1 定义

1. 常用集合

    - 整数集：$\mathbf{Z}$
    - 自然数集：$\mathbf{N}$
    - 正整数集：$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$
    - 有理数集：$\mathbf{Q}$
    - 正有理数集：$\mathbf{Q}_+$ 或 $\mathbf{Q}^*$
    - 实数集：$\mathbf{R}$
    - 正实数集：$\mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{R}^*$
    - 复数集：$\mathbf{C}$
    - n 维实数集：$\mathbf{R}^n$
    - 在某集合 I 上连续的函数的集合：C_I
    - 在某集合 I 上 n 阶可导的函数的集合：D_I^n
    - 在某集合 I 上 n 阶导数连续的函数的集合：$C_I^{(n)}$
    - 在某集合 I 上 Riemann 可积的函数的集合：R_I

2. 邻域
    对于实数 a,a 的**邻域** $N(a)$ 为以 a 为元素之一的一个区间。
    以 a 为右端点的一个区间 $N_-(a)$ 称为 a 的**左邻域**。
    以 a 为左端点的一个区间 $N_+(a)$ 称为 a 的**右邻域**。

3. 去心邻域
    对于实数 a,a 的**去心邻域** $\mathring{N}(a)$ 为 a 的邻域去除 a 这个点。

4. 集合的界
    设 $A \subset \mathbf{R}$,$A \neq \varnothing$, 若 $\exists L \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \leq L$(或 $x \geq L$), 则称数集 A **有上 (下) 界**，并称 L 为 A 的一个**上界（下界）**，若数集 A 既有上界又有下界，则称 A **有界**，否则称 A **无界**。
    Remark
    集合的界不一定唯一。比如说，对于闭区间 $[0,1]$, 它的上界是区间 $[1,+\infty)$.

5. 集合的确界
    设 $A \in \mathbf{R}$,$A \neq \varnothing$, 如果存在数 β(或 α) 满足下列条件：

    - $\forall x \in A$, 有 $x \leq \beta$(或 $x \geq \alpha$)
    - $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A$, 使 $x_0 > \beta - \varepsilon$(或 $x_0 < \alpha + \varepsilon$)

    则称 β 为数集 A 的**上确界** (或 α 为 A 的**下确界**)，记为 $\beta = \sup A$(或 $\alpha = \inf A$).
    Remark
    集合的确界不一定在集合之内能被取到。比如说，开区间 $(0,1)$ 的上确界是 1，却不在集合之内。
    与集合的上下确界对应的，集合的**最大值**、**最小值**，分别记作 $\max A$,$\min A$.

6. 映射

设 A, B 是两个非空的集合，若存在一个对应法则 f, 使得对于每个 $x \in A$, 按照 f, 在 B 中有唯一的一个元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**。记作 $f: A \to B$.

称 y 为 x 在映射 f 下的**像**, x 为 y 在映射 f 下的一个**原像**, 集合 A 为映射 f 的**定义域**。对于任意 A 的非空子集 X, 集合 $\{y|y = f(x), x \in X\}$ 称为 A 在映射 f 下的**像**，记作 $f(X)$. 集合 $f(A)$ 称为映射 f 的**值域**。

设有映射 $f: A \to B$:

- 若 $B = f(A)$, 则称 f 是 A 到 B 的**满射**
- 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 A 到 B 的**单射**
- 若 f 既是满射又是单射，则称 f 是 A 到 B 的**一一映射**

设有一一映射 $f: A \to B$, 则我们定义以下映射：它将每个 $y \in B$ 对应于 $x \in A$, 其中 x 满足 $f(x) = y$, 则称该映射为 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}.

Remark

- 映射的定义域只需要是非空集合，不一定是数集。
- 原像不一定唯一。

7. 函数

设 $A \in \mathbf{R}^m$,$B \in \mathbf{R}^n$, 则称映射 $f: A \to B$ 为定义在 A 上的 m **元** n **维函数**，通常简记为 $y = f(x), x \in A$.

称 $x(x \in A)$ 为函数的**自变量**，$y(y \in f(A))$ 为函数的因变量，$f(x)$ 为函数 f 在 x 处的**函数值**，A 为函数的**定义域**，$f(A)$ 为函数的**值域**。

特别地，当 $m = n = 1$ 时，称 f 为**一元函数**，简称为**函数**。

8. 函数的性质

- 有界性

  设函数 f 的定义域为 D, 集合 $X \in D$, 若 $\exists L \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in X$, 都有

$$f(x) \leq (\geq) L,$$

  则称函数 f 在 X 上**有上 (下) 界**，并称 L 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**上 (下) 界**。

  若函数 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称函数 f 在 X 上**有界**，否则，称 f 在 X 上**无界**。

  Remark

  函数的有界和函数值有限并不完全一致。存在一个处处有限 (即每一点上都有定义) 的函数，但它无界：

$$f(x) = \begin{cases} q & x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$

  其中 $(p, q) = 1$ 代表 p 和 q 互质。再举一例：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

- 单调性
  设函数 f 的定义域为 D, 集合 $I \in D$, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，总有
  $$f(x_1) \leq f(x_2)(\text{或} f(x_1) \geq f(x_2)),$$
  则称函数 f 在 I 上是**单调增加 (或单调减少)** 的。
  若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时，总有
  $$f(x_1) < f(x_2)(\text{或} f(x_1) > f(x_2)),$$
  则称函数 f 在 I 上是**严格单调增加 (或严格单调减少)** 的。
- 凹凸性
  设函数 f 的定义域为 D, 集合 $I \in D$, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$,$\forall \lambda \in [0,1]$, 总有
  $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)(\text{或} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)),$$
  则称 f 在 I 上**上凸（或下凸）**。
  若 $\forall x_1, x_2 \in I$,$\forall \lambda \in [0,1]$, 总有
  $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)(\text{或} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)),$$
  则称 f 在 I 上**严格上凸（或严格下凸）**。
- 奇偶性
  设函数 f 的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x \in D$, 有
  $$f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x)),$$
  则称 $f(x)$ 是**偶函数 (奇函数)**。
- 周期性
  设函数 f 的定义域为 D, 若 $\exists T \in \mathbf{R}$, 使 $\forall x \in D$, 有 $x + T \in D$, 且
  $$f(x+T) = f(x),$$
  则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**。
  Remark
  存在没有最小正周期的函数:
  $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$
  一切有理数都是它的周期。

9. 常用函数

- 符号函数
  $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
  定义域为 $\mathbf{R}$.
  值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

- 取整函数

$$y = [x]$$

其中 $[x]$ 表示不超过 $[x]$ 的最大整数。定义域为 **R**.
值域为 **Z**.
Remark
若 x 为大于 0 的小数, 则 $[-x] = -[x] - 1$. 如：$[-2.5] = -3$.

- 幂函数

$$y = x^a, a \neq 0$$

- 有理函数

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

- 指数函数

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1$$

定义域为 **R**.
值域为 $\mathbf{R}_+$.

- 对数函数

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

定义域为 $\mathbf{R}_+$.
值域为 **R**.

- 三角函数
  - 正弦函数 (sine)

$$y = \sin x$$

定义域为 **R**.
值域为 $[-1.1]$.

  - 余弦函数 (cosine)

$$y = \cos x$$

定义域为 **R**.
值域为 $[-1.1]$.

  - 正切函数 (tangent)

$$y = \tan x$$

定义域为 $\left\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
值域为 **R**.

  - 余切函数 (cotangent)

$$y = \cot x$$

定义域为 $\{x | x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
值域为 **R**.

  - 正割函数 (secant)

$$y = \sec x$$

定义域为 $\left\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- ◦ 余割函数 (cosecant)

$$y = \csc x$$

定义域为 $\{x|x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- 反三角函数
  - ◦ 反正弦函数

$$y = \arcsin x$$

定义域为 $[-1, 1]$.
值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

  - ◦ 反余弦函数

$$y = \arccos x$$

定义域为 $[-1, 1]$.
值域为 $[0, \pi]$.

  - ◦ 反正切函数

$$y = \arctan x$$

定义域为 $\mathbf{R}$.
值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- 双曲三角函数
  - ◦ 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

定义域 $\mathbf{R}$.
值域 $\mathbf{R}$.

  - ◦ 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

定义域 $\mathbf{R}$.
值域 $[1, +\infty)$.

  - ◦ 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

定义域 $\mathbf{R}$.
值域 $(-1, 1)$.

- 反双曲三角函数
  - ◦ 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

定义域 $\mathbf{R}$.
值域 $\mathbf{R}$.

  - ◦ 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

定义域 $[1, +\infty)$.
值域 $\mathbf{R}$.

- ∘ 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

定义域 $(-1,1)$.

值域 **R**.

10. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**。

11. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所得到的函数称为**初等函数**。

Remark

一般来说，分段点处有定义且间断的分段函数都不是初等函数。

12. 数列的极限

- 设 $\{a_n\}$ 为一数列，a 为一常数，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*$, 使得 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ **以** a **为极限**，数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

- 设 $\{a_n\}$ 为一数列，如果 $\forall G>0,\exists N\in N^*$, 使得 $n>N$ 时，恒有

$$a_n>G,$$

则称数列 $\{a_n\}$ **以正无穷为极限**，数列 $\{a_n\}$ **趋于正无穷**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

- 设 $\{a_n\}$ 为一数列，如果 $\forall G>0,\exists N\in N^*$, 使得 $n>N$ 时，恒有

$$a_n<-G,$$

则称数列 $\{a_n\}$ **以负无穷为极限**，数列 $\{a_n\}$ **趋于负无穷**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Remark

- 在用定义证明数列极限的时候，注意要将 N 取为正整数（通常情况下是取整后 +2）。
- 尽管数列的极限是在 n 趋于正无穷时的极限，但在极限记号中仍记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 而非 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.
- 数列极限为正负无穷的时候，极限不存在，数列不收敛。

13. 函数的极限

- 设函数 f 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$, 则称当 $x\to x_0$ 时，函数 f **以** a **为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**极限**。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

- 设函数 f 在 x_0 的某左邻域 $N_-(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to x_0^-$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**左极限**。记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=a.$$

- 设函数 f 在 x_0 的某右邻域 $N_+(x_0)$ 内有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to x_0^+$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为函数 f 在 x_0 处的**右极限**。记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=a.$$

- 设函数 f 在 $x\geq\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使 $x>X$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to+\infty$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为 $x\to+\infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a.$$

- 设函数 f 在 $x\leq\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to-\infty$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为 $x\to-\infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a.$$

- 设函数 f 在 $|x|\geq\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$ 时有定义，a 为一常数。若 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon,$ 则称当 $x\to\infty$ 时，函数 f **以 a 为极限**，a 为 $x\to\infty$ 时, 函数 f 的**极限**。记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a.$$

类似地可以定义**以无穷、正无穷、负无穷为极限**。

Remark

- 函数在某点处的极限 (左极限、右极限) 与函数在该点处的函数值无关，甚至函数在该点处可以没有定义。可以从定义中的 “去心邻域”、“$0<|x-x_0|$” 看出。
- 极限为无穷、正无穷、负无穷时，极限不存在。
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a.$
- 在求极限时，一定要分清极限变量和其他变量。lim 符号下面的变量，一定不会在最终结果 (即不带 lim 符号的函数) 中出现。
- 一个比较常见的求左右极限的题目，是求含有 $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$ 和 $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$ 的极限.

14. 无穷小量

若 $\lim X=0,$ 则称 X 是该极限过程中的**无穷小量**。

设 X 和 Y 是同一极限过程中的两个无穷小量, 且 $Y\neq0.$

- 若 $\lim\dfrac{X}{Y}=0,$ 则称 X 是 Y 的**高阶无穷小**, 记为 $X=o(Y).$
- 若 $\lim\dfrac{X}{Y}=c\neq0,$ 则称 X 与 Y 是**同阶无穷小**，记为 $X=O(Y).$
- 若 $\lim\dfrac{X}{Y}=1,$ 则称 X 与 Y 是**等价无穷小**，记为 $X\sim Y.$
- 若 $\lim\dfrac{X}{Y^k}=c>0,$ 则称 X 是 Y 的 k **阶无穷小**，记为 $X=o(Y^k).$

Remark

这里的等号“=”都不是一般意义上的等号。更多意义上，这个等号可以理解成语言中的“是”。$X=o(Y)$ 即为“X 是 Y 的高阶无穷小”。这样的话，一些诸如 $o(x)+o(x)=o(x)$ 的公式才能理解得通。

15. 无穷大量

设函数 f 在 $\mathring{N}(x_0)$ 内有定义，若 $\forall G>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>G$, 则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的**无穷大量**。

Remark

- 若 f 为正无穷大量或负无穷大量,则其一定为无穷大量。
- 若 $\forall G>0,\exists\delta>0$, 存在 $0<|x-x_0|<\delta$，使 $|f(x)|>G$，则是 f 不一定是无穷大量。例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$\forall G>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{2[\frac{G}{2\pi}+1]\pi}$, 则取 $x=\dfrac{1}{G}<\delta$, 那么 $|f(x)|>G$, 但是若取 $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2[\frac{G}{2\pi}+1]\pi}$, 那么 $|f(x)|=0$. 故它是无穷大量。

16. 连续

设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在并且等于 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 f **在点** x_0 **处连续**，并称 x_0 为 f 的**连续点**。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 f **在** x_0 **处左连续**。

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 f **在** x_0 **处右连续**。

若 $\forall x\in(a,b)$, 函数 f 在点 x 处连续，则称 f **在开区间** (a,b) **内连续**。记作 $f\in C_{(a,b)}$.

若 f 在开区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称 f **在闭区间** $[a,b]$ **内连续**。记作 $f\in C_{[a,b]}$.

Remark

- 连续要求函数值存在。$f\in C_{[a,b]}$ 就代表 f 在闭区间 $[a,b]$ 内处处有定义。
- 函数在某点连续的等价定义为：$\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$.
- 集合 C_I 是所有在集合 I 上连续的函数的集合。是一个“函数的集合”。

17. 间断点

设函数 f 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果 f 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 f 的**间断点**。

- 第一类间断点

  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，但函数 f 在 x_0 处间断，则称 x_0 为**第一类间断点**。

  - 可去间断点

    若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, 则称 x_0 为**可去间断点**。

    Remark

    如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处。

- 跳跃间断点

  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 则称 x_0 为**跳跃间断点**。

  Remark

  如：$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 在 $x = 0$ 处。

- 第二类间断点

  若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为**第二类间断点**。

  - 无穷间断点

    若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, 则称 x_0 为**无穷间断点**。

    Remark

    如：$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处。

  - 震荡间断点

    若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在且函数值在 x 趋近 x_0 时在某个区间内来回震荡，则称 x_0 为**震荡间断点**。

    即存在两个极限为 x_0 的数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$, 且 $a_n \neq x_0, b_n \neq x_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = b$，且 $a \neq b$.

    Remark

    如：$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处。

Remark

- 间断点并不要求函数在该点处有定义。事实上，无论函数在该点处有无定义，该点都可以是间断点。
- 存在在实数集上处处间断的函数。如：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

- 存在在有理数点间断，无理数点连续的函数。如：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbf{N}, (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$

  其中 $(p, q) = 1$ 表示 p 和 q 互质。该函数在闭区间 $[0, 1]$ 内的有理数点间断，无理数点连续。证明如下：

  注意到 $\forall x_0 \in [0, 1]$, 在 x_0 的任意邻域 $N(x_0)$ 中的有理数有无穷多个，而 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\dfrac{1}{q} \geq \varepsilon$ 可得 $q \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$, 满足这样条件的有理数至多有 $\dfrac{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1\right)}{2}$ 个，为有限个。故可以找到一个 δ, 可以把这些有限个点去除后，满足 $f(x) < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$。故该函数在闭区间 $[0, 1]$ 内的有理数点间断，无理数点连续。

18. 导数

- 设函数 $y = f(x)$ 定义在 x_0 的某一邻域 $N(x_0)$ 内，$x_0 + \Delta x_0 \in N(x_0)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  存在, 则称 f **在点** x_0 **处可导**, 并称此极限值为 f **在点** x_0 **处的导数**。记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$.

Remark

导数的定义还有另一种等价形式：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某一左邻域 $N_-(x_0)$ 内且 $f(x_0)$ 有定义，$x_0+\Delta x_0 \in N_-(x_0)$，若左极限
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
存在，则称此极限为 f **在** x_0 **处的左导数**，并称 f **在** x_0 **处左可导**。记作 $f'_-(x_0)$.
- 设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某一右邻域 $N_+(x_0)$ 内且 $f(x_0)$ 有定义，$x_0+\Delta x_0 \in N_+(x_0)$，若右极限
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
存在，则称此极限为 f **在** x_0 **处的右导数**，并称 f **在** x_0 **处右可导**。记作 $f'_+(x_0)$.

  Remark

  左导数、右导数和导数的左极限、右极限并不相同。如：
$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x^2\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases},$$
  它在 0 处的右导数为
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} x\cos\frac{1}{x}=0,$$
  而它的导数在 0 处的右极限为 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

  但是，事实上，有如下定理：

  若函数 f 的导数在 x_0 处的左 (右) 极限存在，则 f 在 x_0 处的左 (右) 导数值就等于它的导数在 x_0 处的左 (右) 极限。证明用 Lagrange 中值定理即可。

  同时这个定理也说明了，函数的导数未必是连续函数。
- 若函数 f 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 f **在区间** (a,b) **内可导**。记作 $f\in D_{(a,b)}$.
- 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内每一点都可导，则称函数 f **在区间** $[a,b]$ **内可导**。记作 $f\in D_{[a,b]}$.
- 若函数 f 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 是定义在 I 上的一个函数，称它为 f 在 I 上的**导函数**，简称为**导数**。记作 $f'(x)$,y',$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

  Remark

  $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 这种记法的优越性在于可以表明对哪一个变量求导。

Remark

值得注意的是，$(f(g(x)))'$ 和 $f'(g(x))$ 不是一个东西。前者代表对 $f(g(x))$ 这个函数求微分的过程，而后者表示函数 f' 与 g 复合之后的函数。

19. 高阶导数

若 f 的 $n-1$ 阶导数在 $x\in I$ 处可导，则称 $f(x)$ **在** x **处** n **阶可导**，其 $n-1$ 阶导数在 $x\in I$ 处的导数称为 f **在** x **处的** n **阶导数**，记作 $f^{(n)}(x)$,$y^{(n)}$,$\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^{(n)}f(x)}{\mathrm{d}x^n}$.

若 f 在 I 上处处 n 阶可导，则称 $f(x)$ **在** I **上** n **阶可导**，记作 $f\in D^n_I$.$f^{(n)}(x)$ 称为 $f(x)$

在 I 上的 n 阶导函数，简称为 n **阶导数**。
若 $f^{(n)}(x)$ 在 I 上连续，则记作 $f \in C_I^{(n)}$.
Remark
由高阶导数的定义可知，若函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，则 f 在 x_0 的某邻域内 $n-1$ 阶可导。

20. 微分
设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，若由自变量的改变量 Δx 得到的相应的函数的改变量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为
$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$
其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量，则称函数 $f(x)$ **在点 x_0 处可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ **在点 x_0 处的微分**，记作 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0) = A\Delta x$ 或 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}f(x_0) = A\mathrm{d}x$.
若 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都可微，则称 $f(x)$ **在 I 可微**。
Remark
如果题目要求 $\mathrm{d}y$, 一定不要忘了在结果后加 $\mathrm{d}x$.

21. 高阶微分
若函数 $y=f(x)$ 在 I 上 n 阶可导，则定义它在 I 上的 n **阶微分**为
$$\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$
此时，称函数 f 在 I 上 n **阶可微**。
Remark
事实上，由 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 可知，$\mathrm{d}x^2$ 实际代表的是 $(\mathrm{d}x)^2$.

22. 函数的极值
设函数 f 定义在区间 I 上, $x_0 \in I$, 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall x \in \mathring{N}(x_0) \subset I$, 恒有 $f(x) < f(x_0)$(或 $f(x) > f(x_0)$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值 (或极小值)**。
Remark
一个函数的极值是一个数。

23. 函数的驻点
函数的导数等于 0 的点称为函数的**驻点**。
Remark
函数的驻点是一个数。

24. 函数的拐点
函数的凹凸性改变的点称为函数的**拐点**。
Remark
函数的拐点是一个点。一个二维坐标。

25. 函数的渐近线
在曲线上一点 M 沿曲线无限远离原点或无限接近间断点时，如果 M 到一条直线的距离无限接近于 0，则称这条直线为这条曲线的**渐近线**。
若渐近线的斜率存在，则称之为**斜渐近线**。特别地，若渐近线的斜率为 0，则称之为**水平渐近线**。
若渐近线的斜率不存在，则称之为**铅直渐近线**。

26. 曲率

函数 $y=f(x)$ 在 (x,y) 处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

函数 $y=f(x)$ 在 (x,y) 处的曲率半径为

$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

27. 定积分

设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，任取一组分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 记小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$. 任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 若极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，且极限值既与分点 x_i 的选取无关，又与 ξ_i 的选取无关，则称此极限值为函数**在区间 $[a,b]$ 上的定积分**，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这时也称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**，记作 $f\in R_{[a,b]}$. 称 $f(x)$ 为**被积函数**，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为**被积表达式**，x 为**积分变量**，$[a,b]$ 为**积分区间**，a 为**积分下限**，b 为**积分上限**。

Remark

- 定积分的结果是个数，与积分变量的选取无关。即：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

- 规定 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

  $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$

- 分点的任取性和 ξ_i 的任意性十分重要。如：

  对于函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases},$$

  在 $[0,1]$ 上取分点 $x_i=\frac{i}{n}$,$i=1,2,\ldots n$, 取 ξ_i 是 $[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$ 中的任意无理数，则

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=0$$

  但是如果取 $\xi_i=\frac{i}{n}$, 则

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=1$$

  故 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在。

- 定积分要求函数必须在 $[a,b]$ 内有定义。于是，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的定义域是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
- 按照定积分的定义，f 必然在 $[a,b]$ 内有界。
- 定积分的几何意义是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 以及 x 轴围成的各块图形面积的代数和（即需要考虑面积的正负）。

28. 原函数
设函数 f 在区间 I 上有定义。若存在 I 上的可微函数 F，使得对于任意 $x\in I$, 都有
$$F'(x)=f(x)\text{或}\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$
则称 F 是 f 在区间 I 上的一个**原函数**。
Remark
原函数指的是一个函数。一个函数的原函数可以有许多个。事实上，若 F 是 f 在区间 I 上的原函数，则 $F+C(C$ 为任意常数) 为 f 在 I 上的所有原函数。

29. 不定积分
函数 f 在区间 I 上的所有原函数的集合称为 f 在 I 上的**不定积分**。记作 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.
Remark
不定积分是一族函数。他们的差相差一个常数。所以在写不定积分的表达式时，如果等号一端没有积分号，那么一定要加上常数 C. 特别地，$\int f(x)\,\mathrm{d}x-\int f(x)\,\mathrm{d}x=C$

30. 反常积分

- 无穷区间上的反常积分
设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall b>a, f\in R_{[a,b]}$, 称极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 f **在无穷区间** $[a,+\infty)$ **上的反常积分**, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. 如果 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。如果 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。
类似地可以定义 $(-\infty,a]$ 上的反常积分。
定义
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
其中 c 为任一实数。
当反常积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛时，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。否则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。
Remark
  - 在 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义中，c 实际上只要存在一个即可，并不需要 $\forall c$.
  - 注意到 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的定义并不是 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$. 事实上，根据我们的定义，诸如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ 并不收敛。
  - 只有在 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 都存在的情况下，才成立等式
$$\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

- 无界函数的反常积分

  设函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义，在 a 的右邻域内无界，且 $\forall\varepsilon>0, f\in R_{[a+\varepsilon,b]}$, 则称 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为无界函数 f **在** $(a,b]$ **上的反常积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

  若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。反之，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

  类似地可以定义无界函数 f 在 $[a,b)$ 上的反常积分。

  若函数 f 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上有定义，而在点 c 的邻域内无界，定义无界函数 f 在 $[a,b]$ 上的反常积分

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

  若 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**。否则，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散**。

Remark

如果换元之后某个两侧都无意义的函数的反常积分的一侧有意义了，则不需要再找一个两个端点之间的数。如：

求 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

令 $t=\sqrt{x-1}$, 则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 故

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t(t^2+1)}2t\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\arctan t\big|_0^{+\infty}=\pi\end{aligned}$$

31. 微分方程

称含有未知函数及未知函数的导数 (或微分) 的等式 (或等式组) 为**微分方程 (或微分方程组)**。微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数，称为微分方程的**阶**。

未知函数是一元函数的微分方程，称为**常微分方程**。

设函数 $y=y(x)$ 在区间 I 上有定义。若当 $x\in I$ 时，有

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x))=0$$

恒成立，则称 $y=y(x)$ 是微分方程的一个**解**。

含有 n 个独立的任意常数的解称为该方程的**通解**。不含任意常数的解称为该方程的**特解**。

微分方程解的图形称为微分方程的**积分曲线**。

形如 $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$ 的方程称为 n **阶齐次微分方程**。

形如 $f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=f(x)$ 的方程称为 n **阶线性微分方程**。

Remark

- 微分方程的通解，不一定是微分方程全部的解。如：$y'=-y^2$ 的通解为 $y=\frac{1}{x+C}$, 而 $y=0$ 也是它的一个解。
- 我们求解微分方程的时候，不一定要将解化成 $y=f(x)$ 的形式。

2 定理

1. 有上（下）界的非空实数集一定有上（下）确界。

2. 数列极限的性质

   - 唯一性
     若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b_1, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b_2$, 则 $b_1 = b_2$
   - 有界性
     若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它有界。
   - 保序性
     若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $a < b$, 则 $\exists N \in N^*$, 使 $n > N$ 时，$a_n < b_n$.
     推论
     - 保号性
       若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > (<)0$, 则 $\exists N \in N^*$, 使 $n > N$ 时，$a_n < (>)0$.
     - 保序性逆定理
       若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $\exists N \in N^*$, 使 $n > N$ 时，$a_n \leq b_n$，则 $a \leq b$.
       Remark
       注意到这里的严格不等号变成了不严格的不等号。注意如下例子:
       $$a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$$
       a_n 恒小于 b_n, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

3. 数列极限的四则运算法则
   若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在：

   - $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
   - $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 时，
     $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

   Remark
   条件“$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在”十分重要。如
   $$\lim_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\cdot 0 = 0$$
   显然是错的。

4. 函数在某点处极限存在，当且仅当它在此点处的左极限等于右极限。
   Remark
   这个定理常被用来证明某点处极限不存在。如：

对于符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases},$$

我们有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$, 故它在 0 处极限不存在。

5. 函数极限的性质

- 唯一性

  在同一个极限的趋近过程中，若 $\lim f(x)=a_1$,$\lim f(x)=a_2$, 则 $a_1=a_2$

- 局部有界性

  若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则在 x_0 的某去心邻域内，函数 f 有界。

  若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则存在区间 $(m,+\infty)$, 使函数 f 在其中有界。

- 局部保序性

  若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ 且 $a<b$, 则在 x_0 的某去心邻域内，$f(x)<g(x)$.

  若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$ 且 $a<b$, 则存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$.

  推论

  - 局部保号性

    若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>(<)0$ 且 $a<b$, 则在 x_0 的某去心邻域内，$f(x)>(<)0$.

    若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a>(<)0$ 且 $a<b$, 则存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)>(<)0$.

  - 局部保序性逆定理

    若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$ 且在 x_0 的某去心邻域内, $f(x)<g(x)$, 则 $a\le b$.

    若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$ 且存在区间 $(m,+\infty)$，使 $x\in(m,+\infty)$ 时，$f(x)<g(x)$. 则 $a\le b$.

6. 函数极限的四则运算法则

   在同一个极限的趋近过程中，若 $\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 均存在：

- $$\lim(f(x)\pm g(x))=(\lim f(x))\pm(\lim g(x))$$

- $$\lim(f(x)g(x))=(\lim f(x))\,(\lim g(x))$$

- $\lim g(x)\neq 0$ 时，

  $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

7. 函数极限的复合运算法则

   设 $y=f(g(x))$ 是由 $y=f(u)$,$u=g(x)$ 复合而成的，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(x)=a$, 且在 x_0 的某去心邻域中 $g(x)\neq u_0$, 则

   $$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=a.$$

   Remark

- 这里“在 x_0 的某去心邻域中 $g(x)\neq u_0$”这个条件是必要的，给出例子：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases},g(x)=0$$

  那么 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0,\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.
- 函数极限的复合运算法则正是极限换元法的本质。

8. Heine 定理

- $\lim\limits_{x\to x_0}=a$ 的充分必要条件是对任何以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}(a_n\neq x_0)$, 相应的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 都收敛于 a, 即对任何数列 $\{a_n\}(a_n\neq x_0)$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}=a$ 的充分必要条件是对任何以正无穷为极限的数列 $\{a_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 都收敛于 a, 即对任何数列 $\{a_n\}$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a$.

推论

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充分必要条件是对于 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{n_k}\}$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.

Remark

- Heine 定理常被用作证明函数极限不存在的方法。如：

  对于极限

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

  取

$$x_n=\frac{1}{2\pi n},\lim_{n\to\infty}x_n=0$$
$$y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

  则有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0,\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=1.$$

  故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

- 对于推论，事实上，只要子列的下标能“充满”正整数集，命题依然成立。常用的结论是：
  $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充分必要条件是数列 $\{a_{2n}\}$ 和数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的极限存在且均为 a.

9. 夹逼准则

设函数 f,g,h 满足

- 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{N}(x_0)$ 内，有 $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}=a$.

Remark

- 这个定理在 $x\to+\infty,-\infty,\infty$ 时均成立

- 这个定理可以做两件事：证明极限存在和求极限的值
- 这个定理对于数列依然成立。在处理数列过程中，经常和放缩结合在一起被用来求一些求和的极限。如：

求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\right)$$

以夹逼准则做法如下：

$$\begin{aligned}&\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\\ \geq&\frac{n^2+n+1}{2n^3-n^2}+\frac{n^2+n+1}{2n^3-n^2}+\cdots+\frac{n^2+1}{2n^3-n^2}\\ =&\frac{n^2+n+1}{2n^2-n},\\ &\frac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\frac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\\ \leq&\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}+\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}+\cdots+\frac{n^2+n+n}{2n^3-1}\\ =&\frac{n^3+2n^2}{2n^3-1}\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2n^2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2}{2n^3-1}=\dfrac{1}{2}$
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^3-1}+\dfrac{n^2+n+2}{2n^3-4}+\dfrac{n^2+n+3}{2n^3-9}+\cdots+\dfrac{n^2+n+n}{2n^3-n^2}\right)$ 存在且等于 $\dfrac{1}{2}$.

10. 单调有界准则

单调有界数列必收敛。

即：若数列 $\{a_n\}$ 单调增加（或单调减少）且有上界（或下界），则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 必存在。

Remark

此定理一般用于与数学归纳法相结合证明递推数列的极限存在。如：

已知实数 $a>0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$,$x_1=\sqrt{a}$. 求证 $\{x_n\}$ 极限存在，并求其极限。

现用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界：

首先,$x_1<x_2$, 设 $x_{n-1}<x_n$, 则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加。

其次,$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$, 设 $x_n<\sqrt{a}+1$, 则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界.

根据单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 在等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$ 两边

同时取极限，得：

$$A^2 = a + A$$

解，得：

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2},$$

又由极限的保号性：$A \geq 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

11. Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得 $\forall m, n > N$, 有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Remark

- 另一种等价形式：
  数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使得 $\forall n > N$,$\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.
- Cauchy 收敛准则与用定义证明极限的不同在于，前者不需要知道极限值，而后者需要。
- Cauchy 收敛准则常用于判断级数的收敛性。如：

设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛。
对于 $\forall n, p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则 $\forall n > N$,$\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. 根据 Cauchy 收敛准则,$\{a_n\}$ 收敛。

- Cauchy 收敛准则亦可判断数列发散：
  $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件是 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, \exists m, n > N$, 使 $|a_n - a| < \varepsilon_0$.
  如：

设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 发散。
取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,$\forall N \in \mathbf{N}_+$, 取 $n > N, m = 2n > N$, 有

$$|a_m - a_m| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

故数列 $\{a_n\}$ 发散。

- 如果我们仅有条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, 是不可以得到 $\{a_n\}$ 收敛的。反例如：
  $a_n = \ln n$.

12. 无穷小量的性质

- 有限个无穷小量的和（或积）是无穷小量。
- 无穷小量与有界变量的积是无穷小量。

  Remark

  这条定理常被用于求一些无穷小量与三角函数乘积的极限。如：

  求极限
  $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}.$$
  由于 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小量，而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$ 为有界变量。故
  $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

- 若 X 是无穷小量，则 $\frac{1}{X}$ 是无穷大量。
- $\lim X=a$ 的充分必要条件是 $X=a+\alpha$, 其中 α 是无穷小量

  Remark

  这个定理将 “lim” 这个局部的变化与 “=” 这个全局的关系联系在了一起。
- 若 $X_1\sim X_2$,$Y_1\sim Y_2$, 且 $\lim\frac{X_2}{Y_2}$ 存在，则 $\lim\frac{X_1}{Y_1}=\lim\frac{X_2}{Y_2}$.
- 若 $X_1\sim X_2$,$Y_1\sim Y_2$, 且 $\lim X_2Y_2$ 存在，则 $\lim X_1Y_1=\lim X_2Y_2$.

  Remark

  等价无穷小不可用于加减，只可用于乘除。如：
  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$
  显然是错的。
- 设 $m,n\in\mathbf{N}_+$, 有：
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(x^m)+o(x^n)=o(x^l), l=\min(m,n)$
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n})$
  - 当 $x\to 0$ 时，$o(cx^n)=o(x^n)$

13. 无穷大量

- 有限个无穷大量之积为无穷大量
- 无穷大量与有界变量之和为无穷大量
- 若 X 是无穷大量，则 $\frac{1}{X}$ 为无穷小量

14. 函数 f 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 f 在点 x_0 处左连续且右连续。

    Remark

    这给了我们判断函数在某点是否连续的方法。即证明
    $$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$
    这个方法常用于分段函数在分段点处连续性的判定。

15. 连续函数的四则运算法则

    设函数 f 和 g 在点 x_0 处连续，则函数 $f\pm g$,$f\cdot g$,$\frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ 在 x_0 处连续。

16. 连续函数的复合运算法则
    设函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，$u_0=g(x_0)$, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 在 x_0 处连续。即：

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)).$$

    Remark

    - 这表明当 f 连续时，极限符号 “lim” 与函数符号 “f” 可以交换次序。
    - f 和 g 的连续都必不可少。见如下两个例子：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x=0\end{cases}, g(x)=x$$

      则 f 在 0 处不连续，g 在 0 处连续，但 $f(g(x))$ 在 0 处不连续。

$$f(x)=x, g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

      则 f 在 0 处连续，g 在 0 处不连续，但 $f(g(x))$ 在 0 处不连续。

17. 所有初等函数在其定义区间内都是连续的

18. 闭区间上连续函数的性质

    - 极值定理
      设函数 $f\in C_{[a,b]}$, 则存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$f(\eta)\le f(x)\le f(\xi).$$

      即 $f(\eta)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), f(\xi)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
      Remark
      - 这个定理表达了，在闭区间上连续的函数可以在这个闭区间内**取到**最小值、最大值。
      - 如果 f 在 $[a,b]$ 上不连续，则有反例如下：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=1\\ x & x\ne 1\end{cases},$$

        该函数在闭区间 $[0,1]$ 上无最大值。
      - 如果 f 在开区间 (a,b) 上连续，则有反例如下：

$$f(x)=x,$$

        该函数在开区间 $(0,1)$ 上连续，却没有最大值和最小值。
      - 注意到 ξ,η 均是属于闭区间 $[a,b]$。这个条件不能加强为开区间 (a,b). 如：

$$f(x)=x,$$

        该函数在闭区间 $[0,1]$ 上的最小值、最大值分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 处取到。
    - 有界性定理
      在闭区间上连续的函数必有界。

- 零点定理
  - 零点存在性定理
    若 $f \in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.
    Remark
    * 如果 f 在 $[a,b]$ 上不连续，则有反例如下：
    $$f(x)=\begin{cases} -x-1 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ x+1 & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases},$$
    该函数在闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)\cdot f(1)<0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。
    * 如果 f 在开区间 (a,b) 上连续，则有反例如下：
    $$f(x)=\begin{cases} -1 & x=0 \\ e^x & x\ne 0 \end{cases},$$
    该函数在闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)\cdot f(1)<0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。
    * 如果 $f(a)\cdot f(b)\le 0$, 则有反例如下：
    $$f(x)=x,$$
    该函数满足 $f\in C_{[0,1]}$, 且 $f(0)\cdot f(1)=0\le 0$, 但它在 $(0,1)$ 内无零点。
    * 如果 $f(a)\cdot f(b)\le 0$, 则需要分类讨论，然后证明 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有零点。
    * 如果是要求证明函数在某无穷区间（如 $(0,+\infty)$）上有零点, 可以求出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 再用极限的保号性找到一个函数值大于 0，或小于 0 的数，从而进行零点定理的判定。如：

    证明任何奇次数的实系数多项式方程必有零点。
    设 $f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+a_1x+a_0$,
    不妨设 $a_{2n-1}>0$, 那么由于
    $$f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}\left(1+\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_0}{a_{2n-1}}\frac{1}{x^{2n-1}},\right)$$
    故有
    $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,$$
    由极限的保号性：$\exists x_1>0$, 使得 $f(x_1)>0$;$\exists x_2<0$, 使得 $f(x_2)<0$. 又 $f\in C_{[x_2,x_1]}$, 故根据零点存在性定理，存在 $\xi\in(x_2,x_1)\subset(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=0$.

  - 零点唯一性定理
    若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,f 在 $[a,b]$ 上单调，则在开区间 (a,b) 内存在唯一的 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.
- 介值定理
  若 $f\in C_{[a,b]}$, 且 $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则 $\forall\mu\in[m,M]$,$\exists\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=\mu$.
  推论

若 $f \in C_{[a,b]}$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $f(x)$ 必可取得介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值。

Remark

介值定理最常用的结论为：

若 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

19. 函数 f 在 x_0 处可导的充要条件是 f 在 x_0 处既左可导，也右可导，且 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

    Remark

    此定理常用于判断分段函数在分段点处的可导性。

20. 如果函数 f 在某点处可导，那么 f 在该点处连续。

    Remark

    - 可导一定连续，但连续不一定可导。如：

    $$f(x) = |x|,$$

    该函数在 $x = 0$ 处连续，但不可导。

    - 如果函数 f 在某点处可导，那么 f 不一定在该点的邻域内连续。如：

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbf{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases},$$

    由导数的定义可知，该函数在 $x = 0$ 处可导，故其在 $x = 0$ 处连续，但它在任何区间内都不连续。

    - 如果函数 f 在区间内可导，那么 f 在区间内连续。此定理对开、闭区间同样适用。

21. 函数四则运算的求导法则

    设函数 u,v 在点 x 处可导，则他们的和差积商所产生的函数在点 x 处也可导（商的情况要求分母 $v \neq 0$）, 且下列公式成立：

    - $(u \pm v)' = u' \pm v'$
    - $(uv)' = u'v + uv'$
    - $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$

    Remark

    在求分段函数在分段点处的导数时，应该用导数的定义来求。

22. 复合函数求导法则

    设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y = f(u)$ 在对应点 $u = \varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导，且

    $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\varphi'(x) \text{或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

    Remark

    - 由此可以推出 $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}$.
    - 对于幂指函数 $y = u^v$, 它的导数可以通过把 y 变成 $e^{u \ln v}$，再用复合函数求导法则求导。

23. 反函数求导法则

设定义在区间 I 上的单调连续函数 $x=f(y)$ 在点 y 处可导，且 $f'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

Remark

此处的 $\dfrac{1}{f'(y)}$ 仍是关于 y 的表达式，需要再将 $y=f^{-1}(x)$ 代入。

24. 隐函数求导法则

设 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数，则有 $F(x,f(x))=0$, 再用复合函数求导法则对 x 求导即可。

Remark

- 如果题目要求是算在某点处的导数，则在两边同时求导后，先代入函数值，再移项化简。
- 隐函数求导法则的常见应用：对数求导法

  对于函数 $y=f(x)$, 两边取对数 $\ln y=\ln f(x)$, 再在两边同时求导，得：

  $$\frac{y}{y'}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

  这种方法可以用来算幂次特别复杂的函数的导数。

25. 参数方程求导法则

对于参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

所确定的函数，假设 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 内可导，函数 $x=\varphi(t)$ 具有连续的单调的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Remark

- 若要求二阶导，则

  $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

- 对于极坐标方程 $\rho=f(\theta)$, 由于 $x=\rho\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$, 所以转化成参数方程求导。

26. Leibniz 公式

设函数 u,v 都是 n 阶可导函数，则 uv 也是 n 阶可导函数，且有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

其中 $u^{(0)}=u$.

Remark

这则公式常用在多项式与一个函数的乘积的高阶导数上。由于 n 次多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的大于 n 阶的高阶导数都为 0，故可以将极高阶数的导数运算减少运算量。如：

若 $y = x^2 \sin x$, 求 $y^{(30)}$.
由于 $(x^2)' = 2x$,$(x^2)'' = 2$,$(x^2)^{(k)} = 0, k \geq 3$
$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$.
故由 Leibniz 公式：

$$\begin{aligned} y^{(30)} &= \mathrm{C}_{30}^{0} x^2 \sin(x + 15\pi) + \mathrm{C}_{30}^{1} 2x \sin(x + \frac{29}{2}\pi) + \mathrm{C}_{30}^{2} 2 \sin(x + 14\pi) \\ &= -x^2 \sin x + 60x \cos x + 870 \sin x \end{aligned}$$

27. 函数微分计算公式
函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处可导。此时，有

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

Remark

- 由此公式可知，自变量 x 本身的微分 $\mathrm{d}x = \Delta x$.
- 这个公式还可以用来算近似值。如：

求 $\ln 1.01$ 的近似值。
设 $f(x) = \ln x$, 那么 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. 故

$$\begin{aligned} \ln 1.01 - \ln 1 &= \frac{1}{1} \times (1.01 - 1) + o(1.01 - 1) \\ &\approx 0.01 \end{aligned}$$

所以 $\ln 1.01 \approx \ln 1 + 0.01 = 0.01$.

- 如果给出某个隐函数，要求算 $\mathrm{d}y$, 那么一般不需要先在隐函数两边求导，得出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 再算 $\mathrm{d}y$. 而是直接在隐函数两边求微分。

28. 微分的四则运算法则

- $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
- $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}, v \neq 0$

29. 一阶微分形式不变性
设有函数 $y = f(u)$, 则有

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u.$$

若 u 又是另一个变量 x 的可导函数 $u = g(x)$, 则

$$\mathrm{d}y = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, 故无论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y = f(u)$ 的微分都保持同一形式。这一性质称为一阶微分形式不变性。

Remark

高阶微分没有形式不变性。由高阶微分的定义可知，

$$\mathrm{d}^2 y = f''(u)\mathrm{d}u^2.$$

而若 u 是中间变量 $u=g(x)$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y&=\mathrm{d}\left(f'(u)g'(x)\mathrm{d}x\right)=\Big(f''(u)\left(g'(x)\right)^2+f'(u)g''(x)\Big)\,\mathrm{d}x^2\\&=f''(u)\mathrm{d}g(x)^2+g''(x)\mathrm{d}^2g(x)=f''(u)\mathrm{d}u^2+g''(x)\mathrm{d}^2u.\end{aligned}$$

两者差了一项 $g''(x)\mathrm{d}^2u$. 故高阶微分没有形式不变性。

30. Rolle 定理
若函数 $f\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$, 即 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.
Remark
从几何角度理解，即：端点值在同一条水平线上的函数在这个区间内一定有水平切线。

31. Lagrange 中值定理
若函数 $f\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b).$$

Remark

- 从几何角度理解，即：函数在区间内一定存在与端点连线平行的切线。
- Lagrange 中值定理真正地将函数值和它的导数值联系在了一起。有许多之前要用导数定义 + 极限保序性才能证明的定理，用 Lagrange 中值定理会方便许多。

32. Cauchy 中值定理
若函数 $f\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$, 函数 $g\in C_{[a,b]}\cap D_{(a,b)}$ 且 $\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

33. L'Hospital 法则
设 f 在开区间 $(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内满足下列条件：

- $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=0$
- f,g 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $g'(x_0)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

则有

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

Remark

- L'Hospital 法则对于 $x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to x_0$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$x\to\infty$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限都成立。
- L'Hospital 法则的条件有一条：f,g 在 x_0 的某邻域内可导。
这说明仅知道 f,g 在 x_0 处可导并不可以使用 L'Hospital 法则。故如果题目只告诉了函数在某一点处的导数值，并没说在该点的某邻域内可导，则不可以用 L'Hospital 法则。而应该用导数的定义或者带 Peano 余项的 Taylor 公式。
- 只有在所求极限分式的分子分母都趋于 0 或无穷大的时候才能用 L'Hospital 法则。如果是非零常数比 0 型等，则不能用 L'Hospital 法则。

34. Taylor 定理

设函数 f 在 x_0 处有 n 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+o\left((x-x_0)^n\right)$$

称此式为带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式。

设函数 f 在 x_0 的某邻域 $N(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间。称此式为带 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式。

设函数 f 在 0 处有 n 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+o\left(x^n\right)$$

称此式为带 Peano 余项的 n 阶 Maclaurin 公式。

设函数 f 在 0 的某邻域 0 内有 $n+1$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中 ξ 介于 x 和 0 之间。称此式为带 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 公式。

Remark

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式常被用来求极限。
- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式常被用来处理和高阶导数有关的中值定理的证明。有时还需要和介值定理相结合。需要注意的是 ξ 是与 x_0 有关的一个数。如：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续导数。求证：

存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处对 $f(x)$ 进行 2 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}f(x)=&f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\&+\frac{f'''(\xi)}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\end{aligned}$$

将 a 和 b 分别代入上式：

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

上面两式相减：

$$f(b)-f(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{48}$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数，故由介值定理：$\exists\xi\in(\xi_1.\xi_2)\subset(a.b)$, 使

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=f'''(\xi)$$

代入式子中可得：

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$$

35. Darboux 定理

若 f 在 $[a,b]$ 上可导，则：

- 若 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.
- 在 (a,b) 内 $f'(x)$ 可取介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任何值。

Remark

Darboux 定理看似是导数的零点存在性定理和介值定理，但事实上它并没有要求导数的连续性。

36. 函数单调性的判定

设函数 f 在 I 内可导，则 f 在 I 内单调增加 (或单调减少) 的充要条件是：

- $\forall x\in I,f'(x)\geq 0$(或 $f'(x)\leq 0$)
- $f'(x)$ 在 I 的任意一个部分区间里都不恒等于零

Remark

- 对于为什么是”$\geq$” 而不是 $>$, 参考 $f(x)=x^3$ 在 $(-1,1)$ 上的性态。
- 如果题目要判断一个函数的单调性，应该对其求导，然后求出其导数为 0 的点和导数不存在的点，再通过导数的正负号判断单调性。

37. 函数极值的判断

设函数 f 在点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$。则当 $f''(x_0)<0$(或 $f''(x_0)>0$) 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 (或极小值)。

38. 函数凹凸性的判断

设函数 f 在区间 I 内二阶可导，且 $\forall x>0,f''(x)\geq 0$(或 $f''(x)\leq 0$), 则 f 在区间 I 上下凸 (或上凸)。

设函数 f 在区间 I 内二阶可导，且 $\forall x>0,f''(x)>0$(或 $f''(x)<0$), 则 f 在区间 I 上严格下凸 (或严格上凸)。

Remark

如果题目要判断一个函数的凹凸性，应该对其求二阶导，然后求出二阶导为 0 的点和二阶导不存在的点，再通过二阶导数的正负号判断凹凸性。

39. 求函数渐近线的方法

曲线 $y=f(x)$ 在右方 (或左方，或左右双方) 以直线 $y=kx+b$ 为渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}(\text{或}k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\text{或}k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x})$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)(\text{或}b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)\text{或}b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx))$$

函数的铅直渐近线即函数的无穷间断点所在的垂直于 x 轴的直线。

40. 定积分与级数求和

设 $f \in R_{[0,1]}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

41. 可积的充分条件

- 若 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $f \in R_{[a,b]}$
- 若 f 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f \in R_{[a,b]}$

  Remark

  若有无限个间断点，则未必可积。如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q}\\ 0 & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

- 若 f 在 $[a,b]$ 上单调且有界，则 $f \in R_{[a,b]}$
- 若 $f \in R_{[a,b]}$, 则 f 改变有限个值以后仍然在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

42. 定积分的性质

- 线性性质

  若 $f,g \in R_{[a,b]}$,k_1,k_2 是任意常数，则 $k_1f+k_2g \in R_{[a,b]}$, 且

$$\int_a^b(k_1f+k_2g)\,\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f\,\mathrm{d}x+k_2\int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

- 可加性

  若 f 在某区间内可积, 则 f 在该区间的任意子区间内也可积，且 $\forall a,b,c$ 在此区间内,

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\int_a^c f\,\mathrm{d}x+\int_c^b f\,\mathrm{d}x.$$

  Remark

  a,b,c 的大小关系没有要求。

- 单调性

  若 $f,g \in R_{[a,b]}$, 且 $f(x)\le g(x), x\in[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

  推论

  若 $f \in R_{[a,b]}$, 则 $|f(x)| \in R_{[a,b]}$, 且 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$

- 估值定理

  若函数 $f \in R_{[a,b]}$, 且 $m\le f(x)\le M, x\in[a,b]$, 则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a).$$

  Remark

  当题目要求估计某定积分的值时，一般用这种方法。

- 积分中值定理

  若函数 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Remark

- 事实上，该定理可加强为"$\exists \xi \in (a,b)$". 对 $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 用 Lagrange 中值定理即可。
- 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 但不存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得 $f(\xi)(1-(-1)) = 0$.

- 广义积分中值定理

  设函数 $f \in C_{[a,b]}$,$g \in R_{[a,b]}$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remark

- 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：

  设 $g(x) = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

则 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$,$\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. 但不存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得

$$f(\xi)\int_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

- 这个定理可以将一些难求积分，甚至求不出来积分的函数提出来。如：

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(0) = 0$. 求证：

$\exists \xi \in (-a,a)$, 使得

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}f''(\xi).$$

由于 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数, 故将其在 $x = 0$ 处展开成 1 阶带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2$$

其中 ξ_x 是介于 0 和 x 之间的一个关于 x 的函数。那么

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^a f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^a f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^a \frac{f''(\xi_x)}{2}x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{f''(\xi)}{2}\int_{-a}^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}f''(\xi)
\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (-a,a)$.

43. Newton-Leibniz 公式
设 $f \in R_{[a,b]}$, 且 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$
习惯上常将 $F(b)-F(a)$ 记作 $F(x)|_a^b$.

44. 变上限积分求导定理
设 $f \in C_{[a,b]}$, 则 $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且
$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x), x \in [a,b].$$

Remark

- 这里 $f \in C_{[a,b]}$ 不可以弱化为 $f \in R_{[a,b]}$. 如：
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
$\Phi(x) = \displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t = |x| - 1$ 在 $x=0$ 处不可导。
- 如果将定积分按 Newton-Leibniz 公式写成原函数之差的形式，可以更好地理解：$(F(x)-F(a))' = f(x)$. 同时，我们按这种方法，利用复合函数求导的方法，可以求出：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$
- 注意此处的被积表达式中没有 x. 事实上，一般的例如 $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ 的导数不能按照此公式求，而应将其变为 $x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ 再来用两函数之积的求导法则求导。如果是一般的 $\displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 对 x 的导数，则需要用到多元函数的全微分：
记 $F(u,x) = \displaystyle\int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}t$, 则 $\dfrac{\partial F}{\partial u} = f(x,u), \dfrac{\partial F}{\partial x} = \displaystyle\int_a^u f_x(x,t)\,\mathrm{d}t$.
故
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \int_a^{\varphi(x)} f_x(x,t)\,\mathrm{d}t$$
- 有时被积表达式中含有积分上限的不定积分的导数也可以用变量替换来做，如：

已知 $g(x) = \displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$. 求 $g'(x)$.
令 $u = x-t$, 那么 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$,
$$\begin{aligned} g(x) &= -\int_x^0 (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

故

$$g'(x) = xf(x) - \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - xf(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

- 对于求分段函数的不定积分，常常不用不定积分的公式，而是用此定理来求。如：

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2xe^{x^2} & x \geq 0 \end{cases}.$

求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

令 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $x \geq 0$ 时，

$F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\,\mathrm{d}t^2 = e^u\big|_0^{x^2} = e^{x^2} - 1.$

$x < 0$ 时，

$F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{d}t^2 = u\big|_0^{x^2} = x^2.$

故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = \begin{cases} x^2 + C & x < 0 \\ e^{x^2} - 1 + C & x \geq 0 \end{cases}.$$

当然，如果一定要用不定积分的方法也可以求。如：

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 2xe^{x^2} & x \geq 0 \end{cases}.$

求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

当 $x \geq 0$ 时，

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2 = e^{x^2} + C_1$$

当 $x < 0$ 时，

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C_2$$

又由于 $f(x)$ 的原函数在 $x = 0$ 处可导，故其在 $x = 0$ 处连续。

故

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + C_2) = \lim_{x \to 0^+} (e^{x^2} + C_1)$$

故 $C_2 = C_1 - 1$.

故

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x^2 + C_2 & x < 0 \\ e^{x^2} + C_2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

- 对于反常积分，这个定理不一定成立。（由于函数不满足条件 $f \in C_{[a,b]}$）.
  此时，应该用函数的定义来做。如：

设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. 求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2\mathrm{d}\sin\frac{1}{t}}{x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$ 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}}{1}=0$$

故 $f'(0)=0$.

45. 不定积分的性质
   - 线性性质
   $\int(k_1f+k_2g)\,\mathrm{d}x=k_1\int f\,\mathrm{d}x+k_2\int g\,\mathrm{d}x$

46. 弧微分公式
   对于曲线上的一个极小的弧，有弧微分公式

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

47. 二阶线性微分方程的性质
   若 y^* 是某个二阶线性非齐次微分方程的一个特解，y_1,y_2 是其对应的二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是二阶线性齐次微分方程的通解，$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$ 是二阶线性非齐次微分方程的通解。

3 公式

1. 三角函数有关公式
   - 奇偶性

$$\begin{aligned}\sin(-x)&=-\sin x & \csc(-x)&=-\csc x\\ \cos(-x)&=\cos x & \sec(-x)&=\sec x\\ \tan(-x)&=-\tan x & \cot(-x)&=-\cot x\end{aligned}$$

   - 两角和（差）公式

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\sin x\cos y+\cos x\sin y & \sin(x-y)&=\sin x\cos y-\cos x\sin y\\ \cos(x+y)&=\cos x\cos y-\sin x\sin y & \cos(x-y)&=\cos x\cos y+\sin x\sin y\\ \tan(x+y)&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} & \tan(x-y)&=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\end{aligned}$$

- 二倍角公式

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}$$

- 积化和差公式

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= -\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y)) \\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y)) \\
\sin x\cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))
\end{aligned}$$

- 和差化积公式

$$\begin{aligned}
\sin x+\sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x-\sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
\cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\cos x-\cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

- 万能公式
  令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则：

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \\
\mathrm{d}x &= \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- 三角函数之间的关系

$$\sin x\csc x = 1$$

$$\cos x\sec x = 1$$

$$\tan x\cot x = 1$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x-\tan^2 x = 1$$

$$\csc^2 x-\cot^2 x = 1$$

2. 反三角函数有关公式

- 奇偶性

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \arccos x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

- 反三角函数之间的关系

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos(\arccos x) = x \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \tan(\arctan x) = x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Remark

这些公式可以借助一个直角三角形来理解（虽然直角三角形的方式只能说明 $\arccos x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时的情况，但事实上，这些结论是对于使等式有意义的所有 x 都成立的）：

（以 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ 为例）

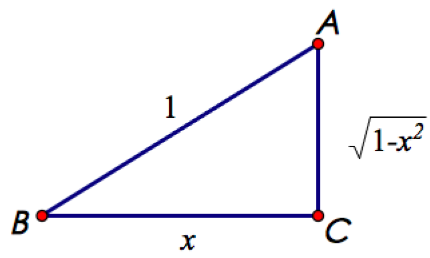

图 1: 以直角三角形理解 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

如图1所示，设 $B = \arccos x$, 那么由勾股定理，可以显然地得到

$$\sin(\arccos x) = \sin B = \frac{AC}{AB} = \sqrt{1-x^2}$$

3. 有理分式的极限

   对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$:

   - $m = n$ 时

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}$$
$$= \frac{a_n}{b_n}$$

   - $m > n$ 时

     同理可得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \infty$$

   - $m < n$ 时

     同理可得

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = 0$$

4. 根式之差的极限

   对于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[m]{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0} - \sqrt[n]{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0})$:

常用做法为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[m]{x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}-\sqrt[n]{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{1+\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}}-\sqrt[n]{1+\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}}}{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[m]{1+\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}}-1}{\frac{1}{x}}-\frac{\sqrt[n]{1+\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}}-1}{\frac{1}{x}}\\
\xlongequal{\text{等价无穷小}}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{a_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}\right)}{\frac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

5. 两个重要极限

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

Remark

此极限常被用来将幂指函数的极限转化为一般的分式函数的极限。如：

> 求极限
>
> $$\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{4}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^x$$
>
> $$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{4}{x}+\cos\frac{2}{x}\right)^x\\
=&\lim_{x\to0}\left(\left(1+\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)}}\right)^{x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)}\\
=&\lim_{x\to0}e^{x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)}
\end{aligned}
$$
>
> 从而转化成求一般的分式函数 $x\left(\sin\frac{4}{x}-\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\right)$ 的极限

6. 常见等价无穷小

$x\to0$ 时：

- $\sin x\sim x$
- $\tan x\sim x$
- $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
- $\arcsin x\sim x$
- $\arctan x\sim x$
- $\log_a(1+x)\sim\frac{1}{\ln a}x$

- $\ln(1+x) \sim x$
- $a^x - 1 \sim x \ln a$
- $e^x - 1 \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

  Remark

  这里 α 可以取实数。特别地，比较常用的有 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x.$
- $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$

7. 常见函数的导数

- $(C)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\operatorname{arcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{artanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

8. 常用高阶导数

- $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)x^{n-k}, 0 < k \le n$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)} = (-1)^k k! \dfrac{1}{x^{k+1}}$
- $(e^x)^{(k)} = e^x$
- $(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \dfrac{1}{x^k}$
- $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + \dfrac{k\pi}{2})$

- $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$

9. 常用 Taylor 展开

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$

10. 微分中值定理常见构造函数方法

- $f(\xi) = \xi$, 构造 $g(x) = f(x) - x$
- $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = xf(x)$
- $f(\xi) + f'(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = e^x f(x)$
- $f(\xi) - f'(\xi) = 0$, 构造 $g(x) = e^{-x} f(x)$

11. 常用积分公式

- $\int k \, \mathrm{d}x = kx + C$
- $\int x^k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} x^{k+1}, k \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$
- $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C = -\ln\left|\frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}\right| + C$
- $\int \csc x \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

12. 不定积分的积分法

- 第一类换元法
  设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$,$u=\varphi(x)$ 可微，则
  $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$
  Remark
  对于函数中出现了 ax^2+b 的形式，一般是变成 $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)^2+1$ 的形式以后，再用 $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{b}{a}}\mathrm{d}\sqrt{\frac{a}{b}}x$.
- 第二类换元法
  设 $x=\varphi(t)$ 是单调、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$. 又设 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 有原函数，则有换元公式
  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$
  Remark
  - 题目中的“单调”，实际上只需要要求 $\varphi(x)$ 是分段单调的即可，即 $\varphi(x)$ 只要存在单调区间即可。然后分段积分再加起来，结果一样符合。(事实上确实存在没有单调区间的函数，只需要在有理数和无理数时取不同值即可。)
  - 在换元时，如果遇到开根号，需要讨论绝对值。
  - 当分母次数远远大于分子时，可以尝试倒代换：$t=\frac{1}{x}$. 此时如果遇到开根号，不需要讨论绝对值。
  - 遇到三角函数的多项式的积分时，可以尝试万能公式代换。
  - 三角换元
    * x^2+1 型，可以令 $x=\tan t$
    * x^2-1 型，可以令 $x=\sec t$
    * $1-x^2$ 型，可以令 $x=\sin t$
- 分部积分法
  $$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$
  Remark
  分部积分法有三种应用方法：
  - 凭空造 x
    $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x)\,\mathrm{d}x$$
    如：
    $$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$
  - e^x 分部积分两次. 如：

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}e^x \\ =& e^x \sin x - \int \cos x \,\mathrm{d}e^x \\ =& e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C$$

- 递推公式，如：

设 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$. 则

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}\end{aligned}$$

故

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}$$

类似地，还可以得到：

* 若 $I_n = \int \sin^n x \,\mathrm{d}x$, 则 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x$.
* 若 $I_n = \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$, 则 $I_n = -\frac{n-1}{n}I_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x$.

13. 定积分的积分法

- 换元法

设函数 $f, g \in C_{[a,b]}$,$x = \varphi(t)$ 满足下列条件：

- $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 且当 t 从 α 变到 β 时，对应的 x 从 a 单调地变到 b
- $\varphi' \in C_{[\alpha,\beta]}$(或 $\varphi' \in C_{[\beta,\alpha]}$)

则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remark

- 按照积分的定义，d 后面的是积分变量，而积分限是积分变量的取值范围。所以，更严谨的写法为：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

- 和不定积分的换元法不一样的是，单调性是需要注意的一个点。如：
$\int_0^{10\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$, 我们不能直接令 $t = \sin x$ 算出 $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. 而是应该 $[0, 10\pi]$ 划分为多个单调区间以后再换元。

- 定积分换元之后，上下限也要跟着换。切记。
- 通过定积分的换元，我们可以得到：
  * 若 f 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
  * $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$
    如果遇到 tan 的定积分，不妨可以令 $t = \frac{\pi}{4} - x$
  * $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

  和上述方法类似的方法可以解决许多有三角函数的定积分题：

求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$
令 $t = -x$:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$$

故

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

而

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

故

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

- 分部积分

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

Remark

- 由不定积分的分部积分公式，我们可以得到结论：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{为奇数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数} \end{cases}$$

- 遇到两次积分的时候，常常要用分部积分。如：

已知 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$

由题意：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= x\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &=0-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2\\ &=\frac{1}{2}-\frac{e}{2}\end{aligned}$$

14. 有理函数的积分

对于有理函数 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,其中 $P_n(x)$,$Q_m(x)$ 分别是 n 次、m 次多项式。若 $n<m$,则称 $R(x)$ 为真分式；若 $n\geq m$,则称 $R(x)$ 为假分式。

对有理函数的积分 $R(x)=\dfrac{p_n(x)}{q_m(x)}$，首先先将假分式转化为真分式 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$。

然后将 $Q(x)$ 因式分解,得到

$$Q_m(x)=b_0(x-a)^\alpha\dots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\lambda\dots(x^2+rx+s)^\mu)$$

其中二次的因式在实数范围内都无法继续因式分解。那么可设

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots\\ &+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\cdots\\ &+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots\\ &+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}\end{aligned}$$

然后通分，通过对比系数，得出常数的值。

接着，积分就转化为了 $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ 和 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ 的不定积分。

对于前者,直接套用幂函数的不定积分即可。对于后者,可以先通过 $Mx+N=\dfrac{M}{2}\mathrm{d}(x^2+px+q)+N-\dfrac{Mp}{2}$，变为 $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^k}$ 的积分。而这个可以通过换元法变成 $\dfrac{1}{(t^2+a)^k}$ 的积分。这个可以通过不定积分的分部积分公式得到递推公式。

15. 常见的积不出来的函数

有的函数的不定积分并没有初等表达式。知道这些积分，可以让我们在考试中遇到这种积分，不是去求它的值，而是通过其他方法转化表达式。

- $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int\sqrt{1-k\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, 0<k<1$

16. 定积分的应用

- 求平面曲线的弧长

  运用弧微分公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ 进行定积分

$$\int_p^q \mathrm{d}s=\int_a^b\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}.$$

需要注意的是定积分的上限一定要大于下限。

- 直角坐标
  直接将 $y=f(x)$ 代入即可。得到
  $$s=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$
- 参数方程
  直接将 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 代入即可。得到
  $$s=\int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
- 极坐标
  将 $x=\rho(\theta)\cos\theta$,$y=\rho(\theta)\sin\theta$ 代入，化简可得
  $$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

- 求平面图形面积
  运用面微分公式 $\mathrm{d}A=|y|\mathrm{d}x$(与 x 轴围成的面积) 进行定积分。
  - 直角坐标
    求两个函数从 a 到 b 围成的面积：
    $$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$
    特别地，求从 a 到 b 时 $f(x)$ 与 x 轴围成的面积：
    $$A=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
  - 参数方程
    直接将 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 代入即可。得到
    $$A=\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
    . 如果是构成了封闭图形，则需要用 Green 公式。
    $$A=\int_a^b y\mathrm{d}x-\int_c^d x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)-\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$
  - 极坐标
    运用公式 $\mathrm{d}A=\dfrac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$, 直接代入即可。得到
    $$A=\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
- 求体积
  运用体微分公式
  $$\mathrm{d}V=A\mathrm{d}x,$$
  其中 A 为在 x 处的面积。
  常通过用平行的平面去截所求图形，若其得到的平面图形是规则的，则可以以此方向来积分。旋转体体积：
  处理平面图形绕定轴旋转的题目，有两种方式：

- 用垂直于定轴的平面去截

  这个常用于定轴为平面图形自变量所在直线的题目。如：$y=f(x)$ 绕 x 轴。或者是在该轴方向函数无多值。

- 用平行于定轴的平面去截

  这个常用于定轴为平面图形因变量所在直线的题目。如 $y=f(x)$ 绕 x 轴。或者是在该轴方向函数无多值。

  这种方法是将已有的平面图形沿平行于旋转轴的方向切成许多小条，在平面图形旋转的过程中，小条构成了两个圆柱之差，以此来积分。

- 求旋转体面积

  以垂直于旋转轴的面去截旋转体，得到的是类圆台。利用弧微分可以求出类圆台的斜高。

Remark

这些都是微元法的应用。值得指出的是，微元法的思想，即“以直代曲”，“以规则代不规则”，是在等价无穷小的前提下。即在同样的 $\mathrm{d}x$ 下，两个微元之商的极限为 1. 例如求旋转体的面积，为什么不直接是周长 $\mathrm{d}y$ 的积分，而是周长 $\mathrm{d}s$ 的积分呢？这是因为圆台面和圆柱面在它的高 $\mathrm{d}y$ 趋于 0 的情况下，并非等价无穷小。

17. 一阶微分方程的解法

- 可分离变量的一阶微分方程

  形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

  的方程称为可分离变量的一阶微分方程。将其移项为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$$

  后不定积分即可。

  Remark

  - 当遇到 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$ 或 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 时，不需要加绝对值符号。
  - 如果化简得到 $f(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$, 不能直接得出 $x=y$. 原因是积分出来的是 $F(y)=F(x)+C$. 如：

解微分方程 $y'\sec^y t\tan x+\sec^x\tan y=0$

化简，得：

$$\sec^2\cot y\mathrm{d}y=-\sec^x\cot x\mathrm{d}x$$

即

$$\csc 2y\mathrm{d}y=-\csc 2x\mathrm{d}x$$

故

$$\int\csc 2y\,\mathrm{d}y=\int-\csc 2x\,\mathrm{d}x$$

故

$$\ln|\tan y|=-\ln|\tan x|+C$$

所以

$$\tan x\tan y=C$$

- 一阶线性微分方程
  形如
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$
  的方程称为一阶线性微分方程。它的解为
  $$y=e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$
  其中 $\int P(x)\,\mathrm{d}x, \int Q(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ 均指不定积分中的一个原函数。
  Remark
  如果是在指数上的不定积分，即 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $-\int P(x)\,\mathrm{d}x$, 那么遇到一次分式积分时都不需要加绝对值符号。

- 齐次型微分方程
  当 $t\neq 0$ 时，若 $f(tx,ty)=f(x,y)$, 则称 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 为齐次型微分方程。
  解此方程可令 $u=\frac{y}{x}$, 那么 $y'=xu'+u$.
  Remark
  有下面两种题型，可以用类似的方法做：

求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ 的通解。
设 $x=v+v_0$,$y=u+u_0$.
那么 $y+2=u+u_0+2$,$x+y-1=u+v+u_0+v_0-1$. 令
$$\begin{cases}u_0+2=0\\u_0+v_0-1=0\end{cases}$$
得 $v_0=3, u_0=-2$.
那么 $v=x-3, u=y+2$. 那么 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=\mathrm{d}y$. 故
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=2\left(\frac{u}{u+v}\right)^2$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=2\left(\frac{\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1}\right)^2$$
令 $w=\frac{u}{v}$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=vw'+w$.
故 $vw'+w=2\left(\frac{w}{w+1}\right)^2$.
整理，得
$$\left(\frac{2}{w^2+1}+\frac{1}{w}\right)\mathrm{d}w=\frac{\mathrm{d}v}{v}$$
故
$$2\arctan w+\ln w=\ln v+C$$
整理，得
$$Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}}=y+2$$

求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x-y}{3x+3y-4}$ 的通解。
令 $t=x+y$, 那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-1$,

$$t'-1=-\frac{t}{3t-4}$$

整理，得

$$\frac{3t-4}{2t-4}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

故

$$\frac{3}{2}t+\ln(t-2)=x+C$$

整理，得

$$x+y-2=Ce^{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y}$$

- Bernoulli 方程
  形如
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^k(k\neq 0,1)$$
  的方程称为 Bernoulli 方程。
  解此方程可令 $z=y^{1-n}$.

18. 高阶微分方程的解法

- $y^{(n)}=f(x)$ 型
  一阶一阶往回积。通解有 n 个常数 C_i.
- $y''=f(x,y')$ 型
  令 $z=y'$, 方程即为 $z'=f(x,z)$.
- $y''=f(y,y')$ 型
  令 $z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则
  $$y''=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$
  故可以转化为 $z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=f(y,z)$. 解出 z 和 y 的关系，再解另一个微分方程。如：

求方程 $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$ 的通解
令 $z=y'$, 则 $y''=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$
故

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{1-y}z^2=0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{2\mathrm{d}y}{y-1}$$

故

$$\ln z=2\ln(y-1)+C_1$$

即

$$y'=C_1(y-1)^2$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_1\mathrm{d}x$$

所以

$$\frac{1}{1-y} = C_1x + C_2.$$

- 高阶常系数线性微分方程
  对于微分方程
  $$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)$$
  它对应的齐次微分方程的特征方程为 $a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = 0$.
  对于单根 r_i, 其在通解中对应的项为 Ce^{r_ix}.
  对于 k 重实根 r_j, 其在通解中对应的项为 $(C_0 + C_1x + \cdots + C_kx^k)e^{r_jx}$.
  对于 k 重共轭复根 $\alpha_i + \mathrm{i}\beta_i$, 其在通解中对应的项为 $(C_0+C_1x+\cdots+C_kx^k)e^{\alpha_ix}(C_{k+1}\cos(\beta_ix)+C_{k+2}\sin(\beta_ix))$.
  对于非齐次的微分方程，其特解的形式类似于二阶情况。

- Euler 方程
  对于微分方程
  $$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = f(x),$$
  令 $t = \ln x$. 那么注意到复合函数的求导法则，可以得到关于 $y(t)$ 的一个 n 阶常系数线性微分方程。
  Remark
  - 如果 $t = \ln x$, 由复合函数的求导法则可知，
    $$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{x^n}\left(A_{n,n}\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}t^n} + A_{n,n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + A_{n,1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$
    其中，$A_{n,i}$ 满足 $A_{n+1,i} = -nA_{n,i} + A_{n,i-1}, A_{n,n} = 1, A_{n,1} = -nA_{n,i}$.
  - 严格来说应该令 $t = \ln|x|$, 但在此处只需 $t = \ln x$ 即可。

19. 二阶线性微分方程的解法

- 常系数二阶线性齐次微分方程
  对于微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$, 其对应的特征方程为
  $$ar^2 + br + c = 0$$
  - 若特征方程有两个不等的实数解 r_1, r_2, 则该微分方程的通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$.
  - 若特征方程有重根 $r_1 = r_2 = r$, 则该微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$.
  - 若特征方程有一对共轭复根 $r = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$, 则该微分方程的通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$.

- 常系数二阶线性非齐次微分方程
  对于微分方程
  $$ay'' + by' + cy = f(x)$$
  首先，有定理：
  若 y_1, y_2 分别是方程 $ay'' + by' + cy = f_1(x), ay'' + by' + cy = f_2(x)$ 的解，则 $y_1 + y_2$

是方程 $ay''+by'+cy=f_1(x)+f_2(x)$ 的解。
由此定理可以将复杂的非齐次项转化为我们已知的非齐次项。
其次，有定理：
若 $y=\bar{y}$ 是方程 $ay''+by'+c=0$ 的通解，y^* 是方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 的一个特解，则方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 的通解为 $y=\bar{y}+y^*$.
由此定理，我们只需要求出一个特解即可。下面介绍求特解的方式：

- 对于 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$. 其中 P_m 是关于 x 的 m 次多项式。
  特解 y^* 具有形式 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$. 其中，$k$ 按 α 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$. 而 Q_m 中的每一项的系数需对比系数得出。
- 对于 $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x)$. 其中 P_m,P_n 分别是关于 x 的 m 次、n 次多项式。
  特解 y^* 具有形式 $y^*=x^ke^{\alpha x}(R_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$. 其中 R_l,Q_l 分别关于 x 的 l 次多项式。且 $l=\max\{m,n\}$.k 按 $\alpha+\beta\mathrm{i}$(或 $\alpha-\beta\mathrm{i}$) 不是特征根或是特征根分别取 0 或 1. 而 R_l,Q_l 中的每一项的系数需对比系数得出。

对于一般的 $f(x)$, 我们有常数变易法：
设方程 $ay''+by'+cy=f(x)$ 对应的齐次微分方程的通解为 $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$. 那么原方程的特解具有形式 $y^*=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$. 其中 C_1,C_2 满足：

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0$$
$$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=0$$

Remark
特别地，对于 $ay''+by'+c=e^{\alpha x}$ 型，可设其特解为 $y^*=A_0x^ke^{\alpha x}$. 其中，k 按 α 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$.
对于 $ay''+by'+c=P_m(x)$ 型，可设其特解为 $y^*=x^k(A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1x+A_0)$. 其中，$k$ 按 0 是其对应的特征方程的非特征根、单特征根或二重特征根，依次取 $0,1,2$.
对于 $ay''+by'+c=P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x$ 型，可设其特解为 $y^*=x^k(R_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$. 其中，$k$ 按 $\beta\mathrm{i}$ 是其对应的特征方程的非特征根或特征根，依次取 0 或 1.