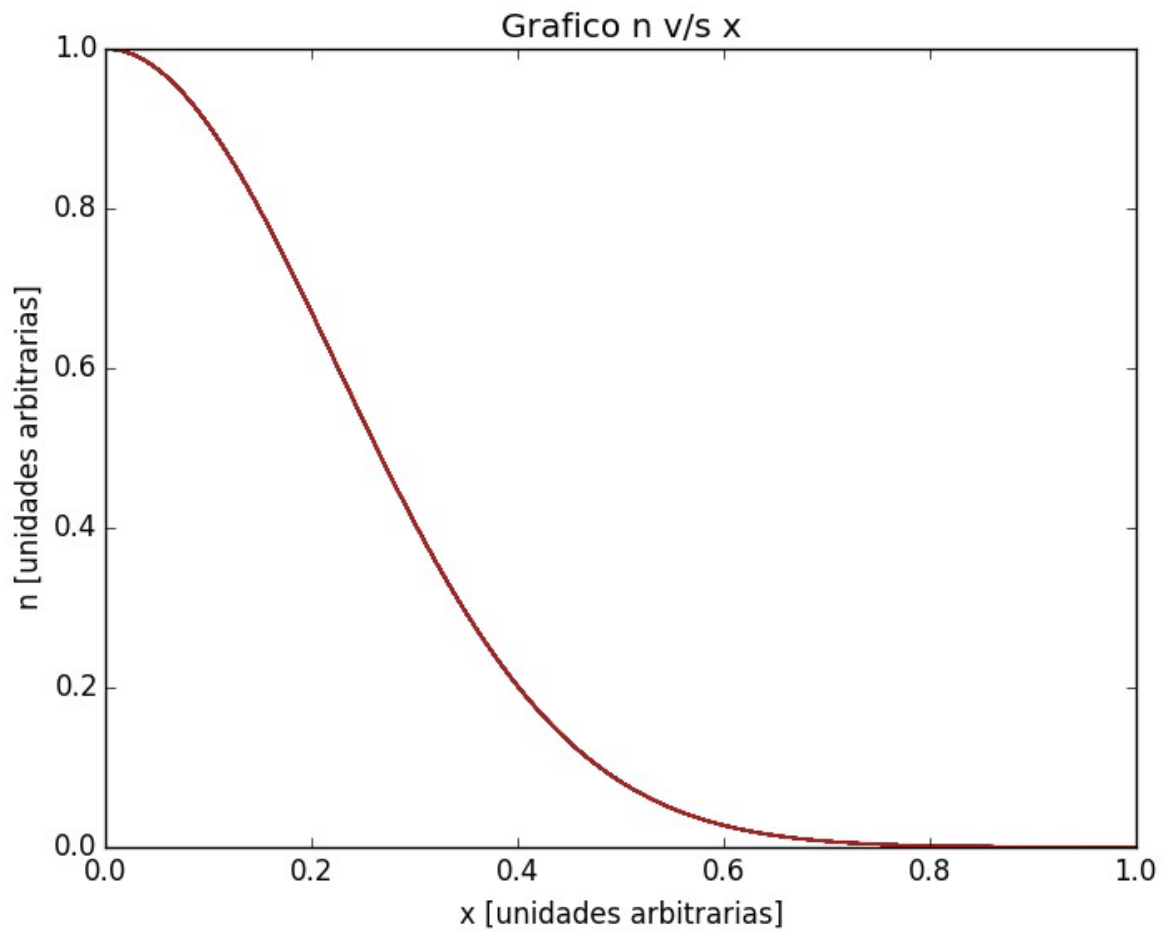


Figura5. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=\gamma=0$ y la condición inicial dada por el enunciado.

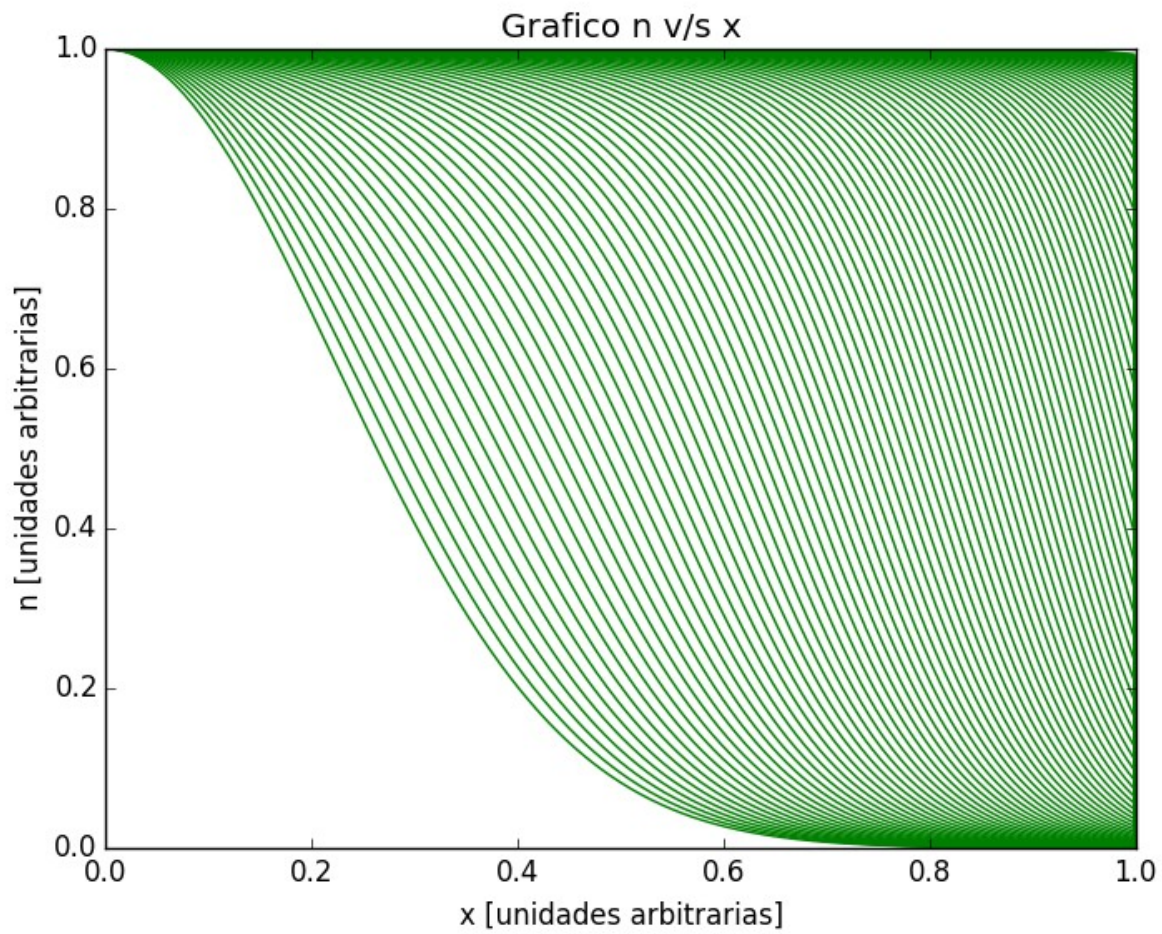


Figura6. Gráfico de densidad de la especie n v/s la posición x en unidades arbitrarias pertinentes. Se consideró $\mu=1.5$, $\gamma=0$ y la condición inicial dada por el enunciado.

1.4 CONCLUSIÓN

De los resultados obtenidos se puede inferir que la densidad tiende a 1 en el espacio a medida que aumenta en el tiempo (el tiempo aumenta en dirección vertical hacia arriba) con $\gamma=0.001$ y $\mu=1.5$ (figuras 1, 2 y 3). Esto demuestra que además $n=1$ es un equilibrio estable de la ecuación, ya que a medida que aumenta el tiempo, a la menor perturbación, las curvas tienden a ir hacia $n=1$. En cambio para $n=0$ ocurre que si bien es un equilibrio de la ecuación, es un punto inestable puesto que ante perturbaciones infinitesimales con respecto al punto las curvas no volvían a éste, es más, se desplazaban hacia $n=1$ con mayor frecuencia.

Por otro lado, al hacer cambios en las condiciones iniciales se pudo apreciar que cuando el factor era de 1, 10 y luego de 50 (figuras 1, 2 y 3 respectivamente), esto provocaba que las curvas se fuesen más lento a cero, es por esta razón, de hecho, que en la figura 2 y 3, las soluciones de $n(x,t)$ partieron en $x=0.45$ y $x=0.65$, respectivamente. Sin embargo, si bien, las curvas se juntaron más en la parte derecha, todas terminaron convergiendo a $n=1$, lo cual habla de la estabilidad de este punto. Es más, el hecho de que exista competencia por los recursos fue el responsable de que la curva haya bajado al punto de equilibrio estable $n=1$.

Y Finalmente, lo que se pudo inferir de las otras 3 figuras, es que como era de esperar para $\mu=0$ (es decir, el que se haya eliminado el término de la reacción) la curva se hacía más angosta debido a que sólo existía difusión en la ecuación, por lo que los valores de $n(x,t)$ irían oscilando en pequeñas cantidades, de ahí lo fina de la curva. Para $\mu=\gamma=0$ también se obtuvo un resultado intuitivo, que n era independiente del tiempo en el cual ocurría, es decir, las curvas se deberían hacer solapado y n haberse transformado solamente variable de x ($n(x)$), y para $\mu=1.5$ y $\gamma=0$ (figura 6) se obtuvo que como el término difusivo era despreciable, efectivamente, la solución debería haber convergido más rápido a $n=1$, que es lo que precisamente se logró inferir de la figura.

2.1 INTRODUCCIÓN

En la última parte de este trabajo había que realizar algo bastante similar a lo primero, pero con la ecuación de Newell-whitehead-Segel:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

con las condiciones:

$$n(t, 0) = 0$$

$$n(t, 1) = 0$$

$$n(0, x) = \text{np.random.uniform(low}=-0.3, \text{ high}=0.3, \text{ size}=\text{Nx})$$

La manera en la cual se enfrentó el problema fue análoga a la de la primera parte sólo que cambiando el término de reacción.

2.2 PROCEDIMIENTO

Como se mencionó recién, el unico cambio que había que hacer en este problema era redefinir b_k ya que el término reactivo era lo que variaba. Luego, habiendo hecho

esto ,continuar con el método de crank-Nicolson para resolver la ecuación dadas las condiciones iniciales random que se dieron más arriba. Además ,había que agregar la opción de semilla para así de esa manera haber hecho el resultado reproducible e inalterable cada vez que ejecutaba el script.

2.3 RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la segunda parte del trabajo:

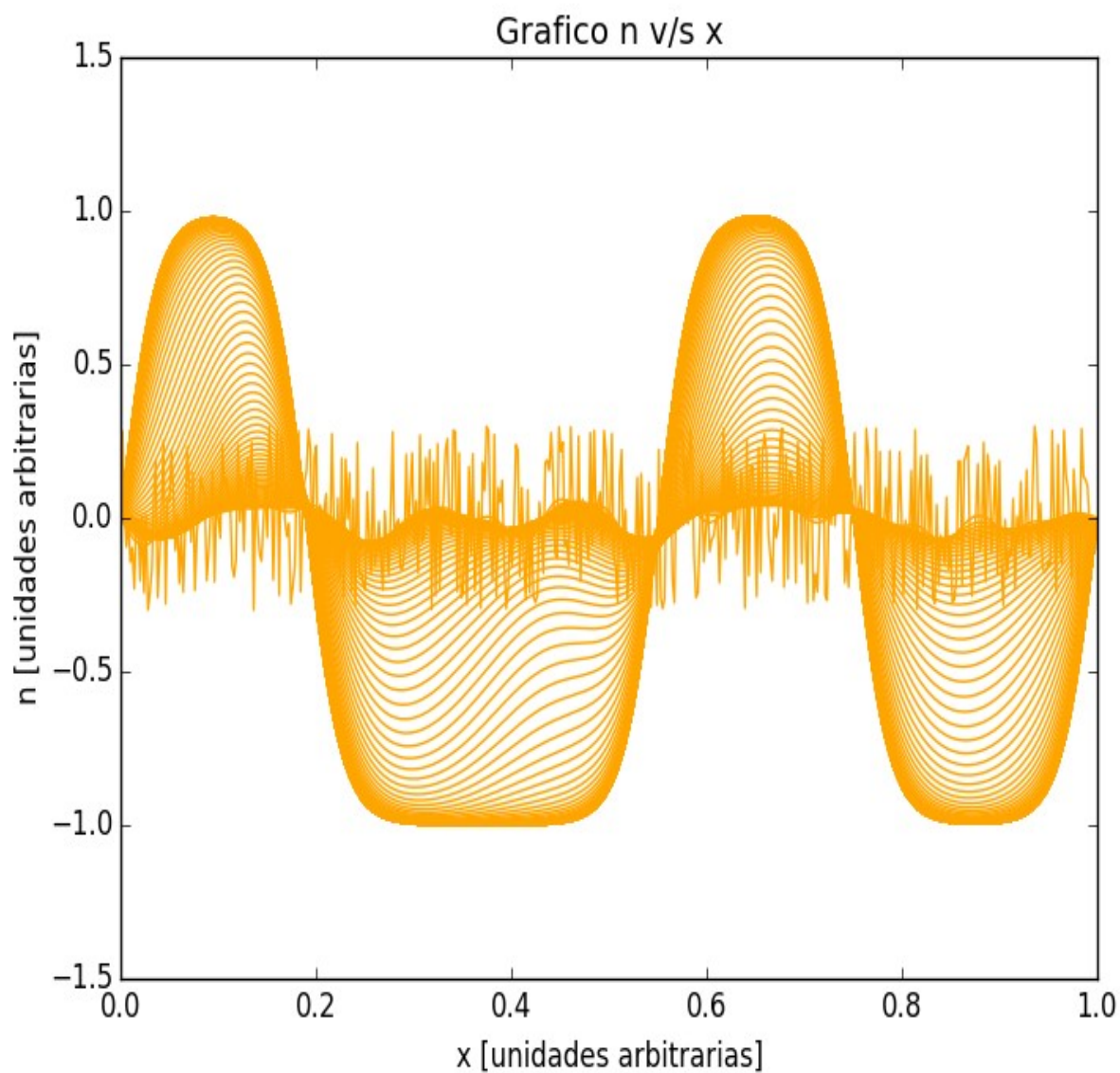


Figura7. Gráfico de densidad de especie n v/s posición con $\mu=1.5$ y $\gamma=0.001$, además de ocupar $\text{seed}=340$.

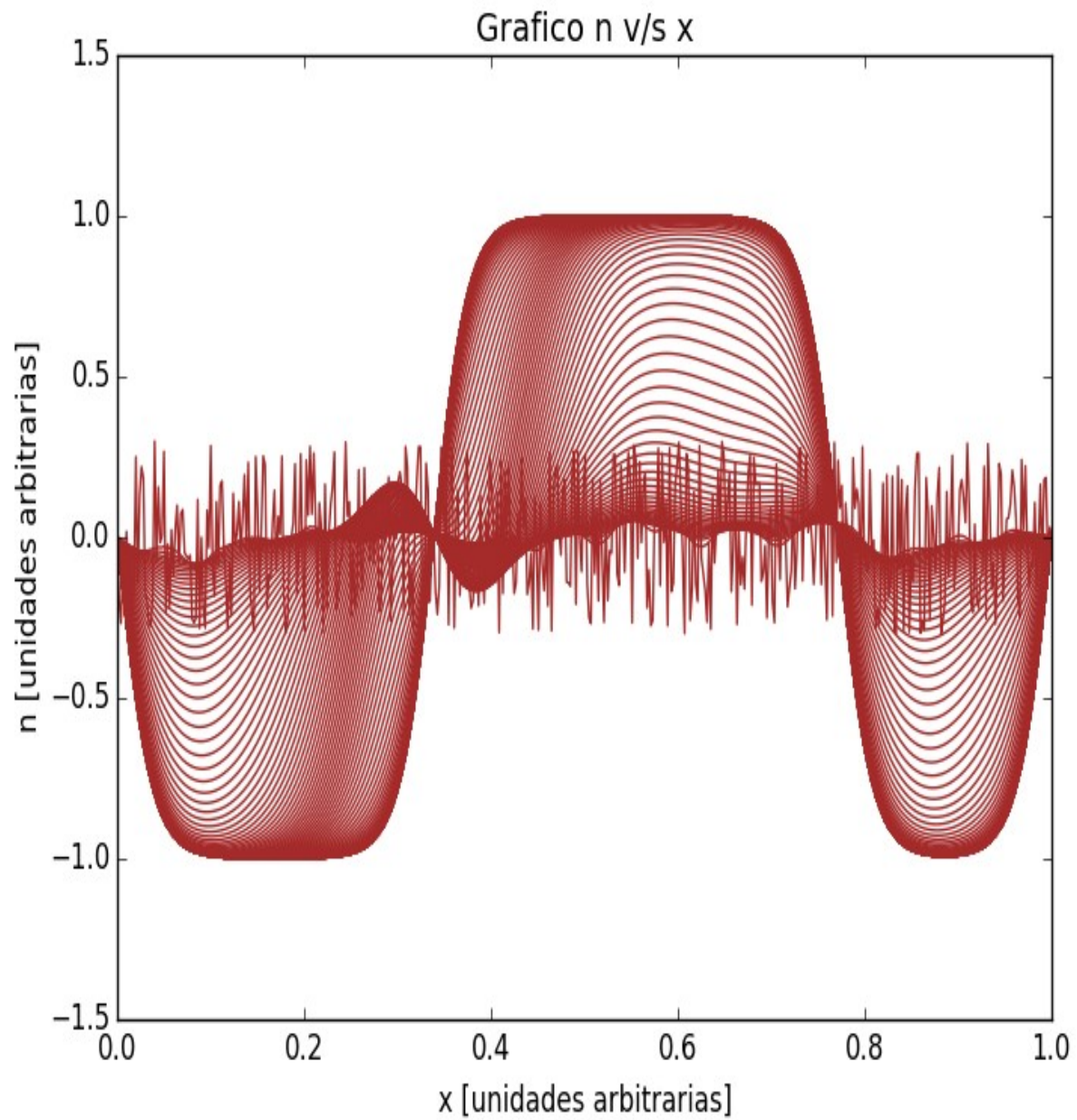


Figura8. Gráfico de densidad de especie n v/s posición con $\mu=1.5$ y $\gamma=0.001$, además de ocupar $\text{seed}=15$.

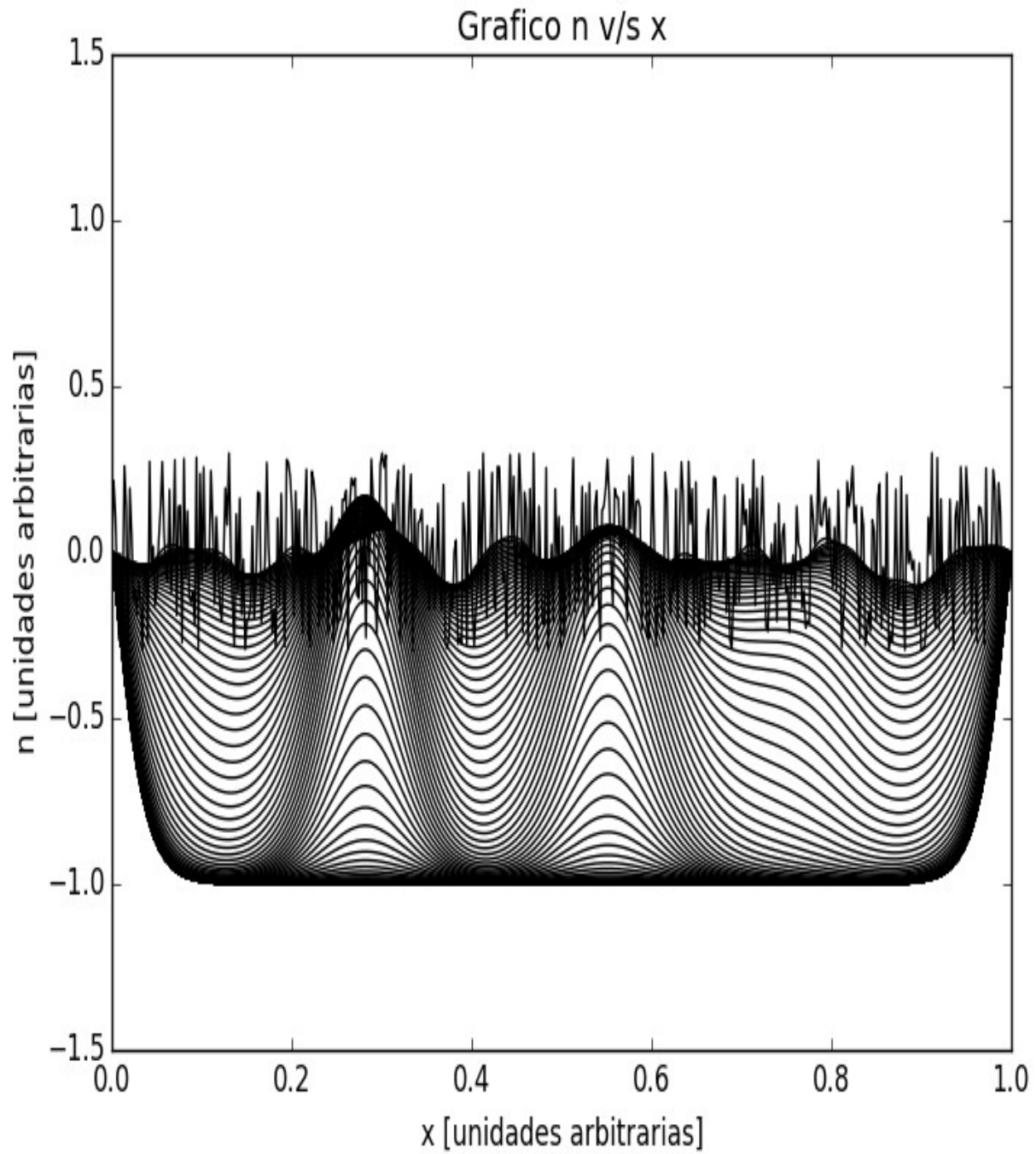


Figura9. Gráfico de densidad de especie n v/s posición con $\mu=1.5$ y $\gamma=0.001$, además de ocupar $\text{seed}=67$.

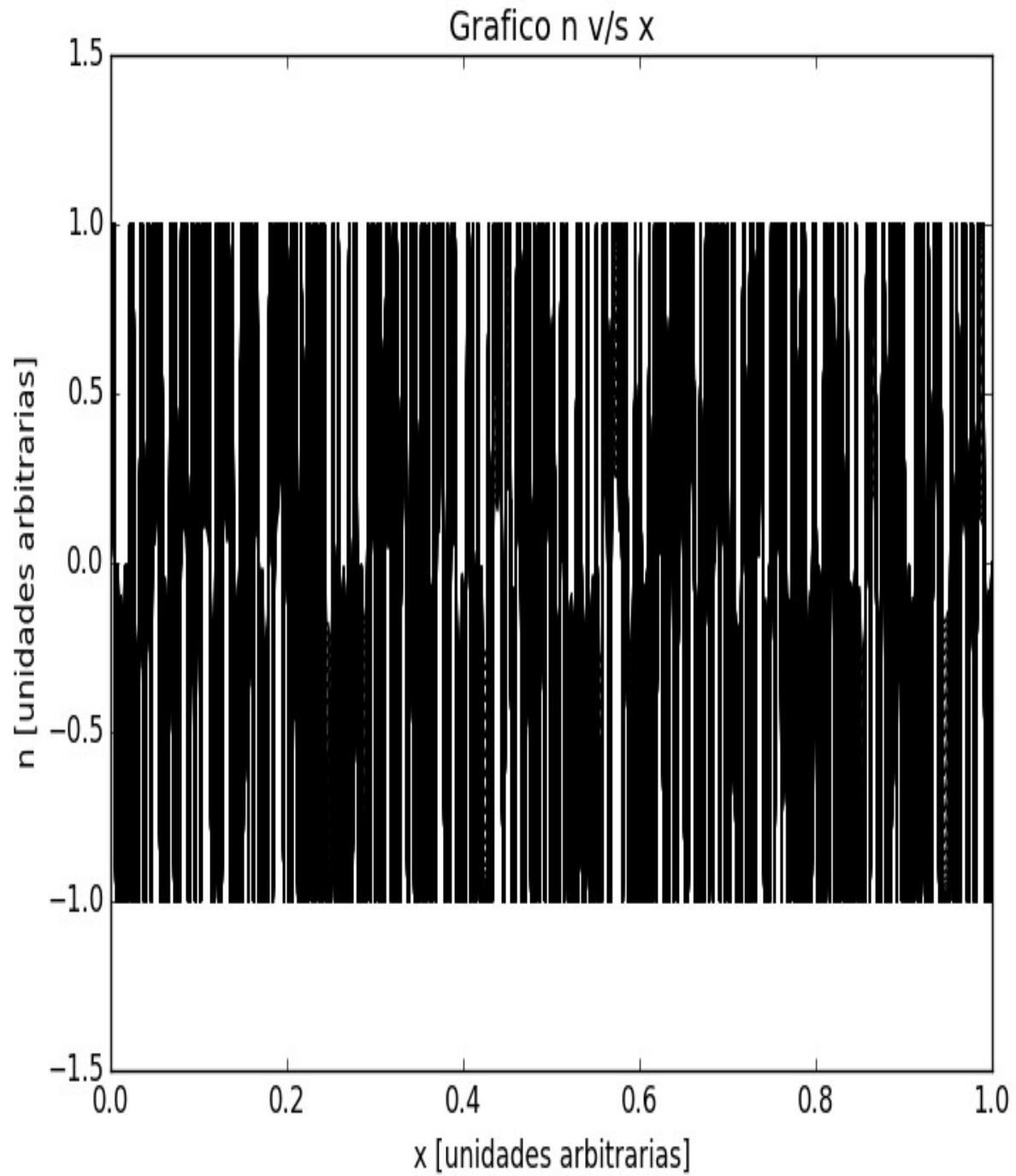


Figura10. Gráfico de densidad de especie n v/s posición con $\mu=1.5$ y $\gamma=0$, además de ocupar $\text{seed}=340$.

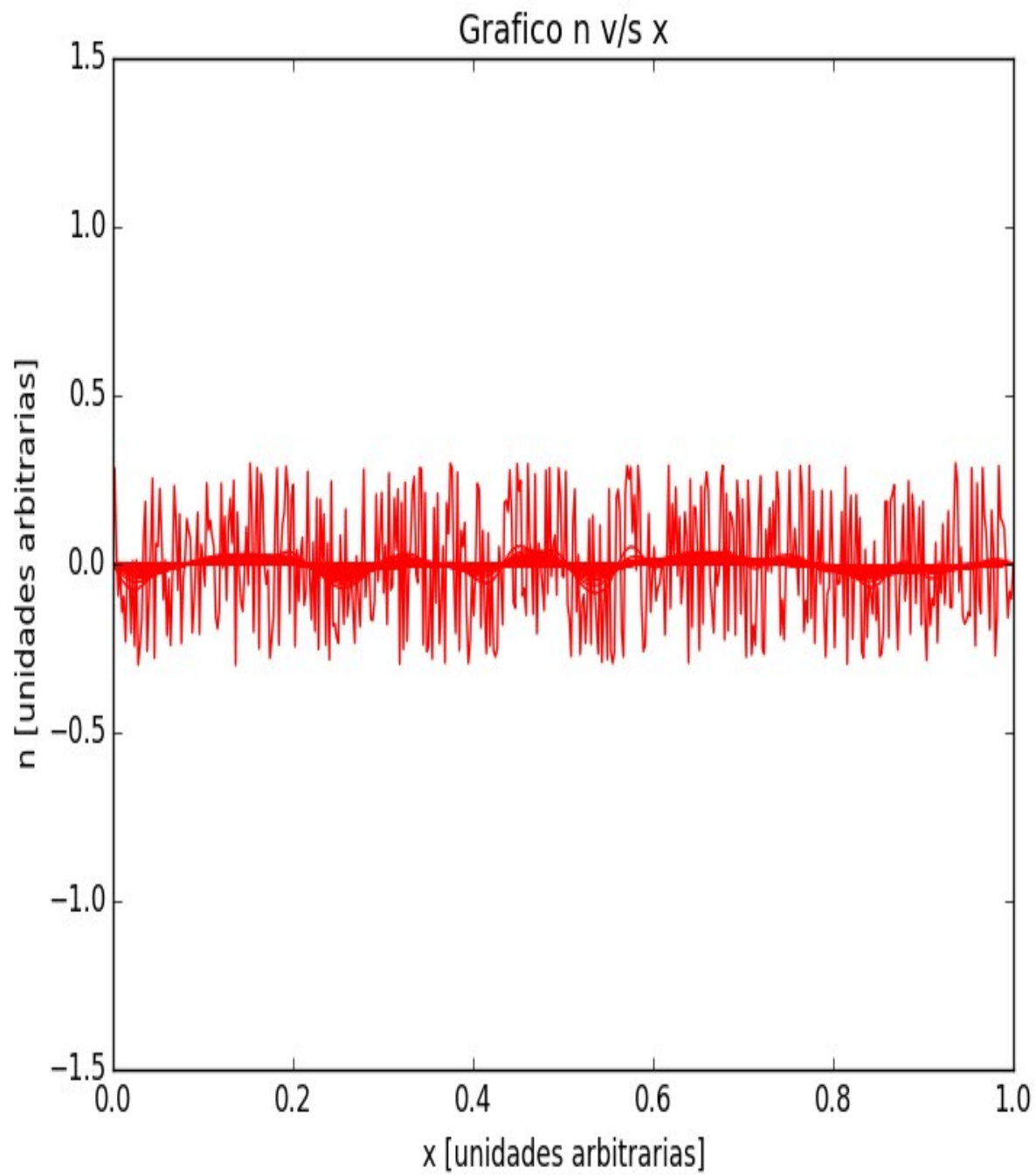


Figura11. Gráfico de densidad de especie n v/s posición con $\mu=0$ y $\gamma=0.001$, además de ocupar $\text{seed}=340$.

2.4 CONCLUSIÓN

Para esta parte era directo ver que $n=(+)-1$ existían como puntos de equilibrio estables de la ecuación, ya que ambos anulaban al término de la reacción y, por ende, al haber quedado sólo el término difusivo, lo que sucedía era que empezaban a generarse oscilaciones en torno a estos puntos de equilibrio, lo cual justamente indicaba la estabilidad de estos puntos (estables).

Por otro lado, analizando los resultados, se pudo deducir que dependiendo del seed (condición inicial) seteada, la forma en que la densidad se acercaba a los puntos de equilibrio iban cambiando. Por ejemplo, para la figura 7 (con seed=340) se pudo observar que la solución efectivamente se componía de una mezcla entre un pulso viajero (4 pulsos) y de difusión, y que los puntos se concentraban en $n=+1$ o $n=-1$, dependiendo de la cercanía con la que se encontraba un punto en particular de éstos. Para la figura 8, con seed=15, se pudieron observar esta vez 3 pulsos viajaron y la función de difusión, además de los puntos de equilibrio estables $n=+1$ y $n=-1$. Y para la figura 9, al haberle hecho un seed=67, surgió una peculiaridad sistemática, debido a que la mayoría de los puntos $n(x,t)$ se concentraron en $n=-1$, es más, a cualquier punto que en un tiempo determinado se le antojaba “escapar” del equilibrio, se le “empujaba” en el tiempo posterior al equilibrio (de ahí que es estable $n=+1$ y $n=-1$). Cabe destacar, que esta suerte de empuje se producía por la competencia de recursos que se generaba al aumentar la densidad de población, y que el término difusivo se relacionaba directamente con la dispersión o desplazamiento que se iban produciendo en las especies hacia otros lugares (coordenada x).

Y para finalizar, en las figuras 10 y 11 se quiso ilustrar lo que ya se podía intuir. En el caso de la figura 10, cuando se obligó a γ a ser 0, lo que sucedió fue que simplemente, el término difusivo se esfumó y, por ende, quedaba sólo la componente reactiva de las especies, la cual se quedó oscilando evidentemente entre -1 y +1, puesto que la competencia por los recursos entre especies hacía que en momentos la densidad poblacional bajaría (n tendía a -1) o lo contrario, se incrementaba la población suponiendo que los recursos eran suficientemente grandes (n tendía a 1). En el caso de la figura 11, cuando se imponía $\mu=0$, lo que generaba esto era que el término reactivo de la especie se anulaba, quedando sólo el término difusivo debido a que la especie tendía a dispersarse para encontrar más recursos (cambios considerables en x). Con esto el gráfico mostraba efectivamente que n variaba en cierta forma periódica con respecto a x .