Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Informe Tarea 8

Felipe Castillo Torrejón

18 de noviembre de 2015

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

Se busca estimar las posición del centro de masa de un sólido descrito por la intersección de un toro y un cilindro dados por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Toro}: \ z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1$$
$$\text{Cilindro}: \ (x-2)^2 + z^2 \leq 1$$

La densidad del sólido varía según la siguiente fórmula:

$$\rho(x,y,z) = 0{,}5 * (x^2 + y^2 + z^2)$$

1.2. Procedimiento

Para resolver el problema se usa el método de integración de Monte Carlo, se buscan los valores de las integrales:

$$\int \rho dv \,; \int x\rho dv \,; \int y\rho dv \,; \int z\rho dv$$

Para esto se define el volumen que engloba al sólido sobre el cual se quiere integrar. En este caso el usado es el cilindro de ecuación $x - 2^2 + z^2 \leq 1$ con $\sqrt{15} \leq y \leq \sqrt{15}$

Luego se usa un generador de números aleatorios como np.random para generar puntos (x,y,z) y determinar si estos están o no dentro del sólido estudiado, llevando una cuenta de estos puntos ya que la cantidad de estos sobre el total nos indicará que porcentaje del volumen que engloba a nuestro sólido será el volumen de este último.

Para minimizar el error de este método es necesario utilizar una cantidad suficientemente grande de punto dependiendo del grado de presición deseado, en esta ocasión se utilizaron 10 millones de puntos.

1.3. Resultados

Tabla 1: Posiciones de los centros de masa por coordenada con sus respectivos errores

Centros de masa		
x	y	z
2.3±0.1	0.0±0.1	0.00±0.04

1.4. Conclusiones

El método de integración de Monte Carlo es bastante simple de implementar y su resultado tiene un error aceptable como se puede apreciar en la tabla 1, de un 4.3 % para el eje sin simetría. Los resultados son coherentes con los esperados debido a la simetría del sólido en los ejes 'z' e 'y'. Se puede ver que el punto con el error mas grande en relación a su valor corresponde al eje y, eje que tenía las cotas mas grandes.
Aún cuando la cantidad de puntos a tomar debió ser grande, el algoritmo no sufre de largo tiempo de ejecución debido a su simplicidad.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

Se desea obtener una muestra aleatoria de números con la distribución (no normalizada) dada por la siguiente ecuación:

$$W(x) = 3{,}5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1{,}5)^2}{0{,}5}\right)$$

Utilizando el algoritmo de Metrópolis con una distribución proposición $xp = xn + \delta r$, donde r es una variable aleatoria de la distribución uniforme $U(-1,1)$. La variable δ tiene un valor fijo de 2 con el cual se aceptan cerca del 65 % de las proposiciones.

2.2. Procedimiento

Para obtener lo requerido se sigue el algoritmo de Metrópolis el cual consiste en los siguientes pasos:

1. Se genera un valor inicial x_0.
2. Se genera un número aleatorio r entre -1 y 1.
3. Se propone $xp = xn + \delta r$.
4. Se evalua la condición $W(x_p)/W(w_n) \leq p$ donde p es un número aleatorio entre 0 y 1. Si se cumple entonces x_{n+1} toma el valor x_p si no, $x_{n+1} = x_n$
5. Se repite el proceso (exceptuando el paso 1)

Este algoritmo se repitió 10 millones de veces. Luego se creó un histograma con los datos obtenidos, para este plot fue necesario normalizar previamente.

2.3. Resultados

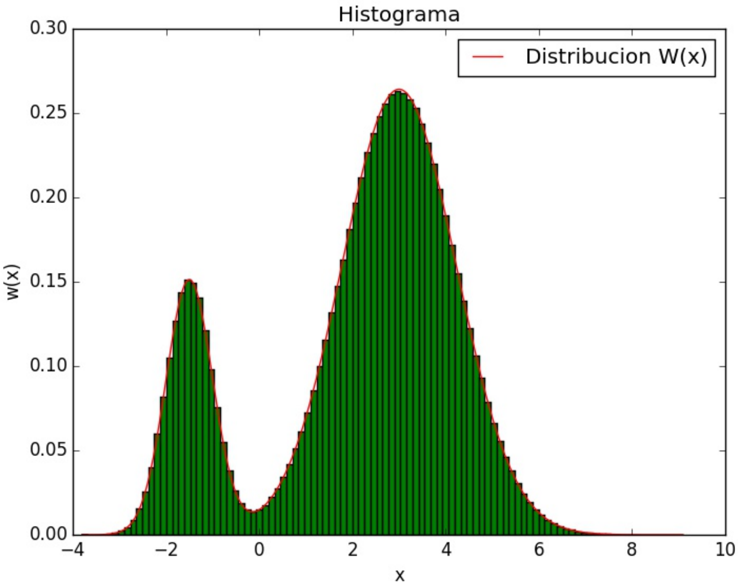

Figura 1: Histograma de la muestra aleatoria con distribución W(x).

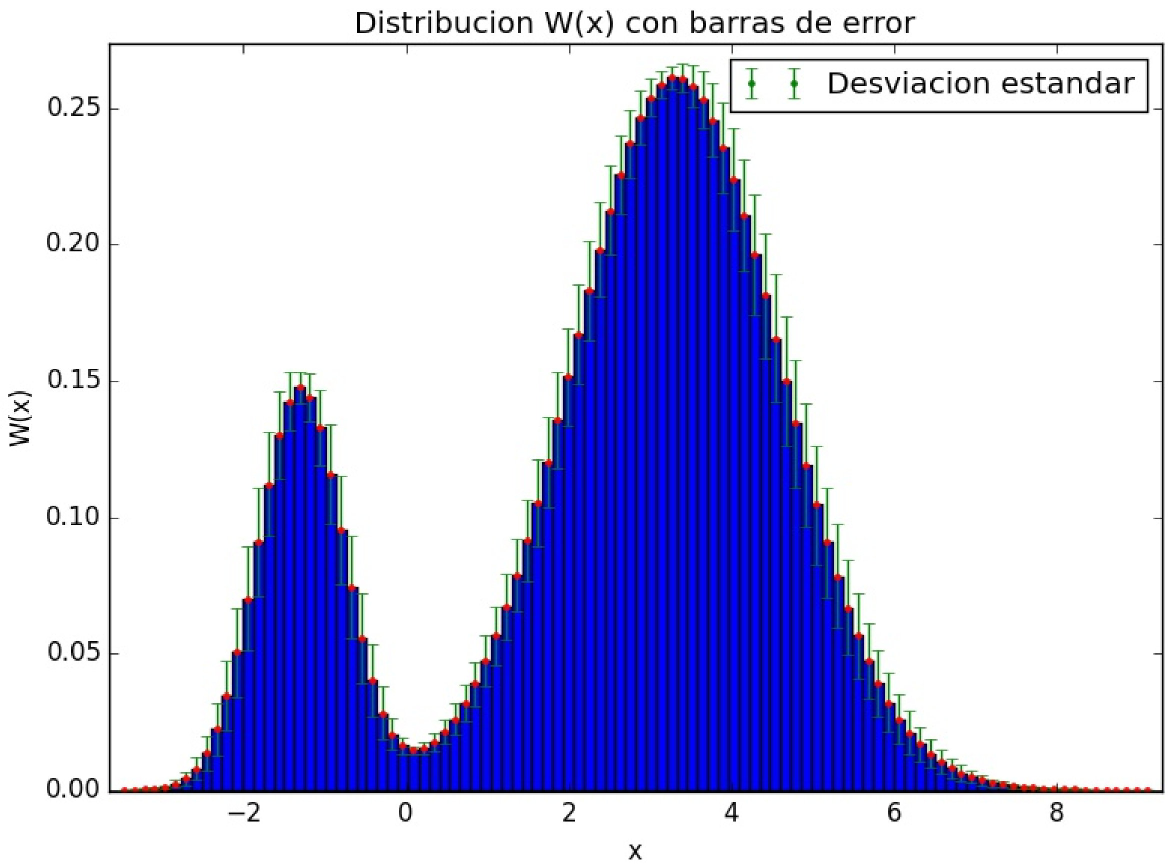

Figura 2: Histograma de la muestra aleatoria con distribución W(x) con barras de error.

2.4. Conclusiones

De las figuras tanto podemos apreciar que el histograma representa fielmente la distribución pedida evidenciando el correcto funcionamiento del algoritmo de Metrópolis, la cantidad de bins elegidos parecen amortiguar bastante bien las variaciones que pudiesen darse en la muestra.