

# Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

## Informe Tarea 7

Felipe Castillo Torrejón

14 de noviembre de 2015

### 1. Pregunta 1

#### 1.1. Introducción

Se busca integrar las ecuaciones para  $\rho$  y  $v$  en un fluido compresible en una dimensión, sin viscosidad ni gravedad, y usando el método de las características. Las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ P &= A\rho^\gamma\end{aligned}$$

Con  $\gamma = 5/3$  que corresponde a un gas monoatómico ideal con  $A(x \leq 1/3) = 4$  y  $A(x > 1/3) = 1$ . Considerando las siguientes condiciones iniciales y de borde<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}v(0, t) &= 0 \\ v(1, t) &= 0 \\ \rho(x > 0, 1, 0) &= 1 \\ \rho(x \leq 0, 1, 0) &= 1 + 0,0122(1 + \cos(10\pi x))\end{aligned}$$

#### 1.2. Procedimiento

Para resolver el problema se usa el método de las características. De la ecuación de estado  $p = A\rho^\gamma$  y se define  $C^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$ , manejando las ecuaciones que definen el problema, este se reduce a resolver el sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = 0$$

El cual cumple las siguientes 2 familias de curvas características:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= v + c & \text{curvas f} \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= v - c & \text{curvas g}\end{aligned}$$

Finalmente se busca encontrar los puntos R dados puntos P y Q, y se definen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_R - x_P &= (v_P + c_P)(t_R - t_P) \\ x_R - x_Q &= (v_Q - c_Q)(t_R - t_Q)\end{aligned}$$

Que permiten despejar  $x_R$  y  $t_R$ , y las ecuaciones:

$$\begin{aligned}c_P(\rho_R - \rho_P) + (v_R - v_P)\rho_P &= 0 \\ c_Q(\rho_R - \rho_Q) - (v_R - v_Q)\rho_Q &= 0\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Rut: 18.012.122-6

Que permiten despejar  $v_R$  y  $\rho_R$ . De  $\rho_r$  se obtiene  $c_R$ . Estas ecuaciones son una aproximación de primer orden para estas variables. Sigue utilizar una forma mas precisa para las ecuaciones anteriores:

$$x_R^{n+1} - x_P = \frac{1}{2}(v_P + v_R^n + c_P + c_R^n)(t_R^{n+1} - t_P)$$

$$x_R^{n+1} - x_Q = \frac{1}{2}(v_Q + v_R^n - c_Q - c_R^n)(t_R^{n+1} - t_Q)$$

$$(c_P + c_R^n)(\rho_R^{n+1} - \rho_P) + (v_R^{n+1} - v_P)(\rho_P + \rho_R^n) = 0$$

$$(c_Q + c_R^n)(\rho_R^{n+1} - \rho_Q) - (v_R^{n+1} - v_Q)(\rho_Q + \rho_R^n) = 0$$

Donde P corresponde al punto  $i$  del barrido y Q al punto  $i + 1$  para tiempos pares, y P corresponde al punto  $i - 1$  del barrido y Q al punto  $i$  para tiempos impares.

### 1.3. Resultados

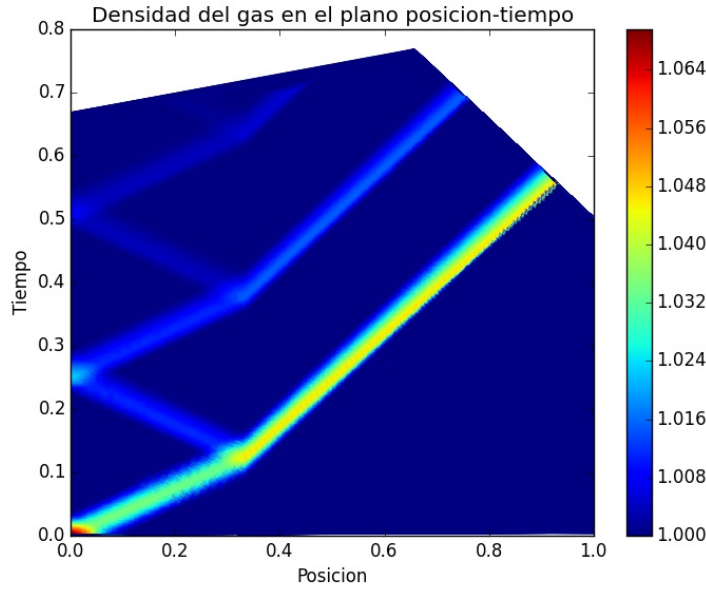


Figura 1: Densidad del gas en el plano posición-tiempo.

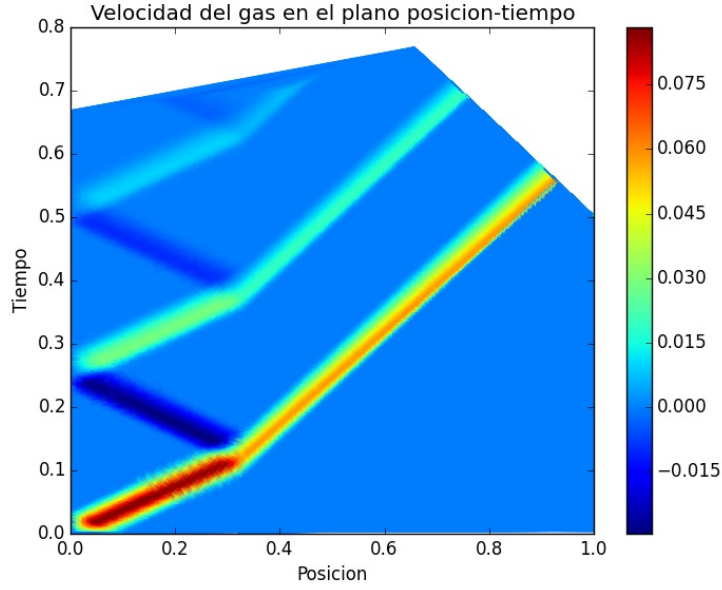


Figura 2: Velocidad del gas en el plano posición-tiempo.

#### 1.4. Conclusiones

La implementación del método tuvo dificultades debido a la cantidad de datos y recursiones que se hacían sobre estos, pequeños errores en su implementación no se veían si no hasta avanzadas las recursiones cuando éste crecía y producía algún error de cálculo mayor. El mayor problema de esto era que el tiempo de ejecución era muy alto, por lo que afinar el programa hasta su forma final demoró días de ejecución. Para contextualizar, en su ejecución final el programa demoró alrededor de 13 horas para avanzar hasta aproximadamente  $t = 0,7$ .

De los datos obtenidos se realizaron dos gráficos, en estos (Figuras 1 y 2) se puede apreciar como los pulsos causados por la sobredensidad inicial se reflejan y se difractan cuando llegan al punto de discontinuidad. Los pulsos reflejados vuelven a reflejarse en el borde para una vez más volver a reflejarse y difractarse en la discontinuidad.