Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas
Metodos Numericos para la Ciencia y Ingenieria

Tarea 8: Promedios y distribuciones

Maria Jose Hernández Pozo

November 18, 2015

1 Introducción

1.1 Centro de Masa

El método Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas físicos y matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. Usaremos este para determinar la posición del centro de masa de un sólido descrito por la intersección de un toro y un cilindro dados por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Toro}: \ z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 \leq 1 \text{Cilindro}: \ (x-2)^2 + z^2 \leq 1$$

La densidad del sólido varía según la siguiente fórmula:

$$\rho(x,y,z) = 0.5 * (x^2 + y^2 + z^2)$$

1.2 Distribución w(x)

Utilizando el algoritmo de Metrópolis con una distribución proposición

$$xp = xn + \delta * r$$

Donde r es una variable aleatoria de la distribución uniforme U(-1, 1). La variable δ un valor fijo que acepta aproximadamente 50% de las proposiciones. Obtener una muestra aleatoria de números con la distribución (no normalizada) dada por la siguiente ecuación:

$$W(x) = 3.5 \times \exp\left(\frac{-(x-3)^2}{3}\right) + 2 \times \exp\left(\frac{-(x+1.5)^2}{0.5}\right)$$

2 Procedimiento

2.1 Centro de masa

El método Montecarlo designa un generador de puntos aleatorios y uniformemente distribuidos en un volumen mínimo que contenga el volumen de la intersección del toro y cilindro, posterior a eso, los puntos que esten en la intersección se utilizan para calcular el centro de masa con la fórmula genérica

$$r_{\text{cm}} = \frac{\int \mathbf{r}\ dm}{\int dm} = \frac{\int_V \mathbf{r}\ \rho(\mathbf{r})\ dV}{M}$$

De la última igualdad, el numerador lo podemos dividir en 3 integrales, cada una para la coordenada x, y o z de un punto en el espacio y el denominador corresponde simplemente a la integración de la densidad en el volumen. Es decir:

$$r_{\text{cm}} = \frac{\int_V\ x\ \rho(\mathbf{r})\ dV\ + \int_V\ y\ \rho(\mathbf{r})\ dV\ + \int_V\ x\ \rho(\mathbf{r})\ dV}{\int_V \rho\ dV}$$

$$r_{\text{cm}} = \frac{X_{cm} + Y_{cm} + Z_{cm}}{\int_V \rho(r)\ dV}$$

Donde X_{cm}, Y_{cm} y Z_{cm} corresponden a las coordenadas del centro de masa. Por otra parte el volumen mínimo a elegir dependerá de la instersección, si analizamos primero la coordenada z, observamos que $z^2 \leq 1$ por ende z esta entre -1 y 1. El cilindro tiene un eje en x = 2 y su radio es de 1, por lo que x esta entre 1 y 3. De esta forma podemos acotar z al intervalo -4 y 4. Entonces el volumen mínimo es de $32cm^3$, por último con variables aleatorias con distribución uniforme dentro de este volumen si pregunte si estan o no en la intersección.

El error de la estimación corresponde a la desviación estándar de los datos calculados.

2.2 Distribución w(x)

Para generar la muestra aleatoria usando el algoritmo de Verlet a partir de una posición x_0, es necesario darse una posición x_n para determinar la x_{n+1}, se siguen entonces los siguientes pasos:

1. Generar un número aleatorio "a", en este caso de una distribución uniforme

2. Dado un delta aribitrario, probar el criterio de metropolis para decidir si este valor se acepta o rechaza

3. Si se acepta el valor $x_{n+1} = a$ de lo contrario $x_{n+1} = x_n$

El criterio de metropolis consiste en comparar las probabilidades mediante $W(a)/W(x_n) > b$ donde b es una número aleatorio perteneciente a una distribución U(0,1). Este experimento se realiza 10^7 veces y nuestro "a" será igual a $xn + \delta * r$ que es propuesto por enunciado. Para escoger el delta se crea una iteración que almacene los puntos calculados, si estos son 50% aceptados entonces aceptamos el delta.

3 Resultados

3.1 Centro de masa

Coordenadas centro de masa en x: 2.08012373343 +/- 0.00346122322016
Coordenadas centro de masa en y: -0.00355683421239 +/- -0.00380385002343
Coordenadas centro de masa en z: -0.000477170110676 +/- -0.000684355478088

3.2 Distribución w(x)

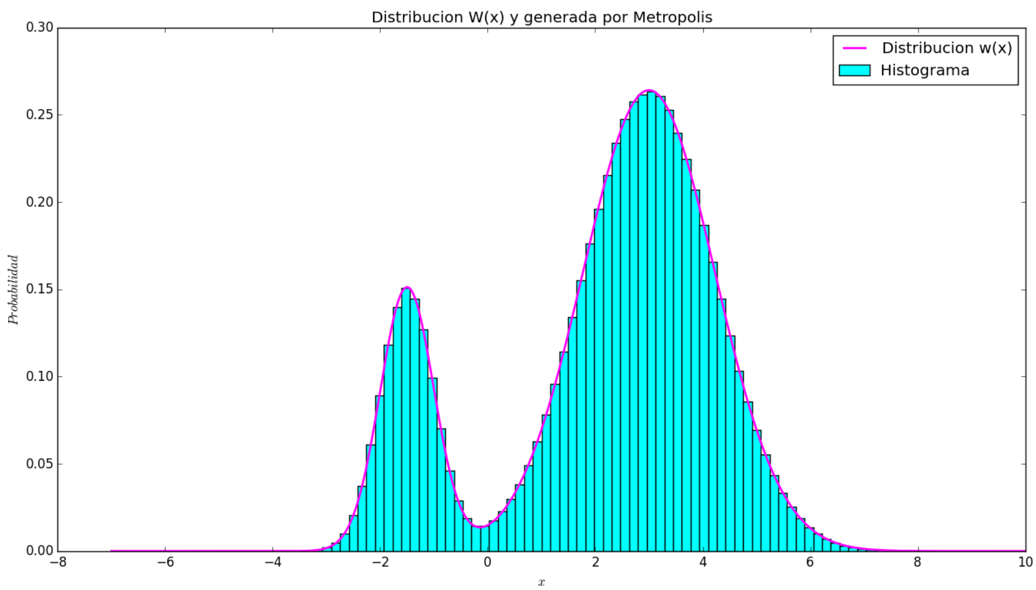

Figure 1: Gráfico con distribución w(x) e histogramas que muestran como se distribuye la muestra generada mediante el algoritmo de Metrópolis

4 Conclusiones

4.1 Centro de masa

Los resultados encontrados son aceptados ya que dada la simetría del problema se esperaba por ejemplo que las coordenada z e y fuesen nulas. Por ende el método de integración Monte Carlo es aceptado.

4.2 Distribución w(x)

El algoritmo de metropolis genera una función bastante similar a la real, esto se deduce del gráfico que muestra errores mínimos, los cuales en todo caso se pueden controlar, esto puede ser fijando un paso distinto ya que este depende netamente de rechazar o no la muestra retornada.