

Métodos matemáticos para la ciencia e Ingeniería: Técnicas bayesianas aplicadas a modelos de una línea de absorción

Fernanda PÉREZ (*rut: 18.769.232-6*)

14 de Diciembre, 2015

1 Introducción

Se busca modelar una línea de absorción, de dos formas distintas, de una observación espectroscópica utilizando técnicas Bayesianas, tomando en cuenta las siguientes simplificaciones:

- El nivel del continuo es una constante de valor $10^{-16}[\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{cm}^{-2}]$.
- La longitud de onda del centro de la línea es 6563\AA .

Los datos del espectro a modelar se encuentran en el archivo **espectro.dat**, en unidades de flujo por unidad de frecuencia $f_\nu [\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{cm}^{-2}]$ vs. longitud de onda en $[\text{\AA}]$.

Los modelos a realizar son:

- **M1** : Línea gaussiana simple (2 parámetros libres: A, σ).
- **M2** : Línea gaussiana doble (4 parámetros libres: $A_1, \sigma_1, A_2, \sigma_2$).

Para cada uno de los modelos anteriores se busca estimar, utilizando métodos Bayesianos, los parámetros y sus intervalos de 68% credibilidad.

Finalmente, se pide decidir cuál de los dos modelos representa mejor a los datos.

2 Procedimiento

2.1 Teorema de Bayes

Dado un modelo M , un conjunto de datos \vec{d} y un set de parámetros $\vec{\theta}$, se tiene que:

$$\overbrace{P(\vec{\theta} | \vec{d}, M)}^{\text{Prob. buscada}} = \frac{\overbrace{P(\vec{d} | \vec{\theta}, M)}^{\text{Verosimilitud}} \cdot \overbrace{P(\vec{\theta} | M)}^{\text{Prob. a priori}}}{\underbrace{P(\vec{d} | M)}_{\text{Cte. de normalización}}} \quad (1)$$

Dado a que estamos trabajando en espacios continuos, ocupamos densidades de probabilidades en vez de probabilidades, siguiendo la idea de la Ecuación (1).

Se supone que los errores en la muestra son gaussianos y constantes a lo largo del espectro. Por lo tanto, el *ruido* es determinado como la desviación estándar de los datos con respecto del valor constante del nivel del continuo.

Para poder utilizar la Ecuación (1) es necesario determinar *adivinanzas* de los parámetros. Observando la gráfica y experimentalmente, se determinaron los siguientes valores, con los anchos los anchos respectivos de las distribuciones (δ , en las mismas unidades que los parámetros):

- $A = 9 \cdot 10^{-17} [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$, $\delta_A = 5 \cdot 10^{-17}$
- $\sigma = 4 [\text{\AA}]$, $\delta_\sigma = 3$
- $A_1 = 4 \cdot 10^{-17} [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$, $\delta_{A_1} = 10 \cdot 10^{-17}$
- $\sigma_1 = 2.5 [\text{\AA}]$, $\delta_{\sigma_1} = 1$
- $A_2 = 5 \cdot 10^{-17} [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$, $\delta_{A_2} = 2 \cdot 10^{-17}$
- $\sigma_2 = 8.5 [\text{\AA}]$, $\delta_{\sigma_2} = 3$

Para el espacio de los parámetros se crearon grillas (utilizando *numpy.mgrid*) de tamaños tales que dentro de ellas quedara la zona relevante de las variables libres:

- Grilla M1: *np.mgrid*[0.73 : 0.8 : 201*j*, 3.4 : 4 : 201*j*]
- Grilla M2: *np.mgrid*[0.34 : 0.5 : 51*j*, 2 : 3 : 51*j*, 0.38 : 0.6 : 51*j*, 6 : 11 : 51*j*]

Para el cálculo de los intervalos de credibilidad se utilizó el hecho de que las curvas se ven bastante simétricas, por lo que se puede partir desde el valor de la esperanza del parámetro y luego ir abarcando espacio hacia ambos lados hasta alcanzar un 68% del área bajo la curva (densidad de probabilidad).

Finalmente, para decidir cuál modelo representa mejor a los datos, se utiliza la siguiente relación:

$$\frac{f_{\vec{d}|M_i}(\vec{d} | M_i)}{f_{\vec{d}|M_j}(\vec{d} | M_j)} > 1 \implies \text{El modelo } M_i \text{ es mejor} \quad (2)$$

Se re-escalaron los datos de f_v multiplicándolos por 10^{16} de manera de evitar problemas con la función exponencial ante parámetros tan cercanos a 0.

3 Resultados

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, se obtiene que:

$$ruido = 1.633 \cdot 10^{-19} [ergs^{-1} Hz^{-1} cm^{-2}] \quad (3)$$

3.0.1 Modelo 1

En la Figura 1 se aprecia el ajuste de los datos utilizando el modelo 1.

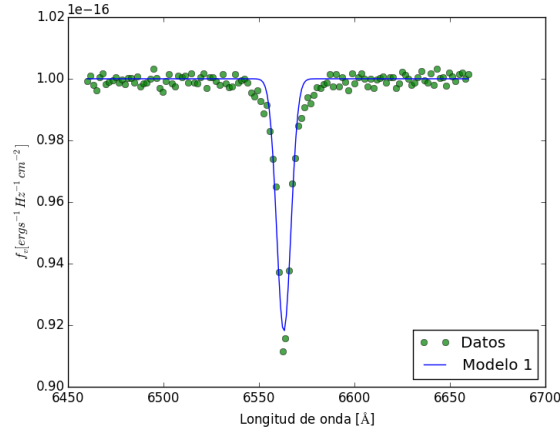


Figura 1: Ajuste de los datos del archivo *espectro.dat* utilizando el modelo 1.

Se obtiene:

Un valor de la esperanza de A de $7.616 \cdot 10^{-17} [ergs^{-1} Hz^{-1} cm^{-2}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(7.515 \cdot 10^{-17}; 7.72 \cdot 10^{-17}) [ergs^{-1} Hz^{-1} cm^{-2}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 2.

Un valor de la esperanza de σ de $3.703 [\text{\AA}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(3.64; 3.77) [\text{\AA}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 3.

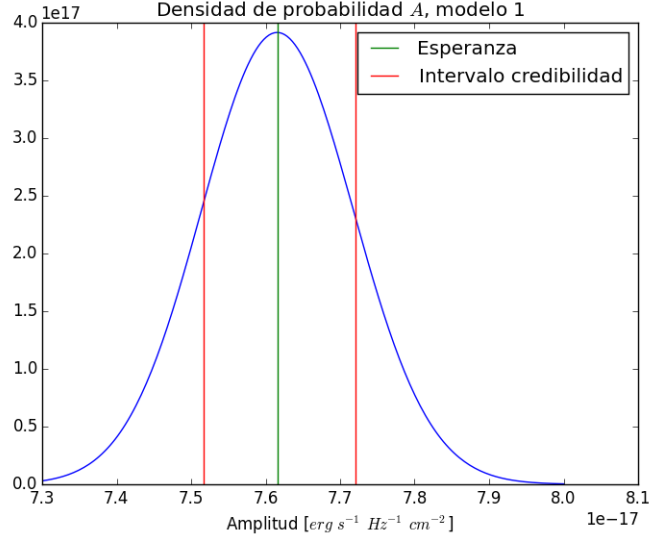


Figura 2: Densidad de probabilidad de la amplitud A , utilizando el modelo 1. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

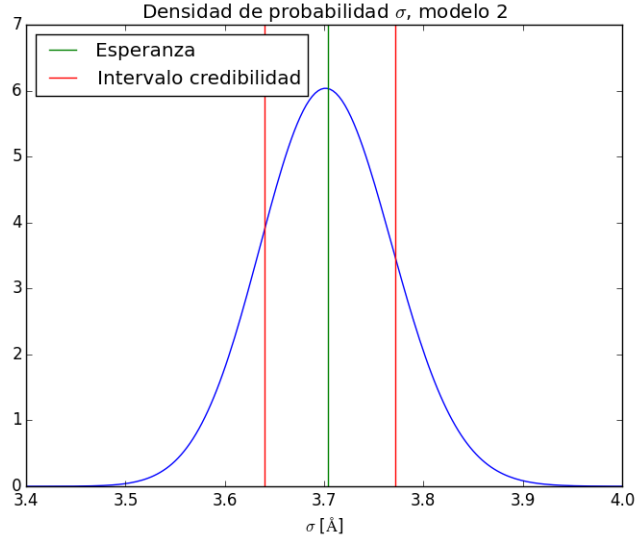


Figura 3: Densidad de probabilidad de σ , utilizando el modelo 1. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

3.0.2 Modelo 2

En la Figura 4 se aprecia el ajuste de los datos utilizando el modelo 2.

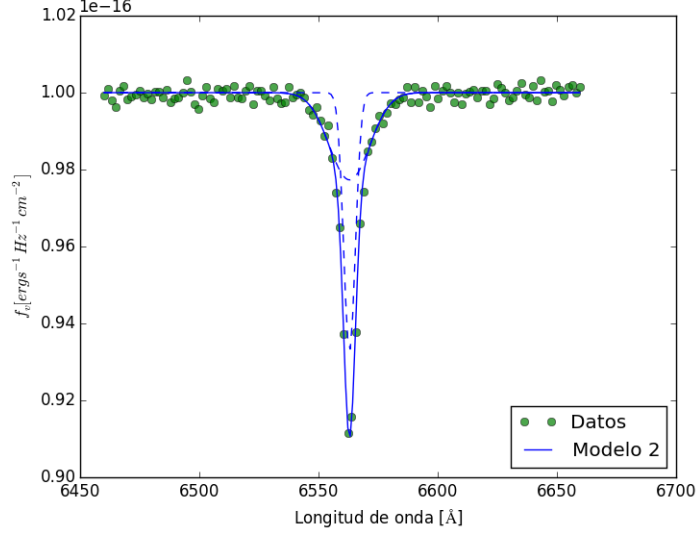


Figura 4: Ajuste de los datos del archivo *espectro.dat* utilizando el modelo 2.

Se obtiene:

Un valor de la esperanza de A_1 de $4.13 \cdot 10^{-17} [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(3.88 \cdot 10^{-17}; 4.39 \cdot 10^{-17}) [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 5.

Un valor de la esperanza de σ_1 de $2.46 [\text{\AA}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(3.64; 3.77) [\text{\AA}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 6.

Un valor de la esperanza de A_2 de $4.833 \cdot 10^{-17} [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(4.592 \cdot 10^{-17}; 5.119 \cdot 10^{-17}) [\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-2}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 7.

Un valor de la esperanza de σ_2 de $8.5 [\text{\AA}]$, con el intervalo de credibilidad al 68% $(7.9; 9.1) [\text{\AA}]$. Lo anterior puede ser observado en la Figura 8.

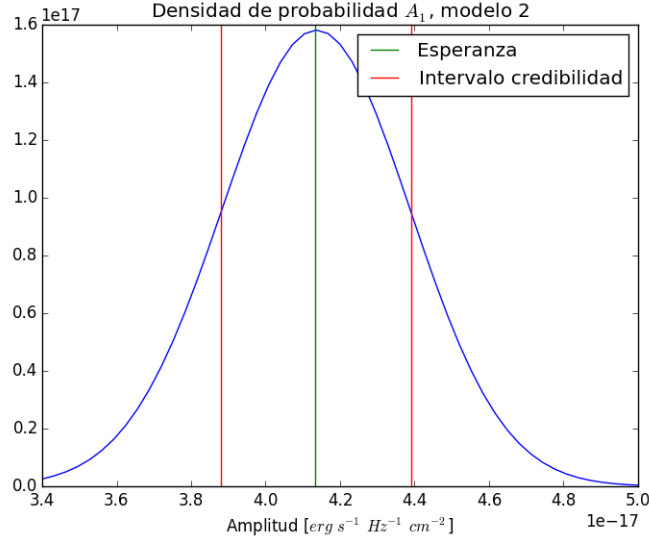


Figura 5: Densidad de probabilidad de la amplitud A_1 , utilizando el modelo 2. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

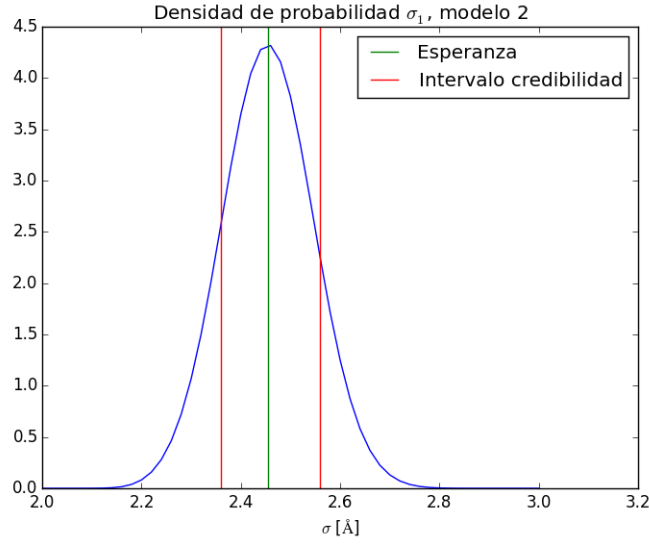


Figura 6: Densidad de probabilidad de σ_1 , utilizando el modelo 2. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

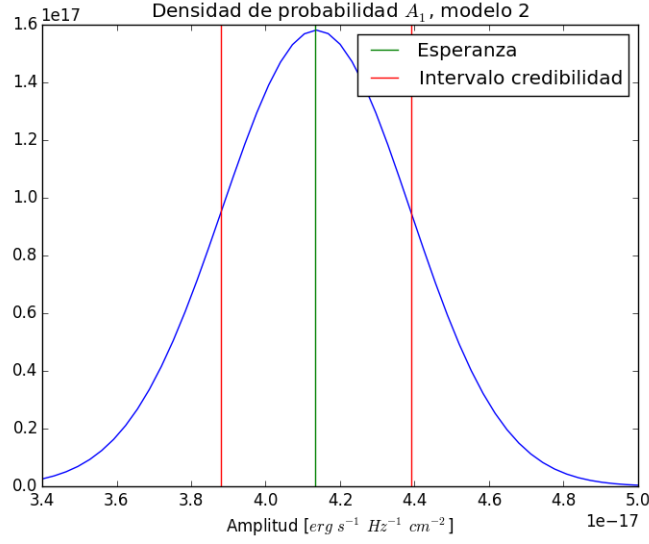


Figura 7: Densidad de probabilidad de la amplitud A_2 , utilizando el modelo 2. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

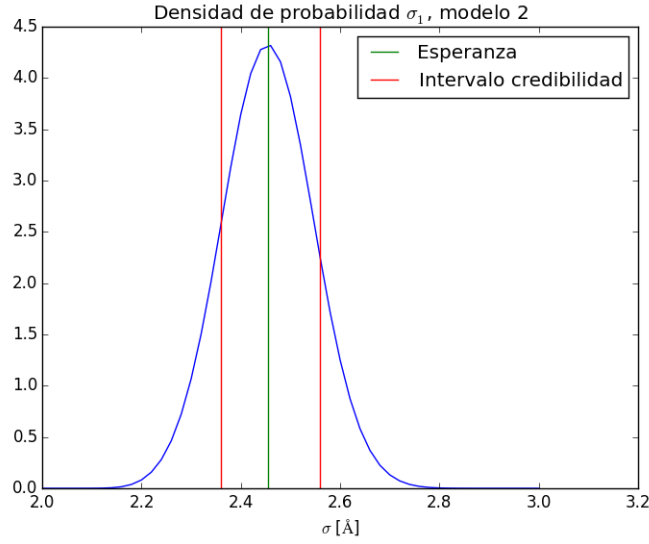


Figura 8: Densidad de probabilidad de σ_2 , utilizando el modelo 2. En verde se muestra el valor esperado (esperanza del parámetro) y en rojo los extremos del intervalo de credibilidad al 68%.

3.0.3 Comparación

En la Figura 9 se observan ambos ajustes al mismo tiempo.

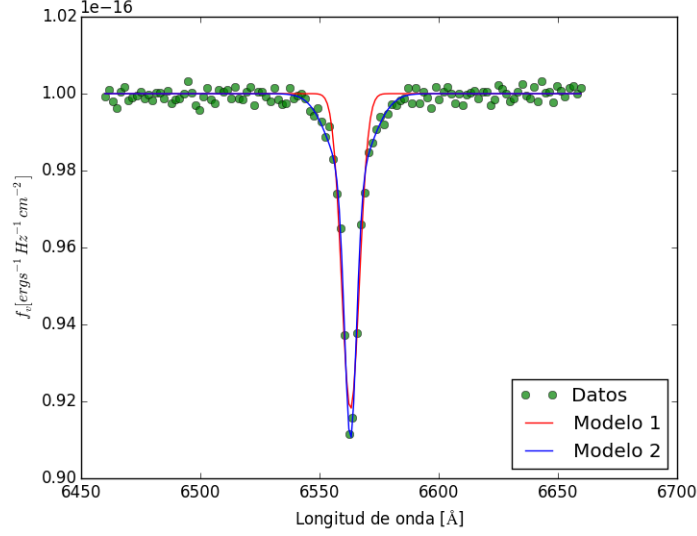


Figura 9: Ajuste de los datos del archivo *espectro.dat* utilizando ambos modelos.

La división de la Ecuación (2):

$$\frac{f_{\vec{d}|M_1}(\vec{d} | M_1)}{f_{\vec{d}|M_2}(\vec{d} | M_2)} = 3.289 \cdot 10^{-63} \quad (4)$$

4 Conclusiones

Los valores obtenidos para cada parámetro, utilizando técnicas bayesianas, hace sentido al observar las gráficas obtenidas.

Los intervalos de credibilidad del Modelo 2 resultan ser más grandes que los del Modelo 1, lo que nos lleva a pensar que el Modelo 2 es mejor. Esto se aprecia también al observar la Figura 9, en donde a simple vista se ve que la curva azul se ajusta de mejor manera a los puntos (datos). Finalmente, con el resultado de la Ecuación (4), queda claro que el Modelo 2 resulta representar de mejor forma a los datos.