Tarea 08 - Métodos Numéricos

Luz Agüero Contreras 18.355.502-2
Profesor: Valentino Gonzales
Auxiliar: Felipe Pesce

Noviembre 2015

1 Introducción

Parte 1

La primera parte consistio en calcular numericamente, por medio del método de Monte Carlo, el centro de masa de un cuerpo compuesto por un Toro y un Cilindro dados por las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$\text{Toro}: \; z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 \leq 1 \tag{1}$$

$$\text{Cilindro}: \; (x-2)^2 + z^2 \leq 1 \tag{2}$$

La densidad del cuerpo sólido compuesto, esta dada por:

$$\rho(x,y,z) = 0.5(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

Para poder realizar este calculo por medio de Monte Carlo, se necesitaba definir el volumen mínimo del cuerpo, por lo que se usó un Volumen $= 2 \cdot 8 \cdot 2 = 32$.

Parte 2

Se pidió buscar una muestra aleatoria de números dados por la siguiente función (no normalizada):

$$W(x) = 3.5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1.5)^2}{0.5}\right) \tag{4}$$

La muestra debía ser calculada con el algoritmo de Metropolis con una distribución proposición de la forma $x_p = x_n + \delta \cdot r$, con r siendo un valor aleatorio, y δ un valor fijo que debiese aceptar %50 de las pruebas para obetener un buen resultado.

2 Procedimiento

Parte 1

El método de MonteCarlo consta de la generación de números aleatorios y revisar si caen dentro de parametros fijados, si no, son rechazados, en este caso, los números debían pertenecer al conjunto de coordenadas espaciales dadas por la intersección de un Toro y un Cilindro, por lo que se definieron funciones para revisar las coordenadas generadas incluidas o no en el cuerpo, dependiendo de las ecuaciones (1) y (2).

El objetivo era calcular el centro de masa del cuerpo y como no es homogéneo, dado que su densidad varía segun la ecuación (3), su CM estará determinado por la siguiente formula:

$$\vec{r_{cm}} = \frac{\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{M} \tag{5}$$

Donde M es la masa total del cuerpo, pero se sabe que $\rho = M/V$, por lo que queda:

$$\vec{r_{cm}} = \frac{\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{\int \rho(\vec{r})dV} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} r_i \cdot \rho(r_i)}{\sum_{i=1}^{N} \rho(r_i)} \tag{6}$$

Donde N es la cantidad de datos que se generaron aleatoriamente y, además, que están en el cuerpo.

Parte 2

El algoritmo de Metropolis genera un nuevo $dato_{i+1}$ a partir del $dato_i$, siguiendo una distribución dada, en este caso $x_p = x_n + \delta \cdot r$, para posteriormente ser evaluado este nuevo dato segun la función $W(x)$. Esto fue implementado en una función que permitiera "dar un paso" según el algoritmo de Metropolis

Además, como $W(x)$, no está normalizada, se ocupa la integración numerica integrada en la libreria scipy, el método trapezoidal, resultado que se ocupara para normalizar la muestra obtenida.

El criterio para determinar si se obtiene una buena muestra, es de si los datos generados propuestos son aceptados o no en un %50 de su totalidad (mayor porcentaje, implicaría más tiempo y recursos), lo cual depende del δ Se definió una función que calcule el δ óptimo, que retorna una vez que el porcentaje calculado sea mayor o igual al %50.

Una vez obtenido el delta, se procede a generar la muestra aleatoria de numeros, con un total de 10^7 datos generados a partir de metropolis.

3 Resultados

Parte 1
Para un sólido compuesto de la intersección de un cilindro y un toro (ecuaciones (1) y (2)), su centro de masa estará en las siguientes coordenadas:

$$CM = (2.07973537668, -0.000537452018617, 0.000417625777865)$$

Parte 2

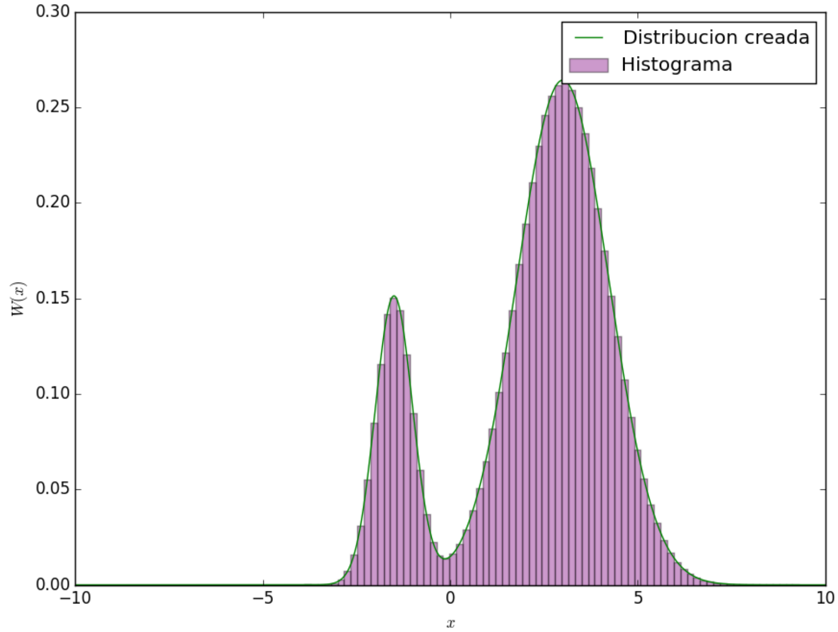

Figure 1: Función $W(x)$ y Histograma de sus variables aleatorias, ambas normalizadas

4 Conclusiones

Parte 1
El resutado del centro de masa puede ser aproximado tal que $\vec{r_{cm}} = 2.08\hat{x} + 0.00\hat{y} + 0.00\hat{z}$, lo cual se acerca al valor que se podría calcular analiticamente o por inspección, dada la simetría del cuerpo.

Parte 2
El resultado es satisfactorio, ya que la muestra generada concuerda bastante bien con la función $W(x)$ como se puede apreciar en la Figura 1. Quizás con mayor numero de datos generados o más bins, habría mayor concordancia.