# 常微分方程（东南大学高等数学(A)期末复习）

Wednesday, January 3, 2018　　2:22 PM

张建东
计算机科学与软件工程学院

1、未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数导数的最高阶数称为微分方程的**阶**。

2、称问题$\begin{cases}F\langle x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\rangle\\ y(x_0)=y_0,y'^{(x_0)}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}\end{cases}$ 为Cauchy问题或初值问题。

3、微分方程的不含任意常数的解，称为**特解**。

微分方程的图形称为微分方程的**积分曲线**。（通解图形为曲线族，特解为一条曲线）

Ⅰ、【题型一验证所给函数是否为微分方程的解】　直接求导代入公式

相似题型：求函数所满足的微分方程、根据初始条件确定任意常数

4、形如$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$的方程称为可分离变量的微分方程，采用**分离变量法**求其通解。

Ⅱ、【题型二：利用分离变量法求通解】类似题型：求通解、求满足初始条件的特解、应用题

7、一阶微分方程中，未知函数及其导数的最高次数都是一次，则称为**一阶线性微分方程。**

一般形式为：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$，用**常数变易法**得到通解公式$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)}$

相似的，若：$\frac{dx}{dy}+p(y)x=Q(y)$，用**常数变易法**得到通解公式$\boxed{x=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+c\right)}$

Ⅲ、【题型三：一阶线性微分方程】根据一阶线性微分方程的通解公式求解通解、特解.

Ⅳ、【题型四：求解伯努利(Bernoulli)方程】一阶微分方程$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$

$\boxed{\text{用变量代换}z=y^{1-n}\text{可化为Z的一阶线性方程}\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)Q(x)}$

Ⅴ、【题型五：求解齐次微分方程的通解与特解】形如$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的一阶微分方程称为齐次方程。

$\boxed{\text{令}u=\frac{y}{x}\text{则}\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\text{代入原方程得}u+x\frac{du}{dx}=f(u)\text{即}\frac{du}{f(u)-u}=\frac{1}{x}dx}$

Ⅵ、【题型六：可降阶的高阶微分方程1】形如$y^{(n)}=f(x)$的微分方程，对原方程积分n次，便可以求出通解。

【题型六：可降阶的高阶微分方程2】形如$y''=f(x,y')$的微分方程，特点是不显含未知函数y

$\boxed{\text{令}y'=z\text{则}y''=z'=\frac{dz}{dx}\text{从而原方程化为}\frac{dz}{dx}=f(x,z)\text{，设}y'=\varphi(x,C_1)\text{积分便得}y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2}$

【题型六：可降阶的高阶微分方程3】形如$y''=f(y,y')$的微分方程，特点是不显含自变量$x$

$\boxed{\text{令}z=z(y)=y'\text{则}y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}\text{从而原方程化为}z\frac{dz}{dy}=f(y,z)\text{，设}y'=\varphi(y,C_1)\text{积分便得}x=\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}+C_2}$

8、若在n阶微分方程$F\langle x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\rangle=0$中，关于未知函数y及其各阶导数的最高次数都是一次的则称为n阶线性微分方程

一般形式为$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x)$函数$f(x)$称为方程的自由项。

若$f(x)\equiv 0$，则称方程为**n阶线性齐次微分方程**，反之则称为**n阶线性非齐次微分方程**

9、如果$y_1(x),y_2(x)$为二阶线性齐次微分方程的两个解，则$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$仍为解

如果$y_1(x),y_2(x)$为二阶线性非齐次微分方程的两个解，则$y_1(x)-y_2(x)$仍为解

10、对于定义在区间I上的m个函数$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$,若存在m个不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使当x∈ I **时**，有

$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_my_m(x)=0$,则称$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$在区间$I$上**线性相关**，否则称**线性无关。**

Ⅶ、【题型七：判断函数间的线性相关性】两个函数：函数之比是否为常数，判断m(m>=3)个函数线性相关性有Wronski(朗斯基)行列式：

$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x)&\cdots&y_m(x)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ y_1^{m-1}(x)&\cdots&y_m^{m-1}(x)\end{vmatrix}$ $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$线性相**关的充要条件**是$W(x)\equiv 0$

Ⅷ、【题型八：求二阶线性微分方程的通解】设$y_1(x),y_2(x)$为二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解，

$y^*(x)$是二阶线性非齐次微分方程的一个特解，则有

（1）二阶线性齐次微分方程的通解为：$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)(C_1,C_2\text{为任意常数})$

（2）二阶线性非齐次微分方程的通解为：$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)(C_1,C_2\text{为任意常数})$

⇒（3）已知二阶线性齐次微分方程的一个非零特解:$y_1$,则设$y_2=\mu(x)y_1(x)$待定求解。

″

11、设$y_i^*(i=1,2)$是方程$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_i(x)(i=1,2)$的特解，
则$y_1^*+y_2^*$是方程$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解。该方法为叠加原理，有助于求非齐次方程特解。

12、二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为$ay''+by'+cy=0$,其中$a,b,c$为常数，且$a\neq 0$

IX、【题型九：求二阶常系数线性齐次微分方程的通解】(12)对应的特征方程为$ar^2+br+c=0$，特征根为$r_1,r_2$，通解y为：

| | |
|---|---|
| $\Delta>0$ | $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ |
| $\Delta=0$ | $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$ |
| $\Delta<0$ | $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$ |

推广至n阶常系数线性齐次微分方程

| | 特征根的情况 | 特解的情况 |
|---|---|---|
| 单根 | 实根$r$<br>共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | 一项$Ce^{rx}$<br>两项$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$ |
| 重根 | $k$重实根$r$<br>$k$重共轭复根<br>$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ | $k$项$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$<br>$2k$项$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\cdots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x$ |

X、【题型十：用待定系数法求二阶常系数线性非齐次微分方程的通解】一般形式为$ay''+by'+cy=f(x)$，其中$a,b,c$为常数，且$a\neq 0$

| $ay''+by'+cy=f(x)$<br>自由项<br>$f(x)$ | 分类讨论的情况<br>根的关系 | 非齐次方程特解<br>$y^*$<br>其中$Q_m(x)$为$x$的$m$次多项式，$L=\max\{m,n\}$ |
|---|---|---|
| | ① α不是特征方程的根 | $y^*=Q_m(x)e^{\alpha x}$ |
| $e^{\alpha x}p_m(x)$<br>其中$p_m(x)$为$x$的$m$次多项式 | ② α是特征方程的单根 | $y^*=xQ_m(x)e^{\alpha x}$ |
| | ③ α是特征方程的重根 | $y^*=x^2Q_m(x)e^{\alpha x}$ |
| $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ | ①<br>$\alpha\pm i\beta$<br>不是特征方程的根 | $y^*=e^{\alpha x}[Q_L(x)\cos\beta x+R_L(x)\sin\beta x]$ |
| | ②<br>$\alpha\pm i\beta$<br>是特征方程的单根 | $y^*=xe^{\alpha x}[Q_L(x)\cos\beta x+R_L(x)\sin\beta x]$ |

13、设非齐次方程$ay''+by'+cy=f(x)$对应的齐次方程$ay''+by'+cy=0$的通解为$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，
待定$C_1(x),C_2(x)$使得$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$为非齐次方程的特解，利用**常数变易法**求得

$$C_1(x)=\int\frac{-y_2(x)f(x)}{aW(x)}dx,\ C_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{aW(x)}dx,\text{其中}W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_1(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$

14、形如$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$的方程称为n阶Euler方程，
其中$a_i(i=0,1,\cdots,n)$为常数，特点是：$k$阶导数$y^{(k)}$的系数为$a_{n-k}x^k(k=0,1,\cdots,n)$

小结：二阶欧拉方程$x^2y''+a_1xy'+a_2y=f(x)$的解法

令$x=e^t$化为y关于t的二阶常系数线性微分方程，

利用算子$D=\frac{d}{dt}$，把原方程写成

$D(D-1)y+a_1Dy+a_2y=f(e^t)$，

化简得$[D^2+(a_1-1)D+a_2]y=f(e^t)$，

求解后用$t=\ln x$代回。

15、消元法与矩阵法*求解一阶常系数线性微分方程组：消元后与正常求解方法相同，矩阵法不要求掌握