一元函数积分学

Wednesday, January 3, 2018 6:59 PM

1、**定积分的定义** 设$f(x)$是定 义在区间$[a,b]$上的有界函数，任取一组分 点$a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$将$[a,b]$分为 n个子区间$[x_{i-1},x_i]$,记小区间的长度$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$(i=1,2,⋯,n)，$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，若极限$\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在，且极限值既与分点$x_i$的取值无关又与$\xi_i$的取值无关 则称此极限值为函数f在区间[a,b]上的定积分记为$\int_a^b f(x)dx$,有公式$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

这时也称函数在区间$[a,b]$上(***Riemann***黎曼)可积。

【利用定积分定义求解和式问题】 把区间$[a,b]$分为n等份，ξ_i取为每个小区间的右端点，则有：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)=\int_a^b f(x)dx\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx}$$

2、**可积的充分条件** ①连续 ②有界，且只有有限个间断点 ③单调且有界

3、定积分的性 质 若函数$f(x),g(x)$均在区间$[a,b]$上可积，$f(x)$,在区间$[a,b]$上的最大值为M,最小值为m，则有如下性质：

①定积分的结果与积分变量无关，即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$。②$\int_a^a f(x)dx\equiv 0$;③$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$; ④$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

⑤$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$⑥区间可加$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$;⑦若$f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

⑧估值定理：$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ ⑨**积分中值定理**：存在一点$\xi\in[a,b]$使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

⑩积分不等式 Ⅰ. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$ Ⅱ.$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\left[\int_a^b[f(x)]^2dx\right]\cdot\left[\int_a^b[g(x)]^2dx\right]$许瓦尔兹不等式

3、*Newton* − **Leibniz**公式：设函数$f\in R_{[a,b]}$,且F是在$[a,b]$上的一个原函数 则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)F(x)|_a^b$ 也被称作**微积分基本公式/定理**

4、定积分的**几何意义**:面积。 且规定x轴上方面积为正，下方面积为负。

5、称$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$为**变上限的积分**,则若$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$\Phi(x)$在$[a,b]$上可导，且$\Phi(x)'=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$，$x\in[a,b]$

推论1:变上限积分所定义的函数$\Phi(x)$是$f(x)$的一个原函数。推论2：设函数f在区间I上连续，又设函数φ,ψ是$[a,b]$上的可导函数，则有

$$\boxed{\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt\right)'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x),\ x\in[a,b]}$$

6、**不定积分基本公式表**

(1)$d(C)=0$,	(1)$\int 0dx=C$,
(2)$d(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})=x^\alpha dx$,	(2)$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\ne-1)$,
(3)$d(\ln\|x\|)=\frac{1}{x}dx$,	(3)$\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$,
(4)$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$,	(4)$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$,
(5)$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,	(5)$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$,
(6)$d(\frac{a^x}{\ln a})=a^x dx$,	(6)$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$,
(7)$d(e^x)=e^x dx$,	(7)$\int e^x dx=e^x+C$,
(8)$d(\sin x)=\cos xdx$,	(8)$\int\cos xdx=\sin x+C$,
(9)$d(-\cos x)=\sin xdx$	(9)$\int\sin xdx=-\cos x+C$,
(10)$d(\tan x)=\sec^2 xdx$,	(10)$\int\sec^2 xdx=\tan x+C$,
(11)$d(-Cotx)=\csc^2 xdx$,	(11)$\int\csc^2 xdx=-Cotx+C$,
(12)$d(\sec x)=\sec x\cdot\tan xdx$,	(12)$\int\sec x\cdot\tan xdx=\sec x+C$,
(13)$d(-\csc x)=\csc x\cdot Cotxdx$,	(13)$\int\csc x\cdot Cotxdx=-\csc x+C$,
(14)$d(shx)=chxdx$,	(14)$\int chxdx=shx+C$,
(15)$d(chx)=shxdx$,	(15)$\int shxdx=chx+C$,
(16)$d(thx)=\frac{1}{ch^2x}dx$,	(16)$\int\frac{1}{ch^2x}dx=thx+C$,
(17)$d(-chx)=\frac{1}{sh^2x}dx$,	(17)$\int\frac{1}{sh^2x}dx=-cthx+C$,

7、**不定积分的性质**

①微分运算与积分运算的互逆性

$[\int f(x)dx]'=f(x)$或$d[\int f(x)dx]=f(x)dx$

$\int f'(x)dx=f(x)+C$或$\int df(x)=f(x)+C$

②线性性质

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

注意 任意常数C不可丢

8、**不定积分的换元积分法**

Ⅰ.第一类换元法（凑微分法）

定理：若$\int f(u)du=F(u)+C$,则$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$

常用的凑微分关系可参考左表

Ⅱ.第二类换元法

°定理：设$x=\varphi(t)$是单调可微 并且$\varphi'(t)\ne 0$.又设$f(\varphi(t))\varphi'(t)$具有原函数

若$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=$F(t)+C，则有$\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+C$

°利用$\boxed{x=a\sin t,x=a\sec t,x=a\tan\frac{t}{2}}$消去根式的方法称为**三角代换法。**

°被积函数是由$\sin x,\cos x$及常数经过有限次四则运算构成的函数称为**三角函数有理式**，记为$R(\sin x,\cos x)$，对这种被积函数，可采用**半角代换**：

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt,t=\tan\frac{x}{2}}$$

°用代换$\boxed{x=\frac{1}{t}}$解决根式问题称为**倒代换**

补充公式：

① $\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C$；

② $\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$；

③ $\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$；

④ $\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$；

⑤ $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$；

⑥ $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

⑦ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$；

⑧ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|\sqrt{x^2\pm a^2}+x\right|+C$

9、**定积分的换元积分法**

设函数$f \in C_{[a,b]}, x = \varphi(t)$满足下列条件：(1)$\varphi' \in C_{[a,b]}$ (2)$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,且当t从$\alpha$变到$\beta$时，对应的$x$从a单调变到b 则:$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

10、若f是偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$,若$f$是奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$，若$f$周期为T,则$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

11、**不定积分的分部积分法：** $\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)}$ 原则：$\int vdu$比$\int udv$更容易积分

12、把两个多项式之商所表示的函数$R(x) = \frac{p_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}(m,n \in \boldsymbol{N}_+, a_0b_0 \neq 0, a_i, b_i \in \boldsymbol{R})$称为有理函数。假定$p_n(x), Q_m(x)$没有公因式。当$n < m$时，称$R(x)$为**真分式**，而当$n \geq m$时，称$R(x)$为**假分式。**假分式总可以利用多项式除法化为多项式与真分式之和。

13、**所有有理函数的不定积分均可以求出，即有理函数的原函数都是初等函数。**

14、**定积分的分部积分法:** $\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)}$

15、记$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, n \in \boldsymbol{N}$,则 $\boxed{I_n = J_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}, n\text{为奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n\text{为偶数} \end{cases}}$

16、若$\Delta U = f(x)dx + o(dx)(dx \to 0)$则将$f(x)dx$称为$U$的**微元**，即$dU = f(x)dx$，建立$U = \int_a^b f(x)dx$的定积分表达式的方法称为**微元法。**

17、【应用：平面曲线的弧长问题】	公式	备注
直角坐标情形	弧长函数$S(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt \quad x \in [a,b]$	$y = f(x)$为曲线方程
参数方程情形	弧长$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$	平面曲线弧由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}(\alpha \leq t \leq \beta)$给出
极坐标情形	弧长$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta$	平面曲线弧由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$给出
18、【应用：平面图形的面积问题】	公式	备注
直角坐标情形	面积$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx\ (x = a, x = b)$	$A = \int_a^b [\varphi(y) - \psi(y)]dy\ \ (y = c, y = d)$
参数方程情形	弧长$A = \int y(x)dx$ 结合图形考虑对称性	平面曲线弧由参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}(\alpha \leq t \leq \beta)$给出
极坐标情形	弧长$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$	平面曲线弧由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$给出
旋转体的侧面积问题	弧长$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx$	$dA = 2\pi f(x)dL = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$
19、【应用：体积问题】	公式	备注
平行截面面积为已知的立体的体积	体积$V = \int_a^b A(x)dx\ (x = a, x = b$两平面之间)	$A(x)$为垂直于x轴的面积函数
旋转体的体积	体积$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$	截面面积$A(x) = \pi f^2(x)dx$
20、【应用：物理问题】	公式	备注
质量	$dM = u(x)dx$	$u(x)$为质量密度
功	$W = F \cdot S$，$dW = SdF, dW = FdS$	视具体情况而定
力·液体压力	$P = p(h)S = \rho ghS = \gamma Sh$	γ为gh之积，意义为液体比重。
力·引力	$F = k\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$	k为万有引力常量和静电常量
热量	$Q = cm\Delta t$	常数C为比热容

21、在数学上称$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**均方根。**交流电流、电压的有效值就是一个周期上的均方根。

22、若$\int_a^b f(x)\,dx$满足条件(1)$[a,b]$是有限区间 (2)$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，则称此积分为**常义积分。**否则称其为**广义积分。**

23、称极限$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$为函数$f$在区间$[a,+\infty]$（**无穷区间**）上的**反常积分**，记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，即$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$若上述极限存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)dx$**收敛**，否则称反常积分**发散。**对于$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$考虑区间的可加性，以实数c隔开,$\int_{-\infty}^c f(x)dx, \int_c^{+\infty} f(x)dx$都收敛则收敛

24、设函数f在$(a,b]$上有定义，在a点的右领域内无界，且$\forall\varepsilon > 0, f \in C_{[a+\varepsilon,b]}$,则称$\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$为**无界函数$f$在$(a,b]$上的反常积分**，记为$\int_a^b f(x)dx$
即$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$，若极限存在，则反常积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，反之，发散。

25、可以通过换元把广义积分换成常义积分。收敛的广义积分的计算有着与定积分完全类似的换元法与分部积分法。