Métodos numéricos para la ciencia e Ingeniería: Informe Tarea 8

José Guillermo Araya

18 de noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

El objetivo de esta pregunta es calcular el centro de masa de un sólido complicado descrito por la intersección de un toro y un cilindro:

$$\text{Toro}: \ z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1 \text{Cilindro}: \ (x-2)^2 + z^2 \leq 1$$

cuando la densidad del sólido está descrita por:

$$\rho(x,y,z) = 0{,}5 * (x^2 + y^2 + z^2)$$

usando el método de integración de montecarlo.

1.2. Procedimiento

Para calcular el centro de masa de un sólido es necesario conocer cuatro integrales.

$$\int \rho dxdydz$$

$$\int \rho xdxdydz$$

$$\int \rho ydxdydz$$

$$\int \rho zdxdydz$$

Luego la cordenada i del centro de masa queda expresada por:

$$i = \frac{\int \rho \times idxdydz}{\int \rho dxdydz}$$

Para estimar cada una de las integrales se utilizará el método de integración de montecarlo. En primer lugar se define un volumen en el cual se integrará, como este volumen debe ser el más pequeño posible que contenga a el solido en cuestión se eligió el cilindro definido el la introducción pero delimitado por los planos y = -4, y = 4.

Luego se generan puntos aleatorios dentro de este volumen, y a los que caen fuera de la intersección con el toro se ignoran.

De modo que la integral $\int \rho dxdydz$ se aproxima por $V \times < \rho >$ donde:

V = volumen del cilindro

$$< \rho >= \frac{1}{N} \times \sum \rho(x_i)$$

es decir, para cada punto X_i generado aleatoriamente se calcula la densidad en ese punto y se suma en una variable que contendrá el valor aproximado de la integral luego de iterar N veces.

Para las demás integrales el proceso es análogo solo que en este caso se toma la multiplicación entre la densidad en el punto y la coordenada correspondiente.

Para mejorar la precisión se eligió repetir este proceso 100 veces, guardando todos los valores que luego se grafican en un histograma indicando cuál es el valor promedio

El procedimiento descrito se encuentra en el script çm.py”

1.3. Resultados

De repetir 100 veces el método de integración de montecarlo, se encuentran los siguientes valores para las coordenadas del centro de masa y la Masa total del cuerpo.

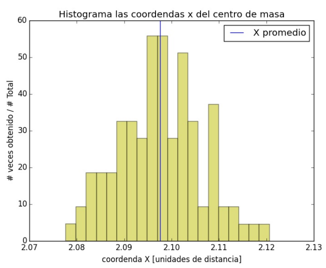

Figura 1: Histograma de valores X_{cm}

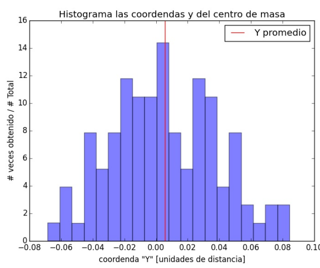

Figura 2: Histograma de valores Y_{cm}

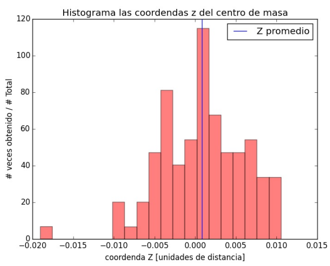

Figura 3: Histograma de valores Z_{cm}

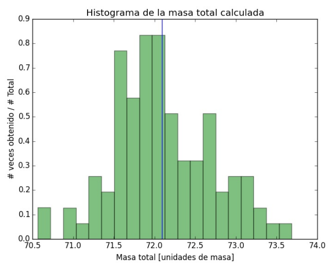

Figura 4: Histograma valores de masa total

1.4. Conclusiones

Podemos observar el producto de el error aleatorio del método en los histogramas, en X por ejemplo hay una diferencia de hasta 0,1 entre 2 runs. Sin embargo también podemos concluir que el hecho de repetir varias veces el algoritmo nos da un valor aproximado de las coordenadas reales, vemos una distribución con un peak claro en las coordenadas que esperamos sean las del centro de masa, por ejemplo sabemos que Z_{cm} e Y_{cm} deberían ser 0, lo que es bastante cercano a lo entregado por los histogramas.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

El objetivo de esta pregunta es utilizar el algoritmo de metrópolis para obtener una muestra aleatoria con distribución:

$$W(x) = 3{,}5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1{,}5)^2}{0{,}5}\right)$$

2.2. Procedimiento

Para obtener una muestra aleatoria con el algoritmo de metrópolis se comienza con una valor aleatorio generado, a este se le asocia una probabilidad $W(x)$ donde W es la distribución que se requiere simular. A partir de este punto se genera uno siguiente, digamos X_{n+1}, de la siguiente manera:

$$X_{n+1} = X_n + \delta \times random$$

donde δ se escogió como 10, para este script.

Luego a este X_{n+1} se le asocia una probabilidad $P_{n+1} = W(X_{n+1})$. Ahora si P_{n+1} es mayor que P_n, entonces el valor X_{n+1} se acepta y pasa a ser el punto de partida para otra iteración. De lo contrario, el punto X_{n+1} se aceptará con probabilidad $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, cuando se rechaza entonces el siguiente número será una repetición de X_n.

Para obtener los errores asociados al histograma en la parte extra de la pregunta para cada iteración completa de metropolis se guardan los datos del histograma, luego al haber repetido 100 veces metropolis, para cada barra del histograma se tienen 100 datos. Finalmente se calcula la desviación estándar de esos 100 datos para cada barra y se grafican junto con el histograma.

2.3. Resultados

Realizando metropolis para 10 millones de datos se obtiene la figura 5, donde se compara con la distribución esperada.

La figura 6 tiene las barras de errores asociadas, pero notar que este gráfico está hecho para 100000 datos por temas de tiempo.

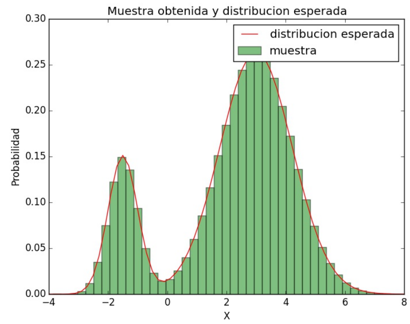

Figura 5: Comparación entre la muestra obtenida y la distribución esperada

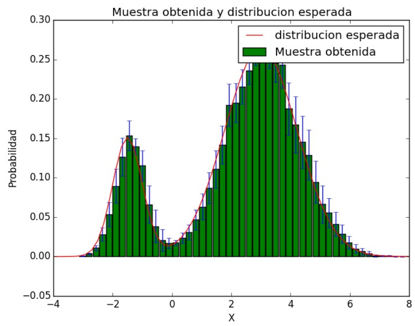

Figura 6: Muestra obtenida con su error asociado

2.4. Conclusiones

Se concluye que el algoritmo de metrópolis logra generar con suficiente precisión una muestra aleatoria con la distribución pedida como se observa en la figura 5. Es decir, para generar una muestra "sintética"de datos con cierta distribución solo se necesita generar datos aleatorios para una distribución uniforme (-1, 1).

Los errores asociados al histograma están dentro de lo esperado, para cada punto el rango de variación del dato incluye la curva esperada. Estas barras de errores se deberían ir mejorando conforme se aumenta la cantidad de datos, se espera que disminuyan considerablemente al usar 10 millones de datos, esto no se alcanzó a hacer pues el costo temporal de procesar 10^7 datos 100 veces es demasiado alto para los plazos de la tarea.