Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 8

Álvaro Osorio

18 de Noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

Esta pregunta tiene como objetivo calcular el centro de masa de un sólido descrito por la intersección entre un toro y un cilindro dados por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Toro} : z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3\right)^2 \leq 1 \tag{1}$$

$$\text{Cilindro} : (x - 2)^2 + z^2 \leq 1 \tag{2}$$

Donde la densidad del solido esta descrita por la siguiente ecuación:

$$\rho(x, y, z) = 0.5 * (x^2 + y^2 + z^2) \tag{3}$$

Para resolver el problema usaremos el método de Montecarlo para el calculo de las integrales.

1.2. Desarrollo

Para utilizar el método de Montecarlo lo primero será determinar un volumen en el cual estará contenido el dominio de integración, en este caso podemos ver directamente de las ecuaciones que el cilindro tiene radio 1 centrado en $x-2$, también podemos ver que el cilindro esta a lo largo del eje y, también tenemos que el toro tiene como radio mayor $R = 3$ y radio menor $r = 1$ por lo que el toro en el eje y esta contenido entre -4 y 4, juntando todo esto el volumen sera:

$$1 \leq x \leq 3 \quad -4 \leq y \leq 4 \quad -1 \leq z \leq 1 \tag{4}$$

A esta región la llamaremos $vol(B)$

Dentro de esta región lanzaremos puntos al azar y si estos están dentro de la intersección de ambos solidos se utilizaran para calcular las funciones a integrar y de esta forma aproximar las integrales que nos permitirán calcular el centro de masa del solido, estas integrales son:

$$\int \rho \, dx \, dy \, dz \qquad \int x\rho \, dx \, dy \, dz \qquad \int y\rho \, dx \, dy \, dz \qquad \int z\rho \, dx \, dy \, dz \tag{5}$$

Donde ρ es la densidad de masa.

Para calcular estas integrales las evaluaremos de la siguiente forma, para fijar ideas tomaremos como ejemplo la segunda integral de las presentadas anteriormente.

$$\int_{\Omega} x\rho(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \approx \frac{vol(B)}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i(x,y,z) \tag{6}$$

En donde Ω es el dominio de integración en este caso el interior del solido, el valor n sera el numero de puntos aleatorios para este caso usaremos $n = 1000000$, además $F(x,y,z)$ se define como:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} x\rho(x,y,z) & (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \sim \end{cases} \tag{7}$$

1.3. Resultados

Luego de usar el desarrollo descrito anteriormente tenemos que el centro de masa esta:

$$x_{cm} = 2.081 \quad y_{cm} = 0.000 \quad z_{cm} = 0.000 \tag{8}$$

Adicionalmente se calculo el error asociado al método de Montecarlo pero este es del orden de 10^{10} por lo que no lo tomaremos en cuenta.

1.4. Conclusión

El valor entregado para el centro de masa del solido esta dentro de lo esperado dado la simetría para las coordenadas y y z en el caso de la coordenada x también esta dentro de lo esperado dada la densidad ρ que presenta este solido, sobre el error en el método de Montecarlo este fue bastante pequeño lo cual nos hace presumir de algún problema en el calculo de este, ya que debería ser el del orden 0.001 para el valor de puntos utilizado, este error puede tener origen en la forma que se calculo la propagación de este al evaluar el cociente entre las integrales presentadas en (5), pero por falta de tiempo no se logro buscar una causa mas clara para esto.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

Esta pregunta tiene como objetivo obtener una muestra aleatoria de números con la distribución (no normalizada) dada por la siguiente ecuación:

$$W(x) = 3.5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1.5)^2}{0.5}\right) \tag{9}$$

Para lograr esto usaremos el algoritmo de Metrópolis.

2.2. Desarrollo

El algoritmo de Metropolis nos permite obtener números aleatorios con una distribución dada, para esto tomamos la función $W(x)$, definida anteriormente y un valor inicial x_0 que sera en nuestro caso el primer numero de la serie aleatoria, para obtener el siguiente numero aleatorio con la distribución $W(x)$ se sigue el siguiente algoritmo:

1. Se genera un numero aleatorio $r \sim U(-1, 1)$
2. Dada una constante δ, generamos un valor de prueba definido como:

   $$x_p = x_n + \delta * r \tag{10}$$

3. Se genera otro numero aleatorio $s \sim U(0, 1)$
4. Se evalúa la siguiente expresión:

   $$\frac{W(x_p)}{W(x_n)} > s \tag{11}$$

   Si esta expresión resulta verdadera el siguiente numero de la serie sera x_p si no x_n

Este es un paso para el algoritmo de Metrópolis para el caso que estamos estudiando repetiremos este algoritmo 10 millones de veces para poder comparar con la distribución $W(x)$ dada anteriormente y poder probar el efectividad del algoritmo, para determinar el valor δ se evalúa el algoritmo con distintas pruebas donde se determina que $\delta = 4$ es un valor con el cual el algoritmo acepta aproximadamente la mitad de los valores de prueba x_x lo cual es lo óptimo para generar los valores buscados.

2.3. Resultados

Con el valor elegido para δ tenemos que se aceptan el $\%50.003$ de los valores de prueba por lo cual la elección de este valor es muy buena, esto se puede ver en el la siguiente figura donde se compara la función $W(x)$ con los valores entregados por el algoritmo:

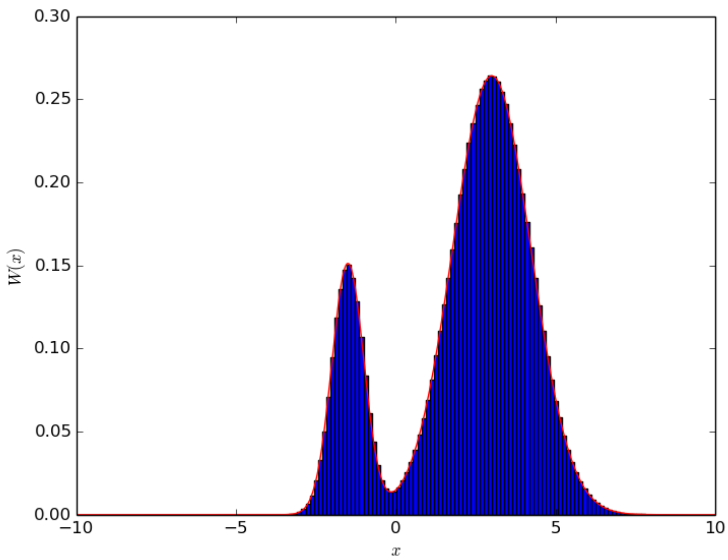

Figura 1: Comparación entre la distribución $W(x)$ y los valores entregados por el método de Metrópolis

Podemos ver que existe un alto grado de coincidencia entre la distribución $W(x)$ y el histograma con lo que podemos asegurar que el método de Metrópolis es un buen método para obtener valores aleatorios con una distribución dada..

2.4. Conclusión

La distribución dada por el método de Metrópolis coincide bastante bien con la distribución buscada, a modo de prueba se usaron 1000 bins en el histograma y aún así la distribución coincidió bastante bien, por lo cual la implementación de este método es todo un éxito.