Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería: Informe 8

Álvaro Césped

November 2015

1 Pregunta 1

1.1 Introducción

Para esta sección, el objetivo es estimar la posicion del centro de masas de un cuerpo generado por la intersección de un toroide y un cilindro. Las ecuaciones que generan dicho cuerpo son:

$$\text{Toro}: \; z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1$$

$$\text{Cilindro}: \; (x-2)^2 + z^2 \leq 1$$

Y la densidad del cuerpo está caracterizada por:

$$\rho(x,y,z) = 0.5 * (x^2 + y^2 + z^2)$$

1.2 Procedimiento

Para calcular el centro de masas de un objeto se debe considerar la siguiente ecuación integral:

$$r_{cm} = \frac{\int_v \rho(r) r dV}{\int_v \rho(r) dV}$$

Por lo tanto, como se trabajará en coordenadas cartesianas, el problema se reduce a calcular las integrales sobre cada coordenada para el numerador y para el denominar la misma integral pero sin el factor de la coordenada acompañando a la densidad. Una vez calculadas todas las integrales, la posición del centro de masas quedará determinada por la la relación:

$$x_{i,cm} = \frac{\int_x \int_y \int_z \rho(x,y,z) x_i dxdyxz}{\int_x \int_y \int_z \rho(x,y,z) dxdyxz}$$

Donde el subíndice i hace referencia a las coordenadas x,y,z.

Finalmente, para el cálculo de estas 4 integrales se utilizó el método de Monte Carlo, que se expresa como:

$$\int_V f dV \approx V < f > \pm V \sqrt{\frac{< f^2 > - < f >^2}{N}}$$

Donde el operador $<>$ hace referencia al promedio, y V es el volumen a integrar, el cuál, si bien es generado por la intersección de un toro, que tiene como límites

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$-1 \leq z \leq 1$$

Y para el cilindro

$$1 \leq x \leq 3$$

$$-1 \leq z \leq 1$$

Por lo que el cuerpo tiene como límites

$$1 \leq x \leq 3$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$-1 \leq z \leq 1$$

1.3 Resultados

Con el algoritmo se logró caracterizar el centro de masas del cuerpo por las coordenadas $r_{cm} \approx (2, 0, 0) \pm (0.004, 0.003, 0.004)$.

2 Pregunta 2

2.1 Introducción

Para esta sección, el objetivo es obtener un dato aleatorio a partir de una distribución no normalizada:

$$W(x) = 3.5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1.5)^2}{0.5}\right)$$

2.2 Procedimiento

Se resolverá el problema utilizando el algoritmo de Metrópolis de la forma

$$x_p = x_n + \delta r$$

con una cantidad aleatoria de 10.000.000 puntos y donde r es un número aleatorio sacado de una distribución uniforme entre -1 y 1 ($U(-1,1)$).

La idea es, a partir de un valor inicial propuesto y un valor aleatorio generado, calcular la razón

$$\frac{W(valorprop)}{W(valoraleat)}$$

y compararlo con un número sacado aleatoriamente de una distribución uniforme entre 0 y 1 ($U(0,1)$). Si esta razón es mayor que dicho número, entonces el número propuesto se acepta y se itera nuevamente pero considerando este último número como el nuevo valor inicial propuesto, de lo contrario, si la razón es menor que el número aleatorio, el valor aleatorio se rechaza y se vuelve a iterar con el valor inicial propuesto anteriormente.

Finalmente, se busca que se acepten a lo menos un 50 por ciento de los valores, por lo que se hace necesario encontrar el valor de δ que proporcione dicha cualidad.

2.3 Resultados

La figura 1 muestra la distribución W(x) encontrada, además del histograma asociado a los valores calculados.

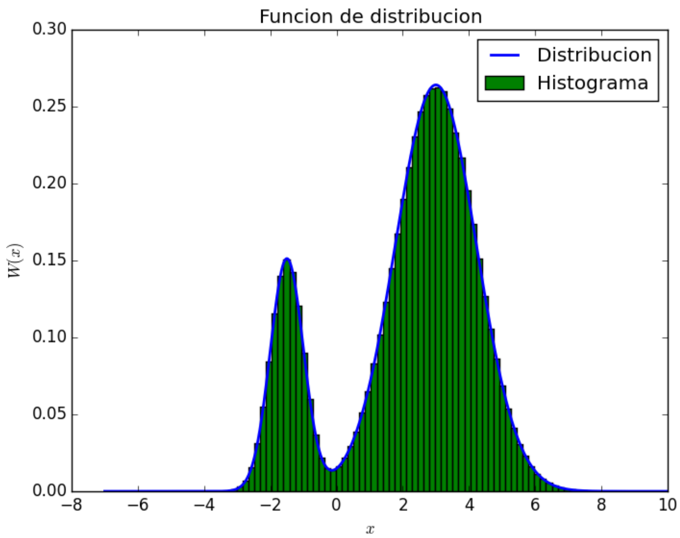

Figure 1: *Distribución W(x) calculada a partir del método de Metrópolis (azul) e Histograma asociado (verde)*

Conclusiones

Para la sección 1 se logró resolver el problema de manera satisfactoria, esto considerando que el resultado obtenido es coherente con la geometría del problema y que los errores asociados al cálculo de las 3 coordenadas del centro de masas son relativamente bajos.

Para la sección 2 se puede concluir que, a pesar de que el algoritmo demora bastante en correr, el resultado obtenido es satisfactorio, esto considerando que el histograma y la distribución W(x) se asemejan bastante calculando con 10.000.000 de puntos.