一元函数微分学及其应用

Monday, January 8, 2018　　9:31 AM

1、设函数$y=f(x)$定义在x_0 的某一领域 内 $N(x_0)$内$x_0+\Delta x\in N(x_0)$，如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称函数$f$在点$x_0$处可导

并称此极限值为点x_0处的**导数**，记为$\boxed{f'(x_0)=y'|_{x=x_0}=\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}=\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_{x0}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}}$

2、若极限不存在，则称函数f在点x_0处不可导。特别的，若极限为无穷大，则称导f在点x_0处导数为无穷大，记为$\boldsymbol{f'(x_0)}=\infty$。

3、利用单侧极限可定义函数的单侧导数，若左右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称$f$在点x_0处左右可导,

记作$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$.

4、函数在x_0处**可导的充要条件**为f在x_0处既左可导，又右可导，且$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。若函数f在区间(a,b)内的每一点都可导，则称函数 f在 区间(a,b)内可导。进一步的，若f在$x=a$处右可导，在$x=b$处左可导，则称函数f在闭区间$[a,b]$上可导。

5、由切 线问题的讨论及导数的定义可知：若函数f在点x_0处可导,则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有不垂直x轴的切线,且$f'(x_0)$表示该切线的斜率，因此曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

6、可导性与连续性的关系：若函数f在某点处可导，那么f在该点处必连续。**反之并不成立。**可导⇒连续（反例：$|x|$）

7、函数四则运算的求导法则：

定理 1 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x 处可导，

则（1）$[(f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

（2）$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$；

（3）$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},(g(x)\neq 0)$；

特别 $[\frac{1}{g(x)}]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$，$(g(x)\neq 0)$.

（1）$(c)'=0$；	（2）$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$；	（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$；	（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$；
（3）$(a^x)'=a^x\ln a$；	（4）$(e^x)'=e^x$；	（11）$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$；	（12）$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$；
（5）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；	（6）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；	（13）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；	（14）$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
（7）$(\sin x)'=\cos x$；	（8）$(\cos x)'=-\sin x$；	（15）$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；	（16）$(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$。

8、设定义在区间I上的单调连续函数$x=f(y)$在点y处可导，且$f'(y)\neq 0$,则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在对应点x处可导，且$\boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}.}$

9、复合函数求导法则（链式法则）：设函数$u=\varphi(x)$在点x处可导，y= $f(u)$在对应点u= $\varphi(x)$处可导，则y=$f(\varphi(x))$满足$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$或$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

10、对于幂指类函数，可采用**对数求导法**（两边取对数），或采用$e^{ln\,\varphi(x)}$处理；对于分段函数，分段点处应该采用定义计算导数，其他点处运用公式。

11、若存在一个定义在某个区间上的函数$y=f(x)$,使$F(x,f(x))\equiv 0$,那么则称$y=f(x)$为由方程$F(x,f(x))=0$所确定的**隐函数。**（求导法则：链式法则）

12、**参数方程**所确定的函数的**求导法则**：一般的，由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$所确定的函数的导数为$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$，**极坐标**利用$\begin{cases}x=\rho cos\theta\\y=\rho sin\theta\end{cases}$再求导。

13、$f(x)$在x处的n阶导数，记为$f^{(n)}(x)$，$\frac{d^ny}{dx^n}$或$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$。若$f^{(n)}(x)$在I上连续，则称$f(x)$在I上连续可导，记作$f\in C_I^{(n)}$;若$\forall n\in\boldsymbol{N}_+,f\in C_I^{(n)}$,则称其无穷阶可导。

14、**Leibniz（莱布尼茨）公式**：(1)$(u(x)\pm v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)\pm v^{(n)}(x)$; (2)$(u(x)v(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$。$\begin{cases}(sin\,x)^{(n)}=sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\\(cos\,x)^{(n)}=cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\end{cases}$

15、设函数$y=f(x)$在x_0的某个领域内定义，若自由变量的改变量Δx得到的相应的函数的改变量$\Delta y=f(x+x_0)-f(x_0)$可以表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中$A$与Δxx无关，则称函数$y=f(x)$在**点$\boldsymbol{x_0}$处可微**，并称$A\Delta x$为$f(x)$在点$x_0$处的微分。记作$dy|_{x=x_0}=A\Delta x$或$df(x_0)=A\Delta x$。 **<u>微分充要条件：可微↔可导</u>**

16、函数$f(x)$在点x_0处的微分在几何上表示曲线$y=f(x)$在对应点处切线的纵坐标的改变量。

17、微分运算法则

设函数$u=u(x)$，$v=v(x)$可微，则

（1）$d[u(x)\pm v(x)]=d[u(x)]\pm d[v(x)]$；

（2）$d[u(x)\cdot v(x)]=v(x)d[u(x)]+u(x)d[v(x)]$；

（3）$d[Cu(x)]=Cd[u(x)]$；

（4）$d[\frac{u(x)}{v(x)}]=\frac{v(x)d[u(x)]-u(x)d[v(x)]}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$。

*21、微分在误差估计中的应用

若某变量的精确值为A，它的近似值为a，则

$|A-a|$称为a的绝对误差，

$\frac{|A-a|}{|a|}$称为a的相对误差。

设δ_A是某一尽可能小的正数，若有$|A-a|\le\delta_A$，则称δ_A是测量A时的最大绝对误差，称$\frac{\delta_A}{|a|}$是测量A时的最大相对误差。

18、复合函数$y=f(g(x))$微分$dy=f'(u)g'(x)dx$，无论u是自变量还是中间变量，函数$y=f(u)$的微分都保持同一形式，称为**一阶微分的形式不变性。**这一性质大大扩充了微分基本公式的使用范围，公式中的x可以是自变量也可以是自变量的任何可微函数，这一性质也是凑微分法的基础。

19、用线性函数$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$近似代替函数$y=f(x)$,几何上就是用切线近似代替曲线,这种思想方法称为局部线性化,称$dy=f'(x_0)dx$为Δy的线性主部。

20、若函数$y=f(x)$在I上n阶可导，则定义它在I上的**n阶微分**为$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$，微分称为一阶微分，二阶及以上称为高阶微分。

22、微分学基本定理及应用	使用条件	内容
Fermat费马定理	函数f在某个邻域$N(x_0)$内有定义，并且在点x_0处可导	若对$\forall x \in N(x_0)$有$f(x) \le f(x_0)(or f(x) \ge f(x_0))$则$f'(x_0) = 0$
Rolle罗尔定理	$(1) f \in C_{[a,b]}$, (2)f在开区间(a,b)内可导 (3)$f(a) = f(b)$	至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使$f'(\xi) = 0$
Lagrange中值定理	$(1) f \in C_{[a,b]}$, (2)f在开区间(a,b)内可导	至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$
推论1	可微函数f	任意两个零点之间至少存在导函数f'的一个零点（Rolle）
推论2	函数f在开区间(a,b)内可导	(a,b)内$f'(x) \equiv 0$的充要条件为$f \equiv C(x \in (a,b))$
推论3	函数f,g在区间(a,b)内可导，且$f'(x) \equiv g'(x)(x \in (a,b))$	$f(x) = g(x) + C, x \in (a,b)$恒成立
Cauchy中值定理	$(1) f,g \in C_{[a,b]}$, (2)f,g在开区间(a,b)内可导(3)$g'(x) \ne 0$	至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
L'Hospital洛必达法则	$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型或其他；f,g在$(x_0, x_0+\delta)$内可导，且$g'(x) \ne 0$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

注：常见的一些函数构造技巧：

(1) 证$\exists \xi \in (a,b)$使$f(\xi) = -f'(\xi)\xi \quad \Rightarrow F(x) = f(x)x$

(2) 证$\exists \xi \in (a,b)$使$f(\xi) + f'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow F(x) = e^x f(x)$

则$F'(x) = e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Rightarrow f(x) + f'(x) = 0$

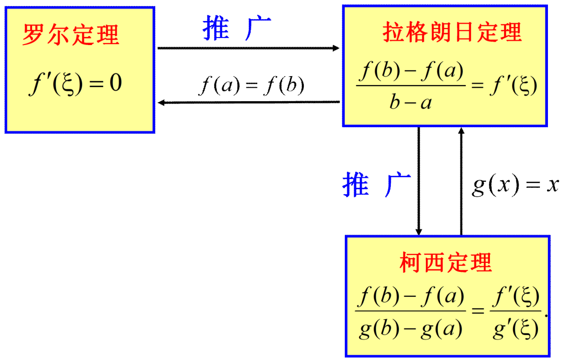
(3) 证$\exists \xi \in (a,b)$使$f(\xi) - f'(\xi) = 0 \Rightarrow F(x) = e^{-x} f(x)$

(4) 证$\exists \xi \in (a,b)$使$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$即$f(\xi)g''(\xi) - g(\xi)f''(\xi) = 0$

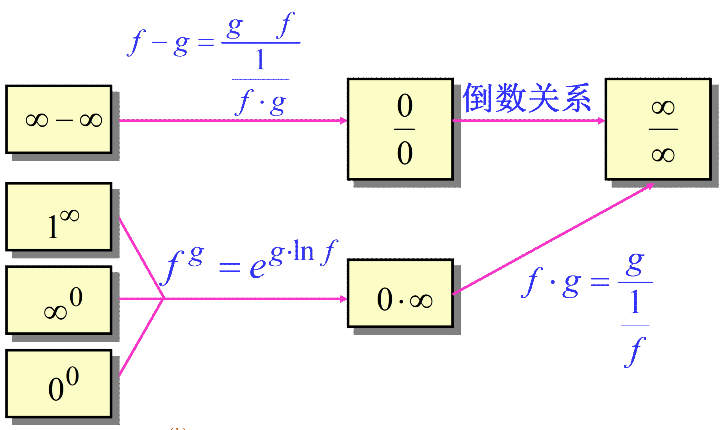
$\Rightarrow F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$

$(F'(x) = f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f'(x)g'(x) - f''(x)g(x))$

罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理之间关系



23、洛必达法则的其他变换形式



高阶无穷小之间的运算

(1) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^m)$ （$m \le n$）；

(2) $o(x^m).o(x^n) = o(x^{m+n})$；

(3) $x^m.o(x^n) = o(x^{m+n})$；

(4) $k \cdot o(x^n) = o(x^n)$。

24、称$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$为$f(x)$在$x = x_0$的**$n$阶泰勒多项式**。$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$称为余项。其中$R_n(x) = o((x-x_0)^n)$称为**Peano皮亚诺余项**。

特别的，称在x_0的Taylor公式为**Maclaurin麦克劳林公式**，即：$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + o(x^n)$

25、称$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1$为**Lagrange余项**。

26、 几个常用基本初等函数的带Largrange余项的Maclaurin公式：

$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(-\infty < x < +\infty, 0 < \theta < 1)$

$(2) sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}(-\infty < x < +\infty, 0 < \theta < 1)$

$(3) cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}(-\infty < x < +\infty, 0 < \theta < 1)$

$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}(-1 < x < +\infty, 0 < \theta < 1)$

$(5)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}(-1 < x < +\infty, 0 < \theta < 1)$

27、 定义满足$f'(x) = 0$的点称为函数的**驻点**，将函数的驻点及不可导点称为**可能极值点**。

3．定理 3（极值存在的充分条件一）

设函数 $f(x)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 内连续，在 $\mathring{N}(x_0,\delta)$ 内可导，

（1）若当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)>0$，
当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，
则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值；

（2）若当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x)<0$，
当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，
则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值；

（3）若 $f'(x)$ 在点 x_0 的左、右邻域内保持同号，
则 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值。

极值点为自变量的值，极值为函数的值，附**极值存在的充分条件**：

4．定理 4（极值存在的充分条件二）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 是极小点；

（2）当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 是极大点。

28、设函数f在区间I上的二阶导函数$f''(x)\geq 0$（或$f''(x)\leq 0$），则f是区间I上的**凸**(或**凹**)**函数**. 分别反映导函数$f'(x)$单调不减（或单调不增）
设函数f在区间I上的二阶导函数$f''(x)>0$（或$f''(x)<0$），则f是区间I上的**严格凸**(或**严格凹**)**函数**.分别反映导函数$f'(x)$单调增（或单调减）

29、凸函数不等式：$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 凹函数不等式：$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

30、如果曲线$y=f(x)$在经过点$(x_0,f(x_0))$时改变了凹凸性（**凸：下凸，凹：上凸**），那么称点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点。

31、曲线$y=f(x)$在右侧,左侧,左右侧以直线$y=ax+b$为斜渐近线的充要条件是$\boldsymbol{a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$. 当$a=0$时，$y=b$是水平渐近线。
$\boldsymbol{b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax), b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax), b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)}$,若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$ 则x=a是曲线的铅直渐近线。

32、称极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}|\Delta\alpha/\Delta s|$为曲线的某点处的曲率，记为$K$，其中$\Delta\alpha$为切线移动的转角，$\Delta s$是弧段的长度，点$M(x,y)$处的曲率公式为：$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$，曲率半径$\rho=\frac{1}{K}$
对于$x=\varphi(t), y=w(t)$，$K=\frac{\varphi'(t)w''(t)-w'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'^2(t)+w'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

第一章：一元函数的极限与连续要点提示

1、集合相关概念，差集：$A\backslash B=\{x|x\in A\ and\ x\notin B\}$ （笛卡尔）乘积集，记为$A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in \mathrm{B}\}$

2、有(上下)界的概念，上确界sup，下确界inf的定义，确界存在定理。 复数、映射($f:A\to B$)、满射($B=f(A)$)、单射($\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2, f(x_1)\neq f(x_2)$)

3、一元函数($f:A\to B$)，函数性质，幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**。经过有限次四则运算变为**初等函数**。

4、数列极限**$\boldsymbol{\varepsilon-N}$定义**：若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$,使得$\forall n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 若极限存在**则称数列**收敛，否**则称数列**发**散。**

5、$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<x_0-x<\delta$时，有$|f(x)-a|<\varepsilon$，则称$a$为函数$f$在$x_0$处的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$ $(f(x_0-0)=a)$，右极限类似。

6、极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条件是函数$f$在$x_0$处的左极限等于右极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

7、极限的性质：唯一性、局部有界性（函数 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\exists\delta>0, L>0$, 使得当$x\in N^{\circ}(x_0,\delta)$,有$|f(x)|\leq L$ 数列： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在，则数列有界）数列有界<=收敛
局部保序性: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, ($a<b$), 则$\exists\delta>0$, 使得当$x\in N^{\circ}(x_0,\delta)$时，$f(x)<g(x)$ 局部保号性: 保序性中取$b=0$

8、海涅Heine定理（函数归并性）： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=a的充要条件是对任何以$x_0$为极限的数列$\{a_n\}a_n\neq 0$, 相应的函数值数列$\{f(a_n)\}$都收敛于$a$

9、极限四则运算法则、**复合运算法则**、**极限存在准则（夹逼准则、单调有界准则、Cauchy柯西收敛准则**（$|a_m-a_n|<p, \forall m,n>N, \forall\varepsilon$））

10、常用无穷小量

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，　$\therefore \sin x\sim x\ (x\to 0)$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$，　$\therefore \tan x\sim x\ (x\to 0)$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，　$\therefore 1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，　$\therefore \arcsin x\sim x\ (x\to 0)$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$，　$\therefore \arctan x\sim x\ (x\to 0)$；

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$，　$\therefore \sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{x}{n}(x\to 0)$。

11、若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数**$\boldsymbol{f}$在点$\boldsymbol{x_0}$处连续**,类似可定义左连续与右连续。

12、左右极限都存在间断点，**称为第一类间断点。**
左右极限存在且相等但不等于函数值的间断点称为**可去间断点。**
左右极限存在但不等的间断点称为**跳跃间断点。**
非第一类(即左/右极限不存在的）间断点称为**第二类间断点**
使函数趋于无穷大的间断点称为**无穷间断点**
函数无限次在两个不同数之间变动的间断点称为**振荡间断点。**

13、**最大值最小值定理、零点存在定理**

14、连续函数经过四则运算仍是连续函数，连续函数的复合函数仍是连续函数。

15、一切初等函数在其定义域区间内是连续的。

16、*一致连续性：连续的定义中δ的取值仅与ε有关时，函数一直连续

张建东

东南大学计算机科学与软件工程学院