UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Tarea 8
Método Monte Carlo y Metrópolis

Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
FI3104

Jorge Gacitúa Gutierrez

Profesor: Valentino González

Auxiliar: Felipe Pesce

17 de noviembre del 2015

1 Problema 1

1.1 Introducción

Se desea estimar la posición del centro de masa del cuerpo que se genera por la intersección de un toro con un cilindro cuyo eje es paralelo al eje Y y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$

$$\begin{aligned} Toro: \quad & z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1 \\ Cilindro: \quad & (x-2)^2 + z^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Se tiene que además la densidad del cuerpo describe es:

$$\rho(x, y, z) = 0.5 * (x^2 + y^2 + z^2)$$

1.2 Metodología

El centro de masa de un objeto está definido como:

$$r_{cm} = \frac{\int_V \rho(r) r dV}{\int_V \rho(r) dV}$$

lo que para el problema actual se traduce en calcular las integrales:

$$I_1 = \int_V \rho(x, y, z) x dxdydz \tag{1}$$

$$I_2 = \int_V \rho(x, y, z) y dxdydz \tag{2}$$

$$I_3 = \int_V \rho(x, y, z) z dxdydz \tag{3}$$

$$I_4 = \int_V \rho(x, y, z) dxdydz \tag{4}$$

Para estimar el valor de estas integrales se usó el método de integración de Monte Carlo:

$$\int_V f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}$$

Donde las $\langle \cdot \rangle$ denota la media aritmética de un valor.
Como se necesitó integrar sobre un volumen y el requerido no era fácil de parametrizar se utilizó el mínimo volumen de un paralelepípedo que encerrase el cuerpo producido por la intersección del toro con el cilindro.
En este caso se tiene que para el Toro el paralelepípedo que lo encierra esta determinado por:

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-4 \leq y \leq 4$$
$$-1 \leq z \leq 1$$

y para el cilindro:

$$1 \leq x \leq 3$$
$$-\infty \leq y \leq \infty$$
$$-1 \leq z \leq 1$$

con esto es posible decir paralelepípedo de volumen mínimo que encierra la intersección del toro con el cilindro esta descrito por los limites:

$$1 \leq x \leq 3$$
$$-4 \leq y \leq 4$$
$$-1 \leq z \leq 1$$

1.3 Resultados

Se encontró que la posición del centro de masa es:

$$x_{cm} = 2.10349 \pm 0.004232$$
$$y_{cm} = 0.002514 \pm 0.003406$$
$$z_{cm} = 0.000242 \pm 0.004232$$

Al graficar el punto en la malla del cuerpo generado se obtienen las figuras del 1 al 4, tal punto es muy intuitivo y parece totalmente lógico dada la simetría del problema, como se puede ver en las figuras 2 y 4

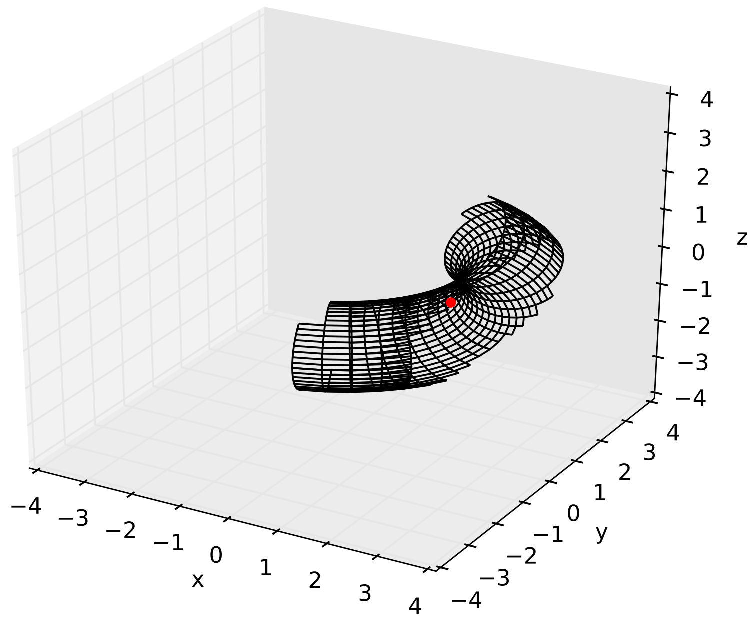

Figure 1

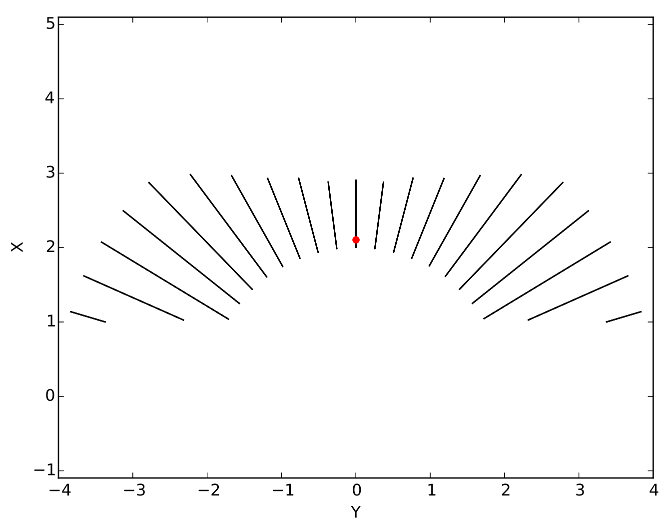

Figure 2: Vista del plano $x - y$

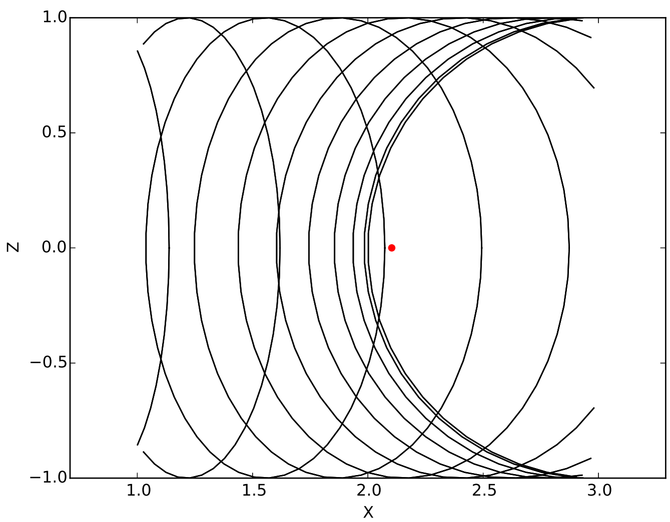

Figure 3: Vista del plano $x - z$

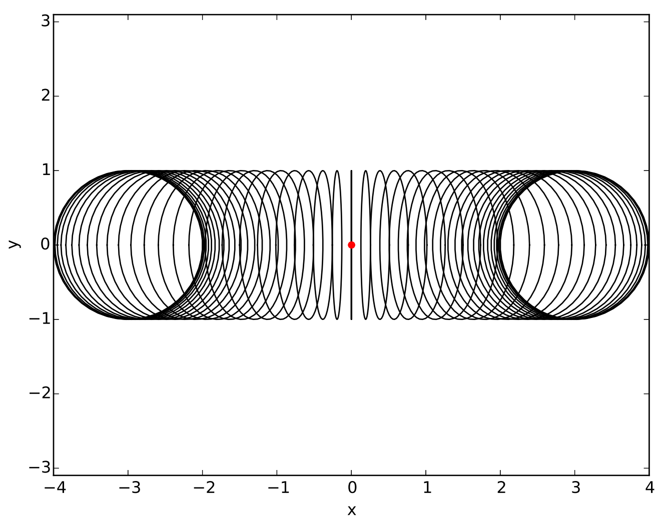

Figure 4: Vista del plano $y - z$

2 Problema 2

2.1 Introducción

$$W(x) = 3.5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1.5)^2}{0.5}\right) \tag{5}$$

Se desea usar el algoritmo de Metrópolis con una distribución proposición $xp = xn+$

2.2 Metodología

Para resolver el problema se implementa el algoritmo de Metrópolis para el cual se genera una muestra aleatoria de 10 millones de puntos y se prueba con la distribución proposición, esta se aceptará si:

$$\frac{W(x_p)}{W(x_n)} > U(0.1)$$

También se encuentra la normalización entre de la distribución $W(x)$ integrándola para $-1000 < x < 1000$

Finalmente de genera el histograma de la muestra aleatoria

2.3 Resultados

Es claro ver que para un numero grande de puntos la muestra aleatoria se parecerá mucho a la distribución real

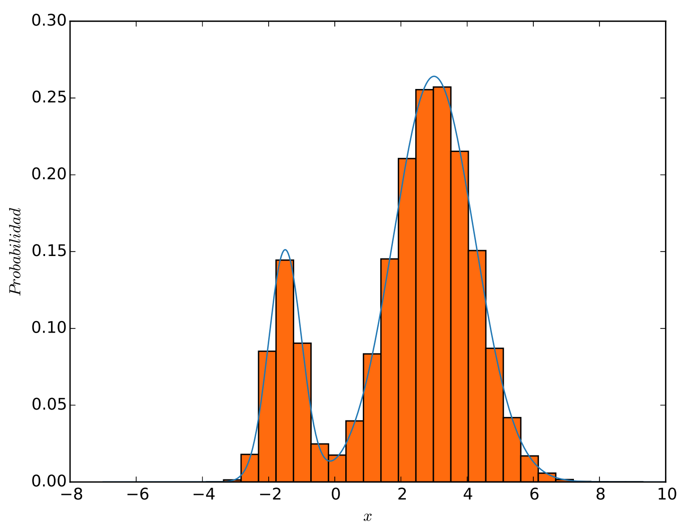

Figure 5: Histograma de la muestra generada con Metrópolis