GEOMETRİ NOTLARI

Hazırlayan

Fetih TOKTAŞ

ÖNSÖZ

Bu notlar,geometri ile ilgilenenlere başvuru kaynağı olması amacıyla düzenlenmiştir.

Notlar,temel geometrinin bütün konularını kapsaması gözönünde tutularak hazırlanmış,eksik herhangibir hususun kalmamasına dikkat edilmiştir.Konuların uzun uzun anlatılmaları yerine,kısaca açıklamalarının yapılması tercih edilmiştir.Teoremlerin kanıtları yapılmamış,sonuçların verilmesi yeterli görülmüştür.

Problem çözmede yararlanılacak bir kaynak olması düşünüldüğünden,alıştırma ve problemlere yer verilmemiştir. Şekillerin konuyu en iyi anlatacak biçimde çizilmesine özen gösterilmiştir.

Bu notlar;el altında bulundurulması yararlı olan bir başvuru kaynağı,bir arşiv ve bir formüller kolleksiyonudur.

Elde olmayan nedenlerle yapılan yanlışlıklar için özür diler ve bu notların kullananlara yararlı olmasını temenni ederim.

Fetih TOKTAŞ

©2021-Fetih Toktaş - Her hakkı saklıdır

İ Ç İ N D E K İ L E R

Geometrik Kavramlar ..... 1 - 2

Kırık Çizgiler,Dikme ve Eğikler 3
Paralel Doğrular 3
I.Thales Teoremi 4
II.Thales Teoremi 4
Bir Doğru Parçasının n Eşit Parçaya Bölünmesi 4

Açılar ..... 5 - 8

Alan Fonksiyonu
Çokgensel Bölgelerin Alanları,Eşdeğerli şekiller ..... 9 - 10

ÜÇGENLER
Üçgenlerde Açı ve Kenar Bağıntıları 11
Üçgenin Yükseklikleri ..... 12 - 13
Üçgenin Kenarortayları ..... 14 - 16
Üçgenin Açıortayları ..... 17 - 20
Üçgenin Alanı ..... 21 - 23
Bir Üçgenin Belli Olması 24
Üçgenlerin Eşitliği ..... 25 - 28
Üçgenlerin Benzerliği ..... 29 - 30
Üçgenlerde Kesişen Doğrular ve Üçgenin Çemberleri 31
Üçgendeki Özell Simson Doğrusu 32
Stewart Özelliği 32
Carnot Problemi 32
Menelaos Teoremi 32
Ceva Teoremi 32
Eşkenar Üçgenler ..... 33 - 36
İkizkenar Üçgenler ..... 37 - 38
Dik Üçgenler ..... 39 - 42
Dik Üçgenlerde Metrik Bağıntılar ..... 43 - 44

ÇOKGENLER 45
Düzgün Çokgenler ..... 47 - 48
Düzgün Altıgen,Düzgün Sekizgen 49

DÖRTGENLER
Tanımlar,Özellikler ..... 51 - 52
Paralelkenar ..... 53 - 56
Kare 57
Dikdörtgen ..... 58 - 59
Eşkenar Dörtgen ..... 59 - 60
Deltoit ..... 60 - 61
Yamuk ..... 61 - 63
İkizkenar Yamuk ..... 64 - 65
Dik Yamuk ..... 65 - 66
Köşegenleri Birbirine Dik Olan Dörtgen 67
Teğetler Dörtgeni 67
Kirişler Dörtgeni ..... 67 - 68

ÇEMBER

Tanımlar 69
Bir Doğrunun Bir Çembere Göre Durumları 69
Çemberin Kirişleri 70
İki Çemberin Birbirlerine Göre Durumları 71
Çemberin Açıları ..... 72 - 74
Çemberlerin Benzerliği 75
Çemberin Teğetleri 76
Bir Noktanın Bir Çembere Göre Kuvveti 77
Kuvvet Ekseni ..... 79 - 80
Çemberde Yay Uzunlukları 81
Dairenin Alanı,Daire Halkasının Alanı 83
Bazı Şekillerin Alanları 85
Daire Dilimi 87
Daire Parçası 88
Daire Dilimi Halkası 88

Geometrik Yerler ..... 89 - 90

Orantılı Doğru Parçaları

Dördüncü Orantılı Doğru Parçası 91
Üçüncü Orantılı Doğru Parçası 92
Aritmetik Orta Olan Doğru Parçası 92
Geometrik Orta Olan Doğru Parçası ..... 93 - 94
Harmonik Orta Olan Doğru Parçası 95
Altın Oran ..... 95 - 96

Uzay Geometrisi

Uzayda Doğrular ve Düzlemler ..... 97 - 100
Küp,Dikdörtgenler Prizması,Prizma,Paralelyüz 101
Kesik Üçgen Prizma,Kama,Prizmatoit 102
Silindir,Kesik Silindir 103
Elips Kesitli Silindir,Delik Silindir,Silindir Kesmesi 104
Piramit,Kesik Piramit ..... 105 - 107
Düzgün Dörtyüzlü 107
Düzgün Altıyüzlü,Düzgün Sekizyüzlü 108
Koni,Kesik Koni,Dönel Koni,Kesik Dönel Koni 109
Eliptik Tekne 110
Küre,İçi Boş Küre,Yarım Küre,İçi Boş Yarım Küre,Küre Parçası 111
Küre Kesmesi,Küre Tabakası,Küre Halkası,Küre Oyuğu,Küresel Kama 112
Ring 113
Fıçı,Elipsoit,Dönel Yarım Elipsoit 114
Dönel Paraboloit Dönel Paraboloit Segmenti 115

Geometride İşaret Kullanılması ..... 117 - 118
Harmonik Bölme ..... 119 - 120
Homoteti ..... 121 - 122

Konikler

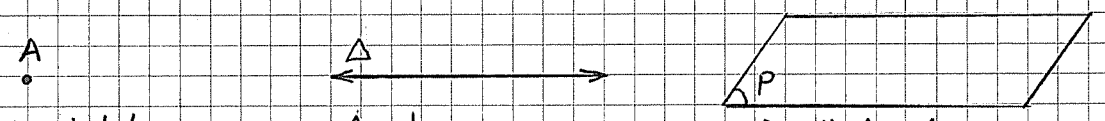
Elips ..... 123 - 127
Hiperbol ..... 129 - 132
Parabol ..... 133 - 136
Bir Dik Koninin Bir Düzlem İle Kesitleri 137

Yararlanılan Kaynaklar 139

Ek Geometrik Çizimler ..... (1-17)

GEOMETRİK KAVRAMLAR

Geometride nokta, doğru, düzlem gibi terimler tanımsızdır. Bu kavramlar, sezgiye kalmış olup; kağıt üzerinde aşağıdaki biçimlerde gösterilirler.



A Noktası Δ doğrusu (P) Düzlemi

Doğru her iki yönde, düzlem ise her yönde sınırsızdır.

DOĞRU

Farklı iki noktadan geçen tek bir doğru vardır. Bir doğrunun noktaları ile reel sayılar arasında bire bir eşleme yapılabilir. Yani bir doğrunun her noktasına bir tek reel sayı, karşılık olarak her reel sayıya da doğrunun bir tek noktası karşı gelir.

Tanımlar:

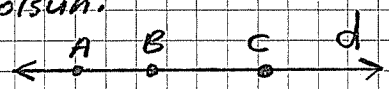
1- Doğru üzerindeki bir noktaya eşlenen sayıya bu noktanın KOORDİNATI denir. Koordinatı sıfır olan noktaya Başlangıç noktası denir.

2- A noktasının koordinatı a, B noktasının koordinatı b ise; a ile b nin farkının mutlak değerine A ile B arasındaki UZAKLIK denir. $|AB|$ olarak gösterilir.

$|AB| = |a-b| = |b-a|$ dır.

3- Bir doğrunun farklı üç noktası A, B, C olsun.

$|AB|+|BC| = |AC|$ ise, B noktası A ile C arasındadır denir.



Neticeler:

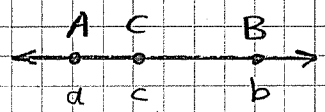
1- B, A ile C arasında ve bu noktaların koordinatları sırası ile b, a, c ise;

$a < b < c$ dir.

2- Bir doğru üzerindeki farklı üç noktadan yalnız biri diğer ikisi arasındadır.

DOĞRU PARÇASI

Bir doğrunun farklı A, B noktaları ile bunların arasında bulunan noktaların oluşturduğu kümeye AB doğru parçası denir. [AB] biçiminde gösterilir.



[AB] doğru parçası

Tanımlar:

1- A nın koordinatı a, B nin koordinatı b, C nin koordinatı c ise; [AB] doğru parçası, küme olarak:
$[a, b] = \{c \in R : a \leq c \leq b\}$ olarak da gösterilebilir.

Bu kümeye [a, b] KAPALI ARALIĞI denir.
a ve b kümeye ait değilse (a, b) AÇIK ARALIĞI denir.
a ya da b den biri kümeye ait değilse YARI AÇIK (YARI KAPALI) ARALIK denir.

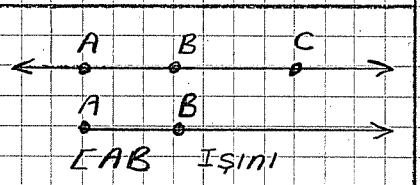
2- $|AB| = |b-a| = |a-b|$ reel sayısına doğru parçasının UZUNLUĞU denir.

3- C noktası, [AB] doğru parçasının bir noktası ve $|CA| = |CB|$ ise; C ye [AB] doğru parçasının ORTA NOKTASI denir. Bir doğru parçasının orta noktası bir ve tektir.

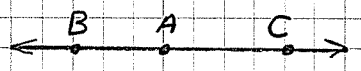
GEOMETRİK KAVRAMLAR

IŞIN

AB doğrusundaki B noktasının A ile C arasında olacak biçimde alınan C noktalarının kümesine AB ışını denir. [AB biçiminde gösterilir.



Bir doğrunun farklı A, B, C noktalarından A noktası B ile C arasında ise [AB ışını ile [AC ışınlarına ZIT IŞINLAR denir.



DOĞRUSAL KÜMELER

Bir nokta kümesinin bütün noktaları aynı bir doğruya aitse bu kümenin noktaları doğrusaldır denir.

DÜZLEMSEL KÜMELER

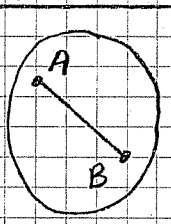
Bir nokta kümesinin bütün noktaları aynı bir düzleme aitse bu kümenin noktaları düzlemseldir denir.

UZAY

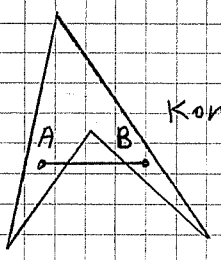
Bütün noktaların kümesine uzay denir.
Her düzlemin doğrusal olmayan en az üç noktası, uzayın düzlemsel olmayan en az dört noktası vardır.

KONVEKS (Dışbükey) ve KONKAV (İçbükey) KÜMELER

Bir P nokta kümesinin her A, B nokta çifti için [AB] doğru parçasının bütün noktaları P kümesinin içinde kalırsa, yani $[AB] \subset P$ ise P kümesine KONVEKS KÜME denir. Konveks olmayan nokta kümesine de KONKAV KÜME denir.



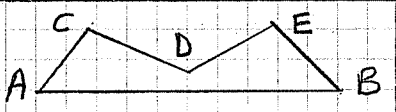
Konveks



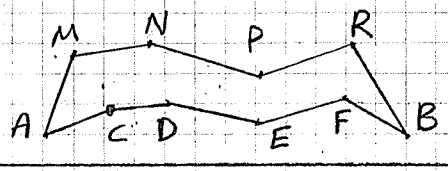
Konkav

KIRIK ÇİZGİLER

Teorem: Başlangıç ve bitim noktaları ortak olan bir doğru parçası, herhangi bir kırık çizgiden küçüktür. [$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EB}$ dir.]

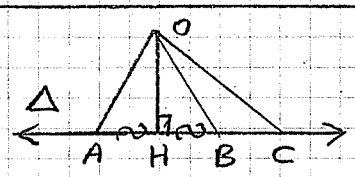


Teorem: Başlangıç ve bitim noktaları ortak olan bir konveks kırık çizgi, kendisini çevreleyen herhangibir kırık çizgiden küçüktür.
[$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FB} < \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PR} + \overline{RB}$ dir.]



DİKME VE EĞİKLER

Tanım: Bir doğrunun dışındaki bir noktadan bu doğruya bir dikme çizilse; $\overline{OH}$ uzunluğuna, O noktasının Δ doğrusuna uzaklığı denir.

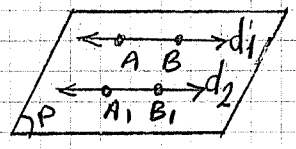


Teorem: Bir doğrunun dışındaki bir noktadan bu doğruya bir dikme ile birtakım eğikler çizilse:

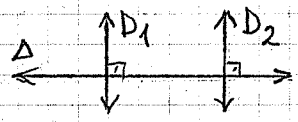
1) Dikme, eğiklerin hepsinden kısadır. [$\overline{OH} < \overline{OB} < \overline{OC}$] dir.
2) Dikme ayağından eşit uzaklıktaki eğikler birbirine eşittir. [$\overline{AH} = \overline{HB}$ ise; $\overline{OA} = \overline{OB}$ dir.]
3) Dikme ayağından daha uzakta bulunan eğik daha uzundur. [$\overline{HB} < \overline{HC}$ ise; $\overline{OB} < \overline{OC}$ dir.]

PARALEL DOĞRULAR

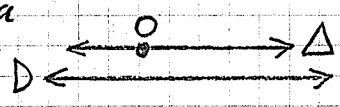
Tanım: Düzlemsel olupta kesişmeyen doğrulara PARALEL DOĞRULAR denir. (d_1 ve d_2 doğrularının ortak noktaları yoksa, bu doğrulara PARALEL DOĞRULAR denir.)



Teorem: Bir düzlem içindeki aynı doğruya dik olan iki doğru birbirine paraleldir. $D_1 \perp \Delta$ ve $D_2 \perp \Delta$ ise; $D_1 // D_2$ dir.



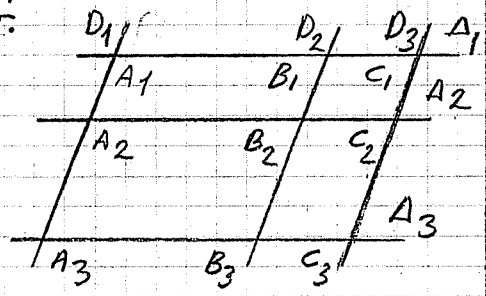
Öklid (Euclide, Eukleides) Postulatı: Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir tane paralel doğru çizilebilir.



Teorem: Paralel doğrular arasında kalan paralel doğru parçaları eşittir.

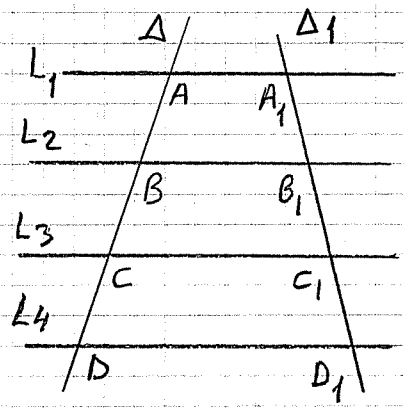
$D_1 // D_2 // D_3$ ve $\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3$ ise:

$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2}$,
$\overline{A_2A_3} = \overline{B_2B_3} = \overline{C_2C_3}$,
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3}$,
$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}$ dir.



Teorem: İki ya da daha çok paralel doğrular, bir kesen üzerinde eşit parçalar ayırırsa; diğer herhangibir kesen üzerinde de eşit parçalar ayırır.

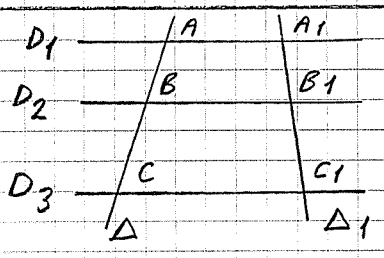
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ise,
$\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1}$ dir.



PARALEL DOĞRULAR

I. THALES TEOREMİ

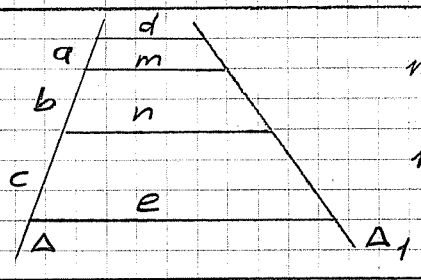
Birtakım paralel doğrular kendilerini kesen her doğru üzerinde orantılı parçalar ayırır. Şekilde:



$D_1 // D_2 // D_3$ ise;

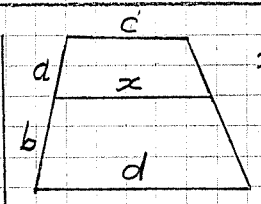
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} \quad \text{ve} \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|} \quad \text{dir.}$$

I. THALES TEOREMİNİN UYGULAMALARI



$$m = \frac{ae+bd+cd}{a+b+c} \quad \text{ve}$$

$$n = \frac{ae+be+cd}{a+b+c} \quad \text{dir.}$$



$$x = \frac{ad+bc}{a+b} \quad \text{ve}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x-c}{d-x} \quad \text{dir.}$$

II. THALES TEOREMİ

Bir açının kolları arasında kalan paralel iki doğru parçasının oranı, uç noktalarının açı köşesine olan uzaklıkları oranına eşittir.

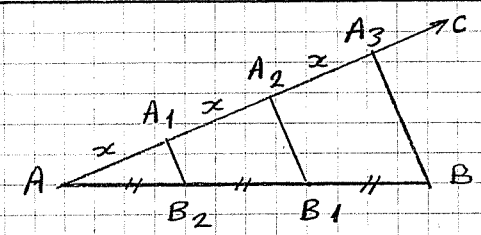
Şekilde: $|AB| // |A_1B_1|$ ise;

$$\frac{|OA|}{|OA_1|} = \frac{|OB|}{|OB_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} \quad \text{dir.}$$

BİR DOĞRU PARÇASININ n EŞİT PARÇAYA BÖLÜNMESİ

Yol I:

Şekilde; [AC ışını üzerinde n adet herhangibir x uzunluğu sırayla işaretlenir. (örnekte n=3 alınmıştır.) A_3 noktası B ile birleştirilir. A_2 ve A_1 noktalarından $|A_3B|$'ye paraleller çizilerek B_1 ve B_2 noktaları bulunur.

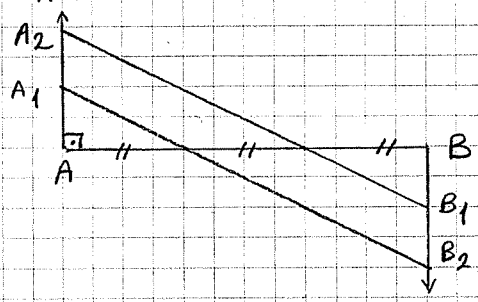


$|AB_2| = |B_2B_1| = |B_1B|$ / [n=3] olur.

Şekilde; $|AA_2| \perp |AB|$ ve

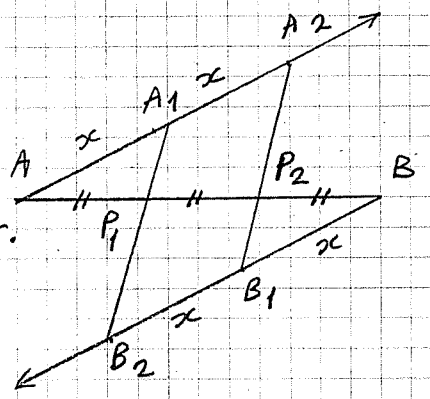
$|BB_2| \perp |AB|$ çizilir.

Yukarıdaki uygulama yapılır.



Yol II:

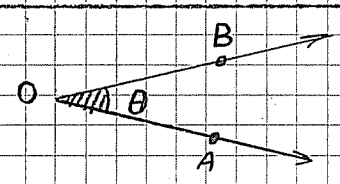
Şekilde; $|AC| // |BD|$ çizilir ve üzerinde (n-1) adet herhangibir x uzunluğu sırayla işaretlenir.



$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2B|$ / [n=3] olur.

AÇILAR

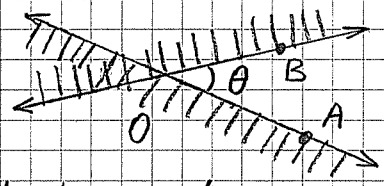
Tanım :
Başlangıç noktaları ortak, doğrusal olmayan iki ışın birleşimine AÇI denir.



Şekilde : $[OA \cup [OB =$ AOB açısı $= A\hat{O}B$
$=$ BOA açısı $= B\hat{O}A$
$=$ O açısı $= \hat{O}$

O noktasına açının köşesi, [OA ile [OB ışınlarına kenarları denir. $\theta = m(A\hat{O}B)$ veya $\theta = s(A\hat{O}B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım :
Bir E düzleminde bulunan $B\hat{O}A$ açısının iç bölgesi :
OA kenar doğrusuna göre, B nin bulunduğu yarı düzlem ile;
OB kenar doğrusuna göre, A nın bulunduğu yarı düzleminin arakesit kümesidir.



Tanım :
$\theta \in R$ sayısına AÇININ ÖLÇÜSÜ denir.
$\theta = m(A\hat{O}B)$ veya $\theta = s(A\hat{O}B)$ şeklinde gösterilir.
Bazen; $\hat{O}$ nın ölçüsü $s(\hat{O})$ veya $m(\hat{O})$ olarak da gösterilir.

EŞ AÇILAR :
Tanım : ölçüleri eşit olan açılara eş açılar denir.
$s(\hat{A}) = m(\hat{A})$ $\hat{A}$ nın ölçüsü,
$s(\hat{B}) = m(\hat{B})$ $\hat{B}$ nın ölçüsü ise;
$s(\hat{A}) = s(\hat{B})$ veya $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ olarak gösterilir.

AÇI ÖLÇME BİRİMLERİ

1- Radyan Türünden (R)
2- Derece Türünden (D)
3- Grad Türünden (G) olmak üzere üç çeşittir.

$360^\circ = 2\pi$ radyan $= 400$ grad veya
$180^\circ = \pi$ radyan $= 200$ grad yazılabilir.

$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$ Bağıntılarından faydalanılarak açı birimleri birbirlerine çevrilebilir.

ÖRNEK : $s(\hat{A}) = 60^\circ$ olduğuna göre, radyan ve grad türünden değerlerinin bulunması.

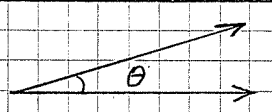
$\frac{60}{180} = \frac{R}{\pi} \longrightarrow R = \frac{\pi}{3}$ Radyan

$\frac{60}{180} = \frac{G}{200} \longrightarrow G = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ Grad bulunur.

AÇILAR [ÖZEL AÇILAR]

DAR AÇI

Ölçüsü $(0^\circ, 90^\circ)$ aralığında olan açıdır.
[$0^\circ < \theta < 90^\circ$ dir.]

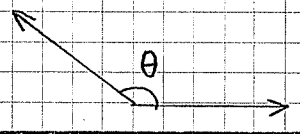


DİK AÇI

Ölçüsü 90° olan açıdır.
[$\theta = 90^\circ$ dir.]

GENİŞ AÇI

Ölçüsü $(90^\circ, 180^\circ)$ aralığında olan açıdır.
[$90^\circ < \theta < 180^\circ$ dir.]

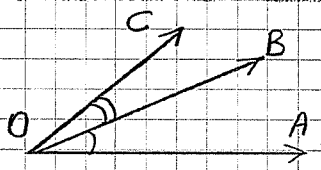


DOĞRU AÇI

Ölçüsü 180° olan açıdır.
[$\theta = 180^\circ$ dir.]

KOMŞU AÇILAR

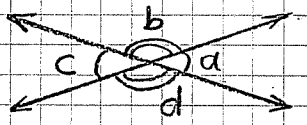
Köşeleri ile birer kenarları ortak olan açılardır.
$\widehat{AOB}$ ve $\widehat{BOC}$ açıları, komşu açılardır.



TERS AÇILAR

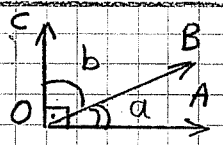
a ile c ve b ile d açıları Ters Açılardır.
Teorem; Ters açılar birbirine eşittir.

$$\left.\begin{array}{l} a = c \wedge b = d \\ a + b = 180^\circ \wedge a + d = 180^\circ \end{array}\right\} \text{dir.}$$



TÜMLER (TÜMLEÇ) AÇILAR

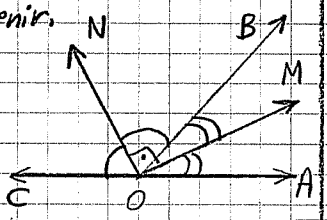
Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya TÜMLER (TÜMLEÇ) AÇILAR denir.
[$\overline{OA} \perp \overline{OB}$ yani; $\widehat{AOC} = 90^\circ$ ise
$a + b = 90^\circ$ dir.]



BÜTÜNLER AÇILAR

Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya BÜTÜNLER AÇILAR denir.
Teorem: Birbirinin bütünü olan iki komşu açının açı ortayları birbirine diktir.

[$\widehat{AOB}$ ve $\widehat{BOC}$ açıları bütünler;
$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ ve $\widehat{BON} = \widehat{NOC}$ ise;
$\overline{OM} \perp \overline{ON}$ dir.



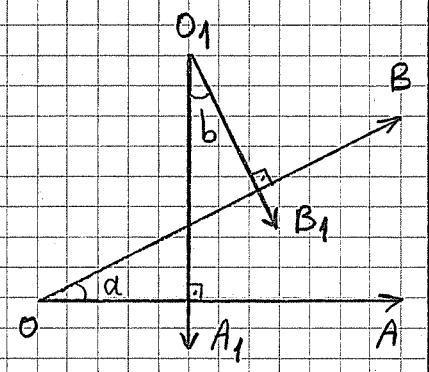
AÇILAR

KENARLARI BİRBİRİNE DİK İKİ DAR AÇI

Teorem : Kenarları birbirine dik olan iki dar açı birbirlerine eşittir.

$\overline{OA} \perp \overline{O_1A_1}$ ve $\overline{OB} \perp \overline{O_1B_1}$ ise;

$a = b$ dır.

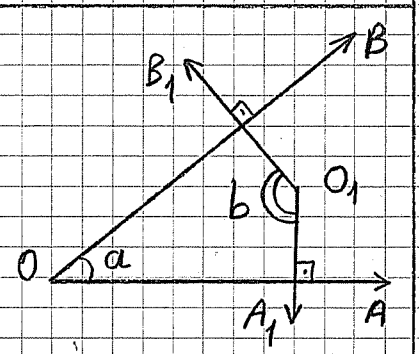


KENARLARI BİRBİRİNE DİK BİRİ DAR DİĞERİ GENİŞ AÇI

Teorem : Kenarları birbirine dik biri dar ve diğeri geniş olan açılar birbirlerinin bütünleridir.

$\overline{OA} \perp \overline{O_1A_1}$ ve $\overline{OB} \perp \overline{O_1B_1}$ ise;

$a + b = 180°$ dır.

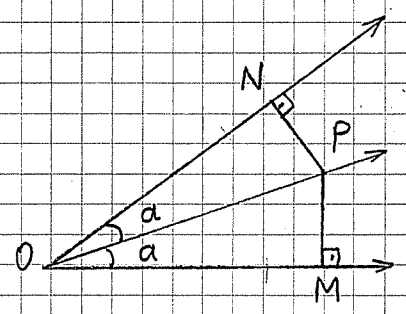


AÇIORTAY

Bir açının kenarlarından eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine (geometrik yerine) bu açının açıortayı denir.

$|PN| = |PM|$ ise $[OP$ ışını, $\widehat{MON}$ açısının açıortayı olur. Açıortay, açıyı ölçüleri eşit iki parçaya ayırır.

Yani : $m(\widehat{MOP}) = m(\widehat{PON})$ dır.

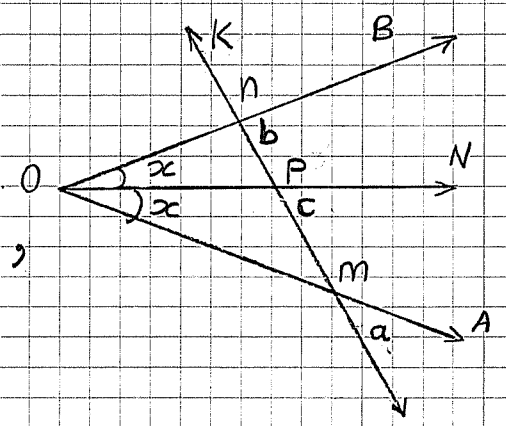


UYGULAMA :

Şekilde $[ON$, $\widehat{AOB}$ nın açıortayıdır. Buna göre;

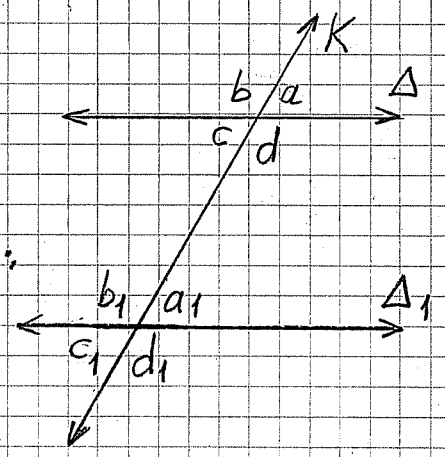
$x = b - c = c - a = p - n = m - p$,

$c = \dfrac{a+b}{2}$; $p = \dfrac{m+n}{2}$ dır.



AÇILAR

Şekilde $\Delta // \Delta_1$ ve K kesendir.



TANIMLAR:

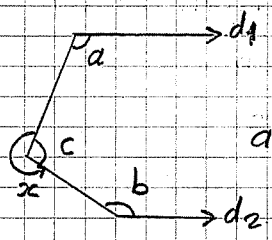
$\left.\begin{array}{l} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \\ d = d_1 \end{array}\right\}$ YÖNDEŞ AÇILAR

ÖKLİD (Euclide, Eukleides) POSTULATI:
iki paralel doğruyu, üçüncü bir doğru keserse; meydana gelen yöndeş açılar birbirine eşittir.

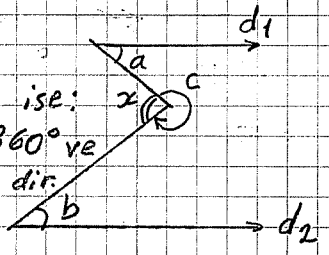
$\left.\begin{array}{l} c = a_1 \\ d = b_1 \end{array}\right\}$ İÇ TERS AÇILAR $\qquad \left.\begin{array}{l} a = c_1 \\ b = d_1 \end{array}\right\}$ DIŞ TERS AÇILAR

$\left.\begin{array}{l} a + d_1 = 180^\circ \\ b + c_1 = 180^\circ \\ c + b_1 = 180^\circ \\ d + a_1 = 180^\circ \end{array}\right\}$ KOMŞU DURUMLU AÇILAR $\qquad \left.\begin{array}{l} a + b_1 = 180^\circ \\ b + a_1 = 180^\circ \\ c + d_1 = 180^\circ \\ d + c_1 = 180^\circ \end{array}\right\}$ YANAL DURUMLU AÇILAR

UYGULAMALAR

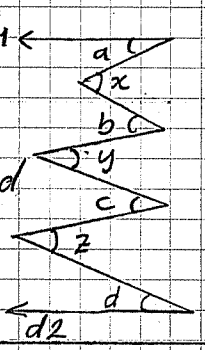


$d_1 // d_2$ ise:
$a + b + c = 360^\circ$ ve
$x = a + b$ dir.



$d_1 // d_2$ ise:

$x + y + z = a + b + c + d$ dir.

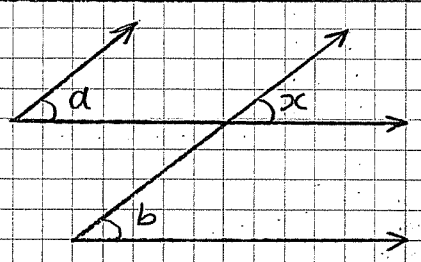


KENARLARI AYNI YÖNDE PARALEL AÇILAR

Teorem:

Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarına aynı yönde paralel ise; açılar eşittir.

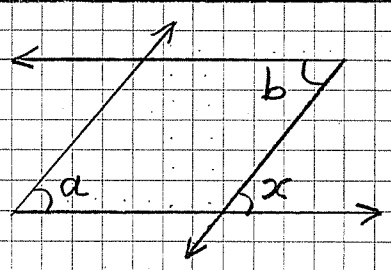
$a = b = x$ dir.



KENARLARI TERS YÖNDE PARALEL AÇILAR

Teorem:
Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarına ters yönde paralel ise; açılar eşittir.

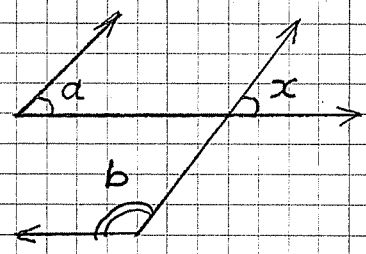
$a = b = x$ dir.



BİRER KENARLARI AYNI, DİĞER KENARLARI TERS YÖNDE PARALEL AÇILAR

Teorem:
Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarına kenarlardan bir çifti aynı ve diğer çifti ters yönde paralel ise; açılar birbirinin bütünleridir.

$a + b = 180^\circ$ dir.



ALAN FONKSİYONU ve ÇOKGENSEL BÖLGELERİN ALANI

TANIM: Doğrusal olmayan A, B, C noktaları için $[AB] \cup [BC] \cup [AC]$ kümesine ABC üçgeni denir. ABC üçgeni, içinde bulunduğu düzlemi üç ayrı noktalar kümesine ayırır. Bu kümeler; ABC üçgeni, bu üçgenin iç bölgesi (içi) ve dış bölgesi (dışı) dır. Bir üçgenle iç bölgesinin birleşimine ÜÇGENSEL BÖLGE denir.

Herhangi ikisinin içlerinin arakesiti boş küme olan, sonlu sayıda üçgensel bölgelerin birleşimi olarak gösterilebilen düzlemsel bir nokta kümesine ÇOKGENSEL BÖLGE denir.

Çokgensel bölgelerin kümesinden, pozitif reel sayılar kümesine aşağıdaki dört aksiyomla tanımlanan A fonksiyonuna ALAN FONKSİYONU ve her çokgensel bölgenin görüntüsü olan sayıya o bölgenin ALANI denir. Çokgensel bölgenin alanı yerine, kısaca çokgenin alanı denir.

AKSİYOMLAR:

1- Her çokgensel bölgeye, bir ve yalnız bir pozitif sayı karşı gelir.

2- İki üçgen eşit ise, alanları da eşittir.

3- B_1 ve B_2 bölgelerinin içlerinin arakesiti boş küme ise, $B_1 \cup B_2$ nin alanı B_1 ile B_2 nin alanları toplamına eşittir.

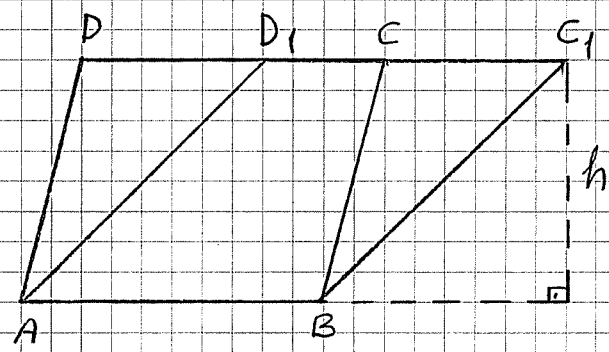
4- Bir dörtgenin alanı, kesişen iki kenarının uzunlukları çarpımına eşittir.

Bir B çokgensel bölgenin alanı $a \in R^+$ ise;

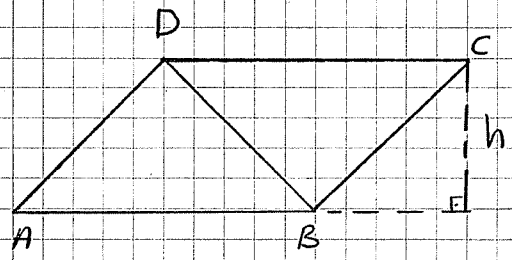
$A(B) = a$ veya $S(B) = a$ şeklinde yazılır.

EŞDEĞERLİ ŞEKİLLER

Teorem: Birer tabanları ile o tabanlara ait yükseklikleri eşit olan paralelkenarlar eşdeğerlidir.

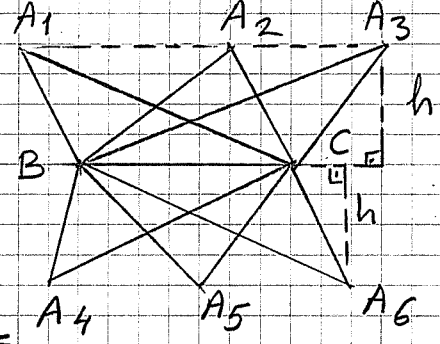


Teorem: Bir üçgenin alanı, aynı taban ve yüksekliktek paralelkenarın alanının yarısına eşittir.



(ABD) Alanı $= \frac{1}{2}$ (ABCD) Alanı

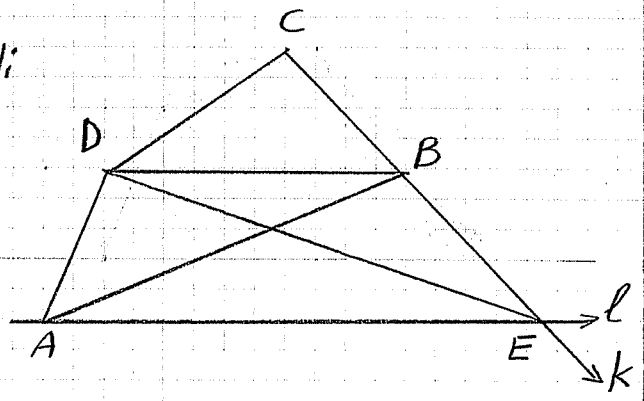
Teorem: Birer kenarları ile o kenarlarına ait yükseklikleri eşit olan üçgenler eş değerlidir.



Netice: Tabanları aynı bir doğru parçası olan eşdeğerli üçgenlerin tepelerinin geometrik yeri, tabana yükseklik uzaklığında bir çift paralel doğrudur.

EŞDEĞERLİ ŞEKİLLER

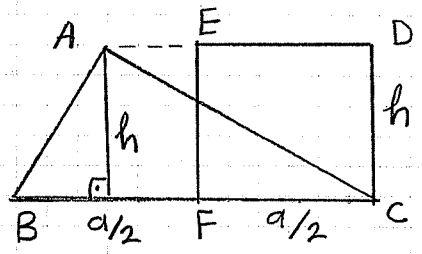
UYGULAMA 1: Verilen bir dörtgene eşdeğerli bir üçgen çizilmesi.



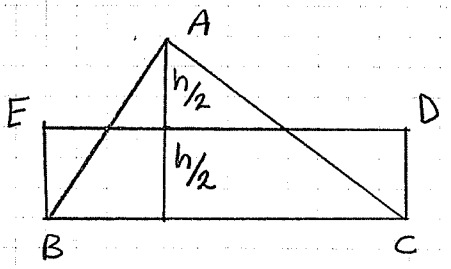
$\ell \parallel BD$ çizilir.
Alan CDE = Alan ABCD dir.

UYGULAMA 2: Verilen bir üçgene eşdeğerli bir dikdörtgen çizilmesi.

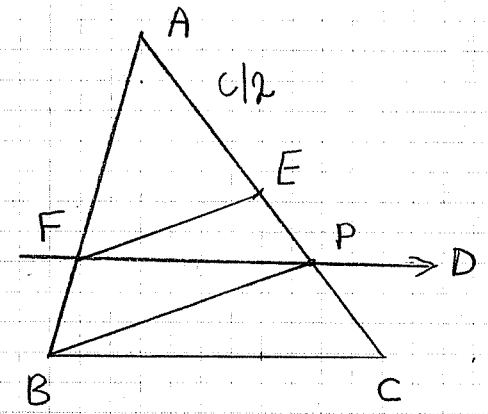
1)



2)

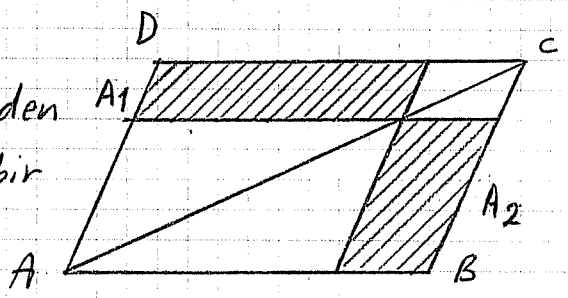


UYGULAMA 3: Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin herhangibir kenarı üzerinde alınan bir noktadan geçen bir doğru ile iki eşdeğerli bölgeye ayrılması.



P alınan nokta olsun.
[AC] nin ortası E bulunur.
[EF] // [PB] çizilir. [PF] çizilir.
Alan AFP = Alan BCPF olur.

TEOREM:

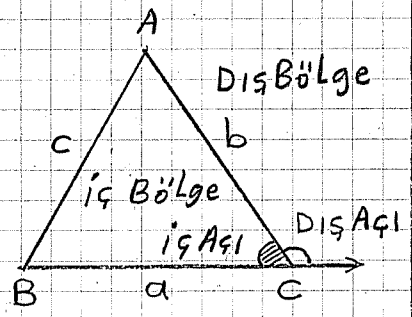


Bir paralelkenarın köşegenlerinden birinin üzerinde alınan herhangibir noktadan kenarlara paraleller çizilerek meydana getirilen dört paralel kenardan, içlerinden köşegen geçmeyen ikisi eşdeğerlidir.

$A_1 = A_2$ dir.

ÜÇGENLER

TANIMLAR



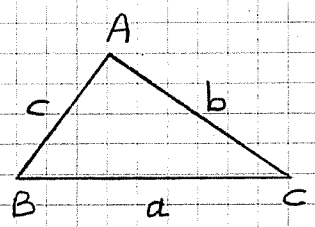
Doğrusal olmayan üç farklı nokta A, B, C olsun. [AB], [BC], [AC] doğru parçalarının birleşimine ABC üçgeni denir. $A\hat{B}C$ biçiminde gösterilir.

1- A, B, C noktalarına üçgenin köşeleri denir.

2- [AB], [BC], [AC] doğru parçalarına üçgenin kenarları. Kenar uzunlukları; $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ ile gösterilir.

3- $B\hat{A}C$ açısına $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ açısına $\hat{B}$, $B\hat{C}A$ açısına $\hat{C}$ açısı denir.

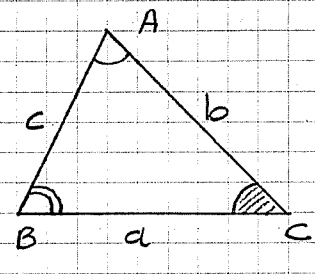
ÜÇGENLERDE AÇI ve KENAR BAĞINTILARI



- Bir üçgende herhangi bir kenar; diğer iki kenar toplamından küçük, farkından büyüktür.

  Şekilde : $a > b > c$ ise;

  $b - c < a < b + c$,
  $a - c < b < c + a$,
  $a - b < c < a + b$ dir.



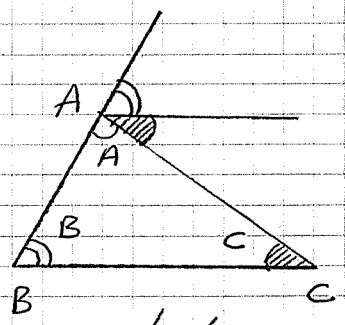
- Bir üçgende büyük kenar karşısında büyük açı, büyük açı karşısında büyük kenar bulunur.

  Şekilde : $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ ise;

  $a > b > c$ dir.

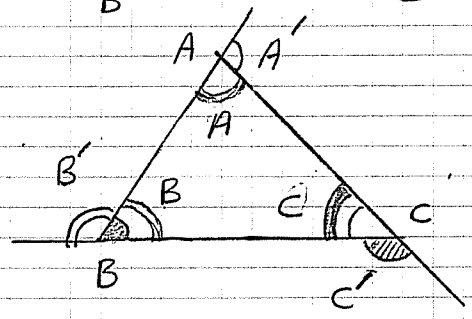
  Karşıt olarak : Bir üçgende iki kenar eşit değilse, bunlardan büyük olanın karşısındaki açı daha büyüktür.

  $a > b > c$ ise;
  $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ dir.



- Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° (iki dikaçı) dır.

  Şekilde : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ dir.



- Bir üçgenin dış açılarının toplamı 360° (dört dikaçı) dır.

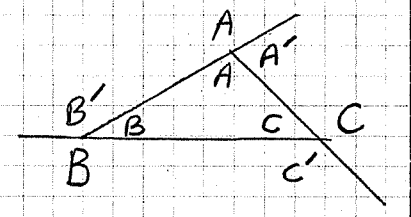
  Şekilde : $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 360^\circ$ dir.

- Bir üçgende bir köşeye ait içaçı ile dış açı bütünlerdir.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{C}' = 180^\circ \end{array}\right\} \text{dir.}$$

ÜÇGENDE AÇI ve KENAR BAĞINTILARI

Teorem: Bir üçgende herhangi bir dış açı, kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir.

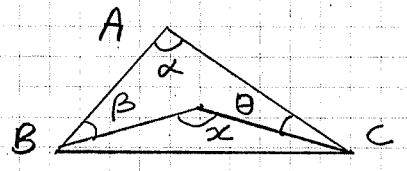


$$\left.\begin{aligned} \hat{A}' &= \hat{B} + \hat{C} \\ \hat{B}' &= \hat{C} + \hat{A} \\ \hat{C}' &= \hat{A} + \hat{B} \end{aligned}\right\} \text{dir}$$

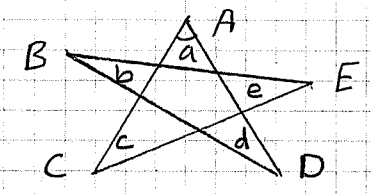
SONUÇLAR

1) $\hat{A} + 180^\circ = \hat{B}' + \hat{C}'$ dir.

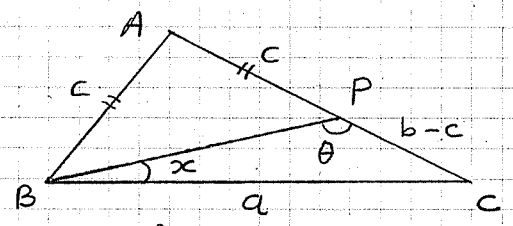
2) $x = \alpha + \beta + \theta$ dır.



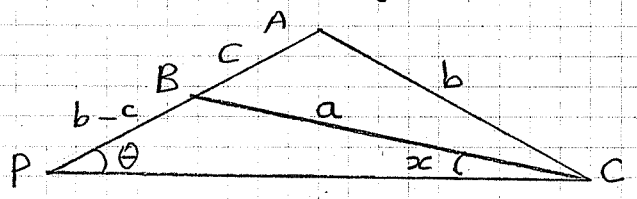
3) $a + b + c + d + e = 180^\circ$ dir.



4)
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \\ \theta &= 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$



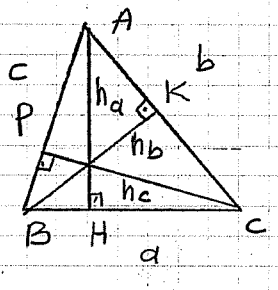
5)
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2} \\ \theta &= 90 - \frac{\hat{A}}{2} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$

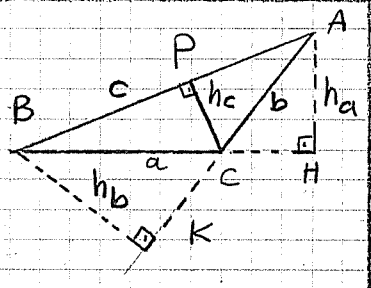


ÜÇGENİN YÜKSEKLİKLERİ

TANIM

Bir üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara çizilen dikmenin köşe ile kenar arasında kalan parçasına, üçgenin **YÜKSEKLİĞİ** denir.





Şekilde: $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin [AH], [BK], [CP] yükseklikleri çizilmiştir. Bu yüksekliklerin uzunlukları sırası ile h_a, h_b, h_c olarak gösterilir.

TEOREM:

$a > b > c$ ise;

$h_a < h_b < h_c$ dir.

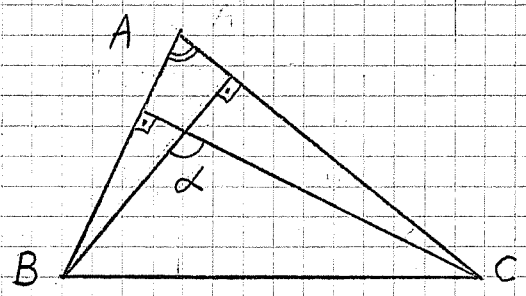
ÜÇGENİN YÜKSEKLİKLERİ

TEOREM

Şekilde: $|BH| \perp |AC|$ ve

$|CE| \perp |AB|$ ise;

$\hat{\alpha} + \hat{A} = 180^\circ$ dir



Buradan: $\hat{\alpha} = \hat{B} + \hat{C}$ yazılır.

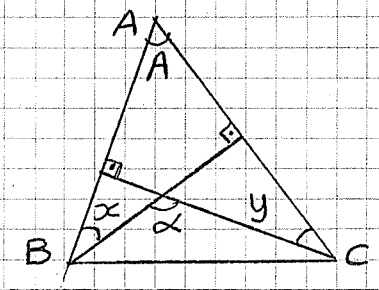
SONUÇ: $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ ise $\hat{A} = 90^\circ$,

$\hat{A} < \hat{B} + \hat{C}$ ise $\hat{A} < 90^\circ$ ve

$\hat{A} > \hat{B} + \hat{C}$ ise $\hat{A} > 90^\circ$ dir.

UYGULAMA:

$2\hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{y} + 180^\circ$ dir.



YÜKSEKLİK FORMÜLLERİ

$h_a = b \sin C = c \cdot \sin B$

$h_b = c \sin A = a \cdot \sin C$

$h_c = a \sin B = b \cdot \sin A$

$$h_a = \frac{a \sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{b \cdot \sin A \cdot \sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{c \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin C}$$

$h_a = 2R \sin B \cdot \sin C$, $h_b = 2R \sin A \sin C$, $h_c = 2R \sin A \sin B$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

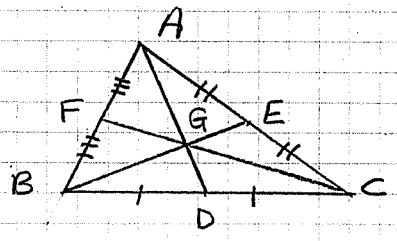
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$h_a = \dfrac{bc}{2R}$, $h_b = \dfrac{ac}{2R}$ ve $h_c = \dfrac{ab}{2R}$ dir.

ÜÇGENİN KENAR ORTAYLARI

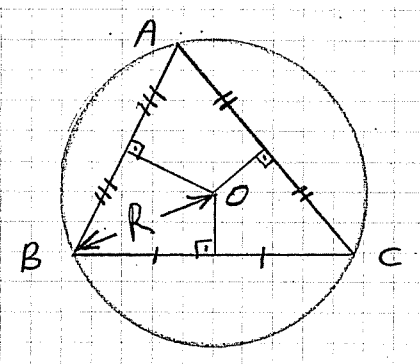
TANIMLAR



$\triangle ABC$ üçgeninde D, E, F kenarların orta noktaları ise; [AD], [BE], [CF] doğru parçalarına üçgenin KENAR ORTAYLARI denir.

Kenar ortaylar aynı bir G noktasında kesişirler. G noktasına üçgenin AĞIRLIK MERKEZİ denir.

Kenar ortayların uzunlukları; $|AD| = v_a$, $|BE| = v_b$, $|CF| = v_c$ ile gösterilir.



Kenar orta noktalarından çıkılan dikmelerin kesiştiği nokta ÇEVREL ÇEMBERİN merkezidir. Şekilde, R çevrel çemberin yarıçapıdır.

TEOREMLER

1) $a > b > c$ ise;
$v_a < v_b < v_c$ dir.

2) $2u = a + b + c$ olmak üzere;
$u < v_a + v_b + v_c < 2u$ dir.

3) $\left.\begin{array}{l} b + c - a < 2v_a < b + c \\ a + c - b < 2v_b < a + c \\ a + b - c < 2v_c < a + b \end{array}\right\}$ dir.

4) $m(\hat{A}) < 90^\circ$ ise $v_a > \frac{a}{2}$ dir.

$m(\hat{A}) = 90^\circ$ ise $v_a = \frac{a}{2}$ dir.

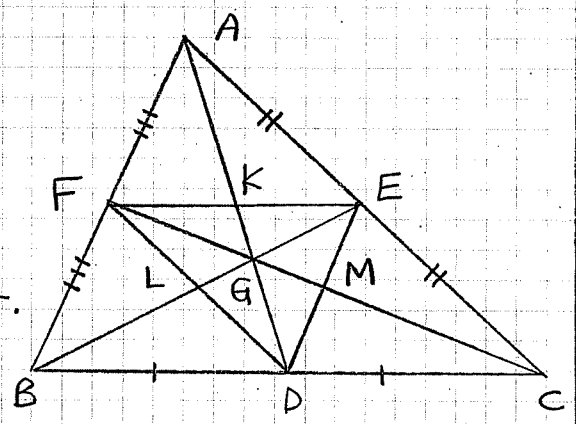
$m(\hat{A}) > 90^\circ$ ise $v_a < \frac{a}{2}$ dir.

KENAR ORTAYLARLA İLGİLİ ÖZELLİKLER

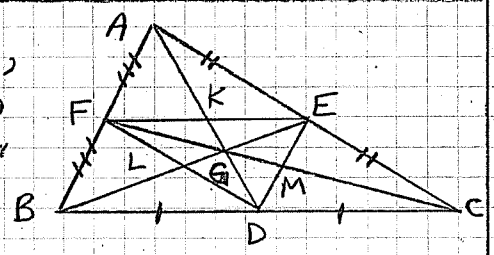
İki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçası üçüncü kenara paralel ve yarısına eşittir.

Şekilde: $[EF] // [BC]$, $[FD] // [AC]$, $[DE] // [AB]$ ise;

$|EF| = \frac{|BC|}{2}$, $|DE| = \frac{|AB|}{2}$, $|FD| = \frac{|AC|}{2}$ dir.



[AD] kenar ortayı [FF]'yi K noktasında, [BE] kenar ortayı [FD]'yi L noktasında, [CF] kenar ortayı [DE]'yi M noktasında kessin. K, L ve M noktaları, bulundukları kenar ortayların orta noktalarıdır. Şekilde:



$|AH| = |KD|$, $|BL| = |LE|$ ve $|CM| = |MF|$ dir.

Ağırlık merkezi G olsun.

1) $|AG| = 2|GD|$, $|CG| = 2|GF|$, $|BG| = 2|GE|$ dir.

2) Ağırlık merkezinin bir köşeye uzaklığı, o köşeye ait kenar ortayın 2/3 üne eşittir.

$|AG| = \frac{2}{3} v_a$, $|BG| = \frac{2}{3} v_b$ ve $|CG| = \frac{2}{3} v_c$ dir.

3) $|GD| = \frac{1}{3} v_a$, $|GE| = \frac{1}{3} v_b$, $|GF| = \frac{1}{3} v_c$ dir.

($v_a = 3|GD|$, $v_b = 3|GE|$, $v_c = |GF|$ dir.)

4) $|AK| = 3|KG|$, $|BL| = 3|LG|$ ve $|CM| = 3|MG|$ dir.

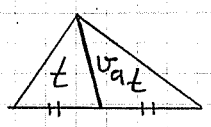
5) Bir kenarın orta noktasının, ağırlık merkezine uzaklığı, o kenar ortayın 1/6 sına eşittir.

$|KG| = \frac{1}{6} v_a$, $|LG| = \frac{1}{6} v_b$ ve $|MG| = \frac{1}{6} v_c$ dir.

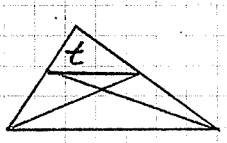
6) $3(|GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2) = a^2 + b^2 + c^2$ dir.

KENAR ORTAYLARIN BELİRLEDİĞİ ÜÇGENLERİN ALANLARI

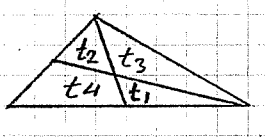
A üçgenin alanıdır.



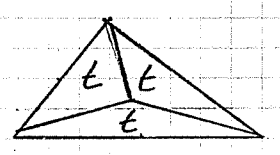
$t = \frac{A}{2}$ dir.



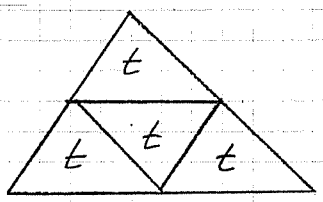
$t = \frac{A}{4}$ dir.



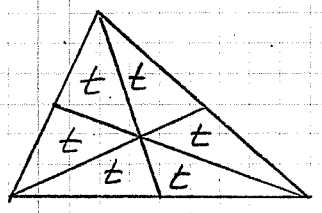
$\left.\begin{array}{l} t_1 = t_2 \\ t_3 = t_4 \end{array}\right\}$ dir.



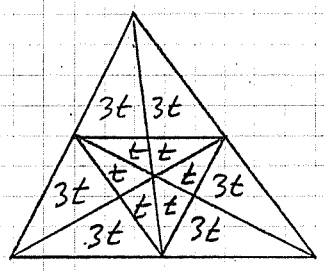
$t = \frac{A}{3}$ dir.



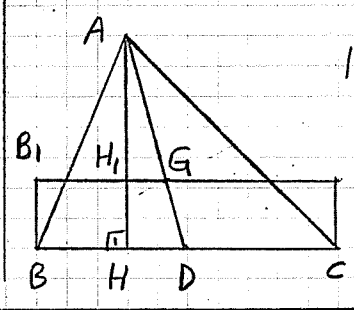
$t = \frac{A}{4}$ dir.



$t = \frac{A}{6}$ dir.



$t = \frac{A}{24}$ dir.

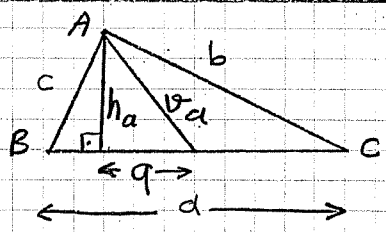


$|AH_1| = 2|BB_1|$ dir.

Üçgenin alanı A, dikdörtgenin alanı t olsun.

$t = \frac{2A}{3}$ dir.

KENAR ORTAY TEOREMİ



I nci KENAR ORTAY TEOREMİ

$$b^2 - c^2 = 2aq \quad \text{dir.}$$

II nci KENAR ORTAY TEOREMİ

$$2v_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2 \,,$$

$$2v_b^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2 \,,$$

$$2v_c^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2 \quad \text{dir.}$$

SONUÇLAR

1) $v_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$,

$v_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$,

$v_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ dir.

2)
$$\left.\begin{aligned} h_a^2 &= b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} \\ h_b^2 &= a^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2} = a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2} \\ h_c^2 &= a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2} = b^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$

3) $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ise; $\left.\begin{aligned} v_b^2 + v_c^2 &= 5v_a^2 \\ v_b^2 + v_c^2 &= \frac{5}{4}a^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

$m(\hat{B}) = 90^\circ$ ise; $\left.\begin{aligned} v_a^2 + v_c^2 &= 5v_b^2 \\ v_a^2 + v_c^2 &= \frac{5}{4}b^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

$m(\hat{C}) = 90^\circ$ ise; $\left.\begin{aligned} v_a^2 + v_b^2 &= 5v_c^2 \\ v_a^2 + v_b^2 &= \frac{5}{4}c^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

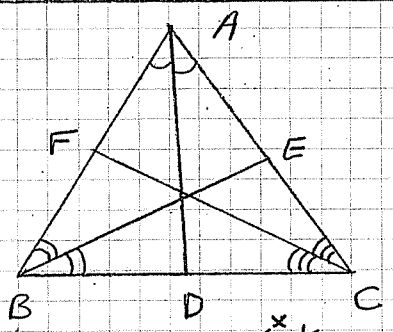
4) $v_a \perp v_b$ ise; $\left.\begin{aligned} v_b^2 + v_a^2 &= v_c^2 \\ v_c &= \frac{3}{2}c \\ a^2 + b^2 &= 5c^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

$v_a \perp v_c$ ise; $\left.\begin{aligned} v_a^2 + v_c^2 &= v_b^2 \\ v_b &= \frac{3}{2}b \\ a^2 + c^2 &= 5b^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

$v_b \perp v_c$ ise; $\left.\begin{aligned} v_b^2 + v_c^2 &= v_a^2 \\ v_a &= \frac{3}{2}a \\ b^2 + c^2 &= 5a^2 \end{aligned}\right\}$ dir.

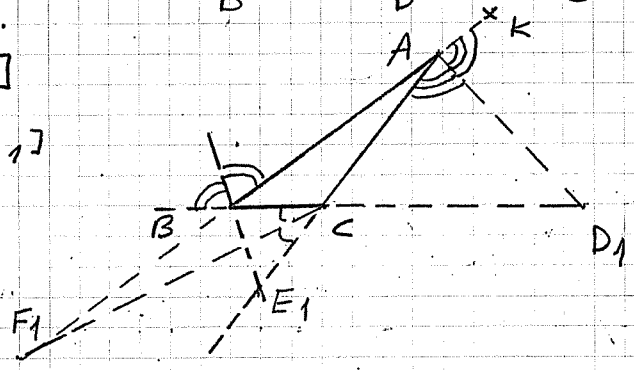
ÜÇGENİN AÇI ORTAYLARI

TANIMLAR



$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$ ise $[AD]$ doğru parçasına $\hat{A}$ açısının İÇ AÇI ORTAYI denir. $[AD]$ açı ortayının uzunluğu n_A ile gösterilir. Aynı şekilde $\hat{B}$ ve $\hat{C}$ açılarının iç açı ortayları çizilirse;

$[BE] = n_B$ ve $[CF] = n_C$ olur.



$m(\widehat{KAD_1}) = m(\widehat{D_1AC})$ ise $[AD_1]$ doğru parçasına $\hat{A}'$ açısının DIŞ AÇI ORTAYI denir. $[AD_1]$ açı ortayının uzunluğu n'_A ile gösterilir.

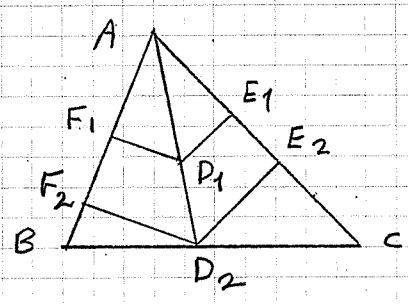
Aynı şekilde $\hat{B}'$ ve $\hat{C}'$ açılarının dış açı ortayları çizilirse;

$[BE_1] = n'_B$ ve $[CF_1] = n'_C$ olur.

TEOREM: $a > b > c$ ise;

$$n_A < n_B < n_C \quad \text{ve}$$

$$n'_A > n'_B > n'_C \quad \text{dir.}$$

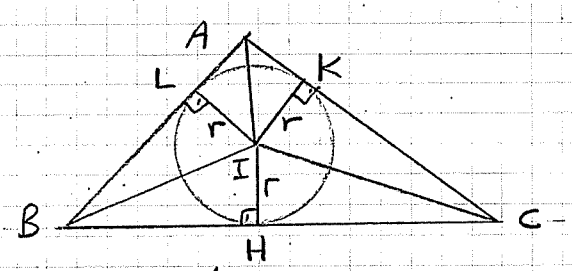


TEOREM: İç açı ortay üzerinde bulunan herhangibir nokta diğer kenarlardan eşit uzaklıktadır.

Şekilde, $[AD_2]$ Açı ortay ise;

$[E_1D_1] = [F_1D_1]$ ve

$[E_2D_2] = [F_2D_2]$ dir.

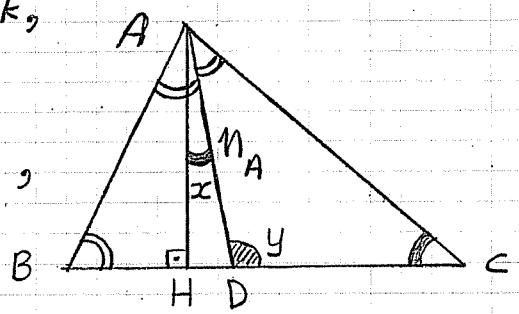


TEOREM: Üç iç açı ortayın I kesim noktasının kenarlara olan uzaklıkları eşittir.

Şekilde; $|IH| = |IK| = |IL| = r$ dir.

TANIM: r uzunluğu, üçgenin içine çizilen çemberin yarıçapıdır.

TEOREM: Şekilde $[AH]$ yükseklik, $[AD]$ açı ortay ise;



$$m(\widehat{HAD}) = x = \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2},$$

$$y = 90^\circ - \frac{|m(\hat{B}) - m(\hat{C})|}{2} \quad \text{dir.}$$

ÜÇGENİN AÇI ORTAYLARI

TEOREM

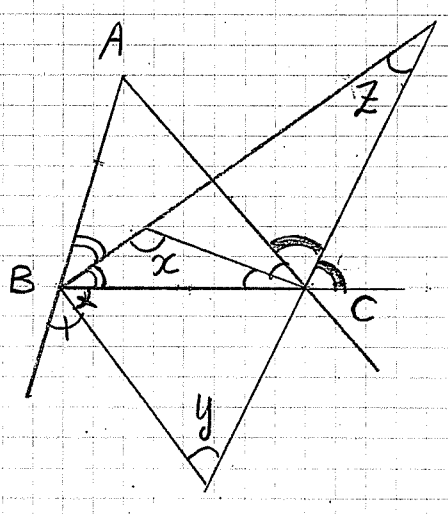
Şekilde:

1) $x = 90^\circ + \dfrac{m(\hat{A})}{2}$,

2) $y = 90^\circ - \dfrac{m(\hat{A})}{2}$,

3) $x + y = 180^\circ$ ve

4) $z = \dfrac{m(\hat{A})}{2}$ dir.



AÇI ORTAY FORMÜLLERİ

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde: Kenarlar; a, b, c, $2u = a+b+c$

İç açı ortaylar; n_A, n_B, n_C

Dış açı ortaylar; n'_A, n'_B, n'_C olsun.

$n_A = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{u(u-a)bc}$, $n'_A = \dfrac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(u-b)(u-c)}$,

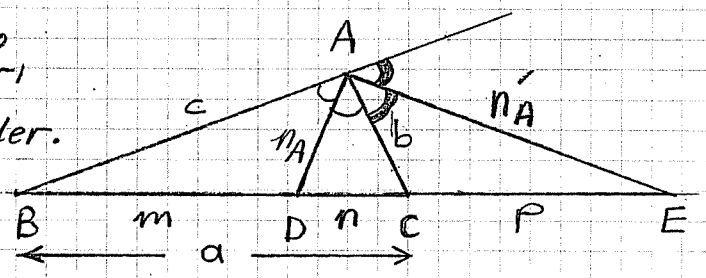
$n_B = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{u(u-b)ac}$, $n'_B = \dfrac{2}{|c-a|}\sqrt{ac(u-a)(u-c)}$,

$n_C = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{u(u-c)ab}$, $n'_C = \dfrac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(u-a)(u-b)}$ dir.

AÇI ORTAY TEOREMİ

TEOREM

Bir üçgende bir açının iç ve dış açı ortayları, bu açı karşısındaki kenarı içten ve dıştan komşu kenarlar oranında bölerler.



Şekilde;

$\dfrac{|DC|}{|DB|} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{n}{m}$ ve

$\dfrac{|EC|}{|EB|} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{p}{a+p}$ dir.

SONUÇLAR: $|DC| = \dfrac{ab}{b+c} = n$, $|DB| = \dfrac{ac}{b+c} = m$,

$|EC| = \dfrac{ab}{|c-b|} = p$, $|EB| = \dfrac{ac}{|c-b|} = a+p$,

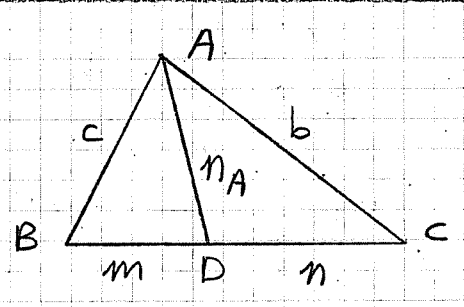
$|ED| = \dfrac{2abc}{|c^2-b^2|} = n+p$ dir.

AÇI ORTAY TEOREMİ

UYGULAMALAR

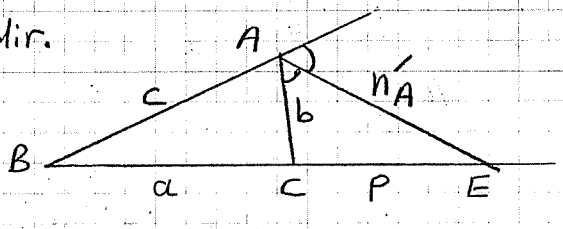
1) Şekilde;

$$n_A^2 = bc - mn \text{ dir.}$$



2) Şekilde; $n_A'^2 = p(a+p) - bc$ dir.

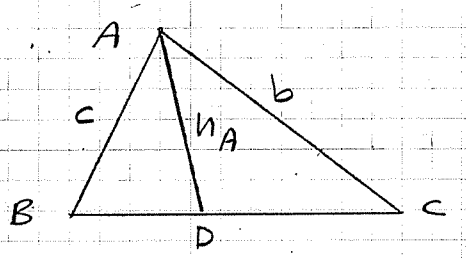
$$n_A' = \frac{2}{|b-c|} \cdot \sqrt{bc(4-b)-bc} \text{ dir.}$$



3) Teorem: iç açı ortay; üçgeni alanları oranı diğer kenarların oranına eşit iki üçgene ayırır.

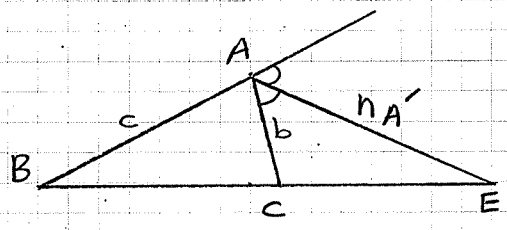
Şekilde, [AD] iç açı ortay ise;

$$\frac{\text{Alan}(\overset{\triangle}{ADC})}{\text{Alan}(\overset{\triangle}{ADB})} = \frac{b}{c} \text{ dir.}$$



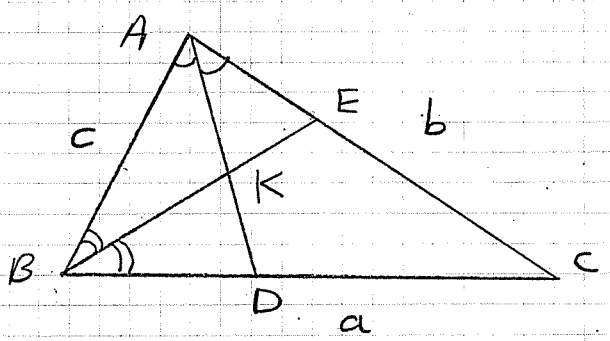
4) Teorem: Şekilde, [AE] dış açı ortay ise;

$$\frac{\text{Alan}(\overset{\triangle}{ACE})}{\text{Alan}(\overset{\triangle}{ABE})} = \frac{b}{c} \text{ dir.}$$



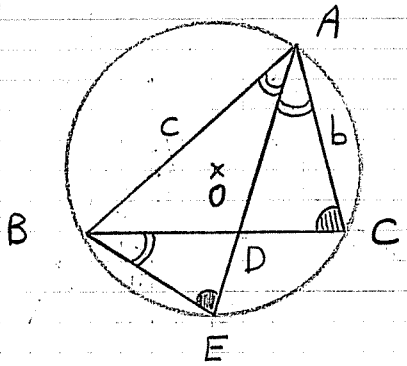
5) Şekilde;

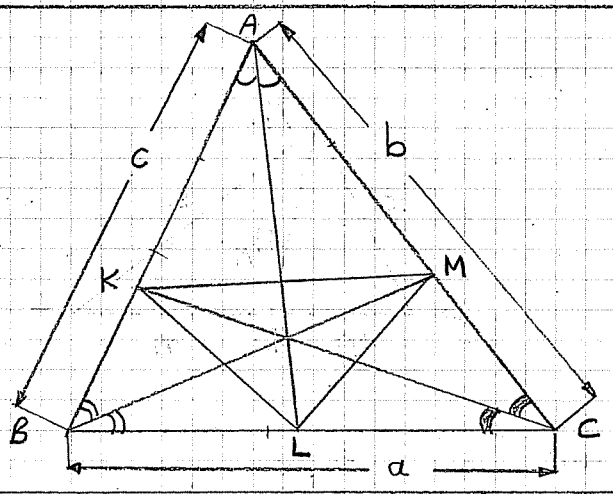
$$\frac{|KA|}{|KD|} = \frac{b+c}{c} \text{ dir.}$$



6) Şekilde;

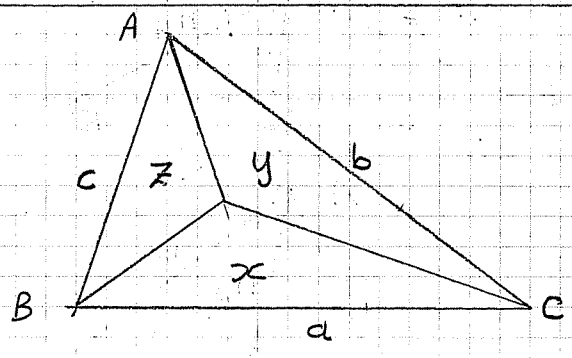
$$\left.\begin{array}{l} |EB|^2 = |ED| \cdot |EA| \\ |AD| \cdot |AE| = b \cdot c \end{array}\right\} \text{ dir.}$$





$|AL|, |BM|, |CK|$ Açıortaylar ise:

$$\frac{A(KLM)}{A(ABC)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$ dir.



Üçgenin alanı A; x, y, z bulunduk-ları bölgelerin alanları ise:

1) $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$; $\frac{x}{z} = \frac{a}{c}$; $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$ dir.

2) $\frac{x}{A} = \frac{a}{a+b+c}$; $\frac{y}{A} = \frac{b}{a+b+c}$;

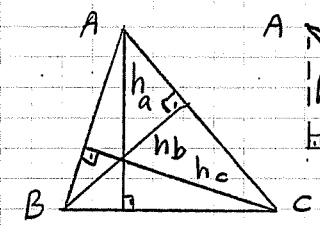
$\frac{z}{A} = \frac{c}{a+b+c}$ dir.

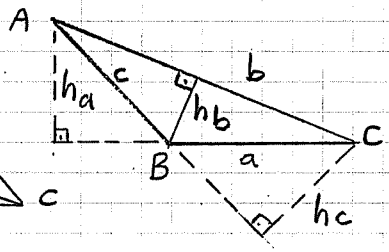
3) $\frac{x+y}{A} = \frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{x+z}{A} = \frac{a+c}{a+b+c}$; $\frac{y+z}{A} = \frac{b+c}{a+b+c}$ dir

ÜÇGENİN ALANI

1) $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı A olsun.

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ dır.}$$

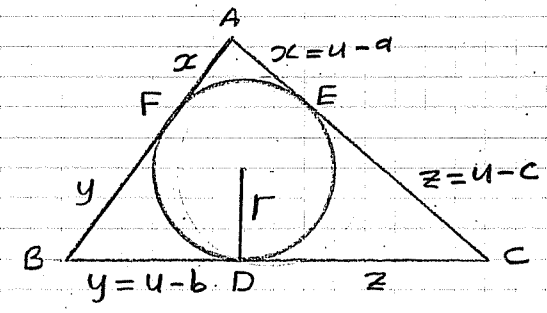




2) $A = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$

3) $\left.\begin{array}{l} x + y = c \\ y + z = a \\ x + z = b \\ 2u = a + b + c \end{array}\right\}$ ise;

$\left.\begin{array}{l} x = u - a \\ y = u - b \\ z = u - c \end{array}\right\}$ dır.

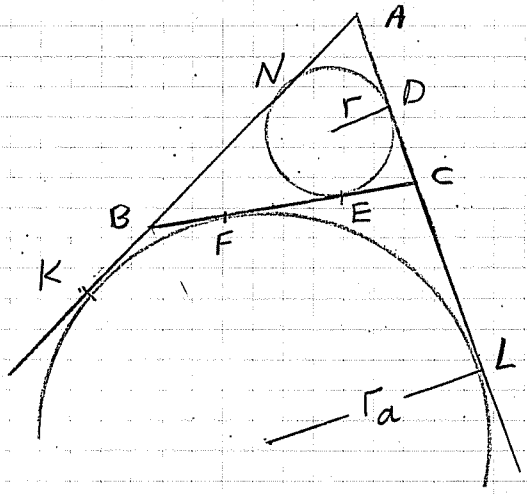


$$A = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = \sqrt{u \cdot x \cdot y \cdot z} \text{ dır.}$$

$$A = u \cdot r$$

$$A = u^2 \tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = r^2 \cdot \operatorname{Cotg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{Cotg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{Cotg}\frac{C}{2}$$

4) $\left.\begin{array}{l} AN = AD = u - a \\ DE = EC = BF = BK = u - c \\ BN = BE = CF = CL = u - b \\ NK = a \\ EF = c - b \end{array}\right\}$ dır.



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

$$r_a \cdot r_b + r_a r_c + r_b \cdot r_c = u^2$$

$$A = (u-a) r_a = (u-b) r_b = (u-c) r_c$$

$$A = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

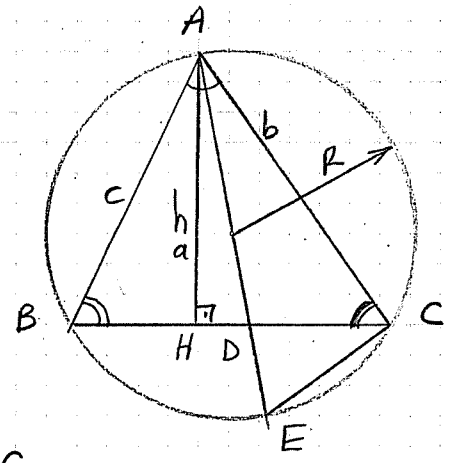
5) $A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

$$A = \frac{abc}{4R}$$

$$bc = 2R h_a$$

$$ac = 2R h_b$$

$$ab = 2R h_c$$



$$R = a/2\sin A = b/2\sin B = c/2\sin C$$

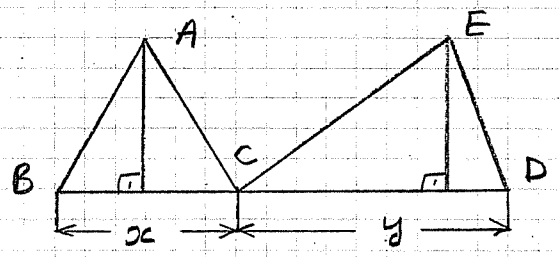
ÜÇGENİN ALANI

6) Köşelerinin koordinatları $A=(x_1, y_1)$; $B=(x_2, y_2)$ $C=(x_3, y_3)$ Bilinirse :

$$A = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_3) \right| \quad \text{dir.}$$

Teorem :

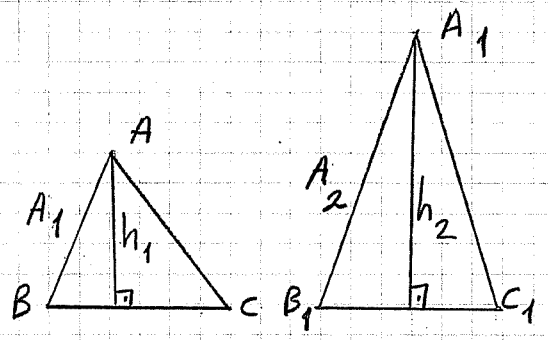
Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanlarının oranı, üçgenlerin taban uzunluklarının oranına eşittir.



$$\frac{\text{Alan } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{Alan } \overset{\triangle}{ECD}} = \frac{x}{y} \quad \text{dir.}$$

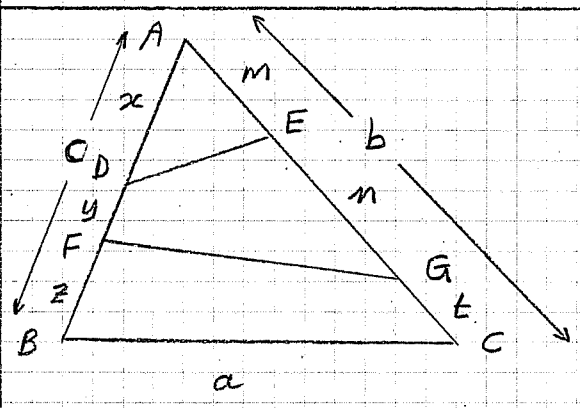
Teorem :

Tabanları eşit olan üçgenlerin alanlarının oranı, üçgenlerin yüksekliklerinin oranına eşittir.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{dir.}$$

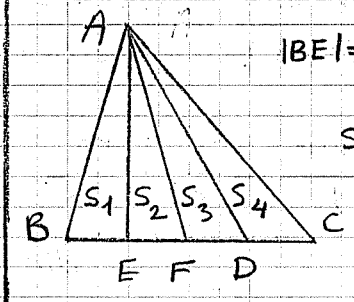
UYGULAMA



$$\frac{A(DFGE)}{A(ABC)} = \frac{A(AFG)}{A(ABC)} - \frac{A(ADE)}{A(ABC)}$$

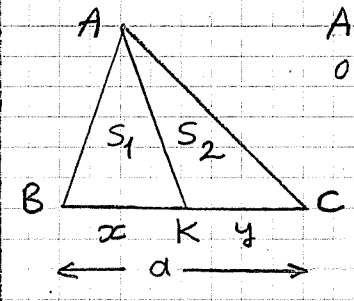
$$\frac{A(DFGE)}{A(ABC)} = \frac{x+y}{c} \cdot \frac{m+n}{b} - \frac{x}{c} \cdot \frac{m}{b}$$

ÜÇGEN PARÇALARININ ALANLARI



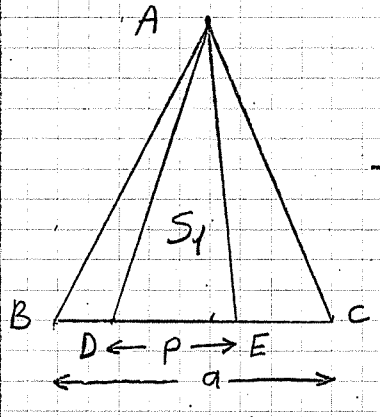
$|BE|=|EF|=|FD|=|DC|$ ise;

$S_1=S_2=S_3=S_4$ dir.

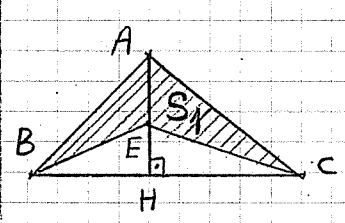


A, üçgenin alanı olsun.

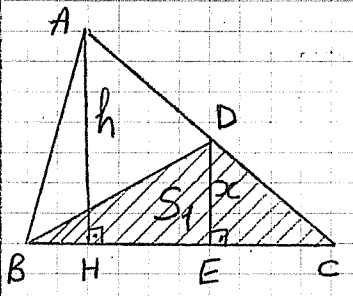
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{x}{y}\\[2mm] \dfrac{S_1}{A}=\dfrac{x}{a}\\[2mm] \dfrac{S_2}{A}=\dfrac{y}{a}\end{array}\right\}\text{dir.}$$



$$\frac{S_1}{A}=\frac{p}{a}\ \text{dir.}$$



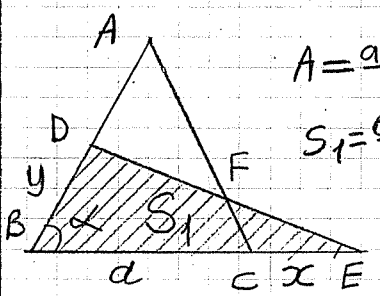
$$S_1=\frac{a\cdot|AE|}{2}\ \text{dir.}$$



$$\frac{S_1}{A}=\frac{x}{h}$$

veya;

$$S_1=\frac{x}{h}\cdot A\ \text{dir.}$$

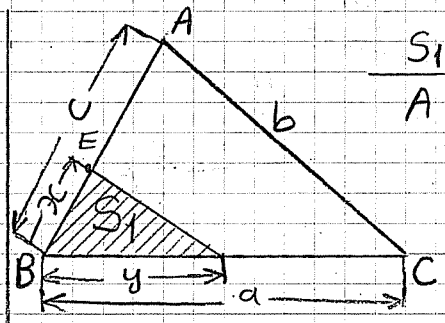


$$\left.\begin{array}{l}A=\dfrac{a\cdot c}{2}\cdot\sin\alpha\\[2mm] S_1=\dfrac{(a+x)}{2}\cdot\sin\alpha\end{array}\right\}\text{dir.}$$

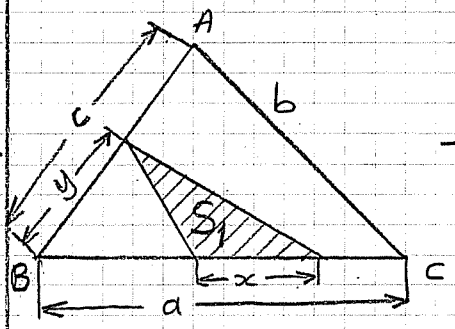
Buradan;

$$\frac{S_1}{A}=\frac{(a+x)y}{a\cdot c}$$

yazılabilir.

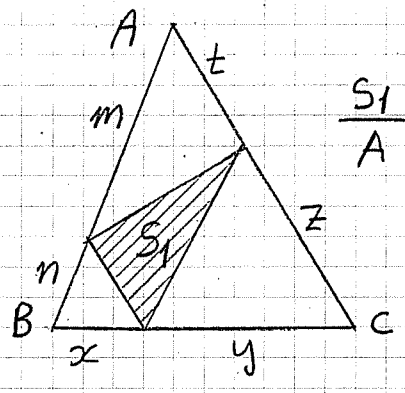


$$\frac{S_1}{A}=\frac{x}{c}\cdot\frac{y}{a}\ \text{dir.}$$



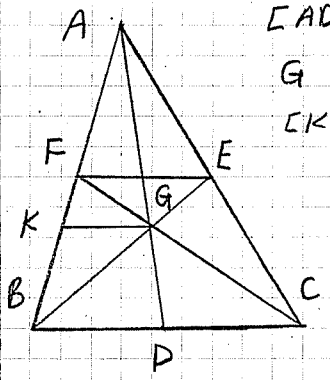
$$\frac{S_1}{A}=\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{c}$$

dir.



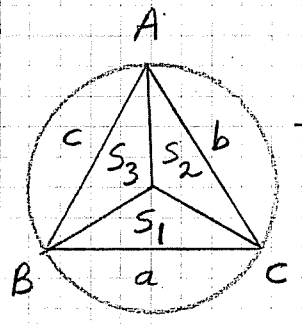
$$\frac{S_1}{A}=\frac{x\cdot z\cdot m+y\cdot t\cdot n}{abc}$$

dir.



[AD] kenar ortay, G ağırlık merkezi, [KG] // [BC] ise;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Alan}(\overset{\triangle}{AFE})=\dfrac{A}{4}\\[2mm] \text{Alan}(\overset{\triangle}{ABD})=\dfrac{A}{2}\\[2mm] \text{Alan}(\overset{\triangle}{BGD})=\dfrac{A}{6}\\[2mm] \text{Alan}(\overset{\triangle}{FGE})=\dfrac{A}{12}\\[2mm] \text{Alan}(\overset{\triangle}{FKG})=\dfrac{A}{18}\end{array}\right\}\text{dir.}$$



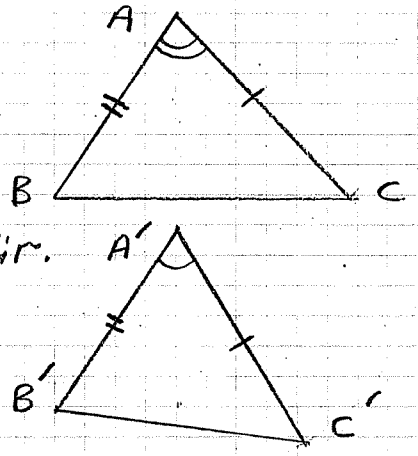
$$\frac{a^4+16S_1^2}{a^2}=\frac{b^4+16S_2^2}{b^2}=\frac{c^4+16S_3^2}{c^2}$$

dir.

BİR ÜÇGENİN BELLİ OLMASI

Bir veya iki elemanı verilen üçgen tam olarak belli değildir. Üçgenin belli olması, üçgenin çizilebilmesi demektir. Üç açısı verilen üçgen de tamamen belli değildir. Üç açısı eşit olan üçgenler; benzer üçgenler olup, sonsuz sayıdadır. Bir üçgenin belli olması için, yani çizilebilmesi için en az biri uzunluk olmak üzere üç elemanının bilinmesi gerekir.

ÜÇGENLERİN KARŞILAŞTIRILMALARI



Teorem : iki üçgenin iki kenarı birbirine eşit olsa ve aralarındaki açıları eşit olmasa, üçüncü kenarları eşit değildir. Büyük açı karşısındaki kenar, küçük açı karşısındaki kenardan daha büyüktür.

$|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $\hat{A} > \hat{A}'$ ise;

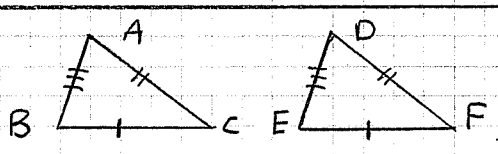
$|BC| > |B'C'|$ dir.

Karşıt Teorem: iki üçgenin ikişer kenarları eşit olsa üçüncü kenarları eşit olmasa, eşit olmayan kenarlar arasındaki açılar da eşit değildir. Büyük kenar karşısındaki açı, küçük kenar karşısındaki açıdan büyüktür.

$|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| > |B'C'|$ ise;

$\hat{A} > \hat{A}'$ dir.

ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ



$\overset{\triangle}{ABC}$ ve $\overset{\triangle}{DEF}$ gibi iki üçgen arasında $\hat{ABC} \cong \hat{DEF}$ eşlemesi verildiğinde, karşılıklı açılar ve kenarlar eşit ise bu iki üçgen eşittir denir.

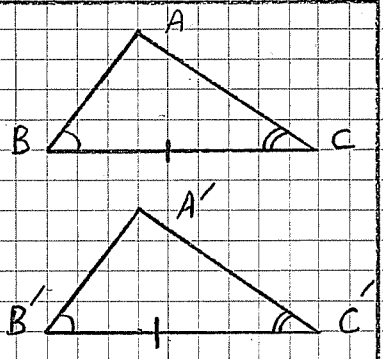
$\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$ ve

$|BC| = |EF|$, $|AC| = |DF|$, $|AB| = |DE|$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$ dir.

ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ (A.k.A.)

Teorem: Birer kenarları ile ona komşu olan ikişer açıları eşit olan üçgenler birbirlerine eşittir.

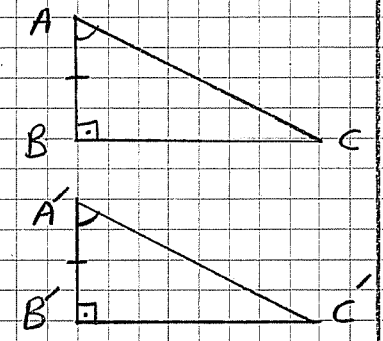


[$\hat{B} = \hat{B}'$ ve $\hat{C} = \hat{C}'$,

$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

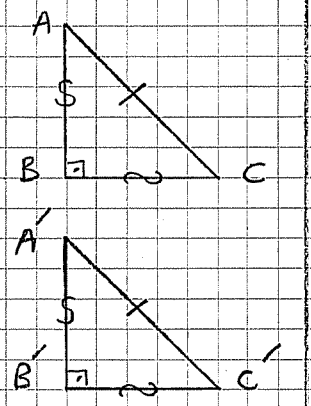
Netice 1) Birer dar açıları ile birer dik kenarları eşit olan dik üçgenler birbirlerine eşittir.



[$\hat{A} = \hat{A}'$ ve $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

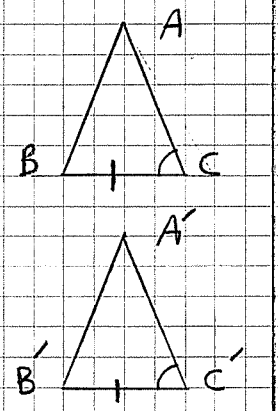
Netice 2) Hipotenüsleri eşit olan ikizkenar dik üçgenler birbirlerine eşittir.



[$\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

Netice 3) Tabanları ile birer taban açıları eşit olan ikizkenar üçgenler birbirlerine eşittir

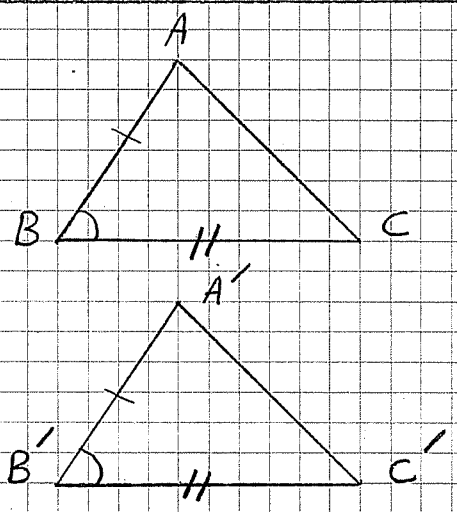


[$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ve $\hat{C} = \hat{C}'$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir]

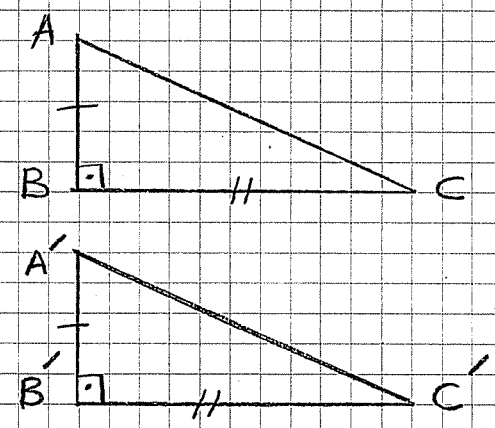
ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ (k.A.k.)

Teorem: İkişer kenarları ile aralarındaki açıları eşit olan iki üçgen birbirlerine eşittir.



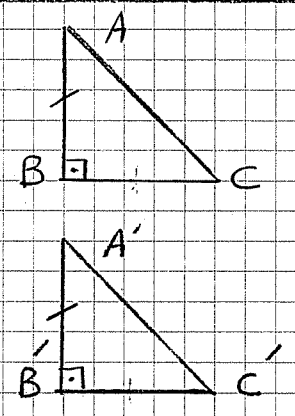
[$\overline{AB} = \overline{A'B'}$,
$\hat{B} = \hat{B'}$ ve
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

Netice 1: İkişer kenarları eşit olan dik üçgenler birbirine eşittir.



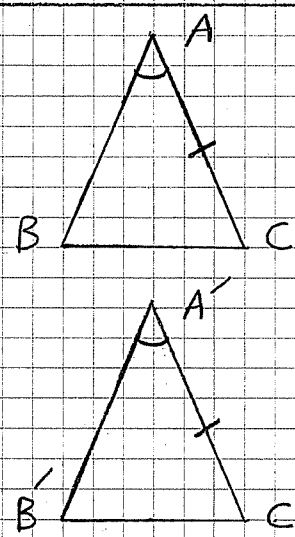
[$\overline{AB} = \overline{A'B'}$,
$\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$ ve
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

Netice 2: Birer dik kenarları eşit olan ikizkenar dik üçgenler birbirlerine eşittir.



[$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$,
$\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

Netice 3: Birer yan kenarları ile tepe açıları eşit olan ikizkenar üçgenler birbirlerine eşittir.

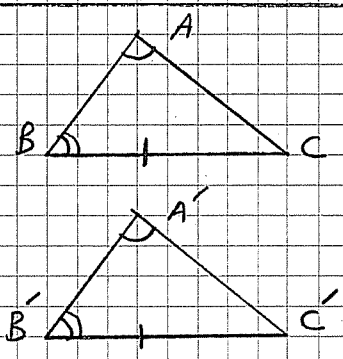


[$\overline{AC} = \overline{A'C'}$,
$\hat{A} = \hat{A'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

[Üçgenler ikizkenar oldukları için, $\overline{AC} = \overline{AB}$, $\overline{A'C} = \overline{A'B'}$ dir.]

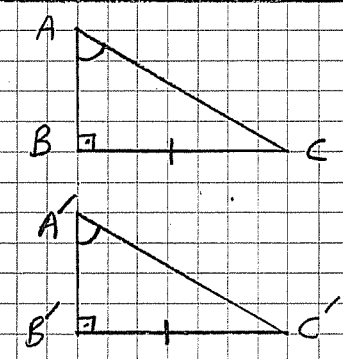
ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ (A.A.k.)

Teorem: Birer kenarları ile ona biri komşu, diğeri karşı bulunan ikişer açıları eşit olan üçgenler birbirlerine eşittir.



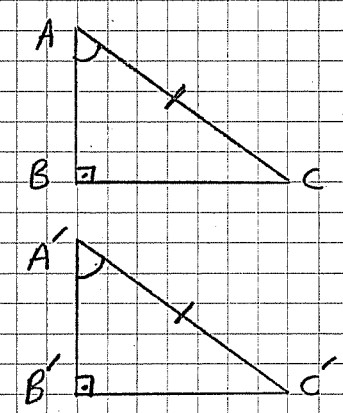
[$\hat{A} = \hat{A'}$ ile $\hat{B} = \hat{B'}$ ve,
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

Netice 1) Birer dar açıları ile birer dik kenarları (veya hipotenüsleri) eşit olan dik üçgenler birbirlerine eşittir.

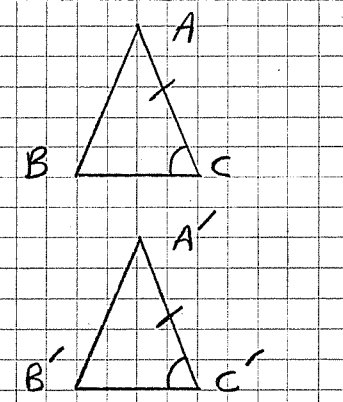


[$\hat{A} = \hat{A'}$ ve $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

[$\hat{A} = \hat{A'}$ ve $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

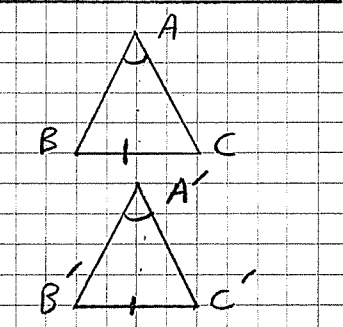


Netice 2) Birer yanal kenarları ile birer taban açıları eşit olan ikizkenar üçgenler birbirlerine eşittir.



[$\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ve $\hat{C} = \hat{C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

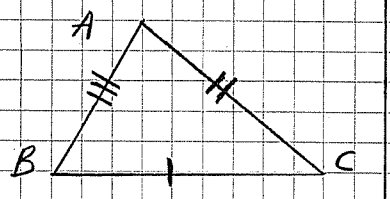
Netice 3) Tabanları ile tepe açıları eşit olan ikizkenar üçgenler birbirlerine eşittir.



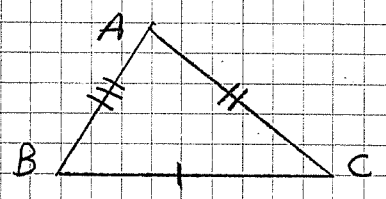
[$\hat{A} = \hat{A'}$ ve $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ (K.K.K.)

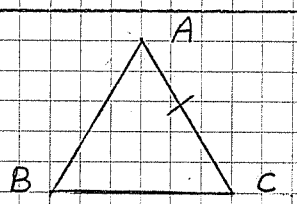
Teorem: Üçer kenarları eşit olan üçgenler birbirlerine eşittir.



[$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]

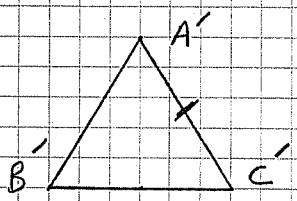


Netice) Birer kenarları eşit olan eşkenar üçgenler birbirlerine eşittir.



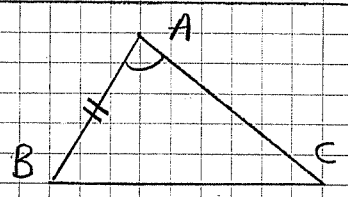
[$\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ise;

ABC eşkenar üçgeni, A'B'C' eşkenar üçgenine eşittir.]

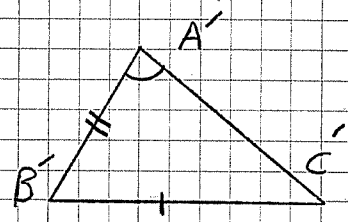


ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ (K.K.A)

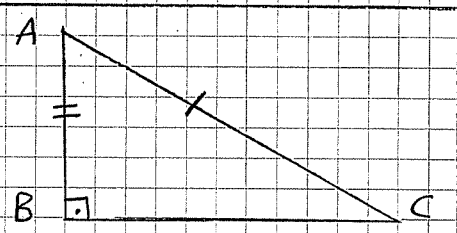
Teorem: İkişer kenarları ile bunlardan büyüğünün karşısındaki açıları eşit olan üçgenler birbirlerine eşittir.



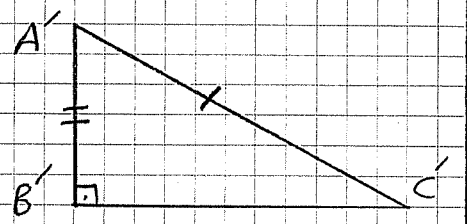
[$\hat{A} = \hat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]



Netice: Hipotenüsleri ile birer dik kenarları eşit olan dik üçgenler birbirlerine eşittir.



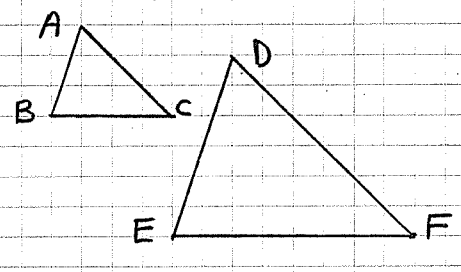
[$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ve $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ise;
$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$ dir.]



ÜÇGENLERİN BENZERLİĞİ

1) K.K.K Benzerliği (Kenar, Kenar, Kenar Benzerliği)

üçer kenarları orantılı olan iki üçgen benzerdir.

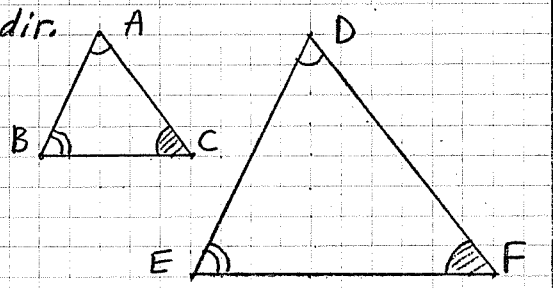


$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ dir.

2) A.A.A Benzerliği (Açı, Açı, Açı Benzerliği)

ikişer açıları eşit olan üçgenler benzerdir.

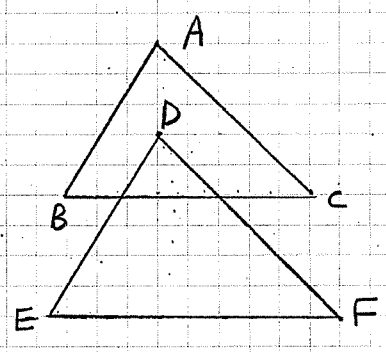


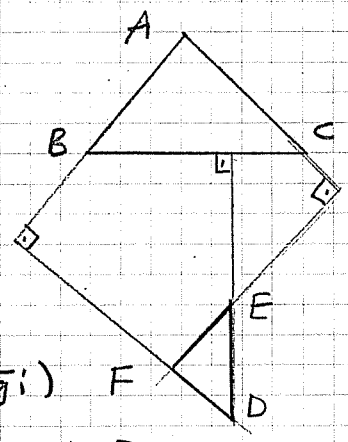
$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ dir.

SONUÇ:

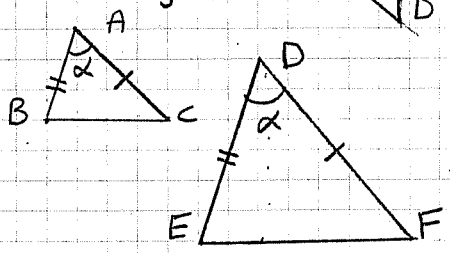
Karşılıklı kenarları birbirine paralel veya dik olan iki üçgen benzerdir.





3) K.A.K Benzerliği (Kenar, Açı, Kenar Benzerliği)

ikişer kenarları orantılı ve bu kenarlar arasındaki açıları eşit olan iki üçgen benzerdir.



$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = \alpha \\ \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} \end{array}\right\}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ dir.

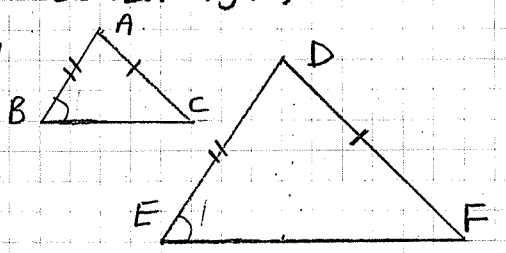
SONUÇLAR: 1- Eşkenar üçgenler benzerdir.

2- Tepe açıları eşit olan ikizkenar üçgenler benzerdir.

3- Karşılıklı açıları eşit olan dik üçgenler benzerdir.

4) K.K.A Benzerliği (Kenar, Kenar, Açı Benzerliği)

ikişer kenarları orantılı ve bunlardan büyük olanlarının karşısındaki açıları eşit olan iki üçgen benzerdir.

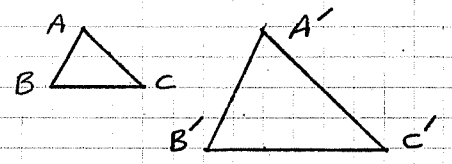


$|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $\hat{B} = \hat{E}$ ise;

$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ dir.

BENZER ÜÇGEN ÖZELLİKLERİ

1) Benzer üçgenlerde, eşit açılar karşısındaki kenar uzunlukları birbirleriyle orantılıdır.

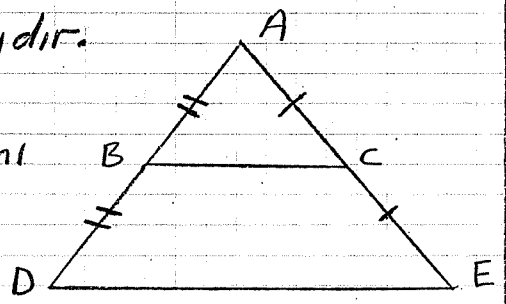


$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ise

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ dir.

k: Benzerlik oranıdır.

UYGULAMA: Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçası, üçüncü kenara paralel ve onun yarısına eşittir.



$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = \frac{1}{2}$

$|BC| = \frac{|DE|}{2}$ dir.

2) $\frac{h'_a}{h_a} = \frac{h'_b}{h_b} = \frac{h'_c}{h_c} = k$

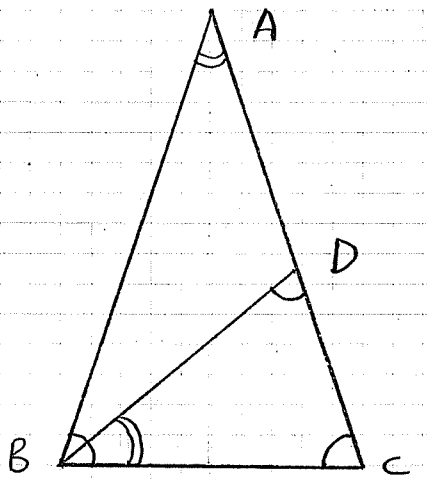
$\frac{v'_a}{v_a} = \frac{v'_b}{v_b} = \frac{v'_c}{v_c} = k$

$\frac{n'_A}{n_A} = \frac{n'_B}{n_B} = \frac{n'_C}{n_C} = k$

$\frac{r'_a}{r_a} = \frac{r'_b}{r_b} = \frac{r'_c}{r_c} = \frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}$

$\frac{u'}{u} = \frac{\sqrt{A'}}{\sqrt{A}} = k$

3) $\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| \\ |BC| = |BD| \end{array}\right\}$ olsun.

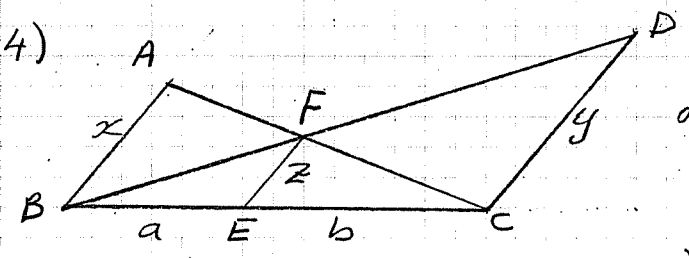


$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{BCD}$ dir.

$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|DB| = |CB|}{|CA|}$ yazılır, Buradan:

$|CB|^2 = |CD| \cdot |CA|$ Bulunur.

4)



$\overset{\triangle}{CFE} \sim \overset{\triangle}{CAB}$ dir.

a) $\frac{z}{x} = \frac{b}{a+b}$ yazılır.

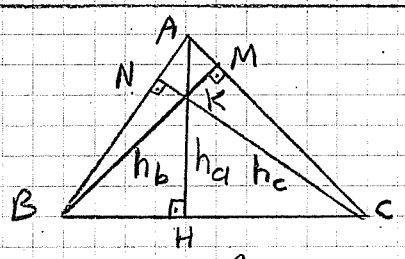
$\overset{\triangle}{BEF} \sim \overset{\triangle}{BCD}$ dir.

b) $\frac{z}{y} = \frac{a}{a+b}$ yazılır.

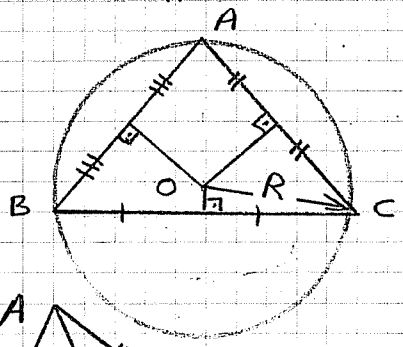
c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ olur.

ÜÇGENDE KESİŞEN DOĞRULAR ve ÜÇGENİN ÇEMBERLERİ

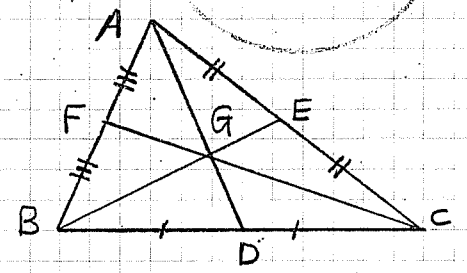
1) Bir üçgenin üç yüksekliği bir K noktasında kesişir. K noktası, üçgenin ortosantrıdır. Yani, diklik merkezidir.



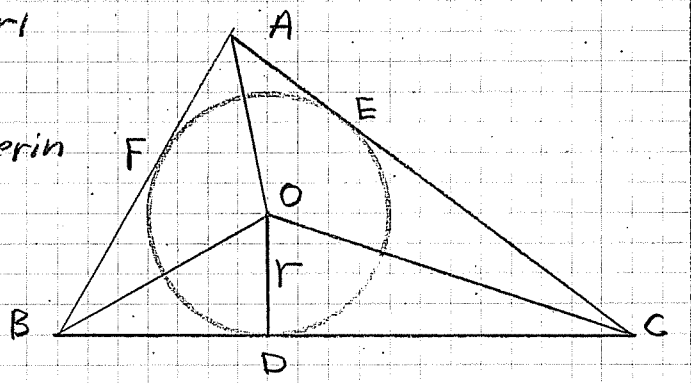
2) Bir üçgenin kenarlarının orta dikmeleri bir O noktasında kesişir. O noktası, çevrel çemberin merkezidir.



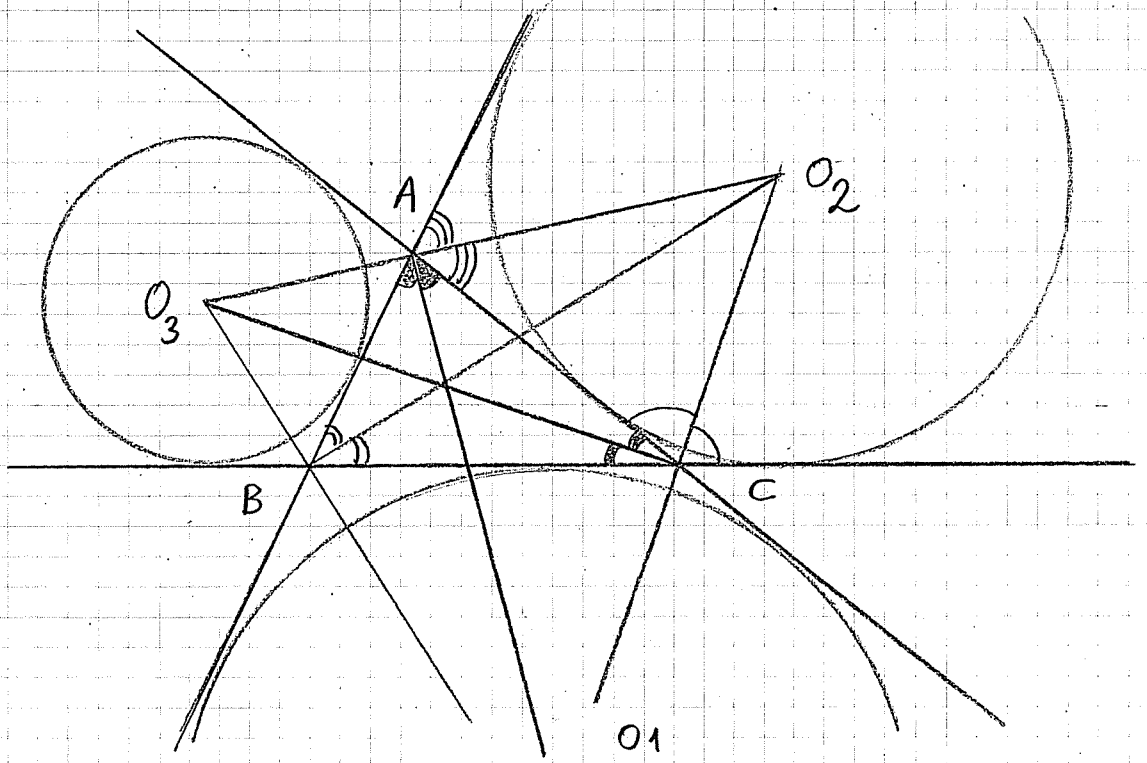
3) Bir üçgenin kenar ortayları, bir G noktasında kesişir. G noktası, üçgenin ağırlık merkezidir.



4) Bir üçgenin iç açı ortayları bir O noktasında kesişir. O noktası, iç teğet çemberin merkezidir.



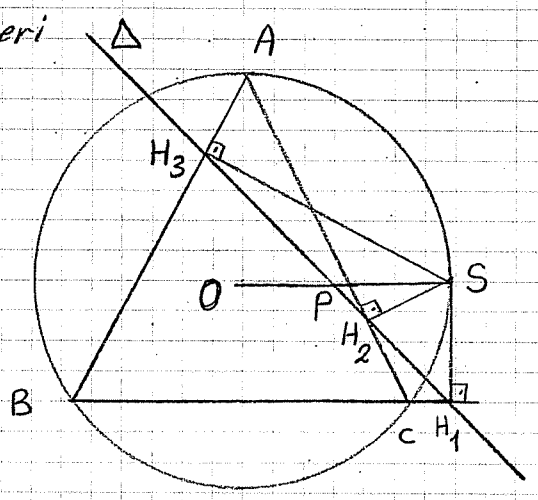
5) Bir üçgende bir iç açı ortay ve iki dış açı ortay bir noktada kesişir. Bu nokta dış teğet çemberin merkezidir.



ÜÇGENLERDEKİ ÖZELLİKLER

SİMSON DOĞRUSU

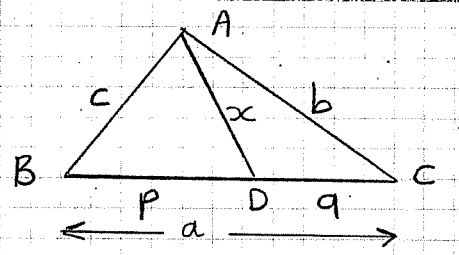
Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan herhangi bir noktanın, üçgenin kenarları üzerindeki dik izdüşüm noktaları aynı bir doğru üzerindedir. Bu doğruya Simson Doğrusu denir. $|PO| = |PS|$ dir.



STEWART ÖZELLİĞİ

$D \in [BC]$ olmak üzere $[AD] = x$ uzunluğu;

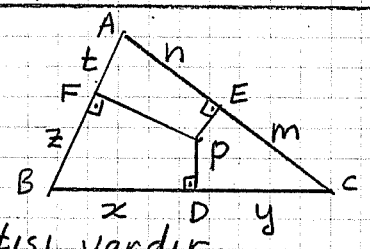
$$x^2 = \frac{b^2 \cdot p + c^2 \cdot q}{p+q} - p \cdot q \quad \text{dir}$$



CARNOT PROBLEMİ

Bir üçgenin içinde alınan herhangi bir P noktasından kenarlara inilen dikmelerin kenarlar üzerinde ayırdığı parçalar arasında;

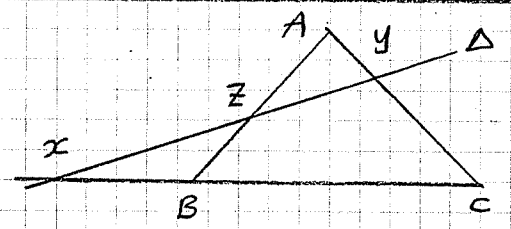
$$x^2 + m^2 + t^2 = y^2 + n^2 + z^2$$ bağıntısı vardır.



MENELAOS TEOREMİ

Bir Δ doğrusu üçgenin kenarlarını sıra ile x, y, z noktalarında kesiyorsa;

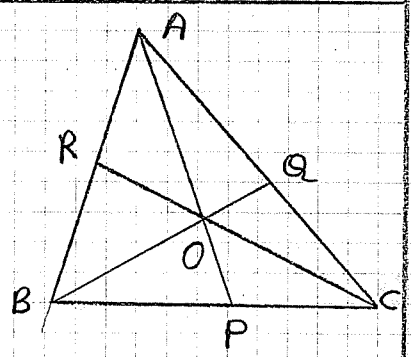
$$\frac{|xB|}{|xC|} \cdot \frac{|yC|}{|yA|} \cdot \frac{|zA|}{|zB|} = 1 \quad \text{dir.}$$



CEVA TEOREMİ

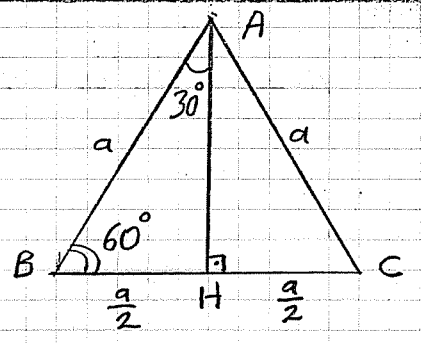
Bir üçgenin düzleminde alınan bir O noktasını köşelere birleştiren doğrular kenarları sıra ile P, Q, R noktalarında kesiyorsa;

$$\frac{|PB|}{|PC|} \cdot \frac{|QC|}{|QA|} \cdot \frac{|RA|}{|RC|} = 1 \quad \text{dir.}$$



EŞKENAR ÜÇGENLER

TANIMLAR



1) Üç kenarının uzunluğu eşit olan üçgene EŞKENAR ÜÇGEN denir.

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| = |BC| = a \\ 2u = 3a \end{array}\right\} \text{dır.}$$

2) $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ$ dir.

3) Her köşeye ait yükseklik, hem kenar ortay, hem de açı ortaydır.

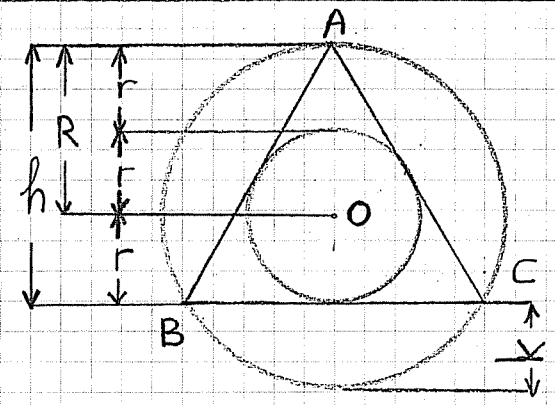
EŞKENAR ÜÇGENLERDEKİ ÖZELLİKLER

1) $h_a = h_b = h_c = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$$\left.\begin{array}{l} v_a = v_b = v_c = h \\ n_A = n_B = n_C = h \end{array}\right\} \text{dir.}$$

2) $\text{Alan}(\overset{\triangle}{ABC}) = A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$ dir.

Eşkenar üçgende çevrel çember ile iç teğet çember aynı merkezlidir.



Çevrel çemberin alanı:

$$S = \frac{\pi a^2}{3} \text{ dir.}$$

İç Teğet Çemberin alanı:

$$s = \frac{\pi a^2}{12} \text{ dir.}$$

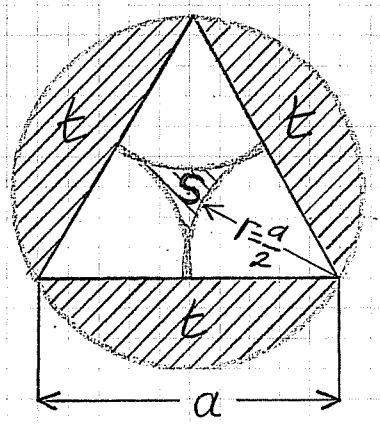
$$\left.\begin{array}{l} h = 3r = \frac{3}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ R = 2r = \frac{2}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{3} a \\ r = \frac{R}{2} = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} a \end{array}\right\} \text{dir.}$$

$$k = \frac{D}{4} = \frac{h}{3} \text{ dir}$$

Taralı alanlar birbirine eşittir.

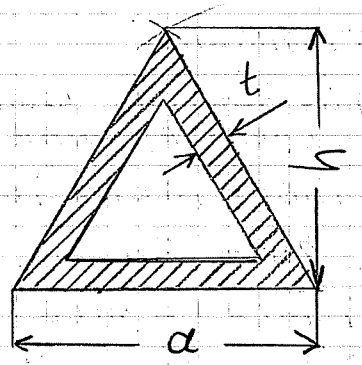
$$t = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{\sqrt{3}\, a^2}{12} \text{ dir.}$$

$$S = (2\sqrt{3} - \pi) \cdot \frac{a^2}{8} = (2\sqrt{3} - \pi) \cdot \frac{r^2}{2} \text{ dir}$$



İÇİ BOŞ EŞKENAR ÜÇGENİN ALANI

$$A = 3t(a - \sqrt{3}\,t)$$

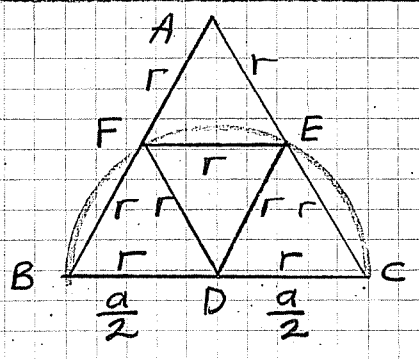


EŞKENAR ÜÇGENLERDEKİ ÖZELLİKLER

1) $|DE| = |EF| = |FD| = \frac{a}{2} = \frac{u}{3}$

2) $|DE| + |EF| + |FD| = \frac{3}{2}a = u$

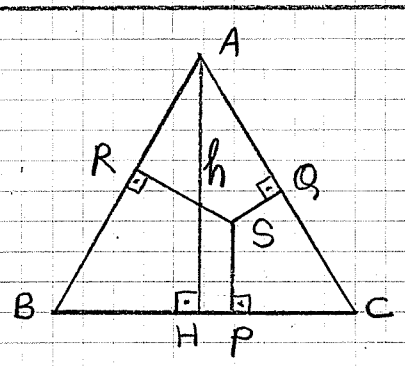
3) [BC] çaplı çember üçgenin kenarlarını E ve F noktalarında keserse; meydana gelen 4 üçgenin alanları birbirine eşittir.



S, eşkenar üçgenin içinde herhangi bir nokta olsun.

$|SP| \perp |BC|$, $|SQ| \perp |AC|$, $|SR| \perp |AB|$ ise;

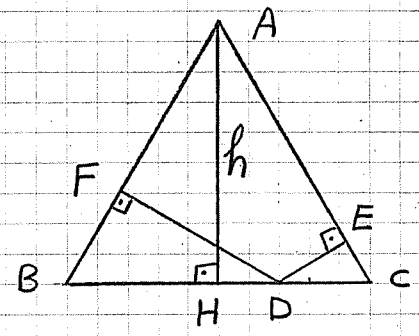
$|SP| + |SQ| + |SR| = |AH| = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ dir.



Şekilde: [BC] kenarı üzerinde herhangi bir nokta D olsun.

$|DE| \perp |AC|$, $|DF| \perp |AB|$ ise;

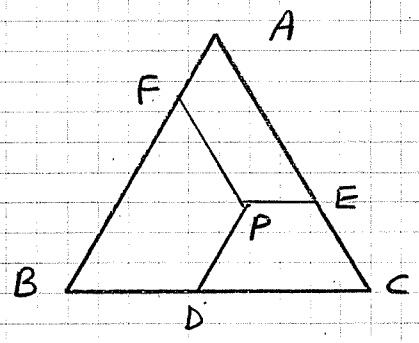
$|DE| + |DF| = |AH| = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ dir.



P, eşkenar üçgenin içinde herhangi bir nokta olsun.

$|PD| \parallel |AB|$, $|PE| \parallel |BC|$, $|PF| \parallel |AC|$ ise;

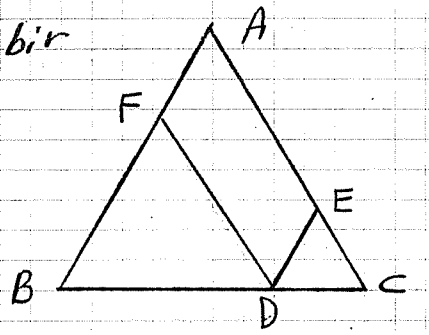
$|PD| + |PE| + |PF| = |BC| = a$ dır.



Şekilde: [BC] kenarı üzerinde herhangi bir nokta D olsun.

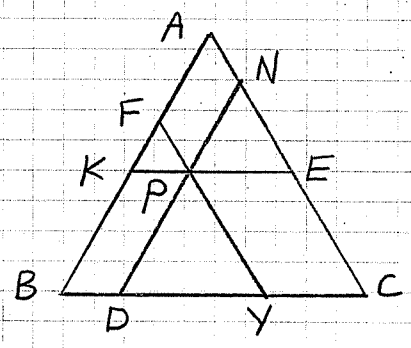
$|DE| \parallel |AB|$, $|DF| \parallel |AC|$ ise;

$|DE| + |DF| = |BC| = a$ dır.



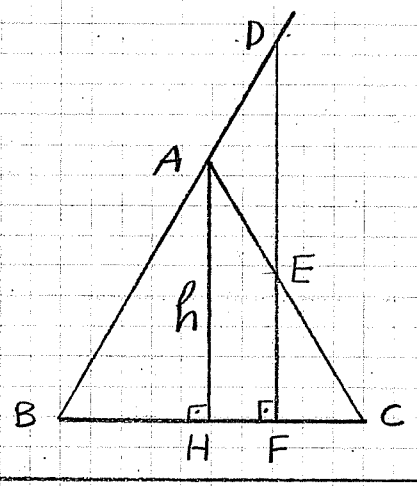
EŞKENAR ÜÇGENLERDEKİ ÖZELLİKLER

P, eşkenar üçgenin içinde herhangi bir nokta olsun. P noktasından kenarlara paraleller çizilirse;
$(\overset{\triangle}{PDY})$, $(\overset{\triangle}{PNE})$, $(\overset{\triangle}{PKF})$,
$(\overset{\triangle}{AKE})$, $(\overset{\triangle}{NDC})$, $(\overset{\triangle}{FBY})$ üçgenleri, eşkenar üçgenlerdir.



D, [AB] kenarı üzerinde herhangi bir nokta olsun.
$|DF| \perp |BC|$ ise;

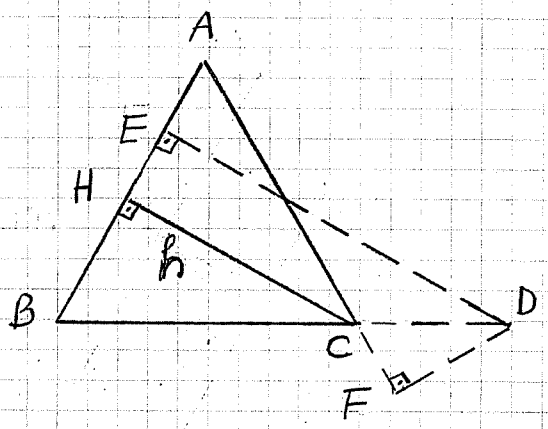
$|FE| + |FD| = 2h = \sqrt{3}a$ dır.



D, [BC] kenarı üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$|DE| \perp |AB|$, $|DF| \perp |AC|$ ise;

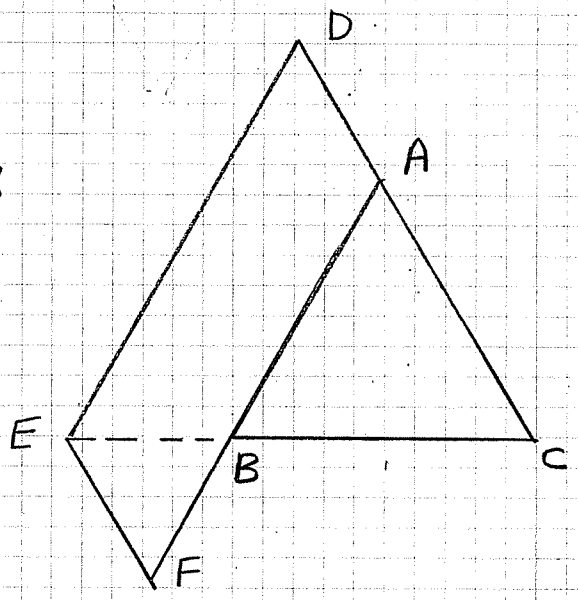
$|DE| - |DF| = |CH| = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ dır.



D, [AC] kenarı üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$|EF| \parallel |AD|$, $|ED| \parallel |AF|$ ise;

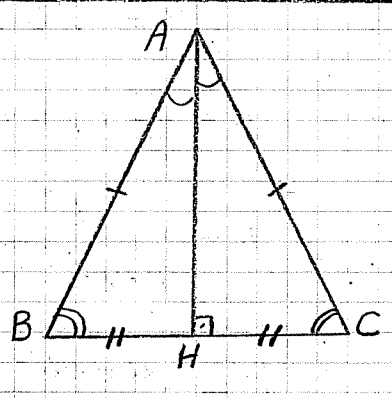
$|ED| - |EF| = a$ dır.



İKİZKENAR ÜÇGENLER

TANIMLAR ve ÖZELLİKLER

iki kenarı eşit olan üçgene İKİZKENAR ÜÇGEN denir.



1) $|AB| = |AC|$ yan kenarlardır.

2) A noktasına TEPE NOKTASI, [BC] ye TABAN denir.

3) $m(\hat{B}) = m(\hat{C})$ TABAN AÇILARI dır.

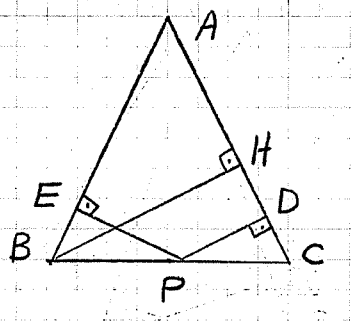
4) Tabanın orta dikmesi tepeden geçer.

5) Tabana ait yükseklik; hem kenar ortay, hem de açı ortaydır.

$v_a = n_A = h_a$ dır.

6) $h_b = h_c$, $v_b = v_c$, $n_B = n_C$ dir.

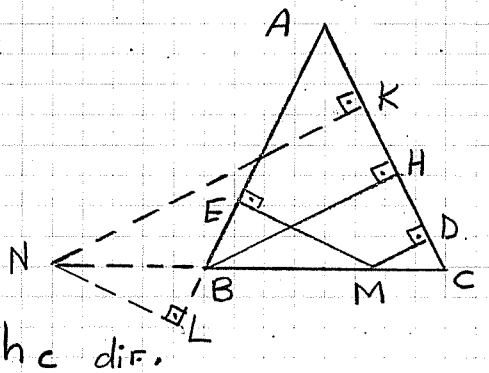
7) P, [BC] tabanı üzerinde herhangi bir nokta olsun.



$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| \\ |PD| \perp |AC| \,,\, |PE| \perp |AB| \end{array}\right\}$ ise;

$|PD| + |PE| = h_b = h_c$ dir.

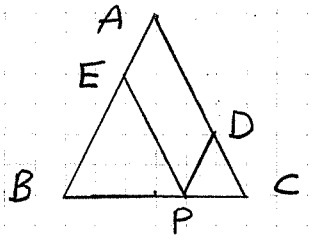
8) M ve N, [BC] tabanı üzerinde herhagi iki nokta olsun.



$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| \\ |MD| \perp |AC| \,,\, |ME| \perp |AB| \\ |NK| \perp |AC| \,,\, |NL| \perp |AB| \end{array}\right\}$ ise;

$|MD| + |ME| = \big||NK| - |NL|\big| = h_b = h_c$ dir.

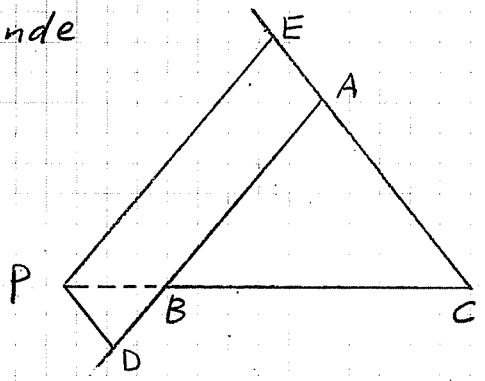
9) P, [BC] tabanı üzerinde herhangi bir nokta olsun.



$|AB| = |AC|$, $|PD| \parallel |AB|$, $|PE| \parallel |AC|$ ise;

$|PD| + |PE| = b = c$ dir.

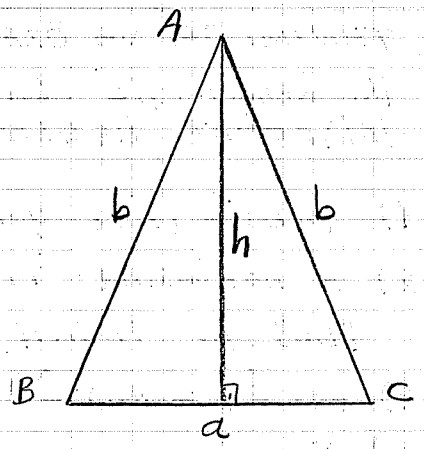
10) P, [BC] tabanı uzantısı üzerinde herhagi bir nokta olsun.



$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AC| \\ |PD| \perp |AB| \,,\, |PE| \perp |AC| \end{array}\right\}$ ise;

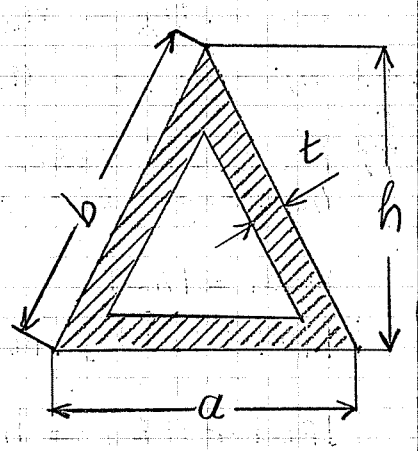
$\big||PE| - |PD|\big| = |AB| = |AC|$ dir.

$$\left.\begin{aligned} 2u &= 2b+a \\ A &= \frac{r}{2}(2b+a) = \frac{ab^2}{4R} \\ R &= \frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2-a^2} \\ r &= \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(2b+a)} \end{aligned}\right\} \text{dir}$$



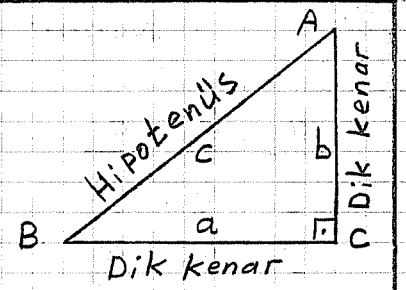
İÇİ BOŞ İKİZKENAR ÜÇGENİN ALANI

$$A = (a+2b)t - t^2\left(\frac{2h}{a} + \frac{a+2b}{h}\right) \text{ dir.}$$



DİK ÜÇGENLER

TANIMLAR ve ÖZELLİKLER



Bir açısı dik açı olan üçgene DİK ÜÇGEN denir. Dik açı karşısındaki kenara Hipotenüs, diğer iki kenara Dik kenarlar denir.
$x, y \in R^+$; $x > y$ ve c hipotenüs ise;

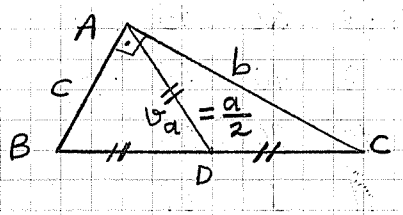
$$\frac{c}{x^2+y^2} = \frac{b}{2xy} = \frac{a}{x^2-y^2}$$ şeklinde orantı

bulunan üçgenler birer DİK ÜÇGEN dir.

$$\left.\begin{array}{l} a = (x^2-y^2)/2 \\ b = x.y \\ c = (x^2+y^2)/2 \end{array}\right\} \text{dir.}$$

Burada, x ve y 'ye değerler verilerek a, b, c nin tam sayılı çözümleri bulunur.

1) a) Hipotenüse ait kenarortay, hipotenüsün yarısına eşittir.

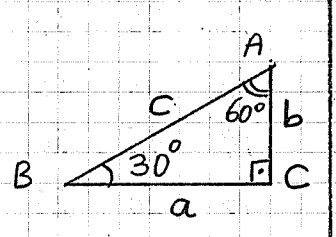


$$v_a = |AD| = |BD| = |DC| = \frac{|BC|}{2} = \frac{a}{2} \text{ dir.}$$

b) $5v_a^2 = v_b^2 + v_c^2$ dir.

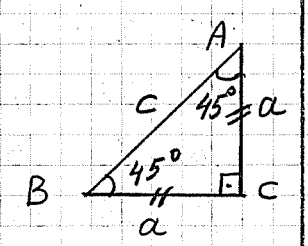
$$\left[\begin{array}{l} 5v_b^2 = v_a^2 + v_c^2 \\ 5v_c^2 = v_a^2 + v_b^2 \end{array}\right\} \text{dir.}\right]$$

2) Bir dar açısının ölçüsü 30° olan bir dik üçgende, bu açının karşısındaki kenar hipotenüsün yarısına eşittir.



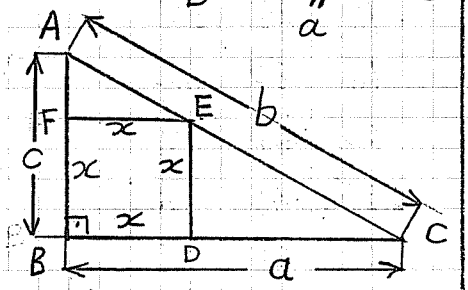
$b = \frac{c}{2}$, $c = 2b$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$ dir.

3) Bir dar açısının ölçüsü 45° olan dik üçgenler, ikizkenar dik üçgenlerdir.



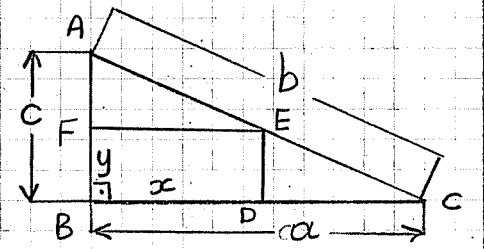
$c = \sqrt{2} \cdot a$ dir.

4) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgen, BDEF dörtgeni kare ise;



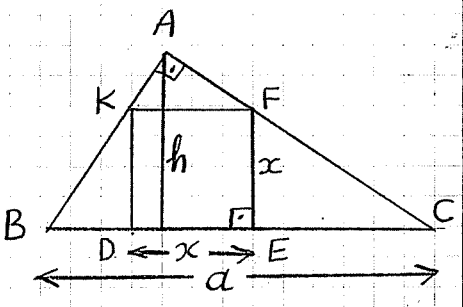
$$x = \frac{a \cdot c}{a + c} \text{ dir.}$$

5) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgen, BDEF dörtgeni dikdörtgen ise;



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \text{ dir.}$$

6) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgen, DEFK dörtgeni kare ise;



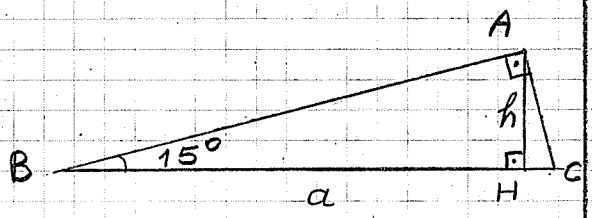
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a \cdot h}{a + h} \\ h = \dfrac{a \cdot x}{a - x} \end{array}\right\} \text{dir.}$$

TABLO: Kenar uzunlukları tam sayı ve 100 birime kadar olan dik üçgenler.

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15
9	40	41
10	24	26
11	60	61
12	16	20
12	35	37
13	84	85
14	48	50
15	20	25
15	36	39
16	30	34
16	63	65
18	24	30
18	80	82
20	21	29
20	48	52
21	28	35
21	72	75
24	32	40
24	45	51
24	70	74
25	60	65
27	36	45
28	45	53
28	96	100
30	40	50
30	63	87
30	72	78
32	60	68
33	44	55
33	56	65
35	84	91
36	48	60
36	77	85
39	52	65
39	80	89
40	42	58
40	75	85
42	56	70
45	60	75
48	55	73
48	64	80
51	68	85
54	72	90
57	76	95
60	63	87
60	80	100
63	86	100
65	72	97

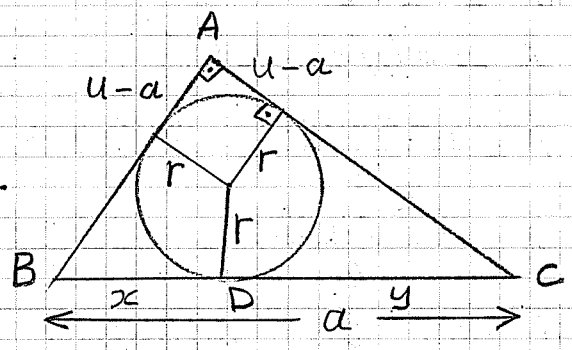
DİK ÜÇGENLER

7) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin bir açısı 15° ise;



$$h = |AH| = \frac{|BC|}{4} = \frac{a}{4}$$

8) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninde $m(\hat{A}) = 90^\circ$ olsun.



Şekilden; $u - a = r$ dir.

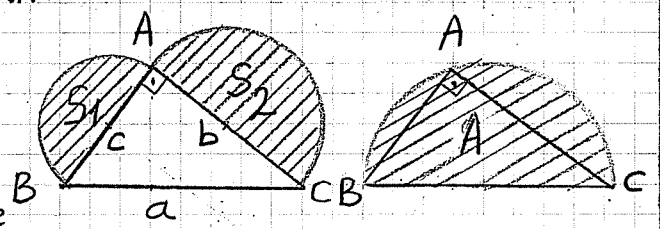
Buradan; $u = a + r$ yazılır.

a) Çevre, $Ç = 2u$

$Ç = 2(a+r)$ dir.

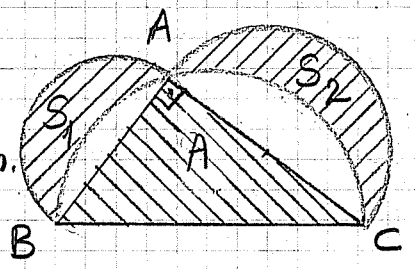
b) $\left.\begin{array}{l} A = u \cdot r = r(a+r) \\ A = |BD| \cdot |DC| = x \cdot y \end{array}\right\}$ dir.

9) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin [AB] ve [AC] çaplı yarım çemberleri çiziliyor. [BC] çaplı yarım çemberi ise, şekilde ayrı olarak gösterilmiştir.



$S_1 = \pi c^2/8$, $S_2 = \pi b^2/8$, $S_1 + S_2 = A = \pi a^2/8$ dir.

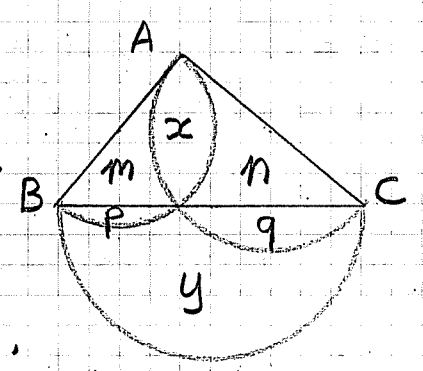
10) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin [BC], [AC] ve [AB] çaplı yarım çemberleri çiziliyor. S_1 ve S_2 içlerine yazıldıkları bölgelerin alanlarıdır. Alan$(\overset{\triangle}{ABC}) = A$ olsun.



$S = S_1 + S_2$ dir.

11) $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin [AB], [BC] ve [AC] çaplı yarım çemberleri çiziliyor.

[AB] çaplı yarım dairenin alanı S_1
[AC] çaplı yarım dairenin alanı S_2
[BC] çaplı yarım dairenin alanı S_3
$\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeninin alanı A
} olsun.



m, n, p, q, x ve y üzerlerinde bulundukları bölgelerin alanları olsun.

$S_1 + S_2 = S_3$ dir.

$m + p + x + x + n + q = p + q + y$ yazılır.

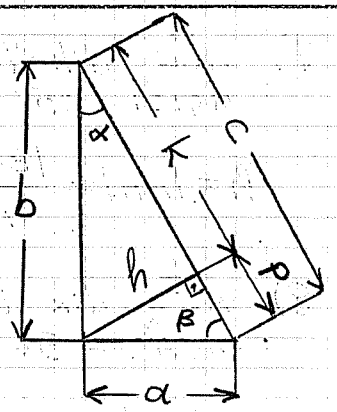
$m + x + n = A$ idi.

$A + x = y$

$A = y - x$ Bulunur.

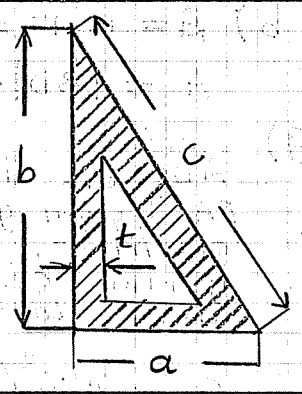
DİK ÜÇGENDE BAĞINTILAR

$$2u = a + b + c$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 = p \cdot k \rightarrow h = ab/c$$
$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = k \cdot c$$
$$A = ab/2 = ch/2$$
$$A = \frac{a^2 \tan\beta}{2} = \frac{b^2 \tan\alpha}{2}$$
$$A = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4} = \frac{c^2 \sin 2\beta}{4}$$



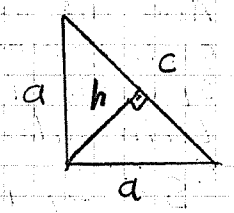
İÇİ BOŞ DİK ÜÇGENİN ALANI

$$A = (a+b+c)\,t - \frac{t^2}{ab}\left[(a+b)(b+c) + a^2\right]$$
$$A = (a+b+c)\,t - \frac{t^2}{ab}\left[(a+b)(a+c) + b^2\right]$$



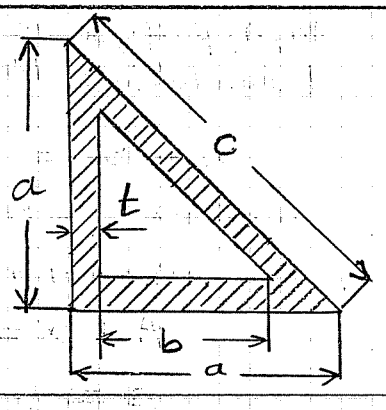
İKİZKENAR DİK ÜÇGENDE BAĞINTILAR

$$2u = 2a + c = \frac{a}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{c}{2}(1+\sqrt{2})$$
$$2u = (1+\sqrt{2})\,h$$
$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}a = c/2 = (\sqrt{2}-1)\,u/3$$
$$c = \sqrt{2}\,a = 2h = (\sqrt{2}-1)\,u/6$$
$$a = \sqrt{2}\,c/2 = \sqrt{2}\,h = (2-\sqrt{2})\,u/12$$
$$A = a^2/2 = c^2/4 = \sqrt{2}\,ac = h^2$$

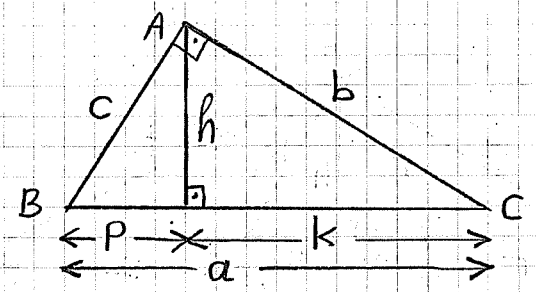


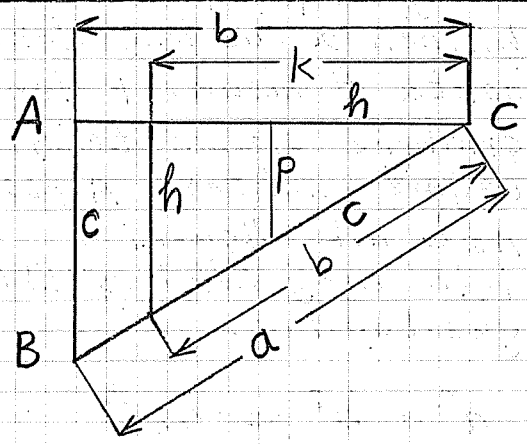
İÇİ BOŞ İKİZKENAR DİK ÜÇGENİN ALANI

$$A = (2+\sqrt{2})\,at - (3+2\sqrt{2})\,t^2$$
$$A = (2+\sqrt{2})\,bt + (3+2\sqrt{2})\,t^2$$



DİK ÜÇGENDE METRİK BAĞINTILAR

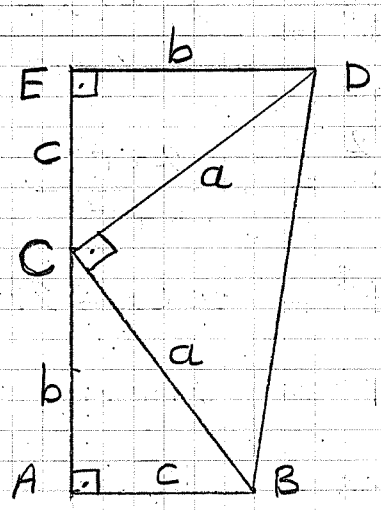




$$\left.\begin{array}{ll} m(\hat{A}) > 90^\circ \text{ ise;} & a^2 > b^2 + c^2 \\ m(\hat{A}) = 90^\circ \text{ ise;} & a^2 = b^2 + c^2 \\ m(\hat{A}) < 90^\circ \text{ ise;} & a^2 < b^2 + c^2 \end{array}\right\} \text{dir.}$$

1) PİSAGOR BAĞINTISI

$a^2 = b^2 + c^2$ dir.



Pisagor teoreminin ispat şekillerinden biri:

Alan ABDE = 2 Alan $\overset{\triangle}{ABC}$ + Alan $\overset{\triangle}{BCD}$

$$\frac{1}{2}(b+c)(b+c) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot bc + \frac{1}{2} \cdot a^2$$

$b^2 + c^2 = a^2$ Bulunur.

2) I. ÖKLİD BAĞINTISI

$h^2 = p \cdot k$ dir.

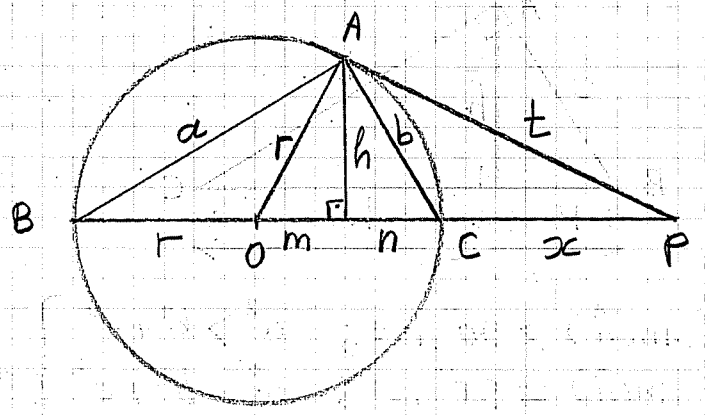
3) II. ÖKLİD BAĞINTISI

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = k \cdot a \\ c^2 = p \cdot a \end{array}\right\} \text{dir.}$$

4)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{k}{p} \\ ah = bc \\ bh = kc \\ ch = pb \\ bch = apk \\ \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \\ \dfrac{bc}{a} = \dfrac{kc}{b} = \dfrac{pb}{c} = h \\ \dfrac{ah}{b} = \dfrac{bh}{k} = \dfrac{pb}{h} = c \end{array}\right\} \text{dir.}$$

r yarıçaplı çembere bilinen x uzaklığındaki nokta P olsun. P den çembere çizilen teğetin değme noktası A olsun. $\overset{\triangle}{ABC}$ dik üçgeni için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.



$$a^2 + b^2 = 4r^2$$

$$a^2 = \frac{2r^2(x+2r)}{x+r}$$

$$b^2 = \frac{2xr^2}{x+r}$$

$$t^2 = x(x+2r) = (x+r)(x+n)$$

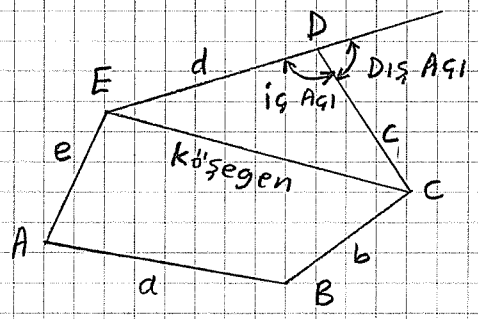
$$r = m + n$$

$$m = \frac{r^2}{x+r}$$

$$n = \frac{x \cdot r}{x+r}$$

ÇOKGENLER

TANIMLAR



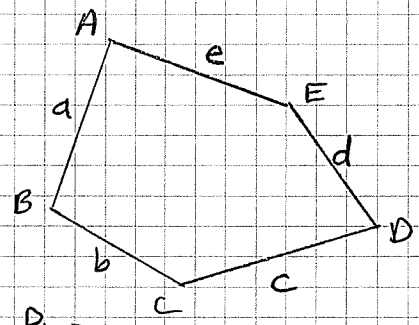
Herhangi üçü doğrusal olmayan A, B, C, ---- ikişer ikişer birleştiren [AB], [BC], --- doğru parçalarının birleşimine ÇOKGEN denir.

1- A, B, C, --- noktalarına çokgenin köşeleri; köşeleri birleştiren [AB], [BC], --- [.A] doğru parçalarına çokgenin kenarları denir.

2- Çokgenlerde kenar sayısı ile köşe sayısı aynıdır.

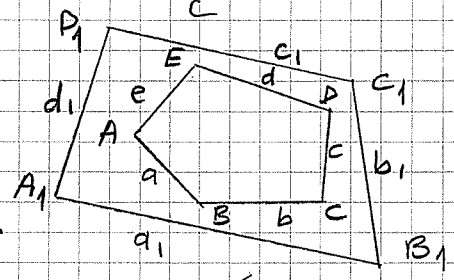
3- Çokgenler köşe sayısına göre isimlendirilir.

KONVEKS ÇOKGENLERİN ÖZELLİKLERİ



1- Bir çokgenin bir kenarı, diğer kenarların toplamından küçüktür.

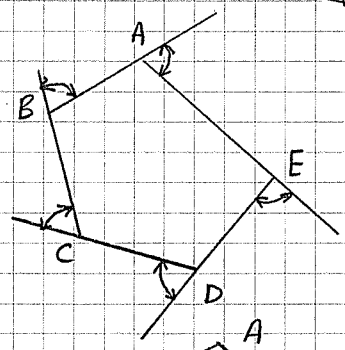
Şekilde: $a < b+c+d+e+f$ dir.



2- Konveks bir çokgenin çevresi, kendisini çevreleyen herhangi bir çokgenin çevresinden küçüktür.

Şekilde;

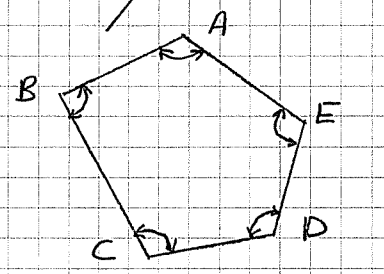
$a+b+c+d+e < a_1+b_1+c_1+d_1$ dir.



3- Herhangibir konveks çokgenin dış açıları toplamı 360° dir.

Şekilde:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E} = 360^\circ$ [Dört dik açı]



4- n kenarlı herhangibir konveks çokgenin iç açılarının toplamı; $(n-2)180^\circ$ dir.

Şekilde;

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E} = (n-2)\,180^\circ$ dir.

5- Aynı kenar üzerinde olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına KÖŞEGEN denir.

a) n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden $(n-3)$ adet köşegen çıkar.

b) n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çıkan $(n-3)$ adet köşegen, çokgeni $(n-2)$ adet üçgene ayırır.

c) n kenarlı bir çokgende $n(n-3)/2$ adet köşegen vardır.

ÇOKGENLERİN BELLİ OLMASI

n kenarlı çokgenin belli olması için, en az $(n-2)$ adedi uzunluk olmak üzere $(2n-3)$ elemanının bilinmesi gerekir.

DÜZGÜN ÇOKGENLER

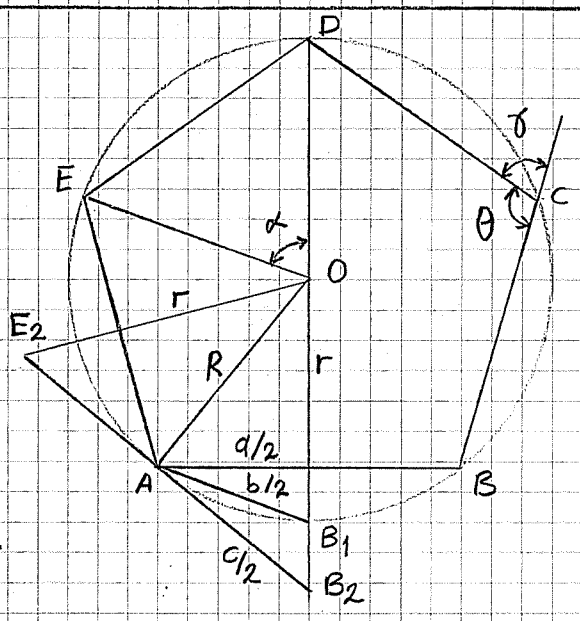
TANIMLAR

1- Kenar uzunlukları ve açıları eşit olan çokgene DÜZGÜN ÇOKGEN denir.

2- n kenarlı düzgün konveks çokgenin; kenar uzunluğu (a), çevrel çemberinin yarıçapı (R), iç teğet çemberinin yarıçapı (r) olsun.

3- Kenar uzunluğu a, kenar sayısı n olan düzgün bir çokgenin çevrel çemberine kenarları teğet olan n kenarlı düzgün bir çokgenin kenar uzunluğu (c) olsun.

4- Kenar uzunluğu a, kenar sayısı n olan düzgün bir çokgenin $2n$ kenarlı düzgün bir çokgene dönüştürülmesi durumunda kenar uzunluğu (b) olsun.



ÖZELLİKLER

Merkez Açı : $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ Radyan

İç Açı : $\theta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \gamma$ [α, γ : Derece]

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \gamma$ [α, γ : Radyan]

$\theta = 2\beta$ [$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \text{ Rad.}}{2}$]

$\theta = \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n}$ Rad.

Dış Açı : $\gamma = \alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ Rad.

BAZI BAĞINTILAR

$$a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{D}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2} = r\sec\frac{\alpha}{2}$$

$$r = \frac{d}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

Çevre : $Ç = 2u = na = 2n\sqrt{R^2 - r^2}$

$$Ç = 2nR\sin\frac{\alpha}{2} = 2nr\tan\frac{\alpha}{2}$$

Alan : $A = \frac{nar}{2} = \frac{nad}{4} = \frac{na}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$

$$A = \frac{na^2}{4}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{nR^2}{2}\sin\alpha = nr^2\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\left[\; b = \frac{2a}{\sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}}}, \quad c = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}}}, \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{4 - \frac{a^2}{R^2}} \text{ dir.} \;\right]$$

Düzgün Çokgenler	Kenar Uzunluğu (a =)		Çevrel Çember Çapı (R =)		İç Teğet Çemberin Yarıçapı (r =)		Alan (A =)		
Eşkenar üçgen	1,73205 R^2	3,46410 r^2	0,57735 a	2,00000 r	0,28868 a	0,50000 R	0,43301 a^2	1,29904 R^2	5,19615 r^2
Kare	1,41421 R^2	2,00000 r^2	0,70711 a	1,41421 r	0,50000 a	0,70711 R	1,00000 a^2	2,00000 R^2	4,00000 r^2
Beşgen	1,17557 R^2	1,45309 r^2	0,85065 a	1,23607 r	0,68819 a	0,80902 R	1,72048 a^2	2,37776 R^2	3,63271 r^2
Altıgen	1,00000 R^2	1,15470 r^2	1,00000 a	1,15470 r	0,86603 a	0,86603 R	2,59808 a^2	2,59807 R^2	3,46410 r^2
Yedigen	0,86777 R^2	0,96315 r^2	1,15238 a	1,10992 r	1,03826 a	0,81174 R	3,63391 a^2	2,73641 R^2	3,37102 r^2
Sekizgen	0,76537 R^2	0,82843 r^2	1,30656 a	1,08224 r	1,20711 a	0,92388 R	4,82843 a^2	2,82840 R^2	3,31371 r^2
Dokuzgen	0,68404 R^2	0,72794 r^2	1,46190 a	1,06418 r	1,37374 a	0,93969 R	6,18182 a^2	2,89254 R^2	3,27573 r^2
Ongen	0,61803 R^2	0,64984 r^2	1,61803 a	1,05146 r	1,53884 a	0,95106 R	7,69421 a^2	2,93893 R^2	3,24920 r^2
Onbirgen	0,56347 R^2	0,58725 r^2	1,77473 a	1,04222 r	1,70284 a	0,95949 R	9,36564 a^2	2,97352 R^2	3,27989 r^2
Onikigen	0,51764 R^2	0,53590 r^2	1,93185 a	1,03528 r	1,86603 a	0,96593 R	11,19615 a^2	3,00000 R^2	3,21539 r^2

DÜZGÜN ALTIGEN

Merkez Açı = Dış Açı:

$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{3}$ Rad.

İç Açı: $\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ Rad.

$a = R = \frac{D}{2} = 2r\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \approx 1{,}155\,r$

Çevre: $Ç = 2u = 6a = 6R = 4\sqrt{3}r \approx 6{,}928\,r$

Çevrel Çember Yarıçapı:

$R = a = \frac{D}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155\,r$

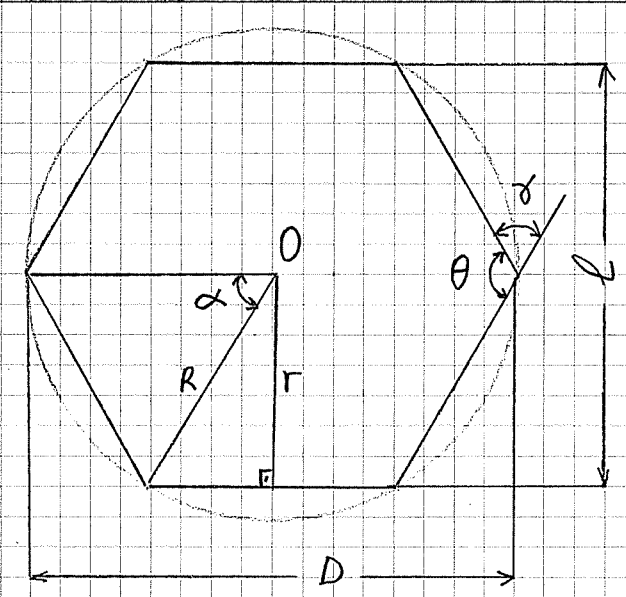
İç Teğet Çember Yarıçapı:

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}R \approx 0{,}866\,a \approx 0{,}866\,R$

$\ell = 2r = \sqrt{3}\,a = \sqrt{3}\,R \approx 1{,}732\,a \approx 1{,}732\,R$

Alan: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \approx 2{,}598\,a^2 \approx 2{,}598\,R^2$

$A = 2\sqrt{3}\,r^2 \approx 3{,}464\,r^2$



DÜZGÜN SEKİZGEN

Merkez Açı = Dış Açı:

$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ Rad.

İç Açı: $\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ Rad.

$a = 2R\sin\frac{45^\circ}{2} \approx 0{,}765\,R$

$a = 2r\tan\frac{45^\circ}{2} \approx 0{,}828\,r$

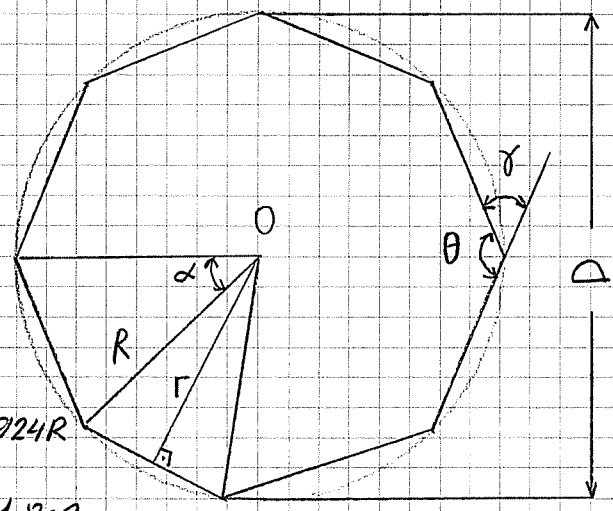
$r = \frac{a}{2}\operatorname{Cotg}\frac{45^\circ}{2} \approx 1{,}207\,a = R\cos\frac{45^\circ}{2} \approx 0{,}924\,R$

$R = \frac{a}{2}\operatorname{Cosec}\frac{45^\circ}{2} \approx 1{,}307\,a = r.\operatorname{Sec}\frac{45^\circ}{2} \approx 1{,}802\,r$

$A = 2a^2\operatorname{Cotg}\frac{45^\circ}{2} \approx 4{,}828\,a^2$

$A = 4R^2\sin 45^\circ \approx 2{,}828\,R^2$

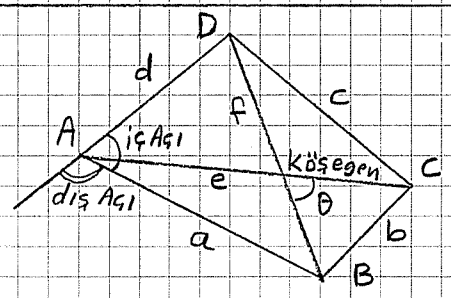
$A = 8r^2\tan\frac{45^\circ}{2} \approx 3{,}314\,r^2$



DÖRTGENLER

TANIMLAR

1) Herhangi üçü doğrusal olmayan, düzlemdeki dört nokta A, B, C ve D olsun. [AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçalarının birleşimine (ABCD) DÖRTGENİ denir.



2) A, B, C ve D noktalarına dörtgenin KÖŞELERİ denir.

3) [AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçalarına dörtgenin KENARLARI denir. Sırası ile a, b, c ve d olarak gösterilir.

4) Ortak noktaları olmayan iki kenara KARŞILIKLI KENARLAR; ortak kenarları olmayan açılara da KARŞILIKLI AÇILAR denir.

a ile c ve b ile d karşılıklı kenarlardır.

$\hat{A}$ ile $\hat{C}$ ve $\hat{B}$ ile $\hat{D}$ karşılıklı açılardır.

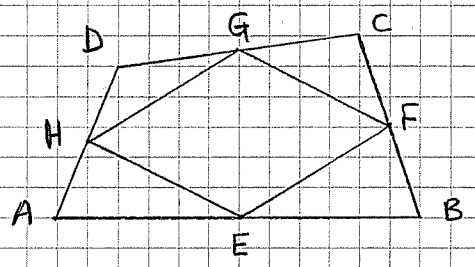
5) Ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren [AC] ve [BD] doğru parçalarına dörtgenin KÖŞEGENLERİ denir.

ÖZELLİKLER

1) Bir dörtgende iç açıların ölçüleri toplamı 360° dir.

2) Bir dörtgende dış açıların ölçüleri toplamı 360° dir.

3) E, F, G ve H noktaları; bulundukları kenarların orta noktaları ise:

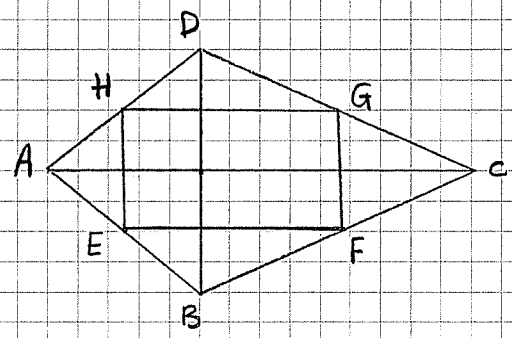


a) (EFGH) dörtgeni PARALELKENAR dır.

Alan(EFGH) = 1/2 Alan(ABCD) dir.

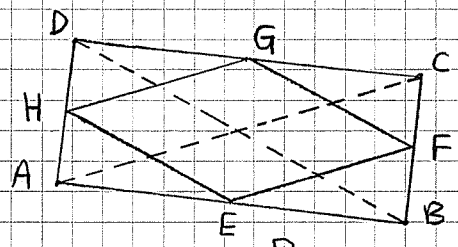
b) |BD| ⊥ |AC| ise:

(EFGH) dörtgeni DİKDÖRTGEN dir.



c) |BD| = |AC| ise:

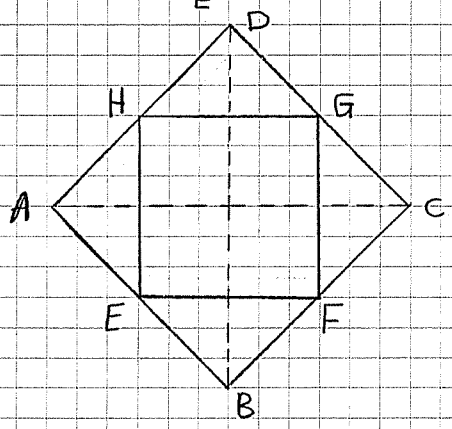
(EFGH) dörtgeni EŞKENAR DÖRTGEN dir.



d) |BD| = |AC| ve

|BD| ⊥ |AC| ise:

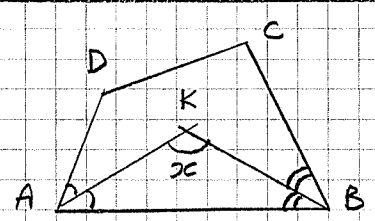
(EFGH) dörtgeni KARE dir.



DÖRTGENLER

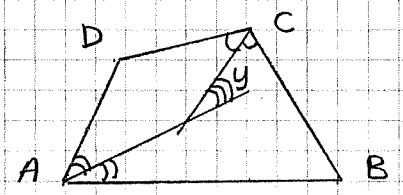
4) [AK] ve [BK] açıortay ise:

$$m(\hat{x}) = \frac{m(\hat{C}) + m(\hat{D})}{2} \quad \text{dir.}$$



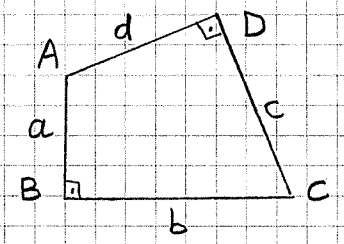
5) [AL] ve [CL] açıortay ise:

$$m(\hat{y}) = \frac{m(\hat{D}) - m(\hat{B})}{2}$$



6) $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$ ise:

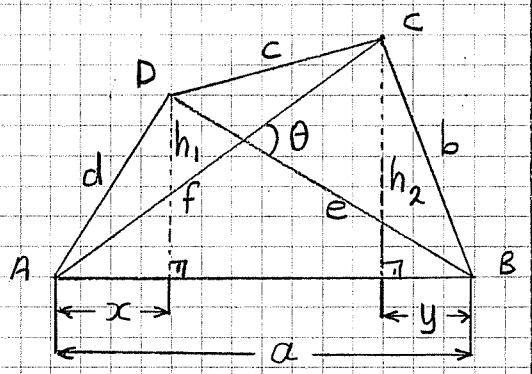
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \quad \text{dir.}$$



7) Köşegenlerin oluşturduğu açı θ ise:

$$A = \frac{1}{2} ef \cdot \sin\theta \quad \text{ve}$$

$$A = \frac{h_1}{2}(a-y) + \frac{h_2}{2}(a-x) \quad \text{dir.}$$

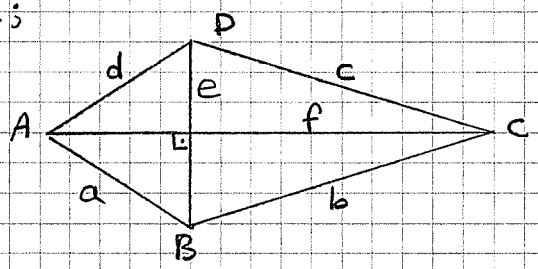


SONUÇLAR

Köşegenleri birbirine dik [$(e \perp f)$, yani $\theta = 90^\circ$] olan bir dörtgende;

a) $A = \frac{e \cdot f}{2}$

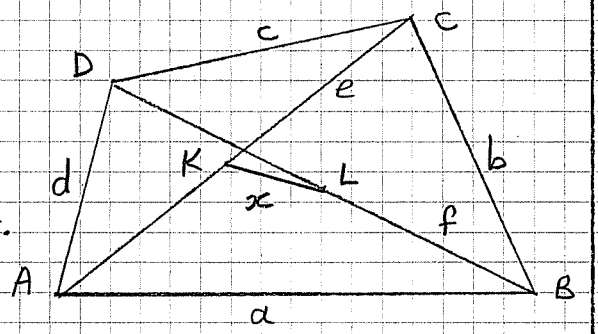
b) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ dir.



8) $\left.\begin{array}{l}[AK] = [CK] = \frac{e}{2} \\ [BL] = [DL] = \frac{f}{2}\end{array}\right\}$ Olmak üzere;

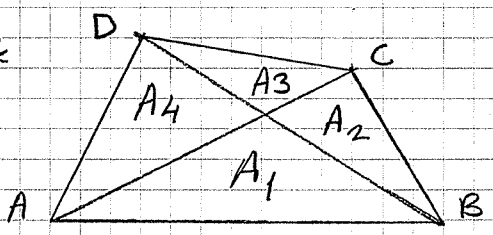
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4x^2 \quad \text{dir.}$$

[Euler Problemi]



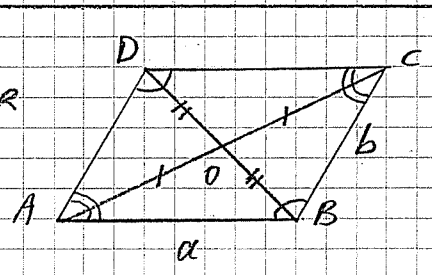
9) A_1, A_2, A_3 ve A_4 bulundukları bölgelerin alanlarını göstermek üzere;

$$A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_4 \quad \text{dir.}$$



PARALELKENAR

Tanım : Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene PARALELKENAR denir.



TEMEL ÖZELLİKLER :

1) Karşılıklı kenarlar birbirine pardlel ve eşit uzunluktadır.

$|AB| \parallel |DC|$, $|AD| \parallel |BC|$

$|AB| = |DC| = a$, $|AD| = |BC| = b$ dir.

Çevre : $Ç = 2u = 2(a+b)$ dir.

2) Karşılıklı açılar eşittir. $m(\hat{A}) = m(\hat{C})$

$m(\hat{B}) = m(\hat{D})$ dir.

3) Komşu açılar birbirini bütünler.

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$ ve

$m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$ dir.

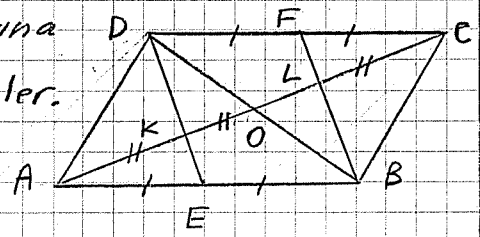
4) Köşegenler birbirini ortalar.

$|AO| = |CO|$, $|BO| = |DO|$ dir.

5) Bir köşegen paralelkenarı eşit iki üçgene ayırır.

6) Köşegenlerin O kesişme noktası, SİMETRİ MERKEZİ dir. O noktası, aynı zamanda paralelkenarın AĞIRLIK MERKEZİ dir.

7) Karşı iki köşeyi iki kenarın ortalarına birleştiren doğrular, bu köşeden geçmeyen köşegeni üç eşit parçaya böler.



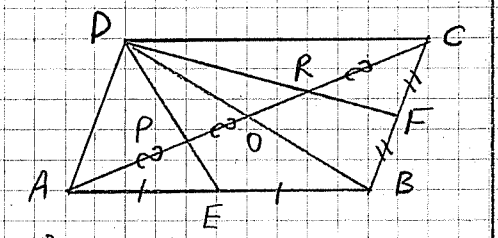
$|AE| = |BE|$ ve $|DF| = |CF|$ ise:

$|AK| = |KL| = |LC| = \frac{1}{3}|AC|$ dir.

$|DE| \parallel |FB|$ dir.

$|KO| = |LO| = \frac{1}{2}|KL| = \frac{1}{6}|AC|$ dir.

8) Bir köşeyi, karşı kenarların orta noktalarına birleştiren doğrular, aynı köşeden geçmeyen köşegeni üç eşit parçaya ayırır.

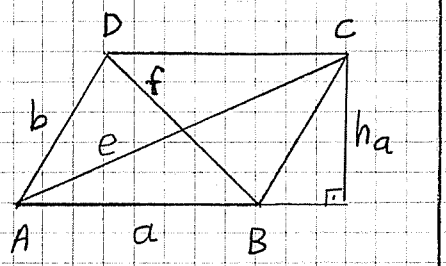


$|AE| = |BE|$ ve $|BF| = |CF|$ ise :

$|AP| = |PR| = |RC| = \frac{1}{3}|AC|$ dir. Ayrıca:

$|OP| = |OR| = \frac{1}{6}|AC|$ dir.

9) $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ [Euler Probleminin özel hali]



$e^2 = a^2 + b^2 + 2a\sqrt{b^2 - h_a^2}$ ve

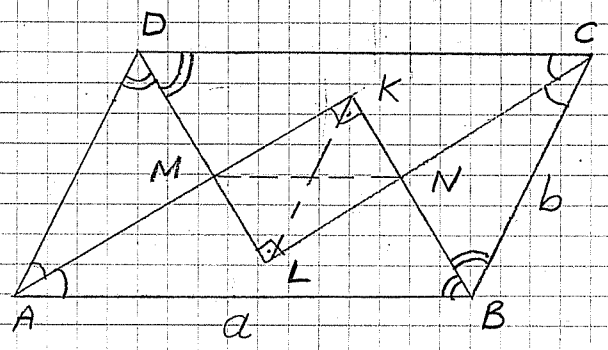
$f^2 = a^2 + b^2 - 2a\sqrt{b^2 - h_a^2}$ dir.

PARALELKENAR

10) Komşu açıların açıortayları birbirine diktir.

a) $|AK| \perp |BK|$ ve

$|CL| \perp |DL|$ dir.



b) (KMLN) bir DİKDÖRTGENdir.

$|MN| // |AB| // |DC|$ ve

$|KL| // |BC| // |AD|$ dir. Ayrıca:

$|MN| = |KL| = a - b$ dir.

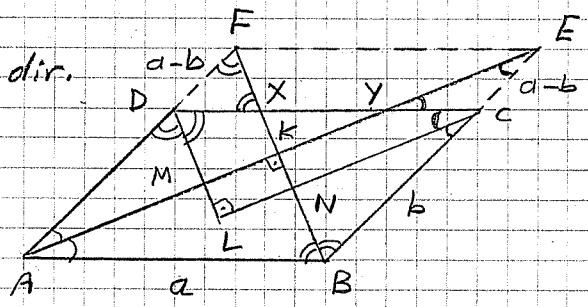
SONUÇLAR

a) (ABEF) EŞKENAR DÖRTGEN dir.

$|EF| // |AB| // |CD|$ dir.

$|DX| = |YC| = a - b$ ve

$|XY| = 2b - a$ dir.

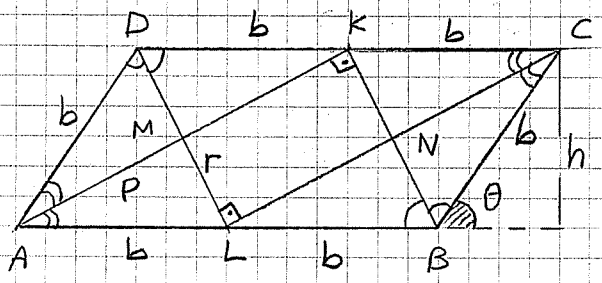


b) $a = 2b$ ise:

İç açıortaylar, paralel karşı kenarlar üzerinde dik olarak kesişirler.

$|AK| \perp |BK|$ ve $|CL| \perp |DL|$ dir.

$|AL| = |BL| = |CK| = |DK| = b = \frac{a}{2}$



Ayrıca: $h = b \sin\theta$

$2pr = b \cdot h = b^2 \sin\theta$

$b^2 = p^2 + r^2$

$h^2 = 4p^2r^2 / p^2 + r^2$ dir.

KARŞIT OLARAK: Bir paralelkenarda komşu açıların açıortayları, paralel karşı kenarlar üzerinde kesişirlerse:

$a = 2b$ dir.

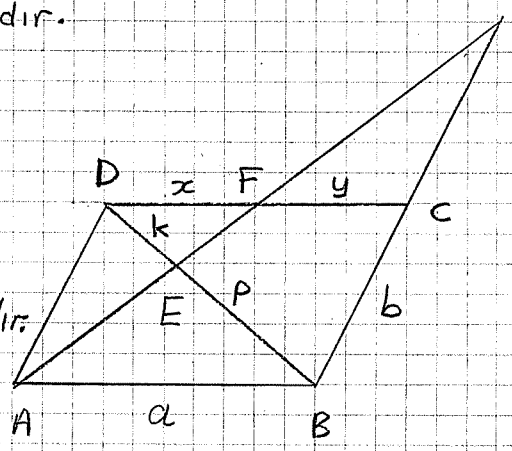
Teorem: $|AE|^2 = |EF| \cdot |EK|$ dır.

Ayrıca:

$f = k + p$

$x = ak / (f - k)$

$y = a(f - 2k) / (f - k)$ dır.

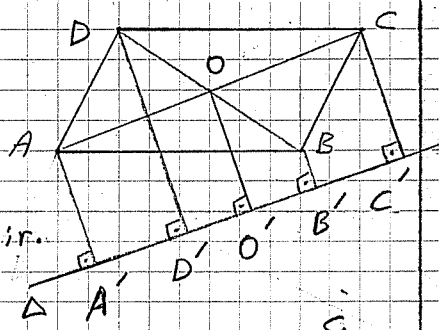


PARALELKENAR

Teorem: (ABCD) bir paralelkenar ve △ herhangibir doğru olsun.

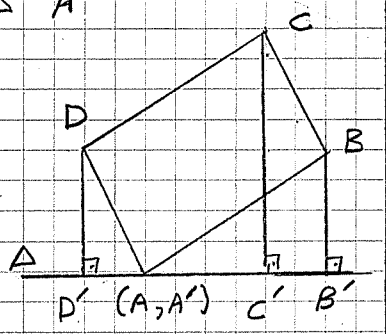
a) $|AA'| + |CC'| = |BB'| + |DD'|$ ve

b) $|AA'| + |BB'| + |CC'| + |DD'| = 4|OO'|$ dir.



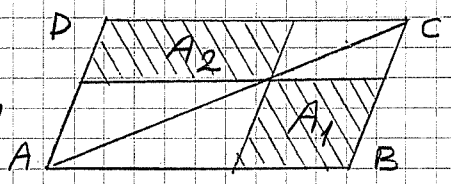
Teorem: (ABCD) bir paralelkenar ve △ herhangibir doğru olsun. Paralelkenarın herhangibir köşesi (A) △ üzerinde ise:

$|CC'| = |DD'| + |BB'|$ dir.



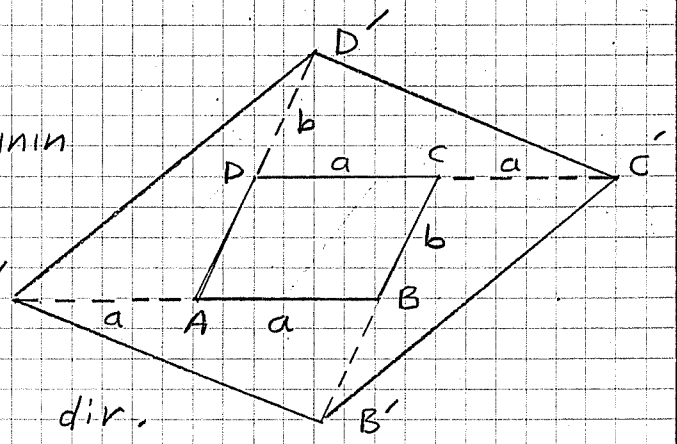
Teorem: Bir paralelkenarın köşegenlerinden birinin üzerinde alınan herhangibir noktadan kenarlara paraleller çizilerek meydana getirilen paralelkenarlardan, içlerinden köşegen geçmeyen ikisi eşdeğerlidir.

$A_1 = A_2$ dir.



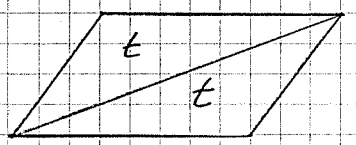
Teorem: (ABCD) paralelkenarının kenarları şekildeki gibi uzatılırsa; (A'B'C'D') dörtgeni bir paralelkenardır.

$Alan(A'B'C'D') = 5\ Alan(ABCD)$ dir.

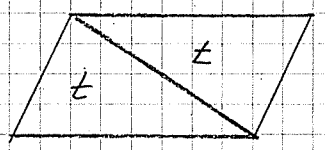


ÖZELLİKLER

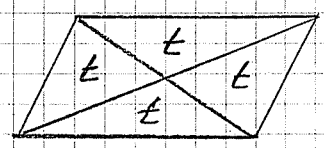
$A = Alan(A\overset{\triangle}{B}C)$ ve t bulundukları bölgelerin alanlarıdır.



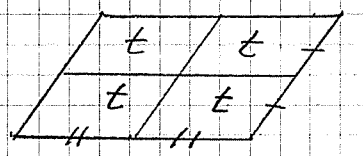
$A = 2t$



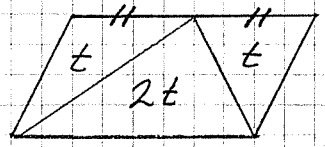
$A = 2t$



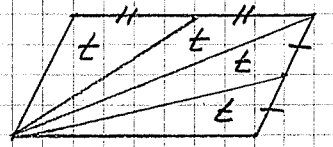
$A = 4t$



$A = 4t$

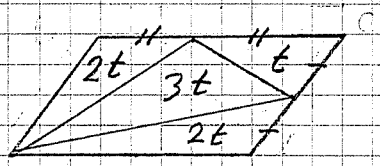


$A = 4t$

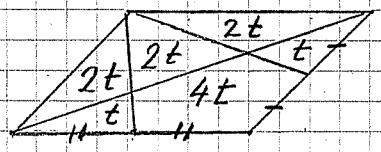


$A = 4t$

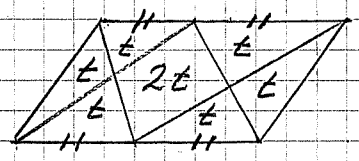
PARALELKENAR



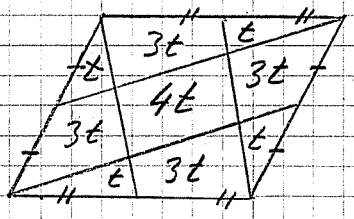
$A = 8t$



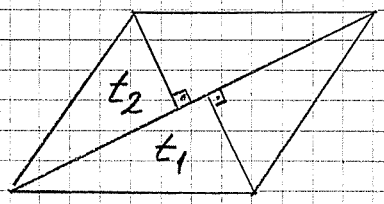
$A = 12t$



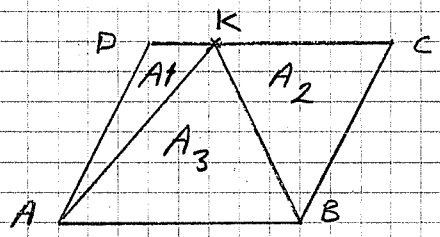
$A = 8t$



$A = 20t$

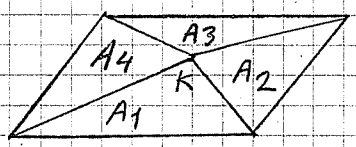


$t_1 + t_2 = \frac{A}{2}$



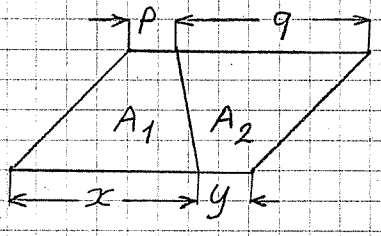
K, |CD| üzerinde herhangibir nokta.

$A_3 = A_1 + A_2$

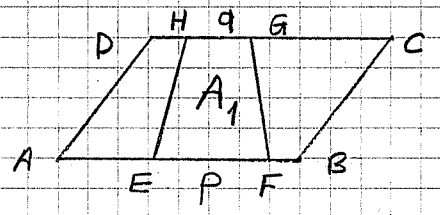


K noktası, Paralelkenarın içinde herhangi bir nokta.

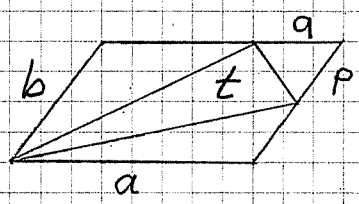
$A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = A/2$



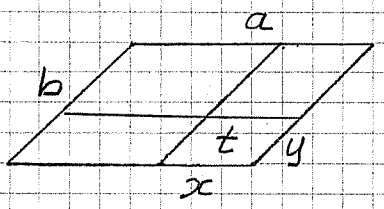
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{x+p}{y+q}$



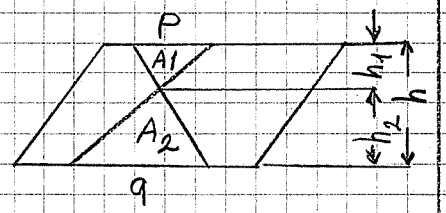
$\frac{A_1}{A} = \frac{p+q}{2a}$



$\frac{t}{A} = \frac{q}{2a} + \frac{p}{2b} - \frac{pq}{2ab}$



$\frac{t}{A} = \frac{xy}{ab}$



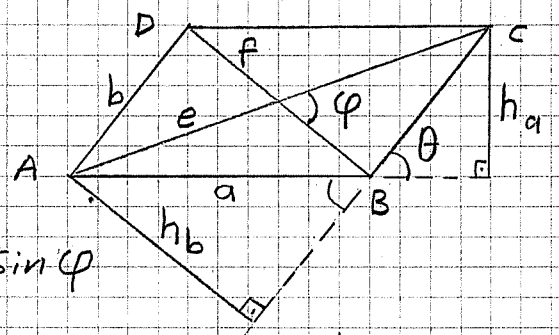
$\frac{h_1}{h} = \frac{p}{p+q}$, $\frac{h_2}{h} = \frac{q}{p+q}$

$\frac{A_1}{A} = \frac{p^2}{2a(p+q)}$, $\frac{A_2}{A} = \frac{q^2}{2a(p+q)}$

PARALELKENARIN ALANI

$h_a = b\sin\theta$, $h_b = a\sin\theta$ ve

$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ dir.



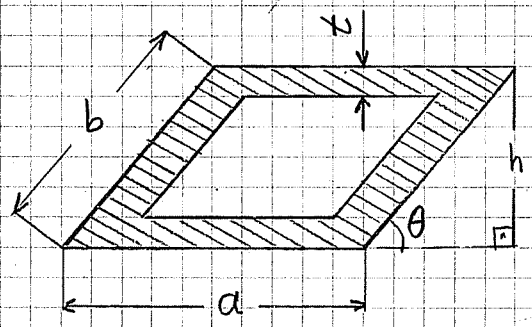
$A = a.h_a = b.h_b = ab\sin\theta = \frac{ef}{2}\sin\varphi$

İçi BOŞ PARALELKENAR

Alan:

$A = 2t(a+b) - \frac{4bt^2}{h}$

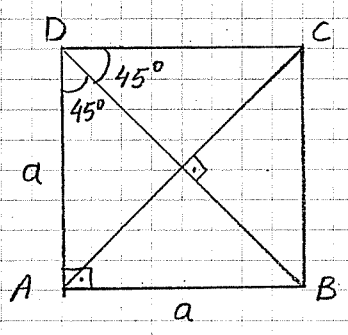
$A = 2t(a+b) - \frac{4bt^2}{b\sin\theta}$



KARE

TANIM:

Bir açısı dikaçı ve dört kenarının uzunluğu eşit olan paralelkenara KARE denir.



TEMEL ÖZELLİKLER

1) Köşegenleri birbirine eşit ve diktir. Köşegenler, aynı zamanda açıortaydır.

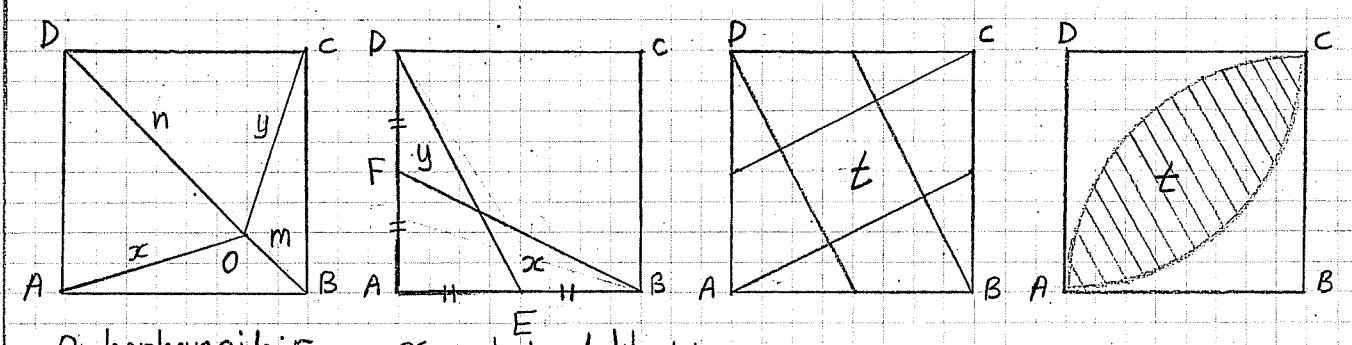
$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$

$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$

$|AC| = |BD| = \sqrt{2}\,a$

2) Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenardörtgen özelliklerini taşır.

ÖZELLİKLER



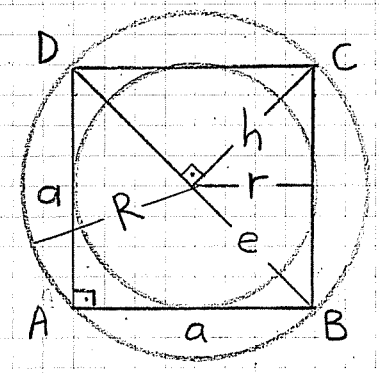
O, herhangibir nokta ise:
$x^2 + y^2 = m^2 + n^2$

x, y bulundukları Bölgelerin alanları ise:
$x = y = \frac{A}{12}$

$t = \frac{A}{5}$

$t = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

KARE İLE İLGİLİ BAĞINTILAR



Çevre: $Ç = u = 4a$

Alan: $A = a^2 = 2h^2 = e^2/2 = u^2/16$

$a = \sqrt{A} = u/4 = \sqrt{2}\,h = \sqrt{2}\,e/2$

$e = \sqrt{2}\,a = \sqrt{2A} = 2h = \sqrt{2}\,u/4$

$h = \sqrt{2}\,a/2 = \sqrt{2A}/2 = \sqrt{2}\,u/8 = e/2$

$u = 4a = 4\sqrt{A} = 4\sqrt{2}/h = 2\sqrt{2}\,e$

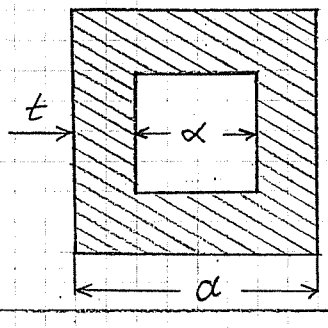
$r = a/2 = \sqrt{2}\,R/2$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,r$

Dış dairenin alanı: $A_{dış} = \pi a^2/2$

İç dairenin alanı: $A_{iç} = \pi a^2/4$

İçi BOŞ KARENİN ALANI



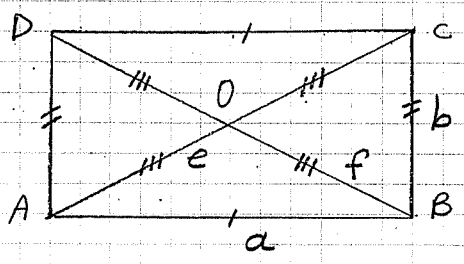
$a = b + 2t$

$A = a^2 - \alpha^2$

$A = 4t(a - t) = 4t(b + t)$

DİKDÖRTGEN

TANIM : Bir açısı dik olan paralelkenara DİKDÖRTGEN denir.



TEMEL ÖZELLİKLER :

Teorem : Bir dikdörtgenin köşegenleri birbirine eşittir.

$$|AC| = |BD| = e = f = \sqrt{a^2+b^2}$$

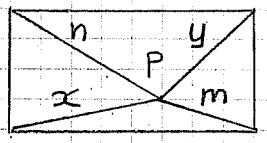
Karşıt Teorem : Köşegenleri birbirine eşit olan paralelkenar dikdörtgendir.

SONUÇ : Bir dik üçgenin hipotenüsüne ait kenarortayı hipotenüsün yarısına eşittir.

SONUÇ : Bir üçgende bir kenarortay ortaladığı kenarın yarısına eşitse, bu üçgen diktir.

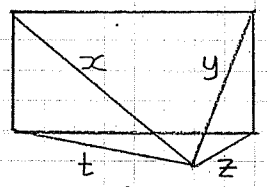
NOT : Paralelkenar özelliklerini taşır.

ÖZELLİKLER



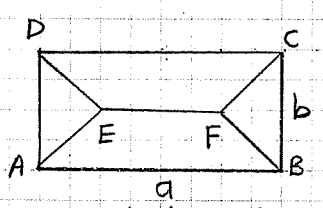
$x^2+y^2=m^2+n^2$

$x^2-m^2=n^2-y^2$



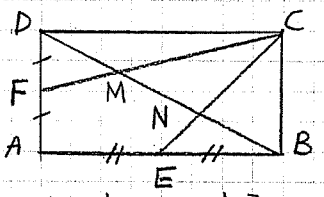
$x^2+t^2=y^2+z^2$

$|x^2|-|y^2|=|z^2|-|t^2|$



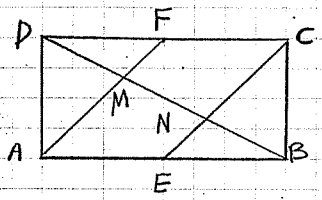
$|EF| \parallel |AB|$

$|EF| = a-b$



$\left.\begin{array}{l}|AE|=|BE| \\ |AF|=|DF|\end{array}\right\}$ ise

$|DM|=|MN|=|NB|$



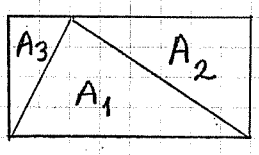
$\left.\begin{array}{l}|AE|=|EB| \\ |DF|=|FC|\end{array}\right\}$ ise

$|DM|=|MN|=|NB|$

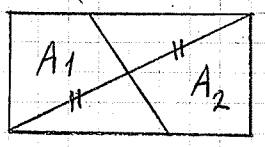
a	b	c
d	e	f

a, b, c, d, e, f Bulundukları bölgelerin alanları ise;

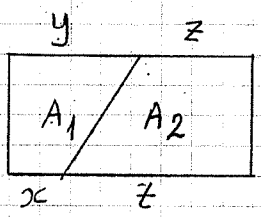
$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ dir.



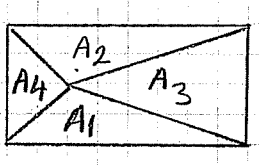
$A_1 = A_2 + A_3$



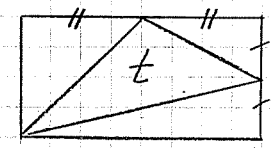
$A_1 = A_2$



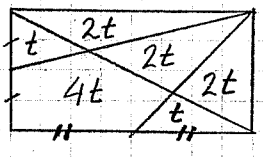
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{x+y}{t+z}$



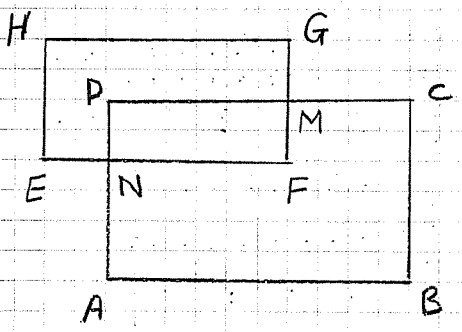
$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$



$t = \frac{3}{8} \cdot A$



$A = 12t$

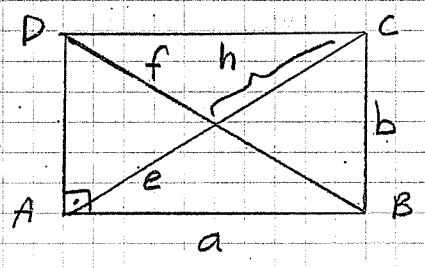


$\left.\begin{array}{l}A(ABCD) = S_1 \\ A(EFGH) = S_2 \\ A(NFMD) = S_t\end{array}\right\}$ olsun.

$A(ABCMGHEND) = S_1 + S_2 - 2S_t$ dir.

DİKDÖRTGEN

Dikdörtgen ile ilgili bağıntılar:



Çevre : $Ç = u = 2(a+b)$

Köşegen: $e = f = 2h = \sqrt{a^2+b^2}$

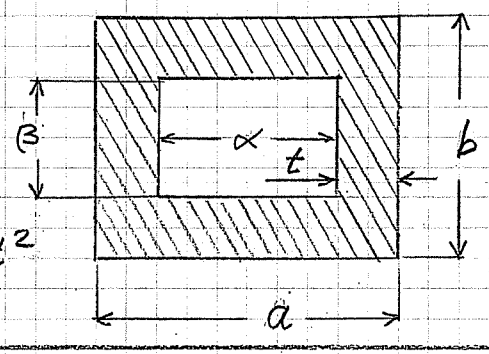
Alan : $A = a.b = eh =$

$a = A/b = (u-2b)/2$

$b = A/a = (u-2a)/2$

$h = A/e = ab/\sqrt{a^2+b^2}$

İçi BOŞ DİKDÖRTGEN



Alan:

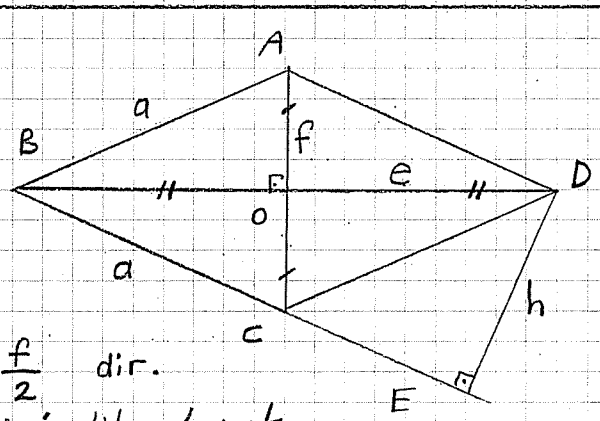
$A = ab - \alpha\beta =$

$\left.\begin{array}{l} a = \alpha + 2t \\ b = \beta + 2t \end{array}\right\}$ dir.

$A = 2t(a+b) - 4t^2 = 2t(\alpha+\beta) + 4t^2$

EŞKENAR DÖRTGEN

Tanım :
Dört kenarının uzunluğu birbirine eşit olan paralelkenara EŞKENAR DÖRTGEN denir.



Teorem : Eşkenar dörtgenin köşegenleri; birbirine dik olup, birbirini ortalar.

$|AC| \perp |BD|$,

$|OA| = |OC| = \frac{e}{2}$, $|OB| = |OD| = \frac{f}{2}$ dir.

Karşıt Teorem : Köşegenleri birbirini dik olarak ortalayan dörtgen eşkenar dörtgendir.

Teorem : Eşkenar dörtgende köşegenler iç açıları ortalar.

Karşıt Teorem: Köşegenleri, iç açılarını ortalayan dörtgen eşkenar dörtgendir.

NOT : Paralelkenar özelliklerini taşır.

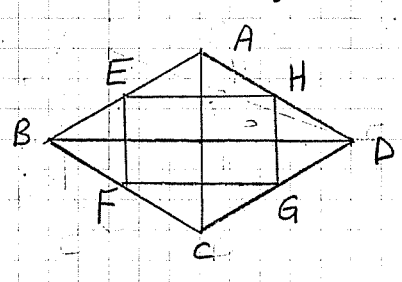
ÖZELLİKLER

1) $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$ ve $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ dir.

2) Köşegenler simetri eksenleridir.

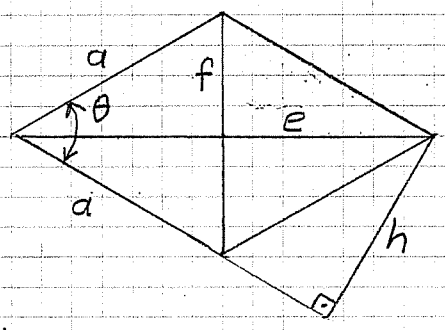
3) İç teğet çemberi vardır. Çevrel çemberi yoktur.

4) E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktaları ise:
(EFGH) dörtgeni dikdörtgendir.



EŞKENAR DÖRTGEN

5) $a = \frac{1}{2}\sqrt{e^2+f^2}$



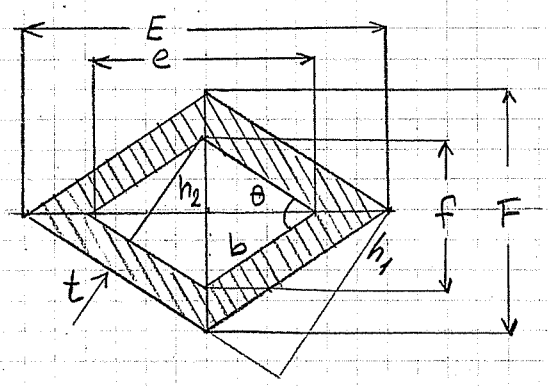
Çevre : $Ç = 2u = 4a = 2\sqrt{e^2+f^2}$

Alan : $A = ah = \frac{ef}{2} = a^2 \cdot \sin\theta$

$h = \frac{A}{a} = a\sin\theta = \frac{ef}{2a} = ef/\sqrt{e^2+f^2}$

$e = 2a\cos\frac{\theta}{2}$, $f = 2a\sin\frac{\theta}{2}$ dir

İçi BOŞ EŞKENAR DÖRTGEN



$h_1 = a\sin\theta = h_2 + 2t$

$h_2 = b\sin\theta$

Alan :

$A = 4at\left(1 - \frac{t}{h_1}\right) = 4at \cdot \frac{h_2+t}{h_2+2t}$

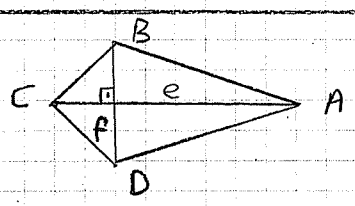
$A = 4bt\left(1 + \frac{t}{h_2}\right) = 4bt\,\frac{h_1-t}{h_1-2t}$

$A = 2t\sqrt{E^2+F^2}\,[(EF - t\sqrt{E^2+F^2})/EF]$

$A = 2t\sqrt{e^2+f^2}\,[(ef + t\sqrt{e^2+f^2})/ef]$

DELTOİT

Tanım : İki komşu kenarı ile diğer komşu iki kenarları da eşit olan dörtgene DELTOİT denir.



ÖZELLİKLER

1) $|AB| = |AD|$, $|BC| = |DC|$ dir.

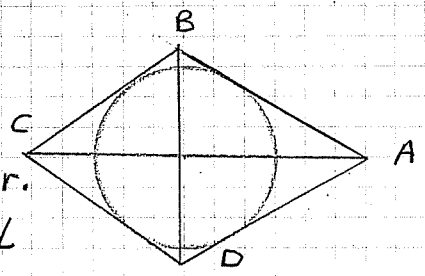
2) Köşegenleri birbirine diktir. $|AC| \perp |BD|$ dir.

3) $|OB| = |OD|$ dir. $|AC|$, deltoidin simetri eksenidir. Deltoidin simetri merkezi yoktur.

4) $\hat{B} = \hat{D}$ ve $(\widehat{ABC}) = (\widehat{ADC})$ dir.

5) $|AC|$ köşegeni , $\hat{A}$ ve $\hat{C}$ açılarının açıortaylarıdır.

6) Deltoidin iç teğet çemberi vardır.



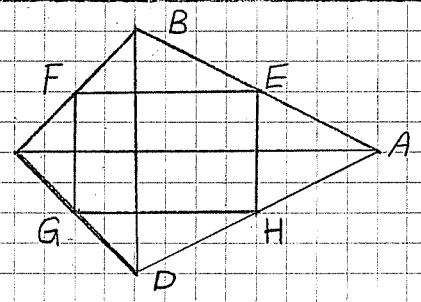
7) Deltoidin çevrel çemberi yoktur.

[Ancak, $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ ise çevrel çemberi vardır.

Bu durumda; çevrel çemberin merkezi, $|AC|$ nin orta noktasıdır.]

DELTOİT

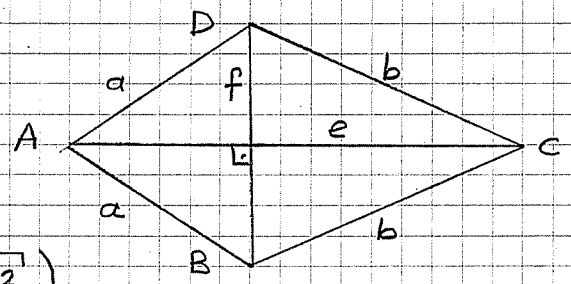
8) E, F, G ve H noktaları bulundukları kenarların orta noktaları ise: (EFGH) dörtgeni DİKDÖRTGEN dir.



Çevre : $Ç = 2u = 2(a+b)$

$$e = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - f^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - f^2}$$

$$e^2(4b^2 - f^2) = (a^2 - b^2 - e^2)^2$$



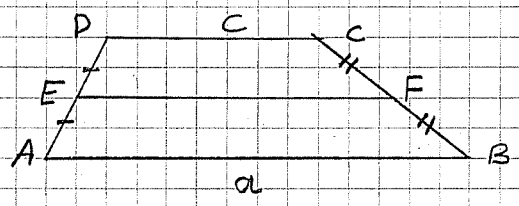
Alan :

$$A = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{f}{4}\left(\sqrt{4a^2 - f^2} + \sqrt{4b^2 - f^2}\right)$$

NOT : İçi boş deltoit olmaz. Köşelerde birleşme problemi var.

YAMUK

TANIM : Yalnız iki kenarı paralel olan dörtgene YAMUK denir.

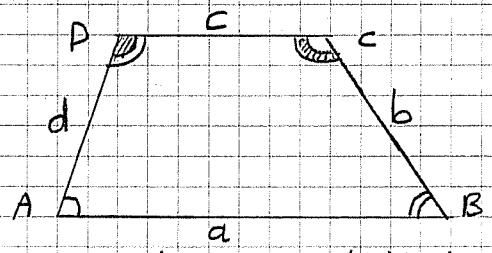


Yamuğun birbirine paralel olan |AB| ve |CD| kenarlarına TABANLARI denir. Paralel olmayan [BC] ve [AD] yan kenarların orta noktalarını birleştiren [EF] doğru parçasına yamuğun ORTA TABANI denir.

Teorem : Bir yamukta bir yanal kenara komşu iki açı birbirinin bütünleridir.

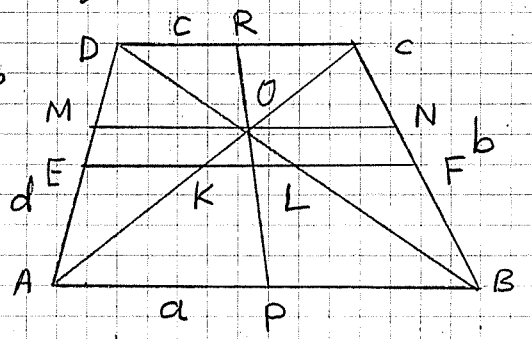
$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ ve

$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ dir.



Karşıt Teorem : Bir yanal kenara komşu iki açısı bütünler olan dörtgen bir yamuktur.

Teorem : Bir yamukta orta taban, tabanlara paralel ve tabanlar toplamının yarısına eşittir.



$|AE| = |DE| = \frac{d}{2}$

$|BF| = |CF| = \frac{b}{2}$ olmak üzere:

$|EF| = m = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{a+c}{2}$ dir. Ayrıca :

$|KL| = \frac{a-c}{2}$ dir.

$|MN| \parallel |AB|$ ise : $|MN| = \frac{2ac}{a+c}$ dir.

YAMUK

$|MO| = |NO| = \dfrac{ac}{a+c}$ dir. $\left[\dfrac{1}{|MO|} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right]$

$\dfrac{|AO|}{|OC|} = \dfrac{|BO|}{|OD|} = \dfrac{a}{c}$

$|MD| = \dfrac{cd}{a+c}$, $|MA| = \dfrac{ad}{a+c}$ ve

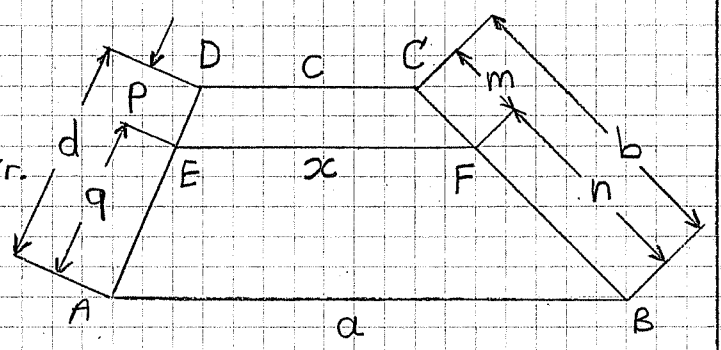
$|NC| = \dfrac{bc}{a+c}$, $|NB| = \dfrac{ab}{a+c}$ dir.

P ve R noktaları $|AB|$ ve $|CD|$ nin orta noktaları olmak üzere çizilen doğru parçası, $|MN|$ nin orta noktası olan O noktasından geçer.

TEMEL ÖZELLİKLER

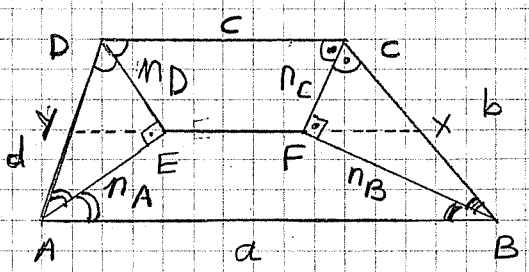
1) $|EF| \parallel |AB|$ ise :

$\dfrac{|DE|}{|AE|} = \dfrac{|CF|}{|BF|} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{x-c}{a-x}$ dir.



2) Yanal kenarlara komşu olan açıların açıortayları birbirine diktir.

$n_A \perp n_D$ ve $n_B \perp n_C$ dir.



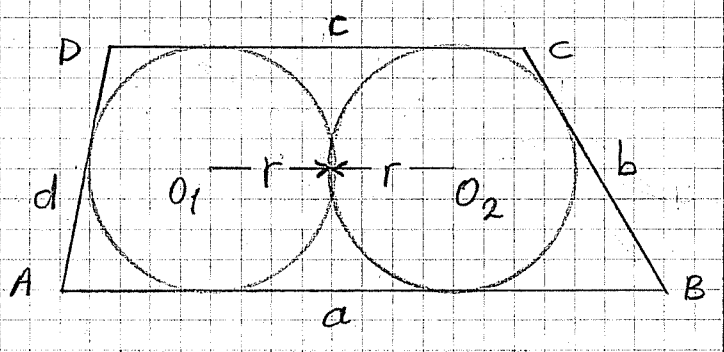
Ayrıca: $|EF| \parallel |AB| \parallel |DC|$ dir.

$|DY| = |AY|$ ve $|CX| = |BX|$ dir.

$|EF| = \dfrac{(a+c)-(b+d)}{2}$ dir.

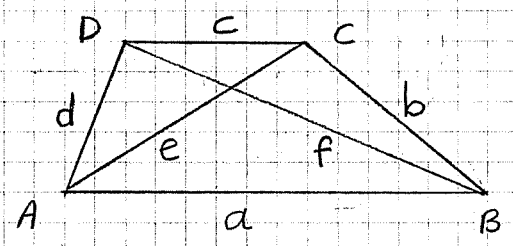
3) Yandaki şekil gözönüne alınırsa :

$r = \dfrac{(a+c)-(b+d}{4}$ dir.



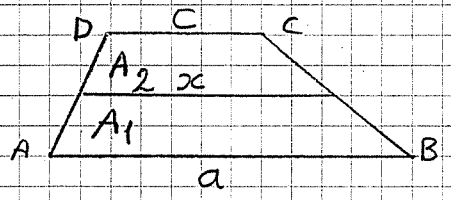
4) Euler Probleminin Özel Hali :

$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ dir.

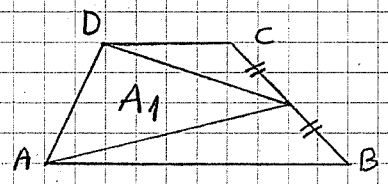


YAMUK

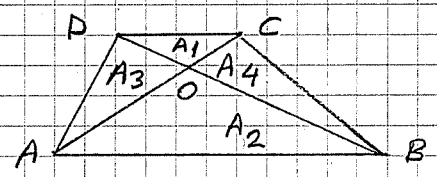
ÖZELLİKLER



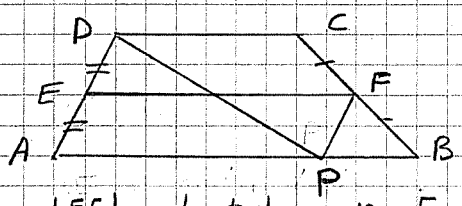
$A_1 = A_2$ ise,
$2x^2 = a^2 + c^2$ dir.



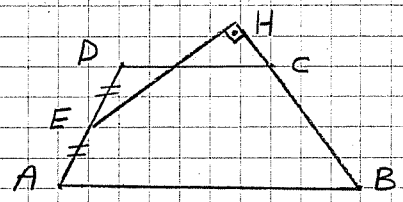
$A_1 = A/2$ dir.



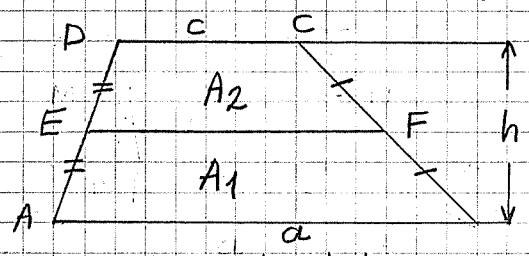
$A_3 = A_4$ ise:
$\sqrt{A} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}$ dir.



$|EF|$ orta taban ve F den $|FP| // |AD|$ çizilerek P noktası bulunursa:
Alan (ADP) = Alan(PBCD) dir.



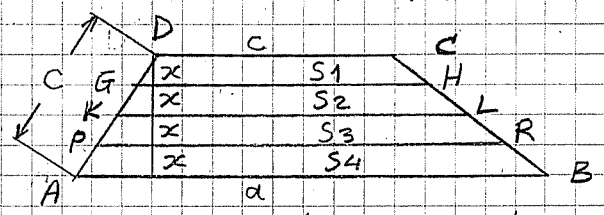
$|AE| = |DE|$ ve $|EH| \perp |BC|$ ise:
$A = |EH| \cdot |BC|$ dir.



$|EF|$: Orta taban.

$A_1 = \frac{3a+c}{8} h$ ve

$A_2 = \frac{a+3c}{8} h$ dir.



$k = (a-c)$ / Bölünen Yamuk Sayısı

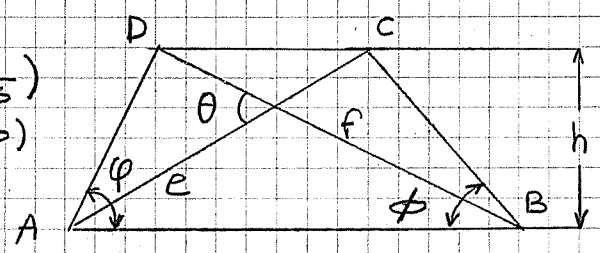
a) $|GH| = c + k$
$|KL| = c + 2k$
$|PR| = c + 3k$ dir.

b) S_2, S_3, S_4 alanlarının ölçüleri aritmetik dizinin ardışık terimleridir.
$S_2 = (S_1 + S_3)/2$, $S_3 = (S_2 + S_4)/2$

YAMUĞUN ALANI

Çevre : $2u = a + b + h\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin\phi}\right)$
$2u = a + b + h(\csc\varphi + \csc\phi)$
$2u = a + b + c + d$

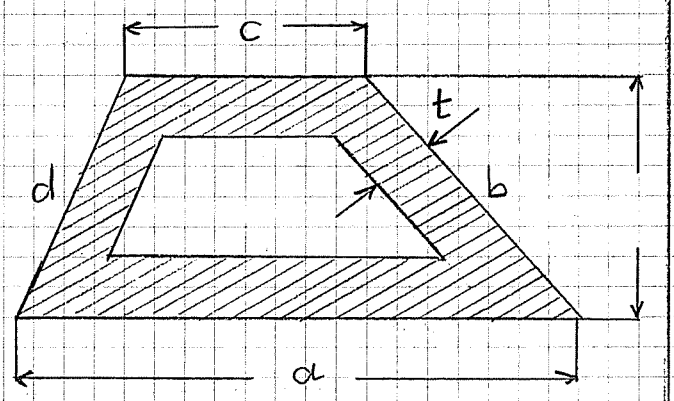
Alan : $A = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$ ve
$A = \frac{1}{2} ef \cdot \sin\theta$ dir.



İÇİ BOŞ YAMUK

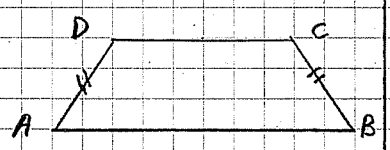
Alan :

$A = (a+b+c+d) \cdot t - (b+d) \frac{2t^2}{h}$



İKİZKENAR YAMUK

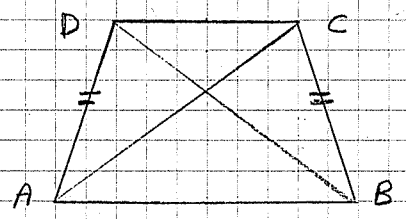
TANIM : Yan kenarları eşit olan yamuğa İKİZKENAR YAMUK denir.



TEMEL ÖZELLİKLER

1) Taban açıları eşittir.

$\hat{A} = \hat{B}$ ve $\hat{C} = \hat{D}$ dir.



2) Karşılıklı açıları bütünlendir.

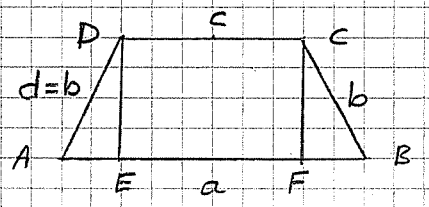
$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ ve $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ dir.

3) Köşegenlerin uzunlukları eşittir.

$|AC| = |BD|$ dir.

4) Şekilde :

$|AE| = |BF| = \dfrac{a-c}{2}$ dir.



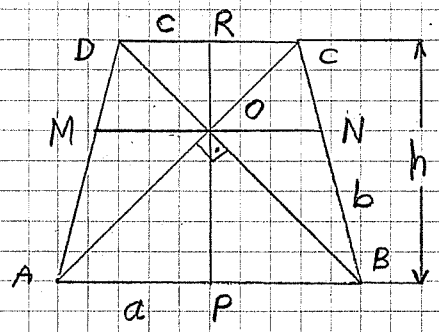
5) Köşegenler birbirine dik, yani;

$|AC| \perp |BD|$ ise:

$|OP| = a/2$ ve $|OR| = c/2$ dir.

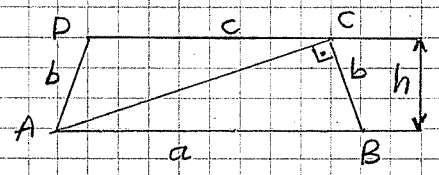
$|AC| = |BD| = e = (a+c)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

$h = (a+c)/2$ dir.



6) Şekilde; $|AC| \perp |BC|$ ise :

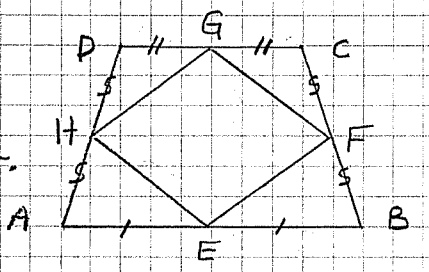
$h = \sqrt{a^2 - c^2}/2$ dir.



7) E, F, G ve H noktaları, ikizkenar yamuğun kenarlarının orta noktaları ise;

(EFGH) dörtgeni, EŞKENAR DÖRTGENdir.

Eğer : $|AG| \perp |HE|$ ise, dörtgen KARE dir.

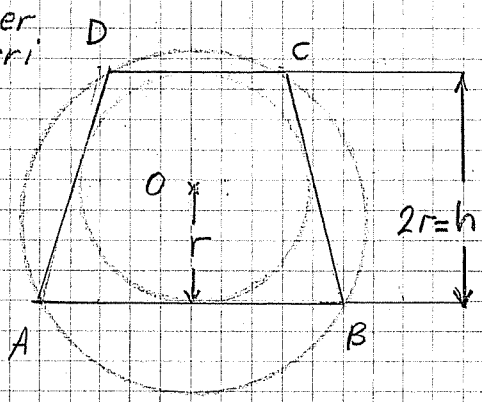


8) İkizkenar yamukta karşı açılar bütünler olduğundan her zaman çevrel çemberi vardır. İkizkenar yamuk bir kirişler dörtgenidir.

$b = (a+c)/2$ olduğu zaman iç teğet çemberi de vardır. Bu durumda:

$r^2 = a \cdot c / 4$ ve

$A = (a+c)\,r$ dir.

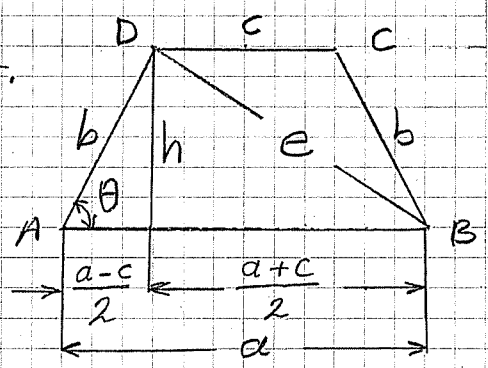


İKİZKENAR YAMUK

$e=\sqrt{b^2+ac}=a^2+b^2-2a\sqrt{b^2-h^2}$ dir.

Çevre: $Ç=2u=a+c+2b$ dir.

Alan: $A=m.h=\frac{a+c}{2}.h$ dir.



$A=\frac{(a+c)\,b\sin\theta}{2}$

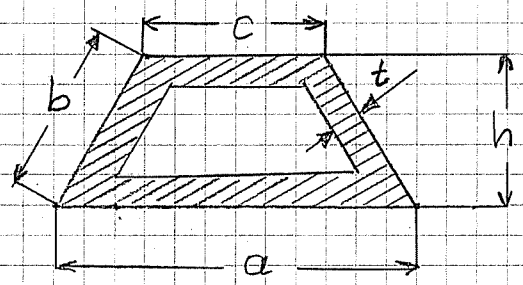
$A=(c+b\cos\theta)\,b.\sin\theta$

$A=(a-b\cos\theta)\,b.\sin\theta$

İÇİ BOŞ İKİZKENAR YAMUK

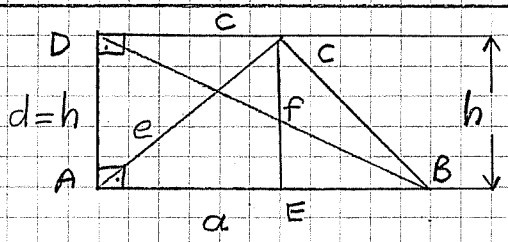
Alan:

$A=(a+c+2b)t-\frac{4bt^2}{h}$ dir.



DİK YAMUK

Tanım: Yan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa DİK YAMUK denir.



TEMEL ÖZELLİKLER

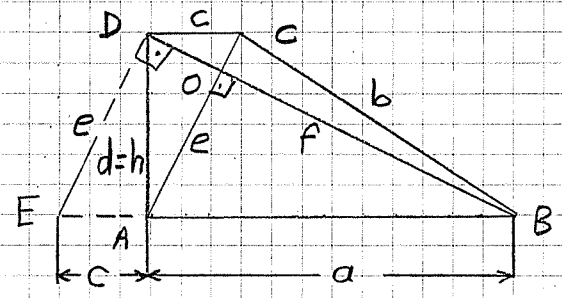
1) $|EB|=a-c$ dir.

2) Köşegenler birbirine dik, yani:

$|AC|\perp|BD|$ ise:

$h^2=a\cdot c$ dir.

[h, aynı zamanda (FDB) dik üçgeninin yüksekliğidir.]

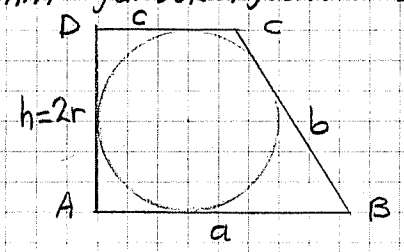


3) Yamuğun çevrel çemberi yoktur.

$a+c=b+h$ olduğu zaman iç teğet çemberi vardır. Bu durumda:

$h=2r=2ac/(a+c)$ ve

$A=(a+c)r=(b+h)r$ dir.

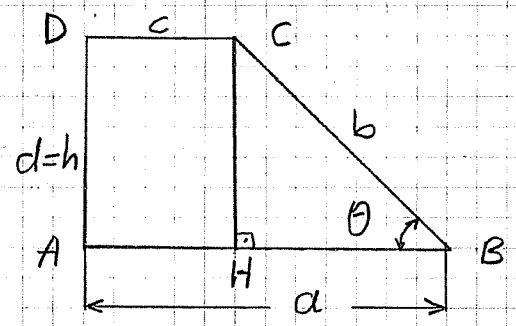


DİK YAMUĞUN ALANI

Çevre: $Ç=2u=a+b+c+d$ dir.

$A=m.h=\frac{a+c}{2}.h$ ve

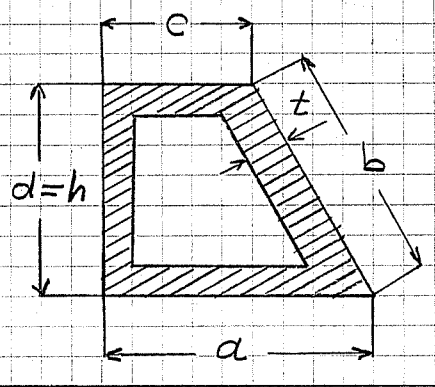
$A=\frac{a+c}{2}.b\sin\theta$ dır.



İÇİ BOŞ DİK YAMUK

Alan:

$$A = (a+b+c+d)h - (b+h)\cdot\frac{2t^2}{h} \quad \text{dir.}$$



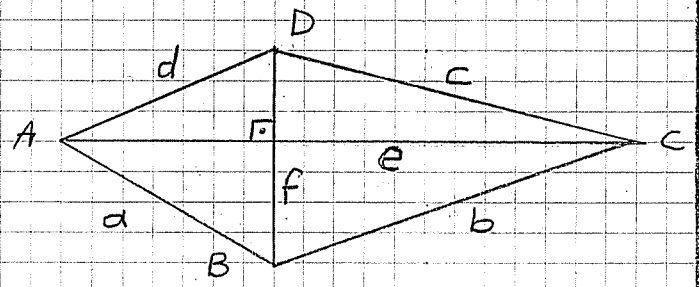
KÖŞEGENLERİ BİRBİRİNE DİK OLAN DÖRTGEN

ÖZELLİK :

$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ dir.

Alan :

$A = ef/2$ dir.

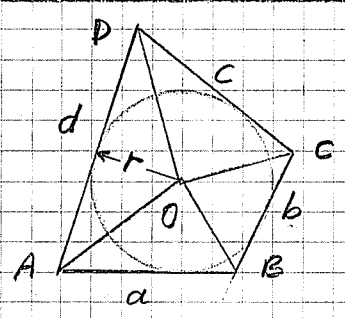


TEĞETLER DÖRTGENİ

Tanım : Kenarları bir çemberin teğetleri olan dörtgene TEĞETLER DÖRTGENİ denir.

Teorem : Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların toplamı birbirine eşittir.

$a + c = b + d$ dir.



Karşıt Teorem : Karşılıklı kenarlarının toplamı birbirine eşit olan dörtgen teğetler dörtgenidir.

ÖZELLİK

Teğetler dörtgeninde iç açıortaylar bir noktada kesişirler.

NOT: Eşkenar dörtgen, kare, deltoit teğetler dörtgenidir.

Çevre : $Ç = 2u = a + b + c + d$ dir.

Alan : $A = u \cdot r$ ve

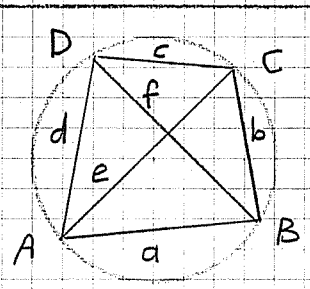
$A = (a + c)r = (b + d)r$ dir.

KİRİŞLER DÖRTGENİ

Tanım : Köşeleri bir çember üzerinde bulunan dörtgene KİRİŞLER DÖRTGENİ denir.

Teorem : Bir kirişler dörtgeninde karşılıklı iki açı bütünlerdir.

$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{B} + \hat{D}$ dir.



Karşıt Teorem : Karşılıklı iki açısı birbirini bütünleyen dörtgen, bir kirişler dörtgenidir.

Teorem : $a \cdot c + b d = e \cdot f$ dir.

PTOLEME TEOREMİ : $\dfrac{e}{f} = \dfrac{ad + bc}{ab + cd}$ dir

NOT : Kare, dikdörtgen, ikizkenar yamuk kirişler dörtgenidir.

ÖZELLİKLER

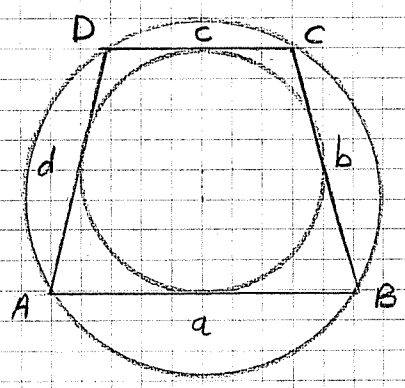
1) $e=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$ ve $f=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$ dir.

2) $\cos A=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad+2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$

$\cos C=\dfrac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2bc+2ad}$, $\cos D=\dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2cd+2ab}$ dir.

3) Kirişler dörtgeninin iç teğet çemberi çizilebiliyorsa :

$A=\sqrt{abcd}$ dir.

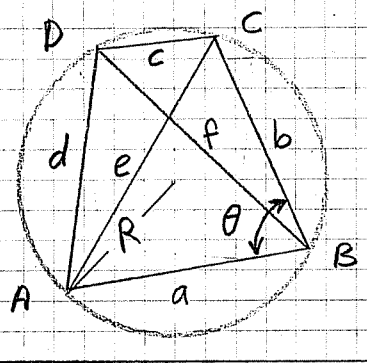


Kirişler Dörtgeninin Alanı :

Çevre : $Ç=2u=a+b+c+d$ dir.

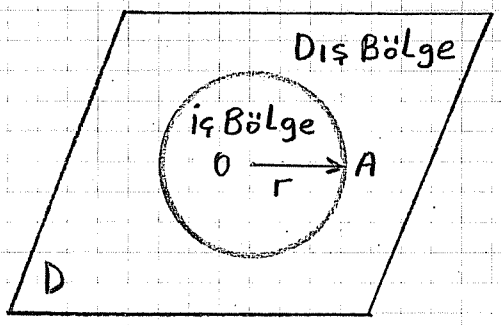
Alan : $A=\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}$ ve

$A=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta$ dir.



ÇEMBER

TANIMLAR



Bir D düzleminde alınan sabit bir O noktasından aynı r uzaklığında olan tüm noktaların kümesine ÇEMBER denir.

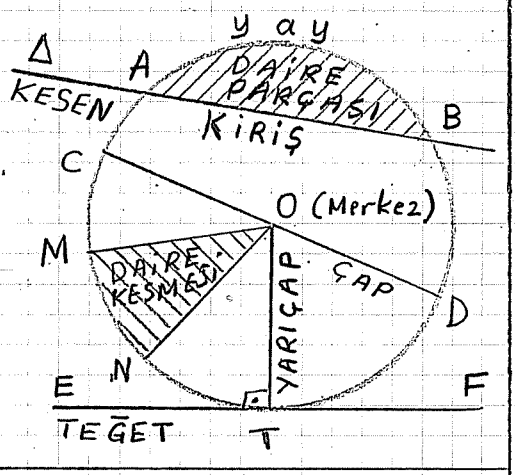
O noktasına çemberin MERKEZİ, $|OA| = r$ gerçel sayısına çemberin yarıçap ölçüsü, ya da kısaca YARIÇAPI denir.

Çember ile iç bölgesinin birleşimine ÇEMBERSEL BÖLGE veya DAİRE denir.

Yarı çaplarının uzunlukları eşit olan çemberlere EŞİT ÇEMBERLER denir.

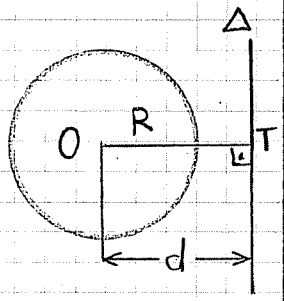
Merkezi O, yarıçapı r olan çember (O,r) şeklinde gösterilir.

- AB Eğrisine YAY denir.
- [AB] Doğru parçasına KİRİŞ denir.
- Δ Doğrusuna KESEN denir.
- $(\widehat{AB})$ yayı ile [AB] doğru parçasının çevrelediği yüzeye DAİRE PARÇASI denir.
- [CD] Doğru parçasına ÇAP denir.
- MNO yüzeyine DAİRE KESMESİ veya DAİRE DİLİMİ denir.
- EF doğrusuna TEĞET denir.
- T noktasına TEĞET NOKTASI denir.



BİR DOĞRUNUN BİR ÇEMBERE GÖRE DURUMLARI

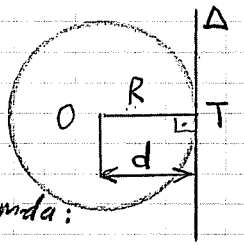
Bir düzlem içinde bir çemberin merkezinin bir doğru üzerindeki dik izdüşümü T olsun.



Teorem 1: T noktası, çemberin dışında ise; doğrunun tümü çemberin dışındadır.

Bir çemberin merkezinin bir doğruya olan uzaklığı, yarıçaptan büyükse; doğru çemberin dışındadır. Bu durumda:

$d > R$ dir.

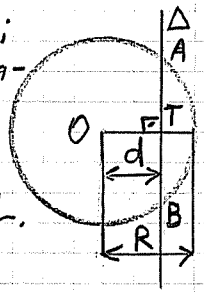


Teorem 2: T noktası, çemberin bir noktası ise; doğru çembere T noktasında teğettir. Doğrunun T den başka diğer noktaları çemberin dışındadır.

Bir çember merkezinin bir doğruya olan uzaklığı yarıçapa eşitse; doğru çembere teğettir. Bu durumda:

$d = R$ dir.

[Bir çemberin yarıçapına çember üzerindeki uç noktasından çizilen dik doğru, çembere diktir.



Teorem 3: T noktası çemberin içinde ise doğru çemberi iki noktada keser. T noktası, bu kesim noktalarını birleştiren kirişin orta noktasıdır.

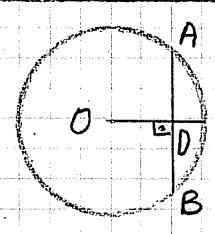
Doğrunun kiriş üzerinde bulunmayan noktaları çemberin dışındadır.

Bir çember merkezinin bir doğruya olan uzaklığı, yarıçaptan küçükse; doğru çemberin bir kesenidir.

Bu durumda: $d < R$ dir.

Merkezden kirişe çizilen dikme, kirişi ortalar.
[Kirişin orta dikmesi merkezden geçer.]
[Bir çemberin merkezi ile herhangi bir kirişin orta noktasının belirttiği doğru, bu kirişe diktir.]

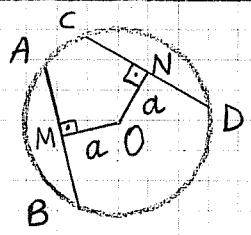
$|AD| = |DB|$ dir.



Teorem: Merkezden eşit uzaklıktaki kirişler birbirlerine eşittir.

$|OM| = |ON| = a$ ise;

$|AB| = |CD|$ dir.



Karşıt Teorem: Eşit uzunluktaki kirişlerin merkezden uzaklıkları aynıdır.

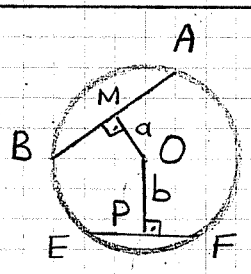
$|AB| = |CD|$ ise;

$|OM| = |ON|$ dir.

Teorem: Merkezden uzak olan kiriş, yakın olan kirişten daha küçüktür.

$|OM| > |OP|$ ise;

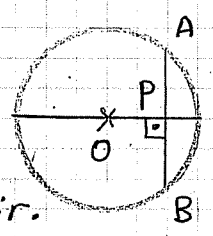
$|AB| < |EF|$ dir.



Karşıt Teorem: Küçük kiriş merkezden uzakta, büyük kiriş merkeze yakın bulunur.

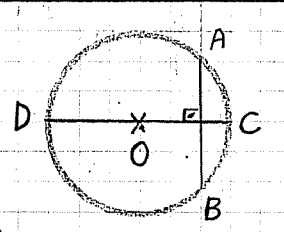
$|AB| < |EF|$ ise;
$|OM| > |OP|$ dir.

Sonuç 1: Bir çemberin en büyük kirişi çaptır.
Sonuç 2: Bir çemberin içinde alınan bir P noktasından geçen en uzun kiriş çaptır. P noktasından geçen en kısa kiriş ise, bu çapa dik olan kiriştir.



Bir çemberde kirişe dik olan çap, bu kirişin çemberden ayırdığı yayları ortalar.

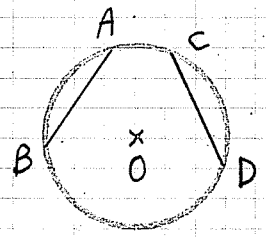
$(\widehat{AC}) = (\widehat{CB})$
$(\widehat{AD}) = (\widehat{DB})$ dir.



Bir çemberde eşit kirişlerin yayları eşittir.

$|AB| = |CD|$ ise;

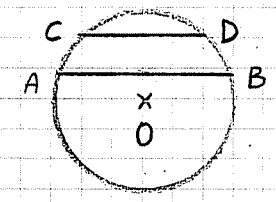
$(\widehat{AB}) = (\widehat{CD})$ dir.



Bir çemberde paralel iki kiriş arasında kalan yayların ölçüleri birbirlerine eşittir.

$|AB| \parallel |CD|$ ise;

$(\widehat{AC}) = (\widehat{DB})$ dir.

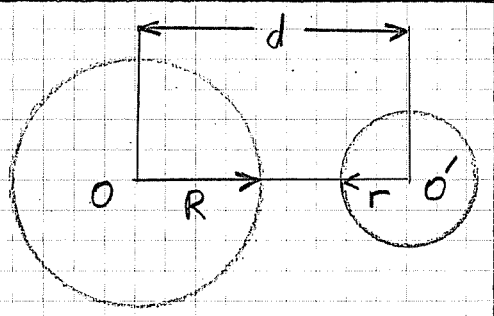


İKİ ÇEMBERİN BİRBİRLERİNE GÖRE DURUMLARI

Yarıçapları R ve r olan iki çemberin merkezlerinin birbirine olan uzaklığı d olsun.

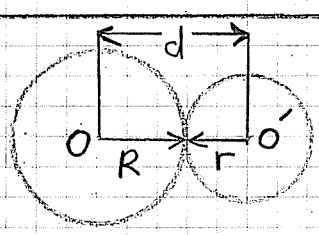
Teorem: Çemberler birbirinin dışında ise;

$d > R + r$ dir.



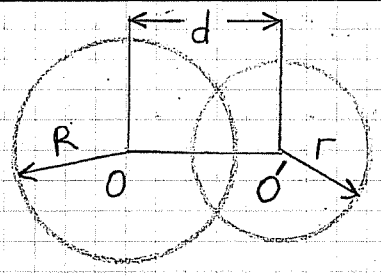
Teorem: Çemberler birbirine dıştan teğet ise;

$d = R + r$ dir.



Teorem: Çemberler kesişirse;

$R - r < d < R + r$ dir.



Özel Durum: DİK KESİŞEN ÇEMBERLER

Tanım: Kesişen iki çemberin kesim noktalarına ait yarıçapları birbirine dikse; bu iki çember dik kesişirler. (iki çember birbirine diktir.)

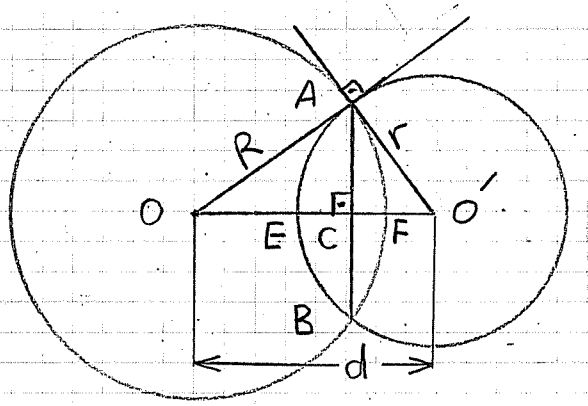
Dik Kesişen çemberlerde aşağıdaki özellikler vardır.

1- $d^2 = R^2 + r^2$

2- $|AB| = 2|AC|$

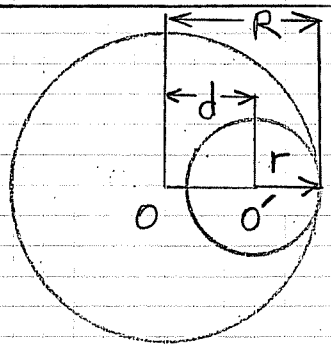
3- $d \cdot |AC| = R \cdot r$

4- $|EF| = R + r - d$



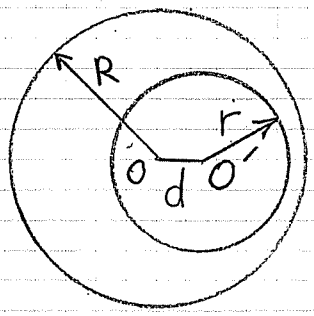
Teorem: Çemberler birbirine içten teğet ise;

$d = R - r$ dir.



Teorem: Çemberlerden biri diğerinin içinde ise;

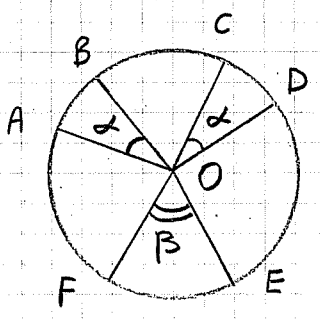
$d < R - r$ dir.



ÇEMBERİN AÇILARI

MERKEZ AÇI

Tepe noktası çemberin merkezinde bulunan açıya MERKEZ AÇI denir. Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.



$m(A\hat{O}B) = m(\widehat{AB}) = \alpha$ dir.

Teorem: Bir çemberde eşit merkez açıların gördüğü yaylar eşittir.

$m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D) = \alpha$ ise;

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ dir.

Karşıt Teorem: Bir çemberde eşit yayları gören merkez açılar birbirine eşittir.

$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$ ise;

$m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D) = \alpha$ dır.

Teorem: Bir çemberde iki merkez açıdan küçük olanın gördüğü yay, büyük olanın gördüğü yaydan küçüktür.

$m(A\hat{O}B) = \alpha$, $m(E\hat{O}F) = \beta$ ve $\alpha < \beta$ ise;

$m(\widehat{AB}) < m(\widehat{EF})$ dir.

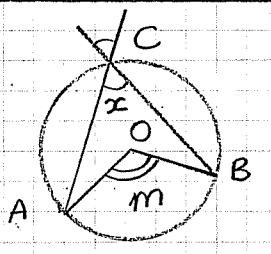
Karşıt Teorem: Bir çemberde farklı iki yaydan küçük olanının açısı da küçüktür.

$m(\widehat{AB}) < m(\widehat{EF})$ ise;

$\alpha < \beta$ dır.

ÇEVRE AÇI

Tepe noktası çember üzerinde bulunan açıya ÇEVRE AÇI denir.

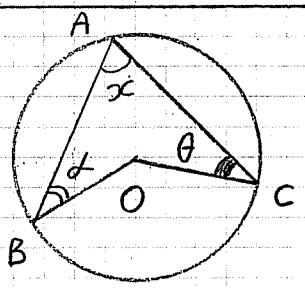


Teorem: Bir çevre açı, aynı yayı gören merkez açının yarısına eşittir.

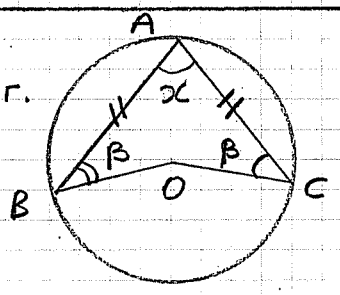
$m(A\hat{C}B) = x = \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \cdot m(A\hat{O}B)$ dır.

Teorem: Aynı yayı gören çevre açıları birbirine eşittir.

Teorem: Eşit yayları gören çevre açıları birbirine eşittir.



$x = \alpha + \theta$ dır.

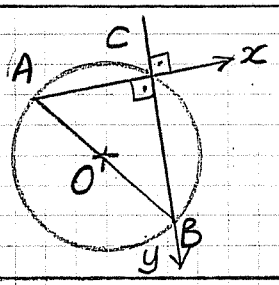


$|AB| = |AC|$ ise;

$x = 2\beta$ dır.

$m(x\hat{C}B) = 90^\circ$ ise

$m(x\hat{C}B) = m(A\hat{C}B) = 90^\circ = \frac{1}{2} m(A\hat{O}B) = \frac{180^\circ}{2}$ dir.



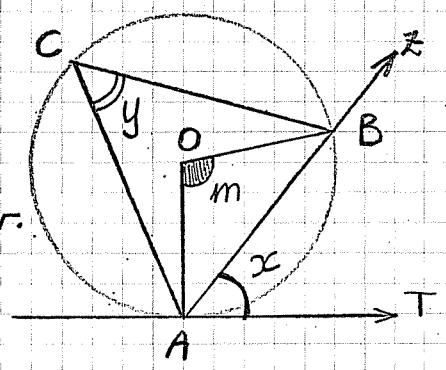
Sonuç: ÇAPI GÖREN ÇEVRE AÇISI 90° DİR.

TEĞET KİRİŞ AÇI

Bir çemberin bir teğeti ile teğetin değme noktasından geçen kirişi arasında kalan açıya TEĞET KİRİŞ AÇI denir.

Teğet Kiriş Açı, bir çevre açıdır.

Teorem: Bir teğet kiriş açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



$$m(\widehat{BAT}) = x = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

SONUÇLAR:

1- Teğet kiriş açının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

$$x = \frac{m}{2} \text{ dir.}$$

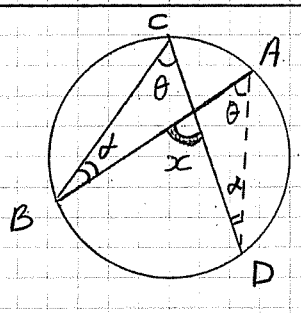
2- Aynı yayı gören teğet kiriş açı ile çevre açı birbirine eşittir.

$$x = y \text{ dir.}$$

İÇ AÇI

Tepe noktası çemberin içinde bulunan açıya İÇ AÇI denir.

Bir iç açı, kenarları arasında kalan yayların toplamının yarısına eşittir.



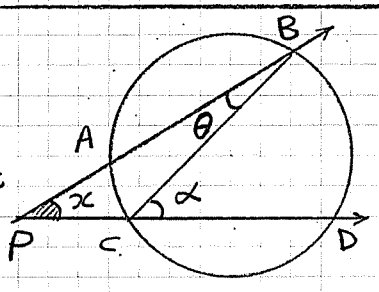
$$x = \frac{m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AC})}{2} \text{ veya}$$

$$x = \alpha + \theta \text{ dir.}$$

DIŞ AÇI

Bir çemberin dış bölgesinde kesişen iki kesenin oluşturduğu açıya bu çemberin DIŞ AÇISI denir.

Bir dış açı, kenarları arasında kalan yayların farkının yarısına eşittir.

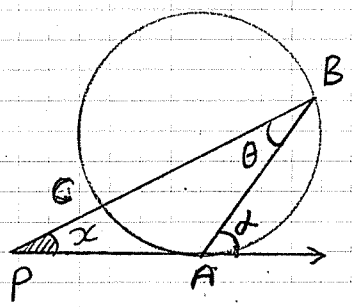


$$x = \frac{m(\widehat{BD}) - m(\widehat{AC})}{2} \text{ veya}$$

$$x = \alpha - \theta \text{ dir.}$$

1) Açının bir kenarı çembere teğet ise:

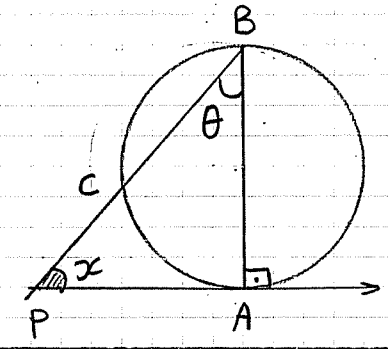
$$x = \alpha - \theta \text{ dır.}$$



Özel Durum:

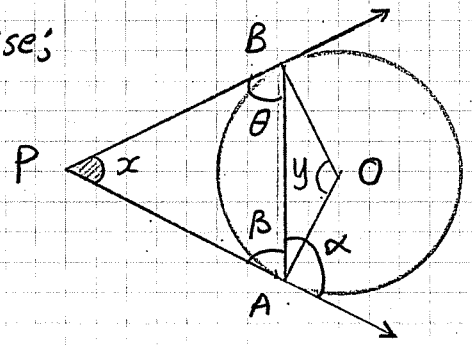
|AB| çap ise;

$$x = 90 - \theta \text{ dır.}$$



2) Açının iki kenarı çembere teğet ise;

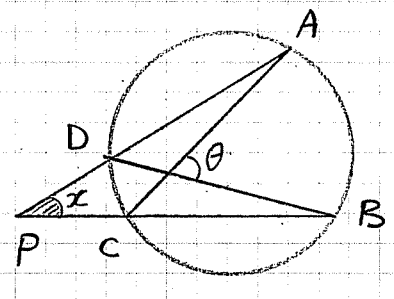
$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha - \theta \\ y &= \theta + \beta \\ x + y &= \alpha + \beta = 180^\circ \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$



SONUÇLAR

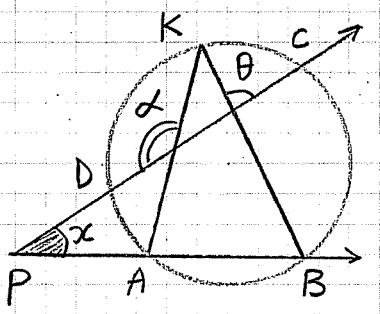
1)
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2} \\ \theta &= \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} x + \theta &= m(\widehat{AB}) \\ \theta - x &= m(\widehat{CD}) \end{aligned}\right\} \text{olur.}$$

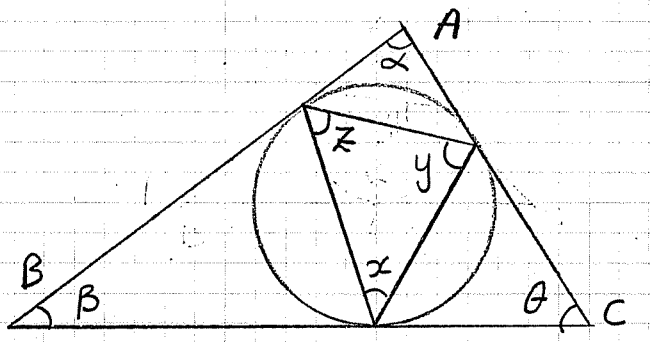


2)

$$x = |\alpha - \theta| \quad \text{dir.}$$



3)
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\beta + \theta}{2} \\ y &= \frac{\alpha + \theta}{2} \\ z &= \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}\right\} \text{dir.}$$



ÇEMBERLERİN BENZERLİĞİ

Bütün çemberler birbirlerine benzerdir. Benzerlik oranı, yarıçap uzunluklarının oranına eşittir.

Benzerlik oranı : $k = \frac{r_1}{r_2}$ dir.

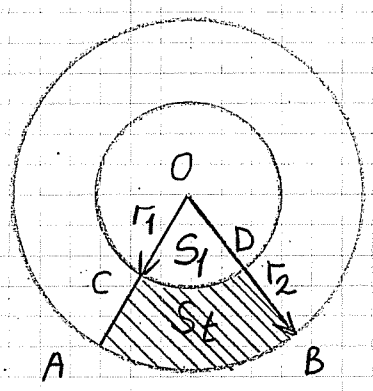
a) $\frac{\text{Çevre}_1}{\text{Çevre}_2} = \frac{r_1}{r_2} = k$ dir.

b) $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = k^2$ dir.

c) 1) $\frac{S_1}{S_1 + S_t} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

2) $S_t = \frac{\pi\alpha}{360^\circ} \cdot (r_2^2 - r_1^2)$

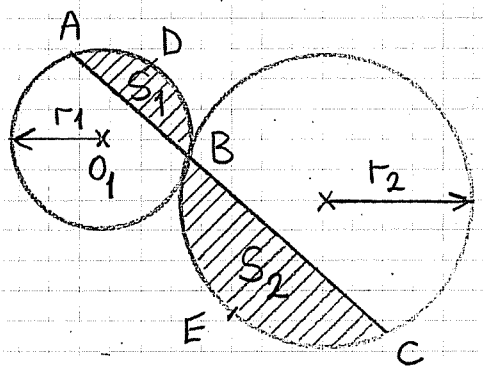
3) $S_t = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{DC})}{2} \cdot (r_2 - r_1)$



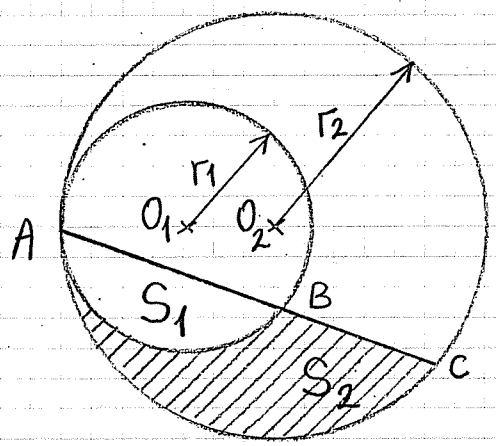
d) $\widehat{ADB} \sim \widehat{BEC}$ dir.

$\frac{m(\widehat{ADB})}{m(\widehat{BEC})} = \frac{r_1}{r_2}$ dir.

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.



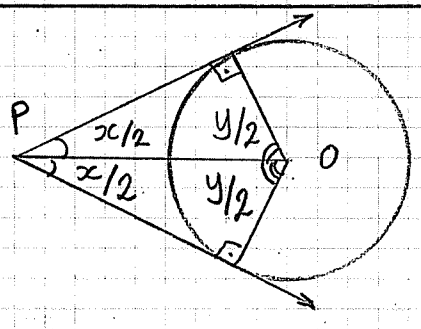
e) $\frac{S_1}{S_1 + S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.



ÇEMBERİN TEĞETLERİ

Çembere dışındaki bir noktadan iki teğet çizilebilir.

$m(A\hat{P}O) = m(B\hat{P}O)$
$m(A\hat{O}P) = m(B\hat{O}P)$
$m(P\hat{A}O) = m(P\hat{B}O) = 90^\circ$
$x + y = 180^\circ$
} dir.

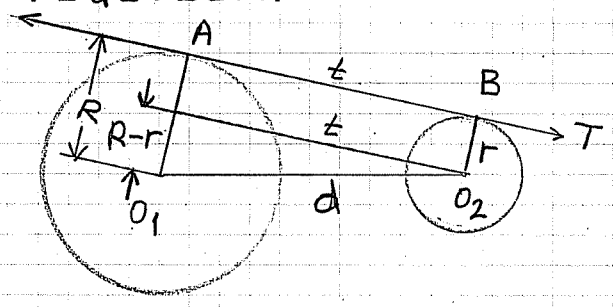


SONUÇLAR
1- Teğet, değme noktasındaki yarıçapa diktir.
2- Bir çemberin teğetine değme noktasından çizilen dikme çemberin merkezinden geçer.
3- Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğetlerin uzunlukları eşittir.
$|PA| = |PB|$ dir.

İKİ ÇEMBERİN ORTAK DIŞ TEĞETLERİ

1) Çemberler Birbirine Teğet Değilseler:

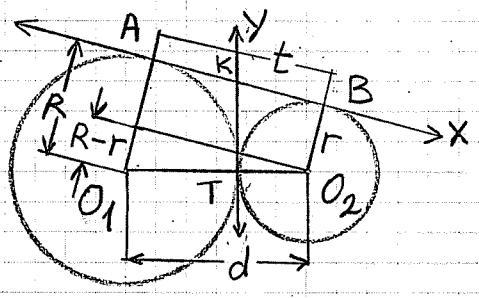
$$t = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$$



2) Çemberler Birbirine Dıştan Teğet iseler:

$$t = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{R \cdot r} \text{ dir.}$$

Ayrıca: $|KA| = |KT| = |KB|$
$|KT| \perp |O_1O_2|$
} dir.

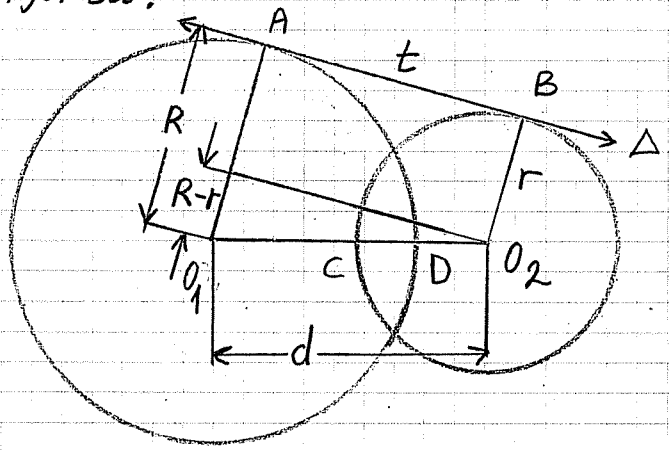


3) Çemberler Birbirlerini Kesiyorsa:

$$t = \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \text{ dir.}$$

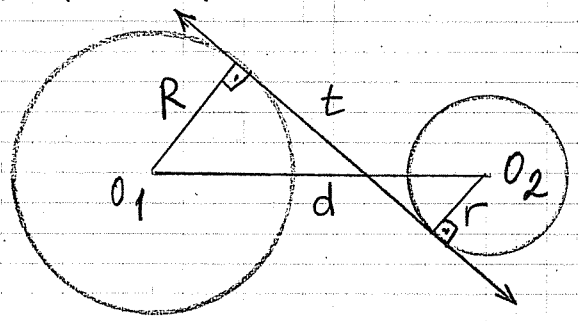
Ayrıca;

$|CD| = R + r - d$ dir.



İKİ ÇEMBERİN ORTAK İÇ TEĞETLERİ

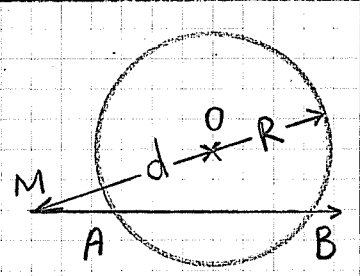
$$t = \sqrt{d^2 - (R+r)^2} \text{ dir.}$$



BİR NOKTANIN BİR ÇEMBERE GÖRE KUVVETİ

TANIM

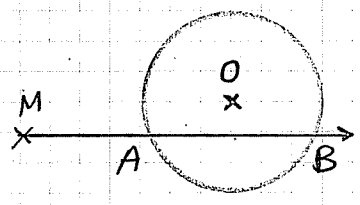
Bir çember düzlemi içinde alınan bir M noktasından bu çembere bir MAB keseni çizilirse; $|MA|\cdot|MB|$ çarpımına, bu noktanın bu çembere göre kuvveti denir. Kuvvet p ile gösterilir. M noktasının çemberin merkezine olan uzaklığı d olsun.



$$p = |MA|\cdot|MB| = d^2 - R^2 \quad \text{dir.}$$

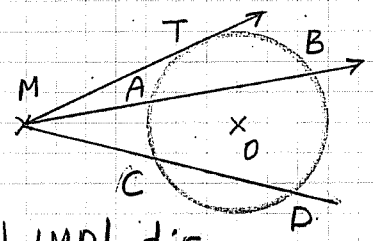
1) $d > R$ ise; M noktası, çemberin dışındadır. Kuvveti pozitiftir.

$$\left.\begin{array}{l} p = |MA|\cdot|MB| \\ p > 0 \end{array}\right\} \text{dir.}$$



[MT] Teğet olduğuna göre;

$$\left.\begin{array}{l} p = |MT|^2 \\ p > 0 \end{array}\right\} \text{dir.}$$



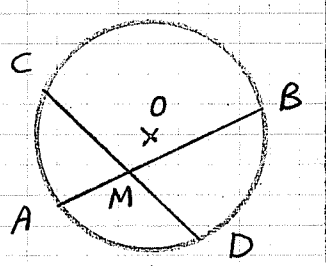
Ayrıca: $p = |MT|^2 = |MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$ dir.

2) $d = R$ ise; M noktası, çemberin üzerindedir. Kuvveti sıfırdır.

$p = 0$ dır.

3) $d < R$ ise; M noktası, çemberin içindedir. Kuvveti negatiftir.

$$\left.\begin{array}{l} p = -|MA|\cdot|MB| = -|MC|\cdot|MD| \\ p < 0 \end{array}\right\} \text{dir.}$$



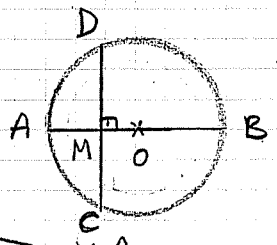
Not: Kuvvetin (p) en küçük değeri:

$p = -R^2$ dir. Bu durum, M noktasının merkezde olmasıdır. Yani, merkezin çembere göre kuvvetidir.

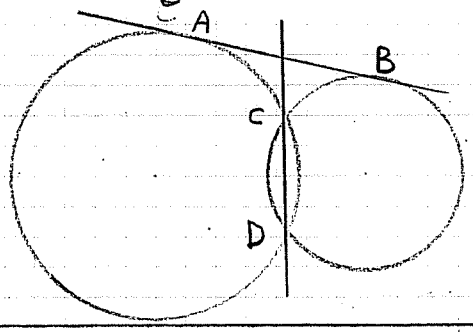
SONUÇLAR

1) $|DC| \perp |AB|$ ise;

$|MC|^2 = |MA|\cdot|MB|$ dir.



2) $|KA|^2 = |KC|\cdot|KD| = |KB|^2$ dir.



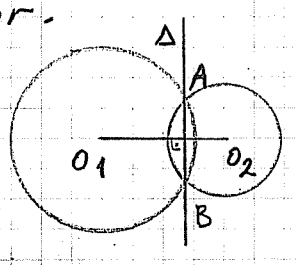
KUVVET EKSENİ

İki çembere göre aynı kuvvette olan noktaların geometrik yeri, bu çemberlerin merkezler doğrusuna dik bir doğrudur. Bu doğruya kuvvet ekseni denir.

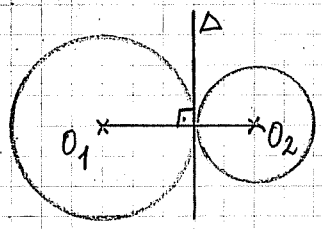
Kuvvet Ekseninin Özellikleri:

Kuvvet ekseni, çemberlerin ortak noktalarından geçer. Çemberlerin ortak noktalarında, çemberlerin kuvveti aynıdır.

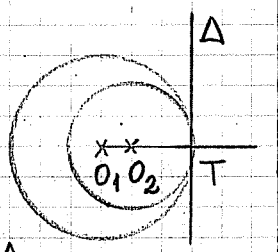
a) Kesisen iki çemberin ortak kirişleri olan [AB] doğru parçasını içeren Δ doğrusu, kuvvet eksenidir.



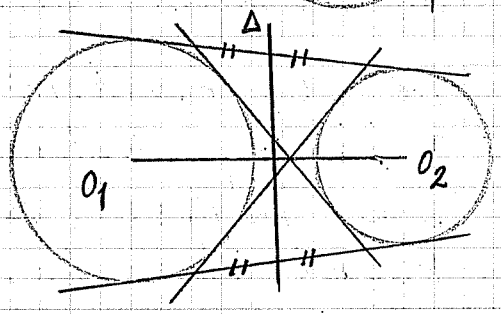
b) Dıştan teğet iki çemberin ortak teğeti olan Δ doğrusu, kuvvet eksenidir.



c) İçten teğet iki çemberin ortak teğeti olan Δ doğrusu, kuvvet eksenidir.

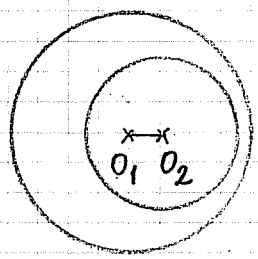


d) İki çemberin kuvvet ekseni, bunların ortak teğetlerinin orta noktalarından geçen Δ doğrusudur.



e) İç içe çemberlerin kuvvet ekseni yoktur.

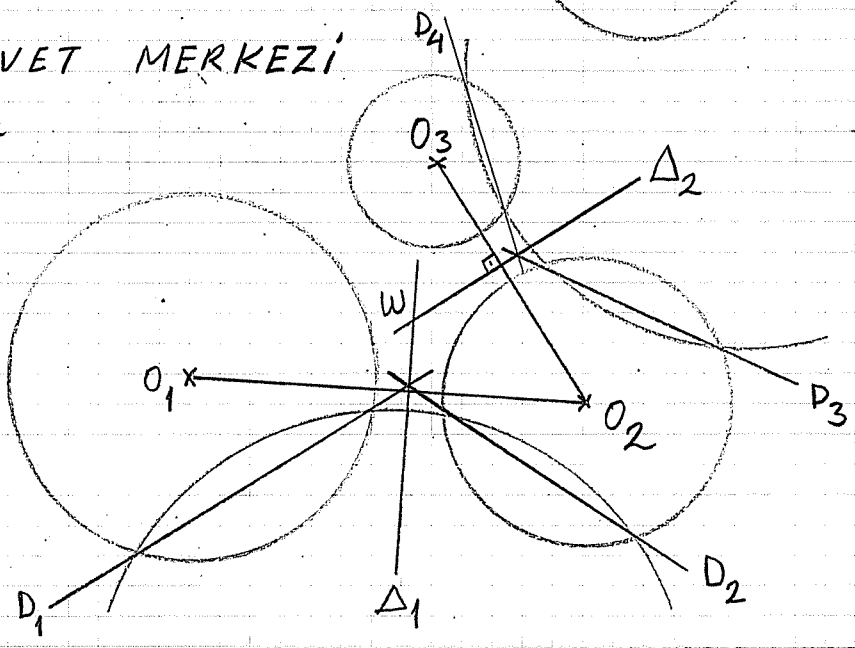
Yani, iç içe çemberlere göre eşit kuvvette olan nokta yoktur.



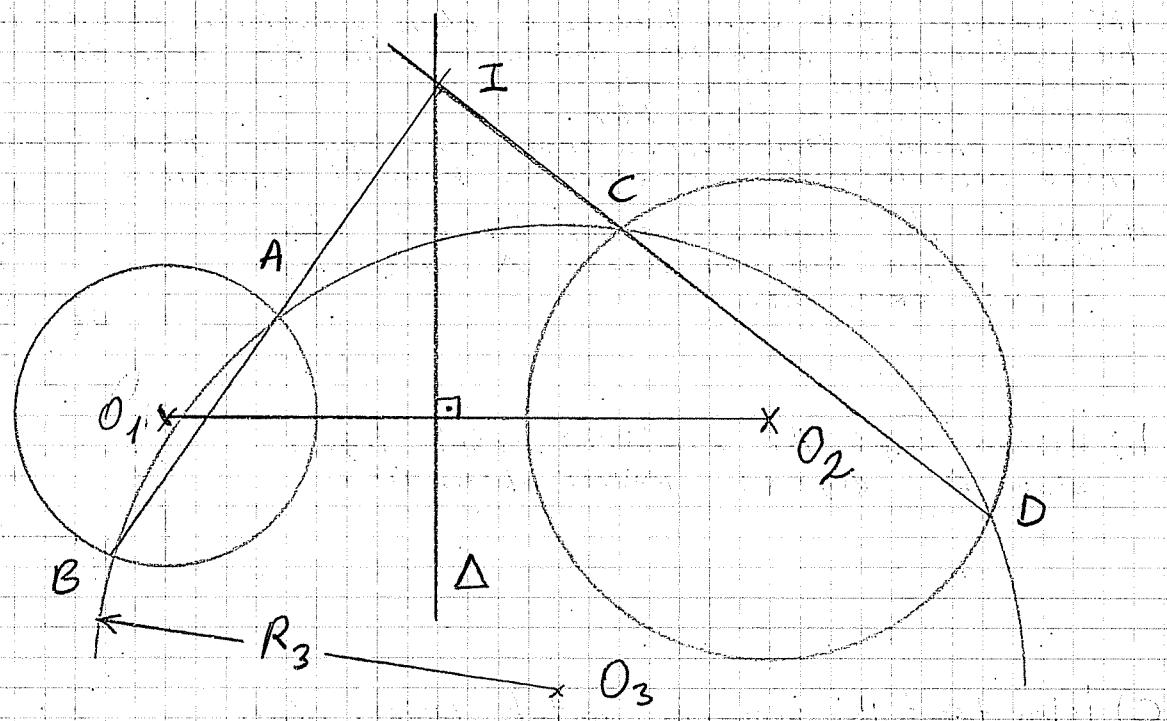
ÜÇ ÇEMBERİN KUVVET MERKEZİ

Merkezleri aynı doğru üzerinde olmayan üç çemberin ikişer ikişer kuvvet eksenleri, bu üç çembere aynı kuvvette olan noktada kesişirler. Bu noktaya, üç çemberin kuvvet merkezi denir.

Şekilde, ω kuvvet merkezidir.



İKİ ÇEMBERİN KUVVET EKSENİNİN ÇİZİLMESİ

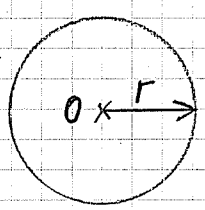


Verilen O_1 ve O_2 çemberlerini kesen herhangi bir O_3 çemberi çizilir. O_1 çemberini kestiği [AB ile O_2 çemberini kestiği [CD birleştirilerek I noktası bulunur. I noktasından $|O_1O_2|$ ye dik inilirse; Δ doğrusu, iki çemberin kuvvet eksenidir.

ÇEMBERDE YAY UZUNLUKLARI

1) Çemberin çevresi

$$\left.\begin{array}{l} Ç = 2\pi r \\ Ç = \pi D \quad (D: \text{çap}) \end{array}\right\} \text{dir.}$$

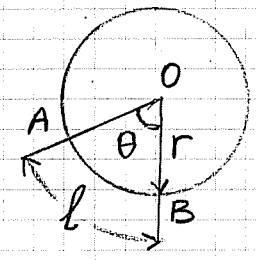


2) $m(A\hat{O}B) = \theta$ olsun.

a) θ, derece cinsinden ise;

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ olmak üzere:

$$m(\widehat{AB}) = \ell = \frac{2\pi r \theta^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi d \theta^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \theta^\circ}{180^\circ}$$



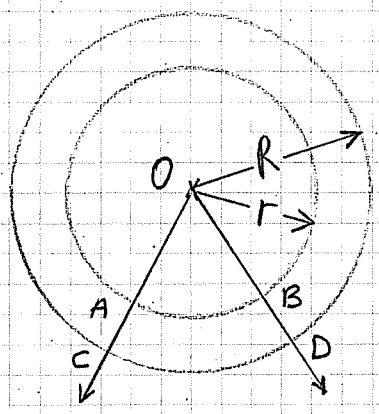
b) θ, radyan cinsinden ise;

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ olmak üzere:

$$m(\widehat{AB}) = \ell = r \cdot \theta = \frac{d\theta}{2} \text{ dir.}$$

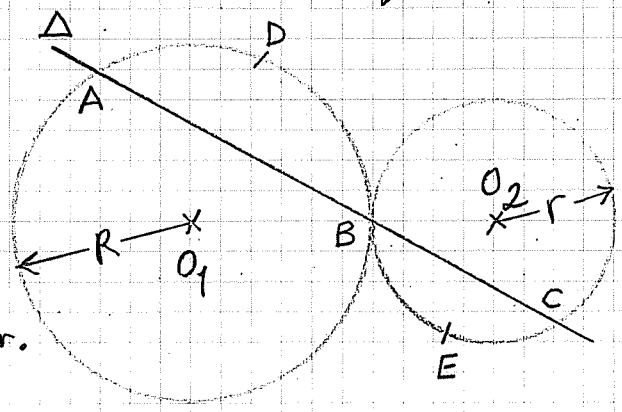
3)

$$\frac{m(\widehat{AB})}{m(\widehat{CD})} = \frac{r}{R} \quad \text{dir}$$



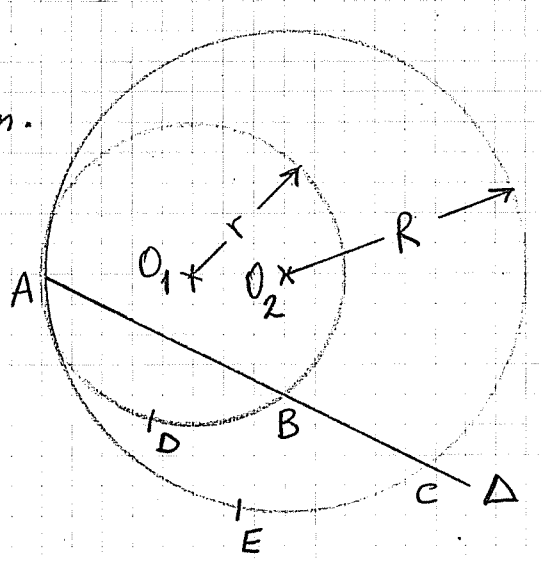
4) B noktası iki çemberin teğet noktası olsun.
Δ doğrusu, B noktasından geçen herhangi bir doğru ise;

$$\frac{m(\widehat{ADB})}{m(\widehat{BEC})} = \frac{m(\widehat{AB})}{m(\widehat{BC})} = \frac{R}{r} \quad \text{dir.}$$

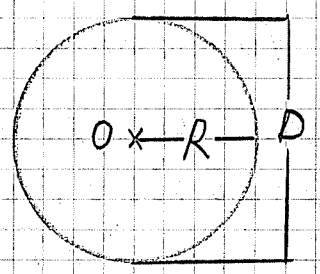


5) A noktası içten teğet iki çemberin teğet noktası olsun.
Δ doğrusu, A noktasından geçen herhangi bir doğru ise;

$$\frac{m(\widehat{ADB})}{m(\widehat{AEC})} = \frac{m(\widehat{AB})}{m(\widehat{AC})} = \frac{r}{R} \quad \text{dir.}$$



DAİRENİN ALANI



Yarıçap : $R = \frac{D}{2} = \frac{u}{2\pi} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

Çap : $D = 2R = \frac{u}{\pi} = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \frac{4A}{u}$

Çevre : $u = 2\pi R = \pi D = \frac{4A}{D} = 2\sqrt{\pi A}$

Alan : $A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{u^2}{4\pi} = \frac{uD}{4}$

π sayısı, irrasyonel bir sayı olup; hesaplamalarda $\pi = 3{,}1416$ yaklaşık değeri kullanılır. Yukarıdaki formüllerde π'nin değeri yerine konularak aşağıdaki pratik formüller elde edilebilir.

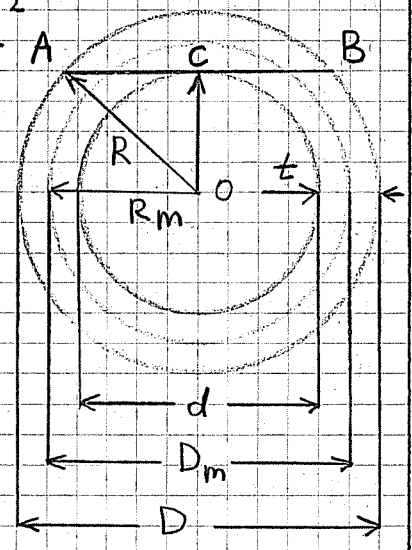
$$R = \frac{u}{6.2832} = 0.1592\,u = \sqrt{\frac{A}{3{,}1416}} = 0{,}5642\sqrt{A}$$

$$D = \frac{u}{3{,}1416} = 0.3183\,u = \sqrt{\frac{A}{0{,}7854}} = 1.1284\sqrt{A}$$

$$u = 6.2832\,R = 3.1416\,D = 3{,}5449\sqrt{A}$$

$$A = 3{,}1416\,R^2 = 0{,}7854\,D^2 = 0{,}07958\,u^2$$

DAİRE HALKASININ ALANI



$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi\,|AC|^2 = \pi\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = \frac{\pi|AB|^2}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} R - r = t \longrightarrow R = r + t \\ R_m = \frac{R+r}{2} \longrightarrow R + r = 2R_m \end{array}\right\} \text{dir.}$$

$$A = \pi(R-r)(R+r) = \pi\,t\,(R+r)$$

$$A = 2\pi\,t\,R_m$$

$$A = \pi\,t\,(r+t+r) = \pi\,t\,(2r+t)$$

$$A = \pi\,t\,(d+t)$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} D - d = 2t \\ D_m = \frac{D+d}{2} \longrightarrow D + d = 2D_m \\ D_m = 2R_m \end{array}\right\} \text{dir.}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D-d)(D+d)$$

$$A = \frac{\pi}{4}(2t)(D+d) = \frac{\pi}{2}\,t\,(D+d) = \pi \cdot t \cdot D_m$$

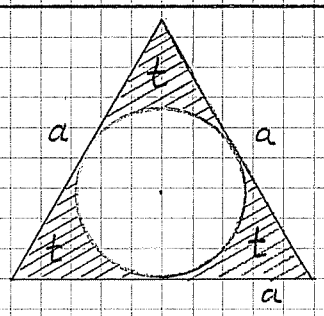
π Sayısı ile ilgili bazı sabitlerin (büyüklüklerin) 10 Basamaklı değerleri aşağıda verilmiştir.

$\pi = 3.14159\ 26536$
$2\pi = 6.28318\ 53072$
$3\pi = 9.42477\ 79608$
$4\pi = 12.56637\ 06144$
$\pi/2 = 1.57079\ 63268$
$\pi/3 = 1.04719\ 75512$
$\pi/4 = 0.78539\ 81634$
$3\pi/2 = 4.71238\ 89804$
$4\pi/3 = 4.18879\ 02048$
$1/\pi = 0.31830\ 98862$
$2/\pi = 0.63661\ 97724$
$3/\pi = 0.95492\ 96585$
$4/\pi = 1.27323\ 95447$
$1/2\pi = 0.15915\ 49431$
$1/3\pi = 0.10610\ 32954$
$1/4\pi = 0.07957\ 74715$
$\pi^2 = 9.86960\ 44011$
$2\pi^2 = 19.73920\ 88022$
$3\pi^2 = 29.60881\ 32033$
$4\pi^2 = 39.47841\ 76044$
$\pi^2/2 = 4.93480\ 22005$
$\pi^2/3 = 3.28986\ 81337$
$\pi^2/4 = 2.46740\ 11003$
$1/\pi^2 = 0.10132\ 11836$
$2/\pi^2 = 0.20264\ 23673$
$3/\pi^2 = 0.30396\ 35509$
$4/\pi^2 = 0.40528\ 47346$
$1/2\pi^2 = 0.05066\ 05918$
$1/3\pi^2 = 0.03377\ 37279$
$1/4\pi^2 = 0.02533\ 02959$

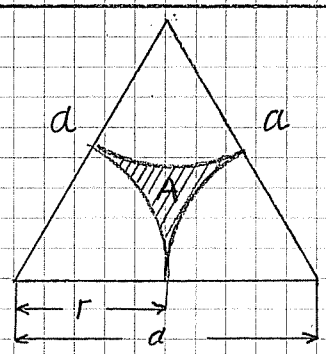
$\pi^3 = 31.00627\ 66803$
$2\pi^3 = 62.01255\ 33606$
$3\pi^3 = 93.01883\ 00409$
$4\pi^3 = 124.02510\ 67212$
$\pi^3/2 = 15.50313\ 83401$
$\pi^3/3 = 10.33542\ 55601$
$\pi^3/4 = 7.75156\ 91701$
$1/\pi^3 = 0.03225\ 15344$
$2/\pi^3 = 0.06450\ 30689$
$3/\pi^3 = 0.09675\ 46033$
$4/\pi^3 = 0.12900\ 61377$
$1/2\pi^3 = 0.01612\ 57672$
$1/3\pi^3 = 0.01075\ 05115$
$1/4\pi^3 = 0.00806\ 28836$
$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509$
$2\sqrt{\pi} = 3.54490\ 77018$
$3\sqrt{\pi} = 5.31736\ 15527$
$4\sqrt{\pi} = 7.08981\ 54036$
$\sqrt{\pi}/2 = 0.88622\ 69255$
$\sqrt{\pi}/3 = 0.59081\ 79503$
$\sqrt{\pi}/4 = 0.44311\ 34627$
$\sqrt{\pi/2} = 1.25331\ 41373$
$\sqrt{2/\pi} = 0.79788\ 45608$
$1/\sqrt{\pi} = 0.56418\ 95835$
$2/\sqrt{\pi} = 1.12837\ 91671$
$3/\sqrt{\pi} = 1.69256\ 87506$
$4/\sqrt{\pi} = 2.25675\ 83342$
$1/2\sqrt{\pi} = 0.28209\ 47918$
$1/3\sqrt{\pi} = 0.18806\ 31945$
$1/4\sqrt{\pi} = 0.14104\ 73959$

$\sqrt{2\pi} = 2.50662\ 82746$
$1/\sqrt{2\pi} = 0.39894\ 22804$
$\sqrt{3\pi} = 3.06998\ 01238$
$1/\sqrt{3\pi} = 0.10610\ 32954$
$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459\ 18876$
$1/\sqrt[3]{\pi} = 0.68278\ 40633$
$\sqrt[3]{3/4\pi} = 0.62035\ 04909$
$\sqrt[3]{4\pi/3} = 1.61199\ 19540$
$\log_{10}\pi = 0.49714\ 98727$
$\ln\pi = 1.14472\ 98858$
$\ln 2\pi = 0.91893\ 85332$
$\pi^e = 22.45915\ 77184$
$\pi^{-e} = 0.04452\ 52673$
$e^\pi = 23.14069\ 26328$
$e^{-\pi} = 0.04321\ 39183$
$\pi^\pi = 36.46215\ 96072$
$\pi^{-\pi} = 0.02742\ 56931$
$\pi\sqrt{\pi} = 1.43961\ 94958$
$e^{\frac{\pi}{2}} = 4.81047\ 73810$
$e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.20787\ 95763$

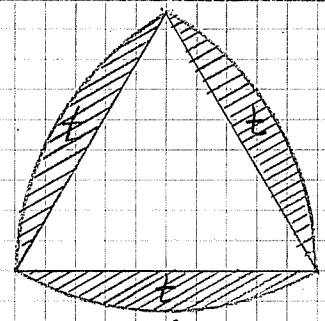
BAZI ŞEKİLLERİN ALANLARI



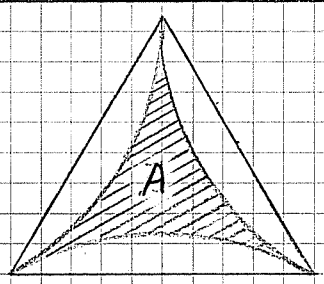
$$A = 3t = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{12}$$



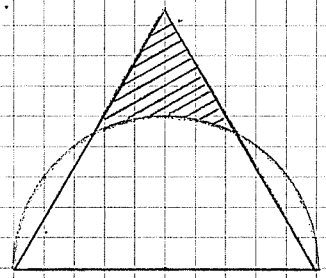
$$A = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi) = \frac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$$



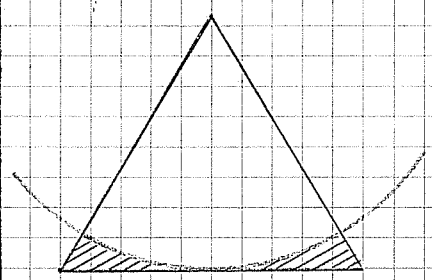
$$A = 3t = \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$



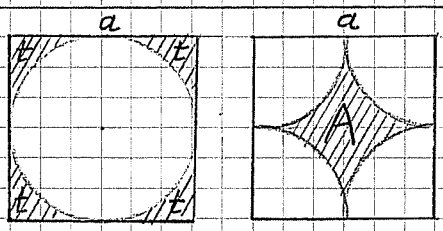
$$A = \frac{a^2}{6}(3\sqrt{3} - 4\pi)$$



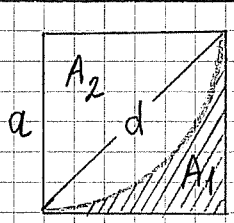
$$A = \frac{a^2}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$$



$$A = \frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - \pi)$$



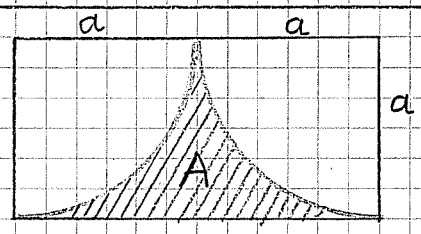
$$A = 4t = a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$$



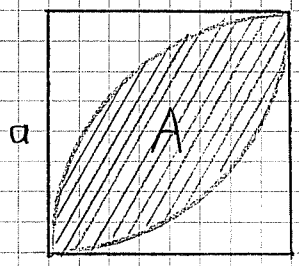
$$A_1 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)a^2 \approx 0{,}215a^2$$

$$A_1 = \frac{d^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}108d^2$$

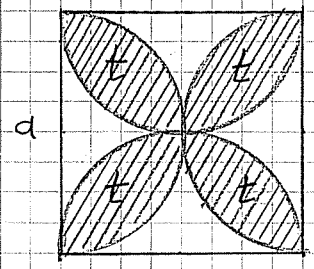
$$A_2 = a^2 - A_1$$



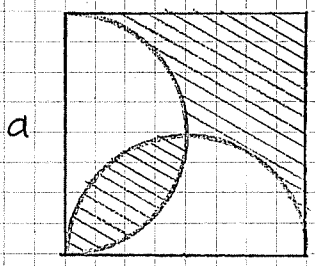
$$A = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2} \approx 0{,}43a^2$$



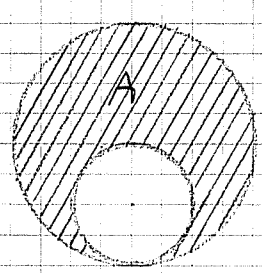
$$A = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$$



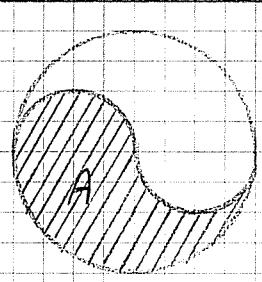
$$A = 4t = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$$



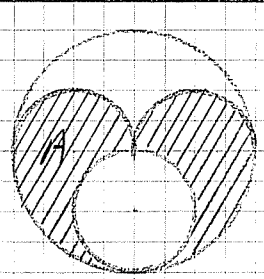
$$A = a^2/2$$



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

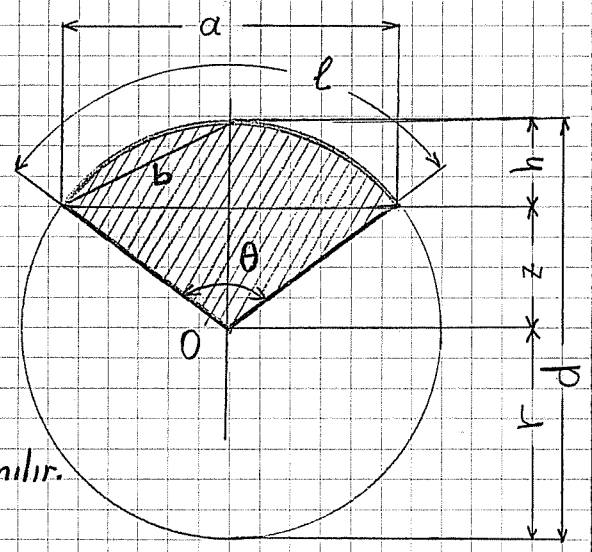


$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$



$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

DAİRE DİLİMİ (DAİRE KESMESİ, DAİRESEL SEKTÖR)



I_ Yay uzunluğu $\ell = m(\widehat{AB})$ olsun.

a) θ açısı, derece cinsinden ise;

$$\ell = \frac{\pi r \theta^\circ}{180^\circ} \quad \text{dir.} \; [0^\circ < \theta^\circ < 360^\circ]$$

b) θ açısı, radyan cinsinden ise;

$$\ell = r\theta = 2r\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{ve}$$

$$\ell = \frac{d\theta}{2} = d\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{dir.} \; [0 \leq \theta \leq 2\pi]$$

c) Pratikte amprik formüller de kullanılır.

1) Huygen'in Formülü

$$\ell = \frac{8b - a}{3}$$ dir. Küçük θ açıları için, hata çok küçüktür.

2) Başka Bir Yaklaşık Formül

$$\ell \approx \sqrt{a^2 + \frac{16}{3}h^2}$$

II_ Bazı Bağıntılar

$$a = 2r\sin\frac{\theta}{2} = d\sin\frac{\theta}{2}$$

$$a = 4r\sin\frac{\theta}{4} = \cos\frac{\theta}{4} = 2d\sin\frac{\theta}{4}\cdot\cos\frac{\theta}{4}$$

$$a = 2r\sin\left(\frac{90^\circ \ell}{\pi r}\right) = d.\sin\left(\frac{90^\circ \ell}{\pi r}\right)$$

$$a = 2(r-h)\tan\frac{\theta}{2} = (d-2h)\tan\frac{\theta}{2}$$

$$a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2\sqrt{dh - h^2}$$

$$r = h + z = \frac{4h^2 + a^2}{8h} = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}$$

$$z = r\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2} = \sqrt{dh} = \sqrt{2rh}$$

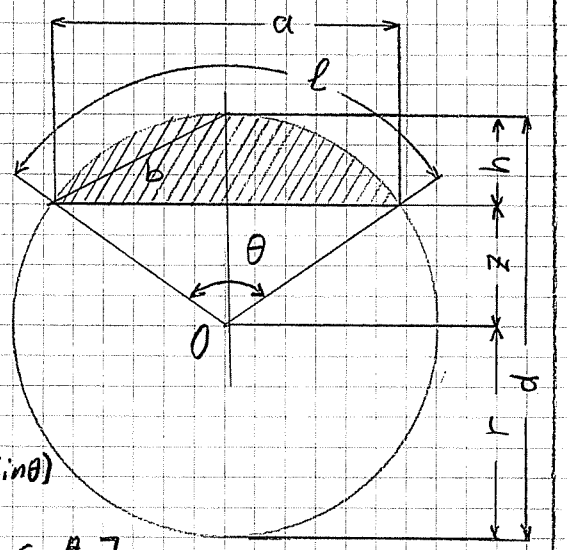
$$h = 2r\sin^2\frac{\theta}{4} = \frac{a}{2}\tan\frac{\theta}{4} = r\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

III_ Alan Formülleri

$$A = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2 = \frac{r\ell}{2} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}\cdot\frac{\pi d^2}{4} = \frac{d\ell}{2}$$ [θ°, cinsinden]

$$A = \frac{\theta r^2}{2} = \frac{\theta d^2}{8} = \frac{\theta \ell}{2}$$ [θ, radyan cinsinden]

DAİRE PARÇASI (DAİRESEL SEGMENT)



θ, Derece Cinsinden ise:

$$A=\frac{\pi r^2\theta^\circ}{360^\circ}-\frac{r^2\sin\theta}{2}=\frac{d^2}{8}\left(\frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}-\sin\theta^\circ\right)$$

$$A=\frac{\pi r^2\theta^\circ}{360^\circ}-\frac{a(r-h)}{2}=\frac{\pi d^2}{4\cdot 360^\circ}-\frac{a(r-h)}{2}$$

θ, Radyan Cinsinden ise:

$$A=\frac{r^2\theta}{2}-\frac{r^2\sin\theta}{2}=\frac{r^2}{2}(\theta-\sin\theta)=\frac{d^2}{8}(\theta-\sin\theta)$$

$$A=r^2\left[\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]=\frac{d^2}{4}\left[\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

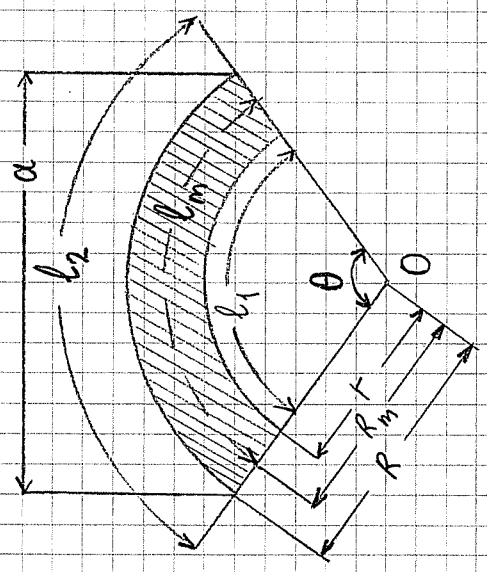
$$A=\frac{r\ell}{2}-\frac{a(r-h)}{2}=\frac{r(\ell-a)}{2}+\frac{ah}{2}$$

$$A\approx\frac{1}{2}[\ell r\mp a(r-h)]\quad\{h\leqslant r \text{ ise } (-);\ h\geqslant r \text{ ise } (+)\}$$

$$A\approx\frac{2ah}{3}\quad \text{veya}\quad A\approx\frac{h}{15}(8b+6a)$$

Yaklaşık formüller; h'nin r'ye göre küçük olması halinde hata çok küçüktür.

DAİRE DİLİMİ HALKASI



θ, Derece Cinsinden ise:

$$A=\frac{\pi\theta^\circ}{360^\circ}(R^2-r^2)\approx 0{,}00873\,\theta^\circ(R^2-r^2)$$

$$A=\frac{\pi\theta^\circ}{4\times 360^\circ}(D^2-d^2)\approx 0{,}00218\,\theta^\circ(D^2-d^2)$$

$$A=\frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}\cdot R_m\cdot t\qquad\left\{R_m=\frac{R+r}{2}\right\}$$

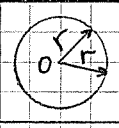
θ, Radyan Cinsinden ise:

$$A=\frac{\theta}{2}(R^2-r^2)=\frac{\theta}{8}(D^2-r^2)$$

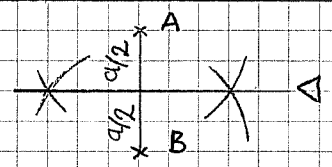
$$A=\theta\cdot R_m\cdot t=\ell_m t\qquad\left\{\ell_m=\frac{\ell_1+\ell_2}{2}\right\}$$

GEOMETRİK YERLER

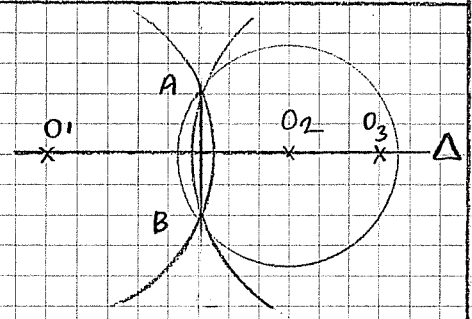
TEOREM: Sabit bir noktaya sabit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, bir çemberdir.



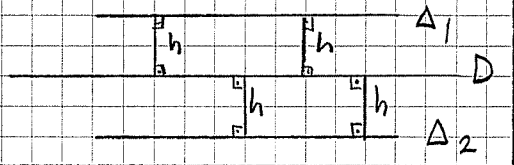
TEOREM: Verilen iki noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir. (Δ doğrusu)



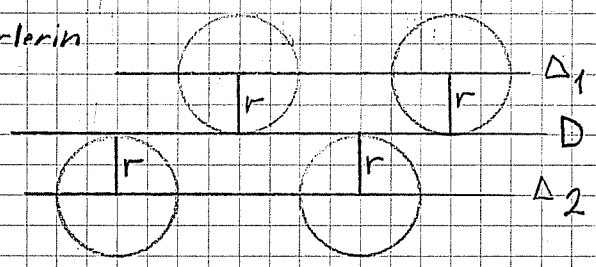
TEOREM: Verilen iki noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, |AB| doğru parçasının orta dikmesidir. (Δ doğrusu)



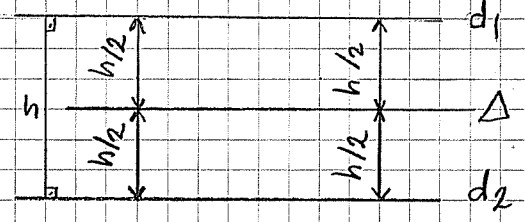
TEOREM: Verilen bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri, bu doğruya verilen uzaklıkta çizilen bir çift paralel doğrudur. (Δ_1 ve Δ_2 doğruları)



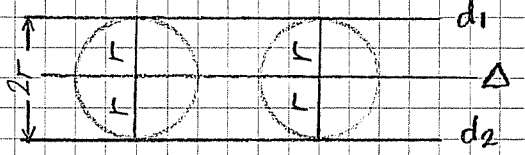
TEOREM: Verilen bir doğruya teğet olan ve yarıçapları eşit olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu doğruya yarıçap uzaklığında bir çift doğrudur. (Δ_1 ve Δ_2 doğruları)



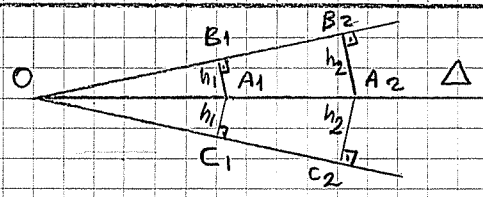
TEOREM: Verilen paralel iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri; paralel doğrular arasındaki uzaklığın yarısına eşit uzaklıkta olan ve paralel iki doğruya paralel olan bir doğrudur. (Δ doğrusu)



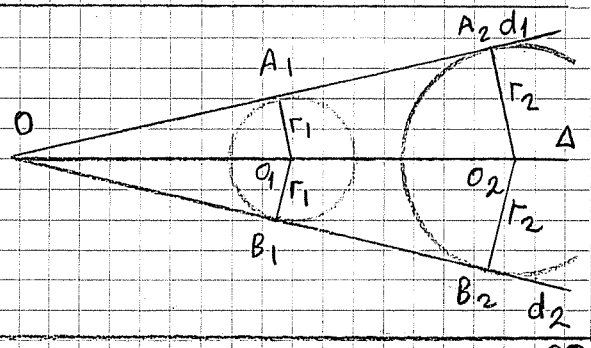
TEOREM: Verilen paralel iki doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri; bu doğrulara eşit uzaklıkta olan bir doğrudur. (Δ doğrusu)



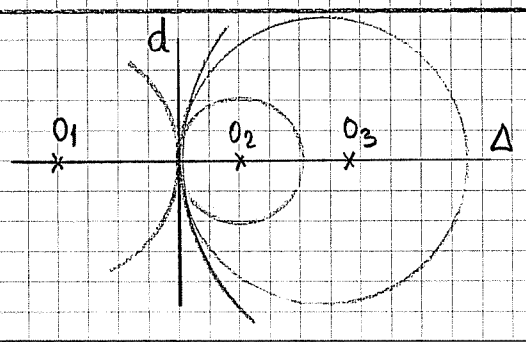
TEOREM: Bir açının kenarlarından eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri, bu açının açıortayıdır. (Δ doğrusu)



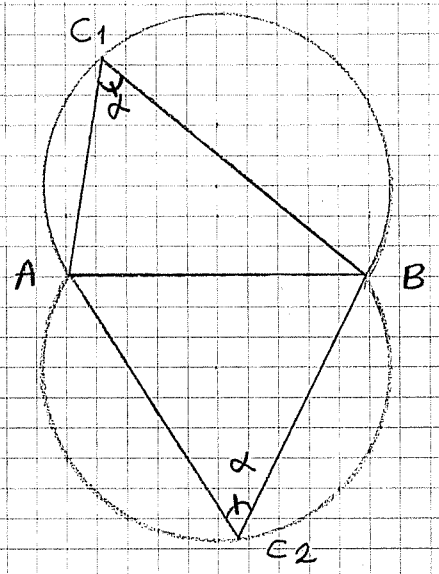
TEOREM: Bir açının kenarlarına teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu açının açıortayıdır. (Δ doğrusu)



TEOREM : Verilen bir doğruya, sabit bir noktasında teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu doğruya sabit noktada dik olan bir doğrudur. (Δ doğrusu)

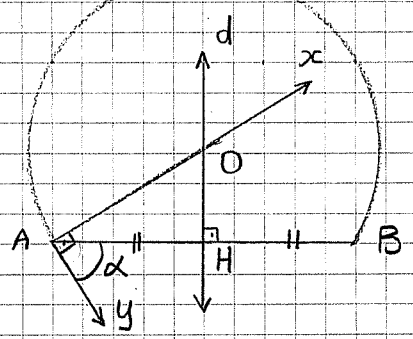


TEOREM : Verilen bir doğru parçasını verilen bir açı altında gören noktaların geometrik yeri, bu doğru parçasına göre simetrik olan bir çift çember yayıdır.



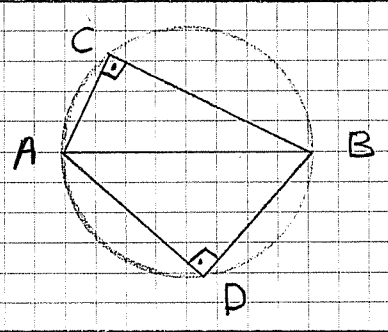
UYGULAMA: |AB| doğru parçasını α açısı altında gören çember yayının çizilmesi:

Şekilde; |AB| doğru parçasının |Hd| orta dikmesi çizilir. α açısı, $(B\hat{A}y) = \alpha$ olacak şekilde A noktasına yerleştirilir. $|Ay| \perp |Ax|$ çizilir. |Ax| doğru parçasının |Hd| yi kestiği O noktası aranan çemberin merkezidir.

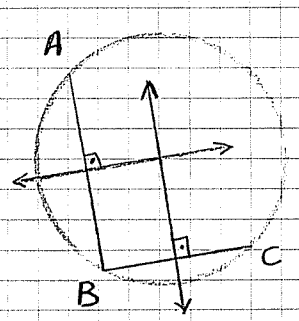


TEOREM : Verilen bir doğru parçasını dik açı (90°) altında gören noktaların geometrik yeri, bu doğru parçası çapı olan bir çemberdir.

Şekilde; Çemberin A ve B noktaları hariç, diğer bütün noktaları |AB| yi 90° açı altında görür



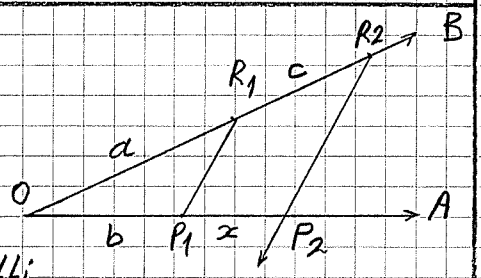
TEOREM : Düzlemde, aynı doğru üzerinde olmayan üç farklı nokta; bir ve yalnız bir çember belirtir.



ORANTILI DOĞRU PARÇALARI
[GEOMETRİK UZUNLUKLARDA ORANTILAR]

DÖRDÜNCÜ ORANTILI DOĞRU PARÇASI

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ orantısında;

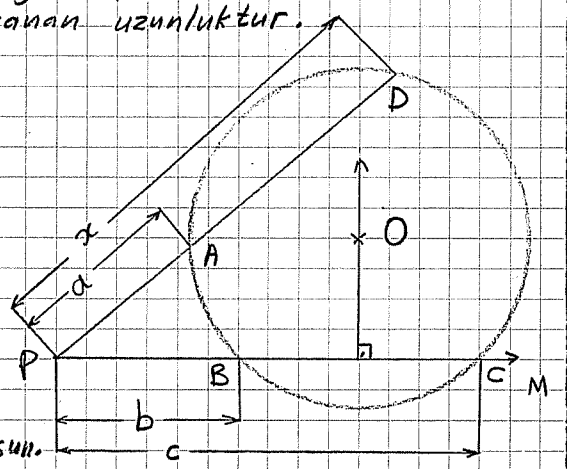


x doğru parçası; a, b ve c doğru parçaları arasında DÖRDÜNCÜ ORANTILI dır.

x doğru parçasının bulunuşu:
Herhangi bir $A\hat{O}B$ açısı çizilir. Uzunlukları belli olan a, b ve c doğru parçaları şekildeki gibi işaretlenir. $|P_2R_2| \parallel |P_1R_1|$ çizilir. $|P_1P_2| = x$ aranan uzunluktur.

$x = \frac{bc}{a}$ dır.

BAŞKA BİR METOTLA BULUNUŞU



Şekilde; P noktasının O merkezli çembere göre kuvveti:
$|PA| \cdot |PD| = |PB| \cdot |PC|$ dir.

$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$ şeklinde yazılabilir.

$|PA| = a$, $|PB| = b$, $|PC| = c$ ve $|PD| = x$ olsun.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ olur.

[PM yarıdoğrusu üzerinde uzunluğu bilinen b ve c doğru parçaları işaretlenerek B ve C noktaları bulunur. [BC] nin orta dikmesi üzerinde herhangibir O noktası alınıp, O merkezli A ve B noktalarından geçen herhangibir çember çizilir. P merkezli ve a yarıçaplı çemberin O çemberini kestiği A noktası bulunur. |PA| uzatılarak D noktası bulunur. $|PD| = x$ aranan uzunluktur.

$x = \frac{b \cdot c}{a}$ dır.

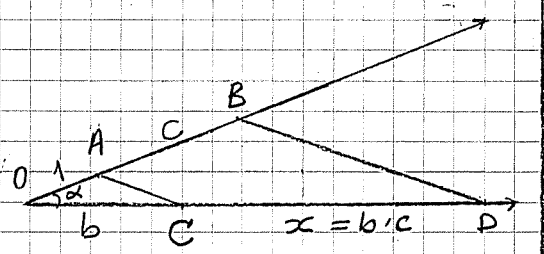
UYGULAMALAR

1) VERİLEN İKİ UZUNLUĞUN ÇARPIMI OLAN UZUNLUĞUN BULUNMASI

$|OA| = 1$ Birim alınır.

$|CD| = x = b \cdot c$ olur.

Not: $\alpha = 90°$ alınarak da çizim yapılabilir.

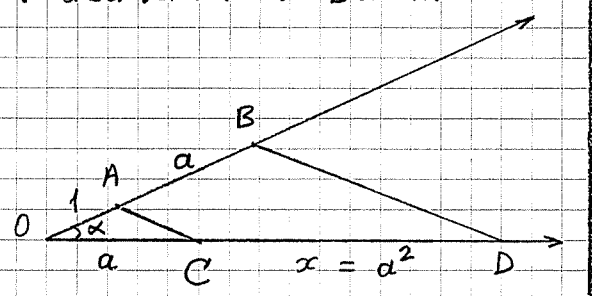


2) VERİLEN UZUNLUĞUN KARESİ OLAN UZUNLUĞUN BULUNMASI

$|OA| = 1$ Birim alınır.

$|CD| = x = a^2$ olur.

Not: $\alpha = 90°$ alınarak da çizim yapılabilir.

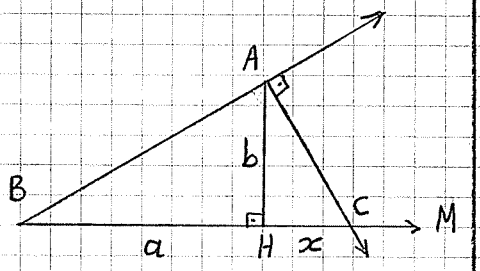


ÜÇÜNCÜ ORANTILI DOĞRU PARÇASI

$\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$ orantısında :

x doğru parçası, a ve b doğru parçaları arasında ÜÇÜNCÜ ORANTILIdır.

x doğru parçasının bulunuşu :

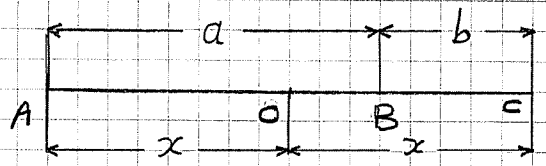


Şekilde [BM yarı doğrusu üzerinde uzunluğu bilinen a doğru parçası işaretlenerek H noktası bulunur. $|HA| \perp |BM|$ çizilerek üzerinde uzunluğu bilinen b doğru parçası işaretlenip A noktası bulunur. [BA ışınına A noktasından dik çizilerek C noktası bulunur. $|HC| = x$ aranan uzunluktur.

$x = \frac{b^2}{a}$ dır.

ARİTMETİK ORTA OLAN DOĞRU PARÇASI

$x = \frac{a+b}{2}$ orantısında :



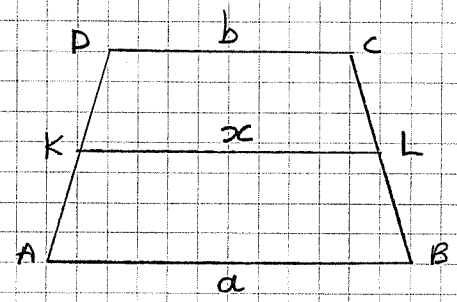
x doğru parçası, a ve b doğru parçalarının ARİTMETİK ORTASI dır.

x doğru parçasının bulunuşu :

Şekilde [AD ışını üzerinde uzunluğu bilinen a ve b doğru parçaları işaretlenerek B ve C noktaları bulunur. $|AC|$ nin orta noktası O bulunur. $|AO| = x = |OB|$ aranan uzunluktur.

$x = \frac{a+b}{2}$ dir.

BAŞKA BİR METOTLA BULUNUŞU



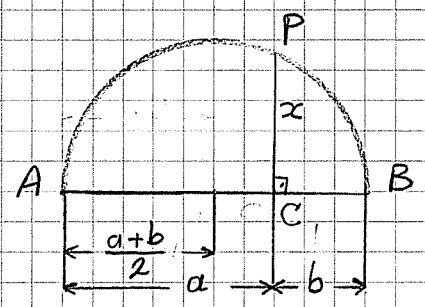
Şekilde uzunluğu bilinen a ve b doğru parçaları ABCD yamuğunun tabanları olarak işaretlenir. Yamuğun paralel olmayan $|AD|$ ve $|BC|$ kenarlarının orta noktaları K ve L bulunur.

$|KL| = x$ aranan uzunluktur.

$x = \frac{a+b}{2}$ dir.

ORTA ORANTILI DOĞRU PARÇASI
[GEOMETRİK ORTA OLAN DOĞRU PARÇASI]

$\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ orantısında :



x doğru parçası, a ve b doğru parçaları arasında ORTA ORANTILI dır denir. Veya; x doğru parçasına a ve b doğru parçalarının GEOMETRİK ORTASI denir.

x doğru parçasının bulunuşu:

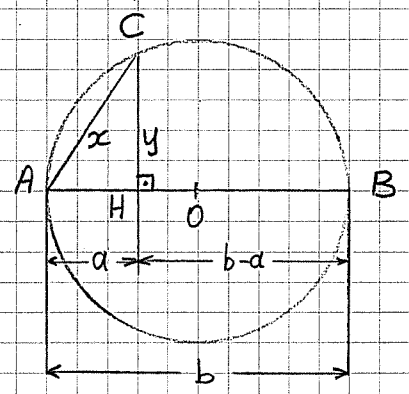
Şekilde [AL ışını üzerinde uzunlukları bilinen a ve b doğru parçaları işaretlenerek C ve B noktaları bulunur. |AB| çaplı APB yarım çemberi çizilir. C noktasından |AB| ye çıkılan dikim çemberi kestiği P noktası bulunur. $|PC| = x$ aranan uzunluktur.

$x^2 = a.b$ dir.

BAŞKA METOTLARLA BULUNMASI

1) $|AC| = x$ aranan uzunluktur.

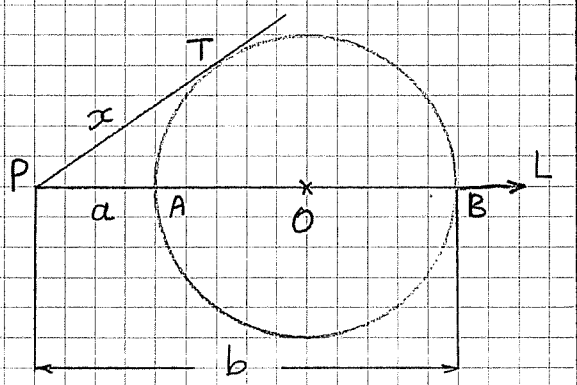
$x^2 = a.b$ dir.



[$y^2 = a(b-a)$
$x^2 = y^2 + a^2 = ab - a^2 + a^2$
$x^2 = ab$]

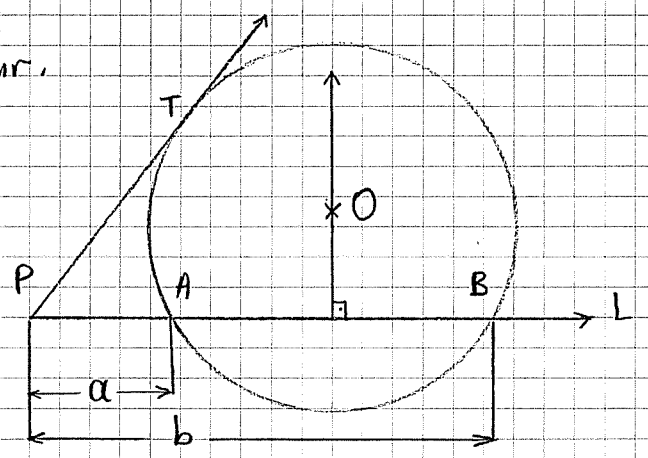
2) $|PT| = x$ aranan uzunluktur.

$x^2 = a.b$ dir.



3) $|PT| = x$ aranan uzunluktur.

$x^2 = a.b$ dir.

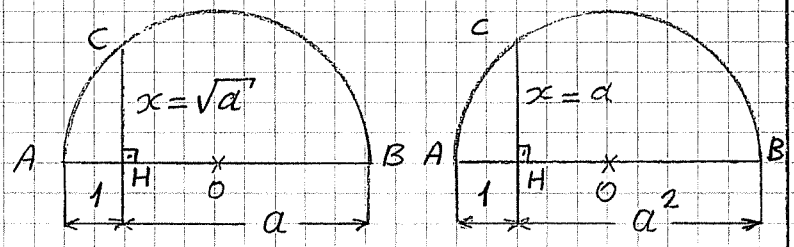


UYGULAMALAR

1) VERİLEN UZUNLUĞUN KAREKÖKÜ OLAN UZUNLUĞUN BULUNMASI

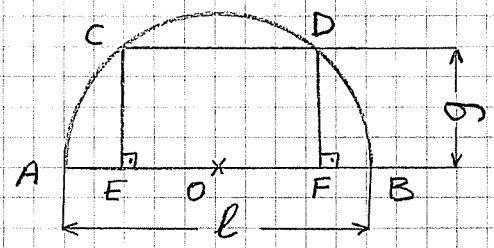
$|CH| = x = \sqrt{a}$ ve

$|CH| = x = a$ dır.



2) $a \cdot b = g^2$, $a+b = \ell$ eşitliklerinde g ve ℓ uzunlukları belli ise a ve b uzunluklarının bulunması.

ℓ çaplı yarım çembere g uzaklığında çizilen paralel çemberi C ve D noktalarında kessin. C ve D noktalarından çapa inilen dikme ayakları E ve F olsun.

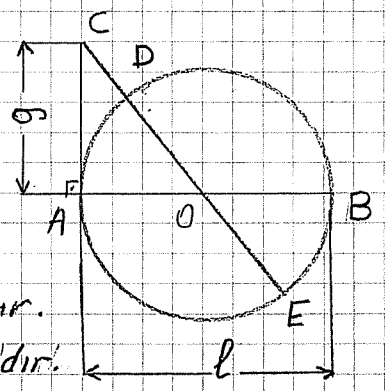


$|AE| = a$, $|EB| = b$ ve

$|FB| = a$, $|FA| = b$ aranan uzunluklardır.

3) $a \cdot b = g^2$, $b-a = \ell$ eşitliklerinde g ve ℓ uzunlukları belli ise a ve b uzunluklarının bulunması.

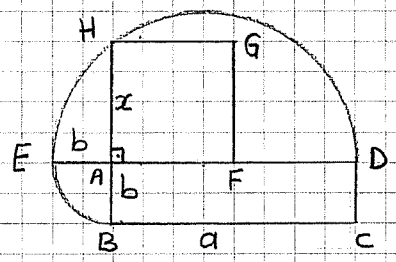
ℓ çaplı çembere A noktasından çizilen teğet üzerinde g uzunluğu işaretlenerek C noktası bulunur. C noktası çemberin merkezi ile birleştirilir. D ve E noktaları bulunur.



$|CD| = a$ ve $|CE| = b$ aranan uzunluklardır.

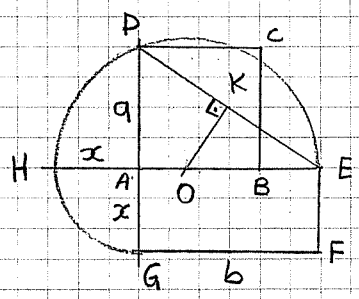
4) BİR DİKDÖRGENİN ALANINA EŞ ALANLI BİR KARENİN ÇİZİLMESİ

Şekilde, a+b çaplı yarım daireye A dan çıkılan dikme yarım daireyi H de kessin $|AH| = x = ab$ aranan karenin bir kenarıdır.



5) BİR KARENİN ALANINA EŞ ALANLI OLAN ve BİR KENARI BİLİNEN DİKDÖRTGENİN ÇİZİLMESİ

$|AD| = a$ ve $|AE| = b$ biliniyor. $|DE|$ nin orta dikmesi çizilerek O merkezi bulunur. $|OE|$ yarı çaplı yarım çember çizilerek H noktası bulunur. $|AH| = |AG|$ alınarak G noktası bulunur. $|AG| = x$ dikdörtgenin aranan kenarıdır.

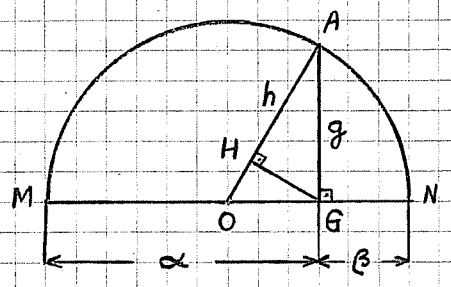


$a^2 = b\,x$ olur.

HARMONİK ORTA OLAN DOĞRU PARÇASI

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{h}$ orantısında ; h doğru parçası,

α ve β doğru parçalarının HARMONİK ORTASI dır.
Aritmetik orta, geometrik orta ve harmonik orta yandaki şekilde hepsi birarada bulunmaktadır. α ve β doğru parçaları verildiğinde, h doğru parçasının bulunuşu:



$|OA|=\frac{|MN|}{2}=a=\frac{\alpha+\beta}{2}$ [Aritmetik orta]

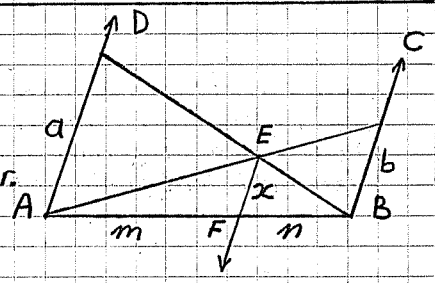
$|AG|^2=g^2=\alpha\cdot\beta$, $g=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ [Geometrik orta]

$|AH|\cdot|AO|=|AG|^2$ $|AH|=\frac{|AG|^2}{|AO|}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$|AH|=h=\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta}$ [Harmonik orta] (h, aranan uzunluktur.)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ ORANTISINDAKİ x DOĞRU PARÇASININ BULUNUŞU

Şekilde ; AB doğru parçasının uçlarından birbirine paralel [AD ve [BC ışınları çizilir.
$|AD|=a$, $|BC|=b$ alınarak D ve C noktaları bulunur.
$|AC|$ ve $|BD|$ doğru parçalarının kesişme noktası E den $|AD|$ veya $|BC|$ ye paralel çizilerek $|AB|$ yi kestiği F noktası bulunur. $|EF|=x$ aranan uzunluktur.

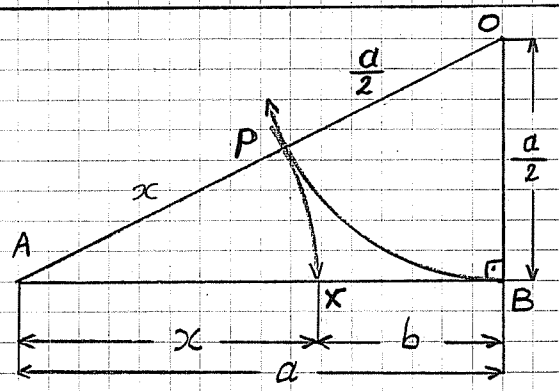


$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ dir.

NOT : Ayrıca, $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$ dir.

ALTIN ORAN

Herhangi bir uzunluğun estetik bakımdan uyumlu iki parçaya ayrılmasıdır.
Şekilde; $|AB|=a$ doğru parçasının B ucundan dik çıkılarak üzerinde $|BO|=a/2$ alınıp O noktası bulunur. O ile A noktası birleştirilir.
$|OP|=|OB|$ alınarak P bulunur.
$|AX|=|AP|$ alınarak X bulunur.



$|AX|=x$ aranan uzunluktur.
Bu uzunluğa ALTIN BÖLME (ALTIN KESİT) denir. Sayısal olarak :

$\frac{|AX|}{|AB|}=\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,618$ veya

$\frac{|AB|}{|AX|}=\frac{a}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$ Bulunur.

Eski çağlardan itibaren filozoflar, sanatçılar ve matematikçiler ayrıcalıklı bir oranın varlığına inandılar. Estetik bir değer taşıdığı kabul edilen bu sayılara Rönesans Sanatçıları ALTIN SAYI adını vermişlerdir.

$|AO|^2=a^2+(\frac{a}{2})^2=\frac{\sqrt{5}a}{2}$ ve $|AP|=x=\frac{\sqrt{5}a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a$ Bulunur.

$\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ olur.

$|XB|=b=|AB|-|AX|=a-x$ dir. $\frac{b}{x}=\frac{a}{x}-1$ yazılabilir.

$\frac{b}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{x}{a}\approx 0,618$ Bulunur.

A) $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,618$ veya C) $x^2=a\cdot b$ yazılabilir.

B) $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1,618$ yahut

x uzunluğu, a ve b doğru parçalarının Geometrik Ortasıdır. Altın Oran, geometrik ortanın $\frac{x}{a}$ veya $\frac{b}{x}$ oranlarından biridir.

NOT 1) $\frac{b}{x} = \frac{a}{x} - 1$ idi. $\frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 1$ yazılabilir.

NOT 2) $|AO|^2 = |AB|^2 + |BO|^2$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \longrightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}\right)$$

$x^2 + ax - a^2 = 0$ Bulunur. Bu denklemin kökleri:

$x_{1,2} = \left|\frac{-a \pm \sqrt{5}\,a}{2}\right|$ dir. x_1 ve x_2 sayıları Altın Sayı'lardır.

NOT 3) $\frac{1}{0{,}618} \approx 1{,}618$ ve $\frac{1}{1{,}618} \approx 0{,}618$ ve $1{,}618 \times 0{,}618 = 1$ dir.

$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ve $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ve $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ dir.

ALTIN DİKDÖRTGENLER

Doğada örneklerine ve klasik sanatta uygulamasına çok rastlanılan Altın oranın en bilinen örneği, Altın Dikdörtgenlerdir.

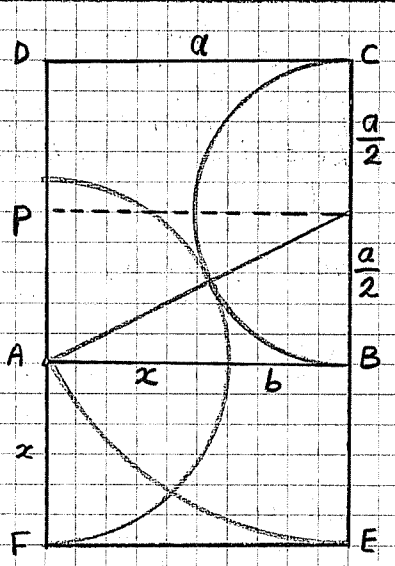
Altın Dikdörtgenin elde edilmesi (çizilmesi):

Kenar uzunlukları a olan (ABCD) karesi çizilir. Kareyi iki eşit parçaya ayıran $|PO|$ ekseni çizilir. O merkezli, $|OA|$ yarıçaplı çember yayı ile $|OB|$ kestirilerek E Noktası bulunur. $|BE| \perp |EF|$ çizilerek F Noktası bulunur.

(DCEF) ile (ABEF) dikdörtgenleri Altın Dikdörtgenlerdir.

Altın Dikdörtgenlerin ebatları:

$(a \times 0{,}618\,a)$ veya $(a \times 1{,}618\,a)$ dır.



Altın Dikdörtgenlerin Özellikleri:

Kenarları Altın Oranı veren bir dikdörtgenin ilgi çekici özellikleri vardır. Sürekli kesir halinde açılım niteliğini taşırlar.

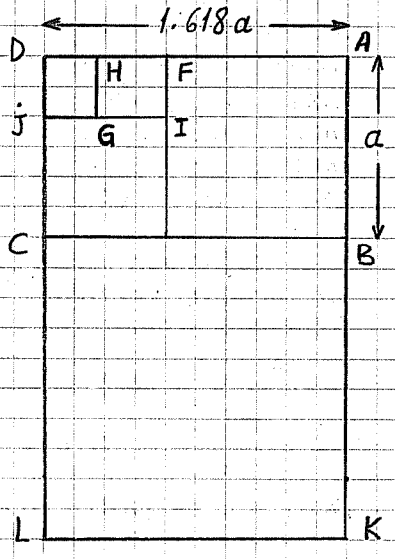
Gittikçe büyüyen veya küçülen benzer dikdörtgenleri (Altın Dikdörtgenler) meydana getirmeye elverişlidirler.

Altın sayı oranına göre alınan bir ABCD dikdörtgeninin AB küçük kenarı üzerine ve içine bir ABEF karesi çizilirse; birinciye benzer bir DCEF dikdörtgeni elde edilir.

Sonsuz olarak devam edebilen bu bölme işlemi tekrarlanarak daima Altın oranlı DFIJ, sonra DHGJ dikdörtgenleri çizilebilir.

ABCD dikdörtgeninin BC büyük kenarına bir BKLC karesi eklenirse, bir başka AKLD Altın dikdörtgeni elde edilir.

İşleme devam edilirse, sonsuz sayıda Altın Dikdörtgenler elde edilir.



UZAYDA DOĞRULAR ve DÜZLEMLER

TANIMLAR:

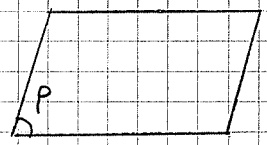
1) UZAY: Tüm noktaların kümesidir.

2) DÜZLEM: Uzayın alt kümesidir. Noktalar kümesidir.

a) Düzlem her yönde sınırsızdır. Şekilde olduğu gibi gösterilir.

b) Bir Düzlem uzayı iki parçaya ayırır.

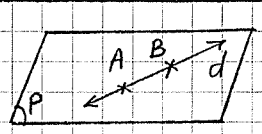
P düzlemi şekilde olduğu gibi gösterilir.



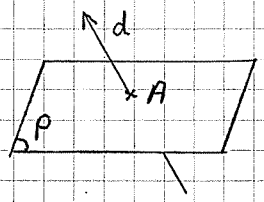
BİR DOĞRU İLE BİR DÜZLEMİN BİRBİRLERİNE GÖRE KONUMLARI

1) AKSİYOM: Bir doğrunun farklı iki noktası bir düzleme aitse, bu doğru da bu düzleme aittir.

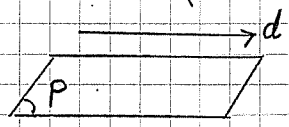
SONUÇ: Bir d doğrusu düzlemi iki yarım düzleme ayırır.



2) Bir d doğrusu ile bir P düzleminin tek bir ortak noktası varsa, d doğrusu P düzlemini yalnız bir noktada keser. Bu noktaya (A noktası) doğru ile düzlemin ARAKESİT noktası denir.

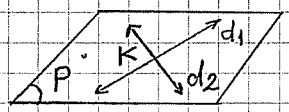


3) Bir d doğrusu ile bir P düzleminin ortak noktası yoksa, d doğrusu P düzlemine paraleldir.

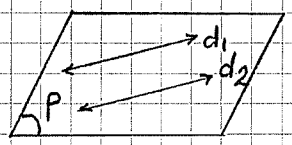


İKİ DOĞRUNUN BİRBİRLERİNE GÖRE KONUMLARI

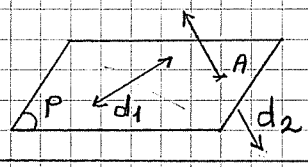
1) d_1 ve d_2 doğrularının tek bir ortak noktası varsa, bu doğrulara KESİŞEN DOĞRULAR denir.



2) d_1 ve d_2 doğrularının ortak noktaları yoksa, bunlara PARALEL DOĞRULAR denir.

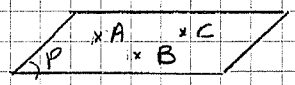


3) Aynı düzlemde olmayan iki doğruya AYKIRI DOĞRULAR denir.



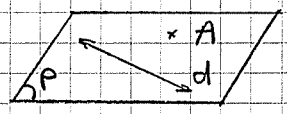
DÜZLEMİN BELİRTİLMESİ

AKSİYOM: Bir doğru üzerinde olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.

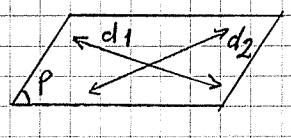


SONUÇLAR:

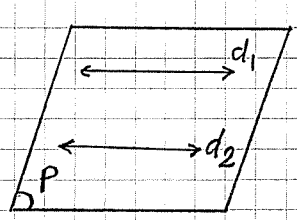
1) Bir doğru ile dışındaki bir nokta bir düzlem belirtir.



2) Kesişen iki doğru bir düzlem belirtir.



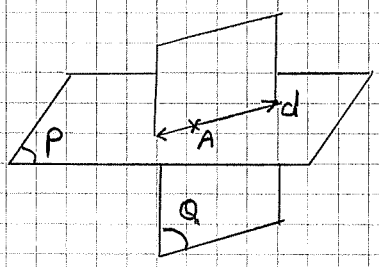
3) Paralel iki doğru bir düzlem belirtir.



İKİ DÜZLEMİN BİRBİRLERİNE GÖRE KONUMLARI

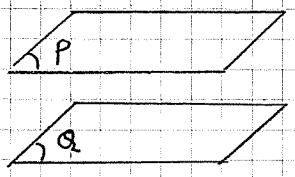
1) KESİŞEN DÜZLEMLER

Farklı iki düzlemin ortak noktaları varsa, bu düzlemlere KESİŞEN DÜZLEMLER denir.

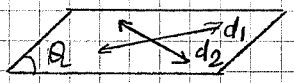


2) PARALEL DÜZLEMLER

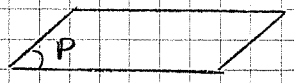
Farklı iki düzlemin ortak noktaları yoksa, bu iki düzleme birbirine PARALEL DÜZLEMLER denir.



a) Kesişen iki doğru P düzlemine paralelse bunların belirttiği Q düzlemi de P düzlemine paraleldir.



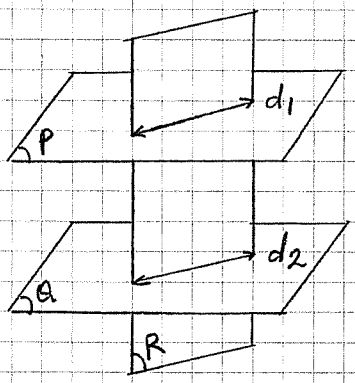
b) Paralel iki düzlemden birinin içindeki her doğru diğer düzleme paraleldir.



c) Kenarları paralel olan açıların belirttikleri düzlemler de birbirine paraleldir.

d) Paralel iki düzlem üçüncü bir düzlemle kesilirse, meydana gelen arakesitler de birbirine paraleldir.

e) Aynı bir düzleme paralel olan farklı iki düzlem de birbirlerine paraleldir.

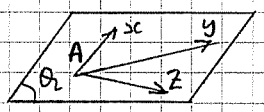


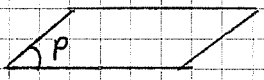
PARALEL DOĞRULAR

TANIM: Aynı düzlemde bulunan ve birbirini kesmeyen doğrulara PARALEL DOĞRULAR denir.

1) Bir doğruya dışındaki bir noktadan sadece bir tek paralel doğru çizilebilir.
2) Aynı bir doğruya paralel olan farklı iki doğru da birbirlerine paraleldir.
3) Bir düzlemin içindeki bir doğruya paralel olan ve düzlemin içinde bulunmayan her doğru o düzleme de paraleldir.

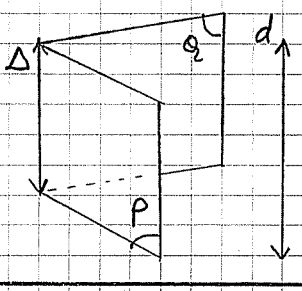
a) Bir P düzlemine dışındaki bir A noktasından sonsuz sayıda paralel doğru çizilebilir. Bu doğrular A dan geçen ve P düzlemine paralel olan bir Q düzlemi içinde bulunurlar. Q düzlemi tek bir düzlemdir. Yani, bir düzleme de dışındaki bir noktadan ancak bir tek paralel düzlem çizilebilir.





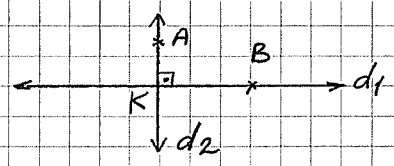
UYARI: Bir doğru bir düzleme paralelse, düzlem içindeki bazı doğrulara paralel olmayabilir.

b) Bir doğru kesişen iki düzlemin her birine paralelse, bunların arakesitine de paraleldir.



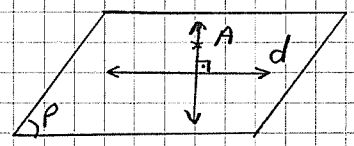
İKİ DOĞRUNUN DİKLİĞİ

TANIM : Bir K noktasında kesişen d_1 ve d_2 doğruları için $m(A\hat{K}B) = 90^\circ$ ise; d_1 ve d_2 doğruları birbirine diktir denir.

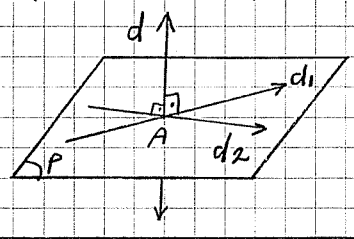


$d_1 \perp d_2$ olarak gösterilir.

1) Düzlemin bir d doğrusuna, aynı düzlemdeki bir A noktasından, bu düzlem içinde bir ve yalnız bir dik doğru çizilebilir.

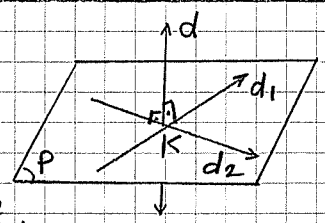


2) P düzlemine dik bir d doğrusuna, A arakesit noktasında dik olan sonsuz sayıda dik doğru çizilebilir.



BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEME DİKLİĞİ

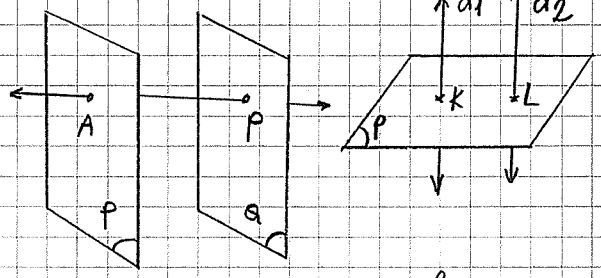
TANIM: Bir P düzlemini K noktasında kesen bir d doğrusu, düzlem içindeki her doğruya dikse; d doğrusu P düzlemine diktir denir.



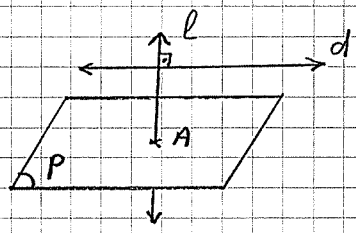
1) Bir d doğrusu bir P düzlemini K noktasında keser ve düzlemin K noktasından geçen farklı iki doğrusuna dik olursa, d doğrusu P düzlemine dik olur.

2) a) Aynı bir doğruya dik olan iki düzlem birbirine paraleldir.

b) Aynı bir düzleme dik olan iki doğru birbirine paraleldir.



3) Aynı ℓ doğrusuna dik olan d doğrusu ile P düzlemi birbirine paraleldir.



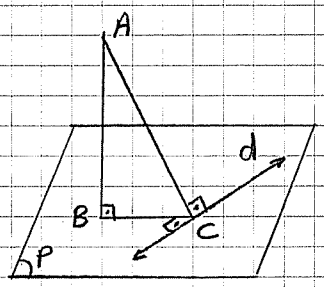
4) Bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir dik düzlem bulunur.

ÜÇ DİKME TEOREMLERİ

1) $|AB| \perp P$ ve $|AC| \perp d$ ise; $|BC| \perp d$ dır.

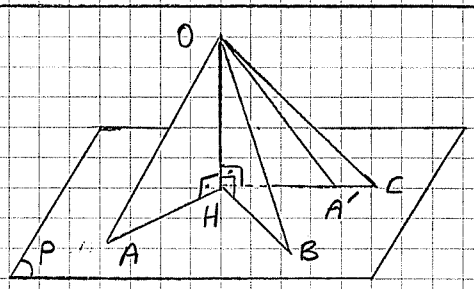
2) $|AB| \perp P$ ve $|BC| \perp d$ ise; $|AC| \perp d$ dır.

3) $|AC| \perp d$ ve $|BC| \perp d$ ise; $|AB| \perp P$ dır.



DİKME ve EĞİKLER

TANIM: Bir düzlemi kesen bir doğru düzleme dik değilse, bu doğruya EĞİK denir.



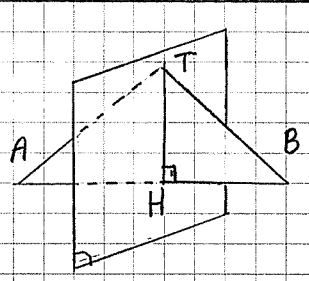
1) Dikme eğiklerin hepsinden kısadır.

2) Dikme ayağından eşit uzaklıkta olan eğikler birbirlerine eşittir.

3) Dikme ayağından uzaklaştıkça eğikler büyür.

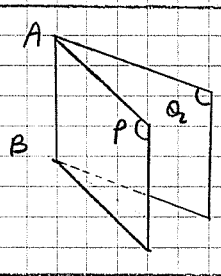
ORTA DİKME DÜZLEMİ

Bir doğru parçasının orta noktasından geçen dik düzleme bu doğru parçasının ORTA DİKME DÜZLEMİ denir.
Orta dikme üzerindeki her nokta, doğru parçasının A ve B uçlarından eşit uzaklıktadır.



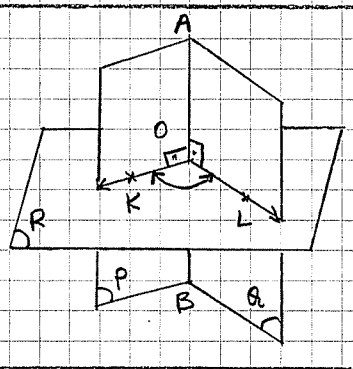
İKİ DÜZLEMLİ AÇILAR

Kenar doğruları ortak olan iki yarı düzlem ile ortak kenar doğrusunun birleşimine İKİ DÜZLEMLİ AÇI denir.



ÖLÇEK AÇI

İki düzlemli açının AB kenar doğrusuna dik olan R düzleminin, iki düzlemli açının yüzleri ile arakesitlerinin belirttiği KOL AÇISINA, iki düzlemli açının ÖLÇEK AÇISI denir.

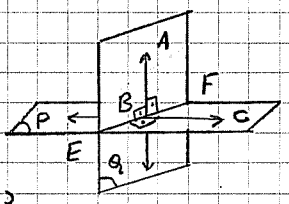


DİK DÜZLEMLER

Kesişen iki düzlemin belirttiği iki düzlemli açılardan birinin ölçek açısı dik açı ise bu iki düzlem birbirine diktir.

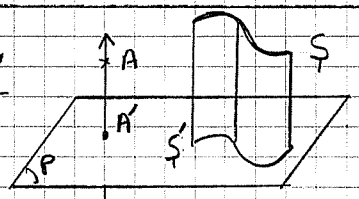
1) Bir AB doğrusu bir P düzlemine dikse AB doğrusunu kapsayan her Q düzlemi P düzlemine diktir.

2) İki düzlem birbirine dikse, bu düzlem birbirine dikse, bu düzlemlerden birinin içinde ve arakesite dik olan her doğru öbür düzleme dik olur.



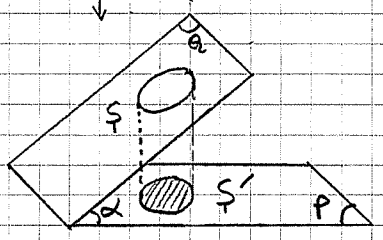
DİK İZDÜŞÜM

Bir A noktasından bir P düzlemine çizilen dik doğrunun P düzlemini kestiği A' noktasına, A noktasının P düzlemindeki DİK İZDÜŞÜMÜ denir.
Bir Ş şeklinin tüm noktalarının bir düzlemdeki dik izdüşümlerinin Ş' kümesine, bu şeklin dik izdüşümü denir.



BİR DÜZLEM ŞEKLİN DİK İZDÜŞÜMÜNÜN ALANI

$Ş' = S \cdot \cos\alpha$ dır.



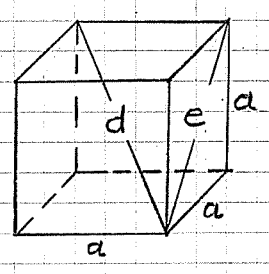
KÜP

Bir Yüzün Alanı : $A = a^2$

Toplam Yüzey Alanı : $S_{Top.} = 6a^2$

Hacim : $V = a^3$

$e = \sqrt{2}\,a$, $d = \sqrt{3}\,a$, $a = \sqrt[3]{V} = \frac{\sqrt{2}}{2}e = \frac{\sqrt{3}}{3}d$



DİKDÖRTGENLER PRİZMASI

Tabanları dikdörtgen olan dik prizmadır.

Yüz Köşegenleri : $e_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, $e_2 = \sqrt{b^2+h^2}$, $e_3 = \sqrt{a^2+h^2}$

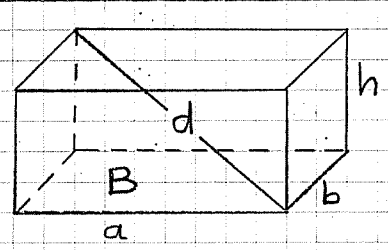
Cisim Köşegeni : $d = \sqrt{a^2+b^2+h^2}$

Taban Alanı : $B = a \cdot b$

Yüz Alanları : $A_1 = a \cdot h$, $A_2 = b \cdot h$

Toplam Alan : $S_{Top.} = 2ab + 2(a+b)h$

Hacim : $V = B \cdot h = abh$



PRİZMA

DİK PRİZMA

$V = B \cdot h$

EĞİK PRİZMA

Taban alanı B olan bir eğik prizmanın Hacmi : $V = B \cdot h$ dir

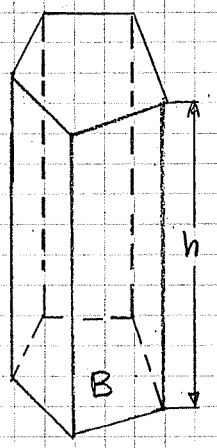
Tabanların ağırlık merkezleri G_1 ve G_2 arasındaki uzunluk a, dik kesit alanı K ise hacim :

$V = K \cdot a$ dir.

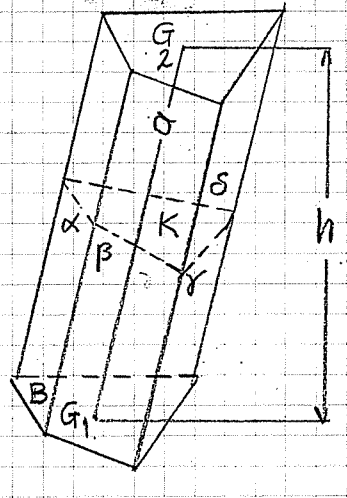
Şekildeki gibi, K dik kesidi meydana getiren dörtgenin kenarları α, β, γ ve δ ise, Yanal Alan :

$S_{yan.} = a(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ dır.

DİK PRİZMA



EĞİK PRİZMA

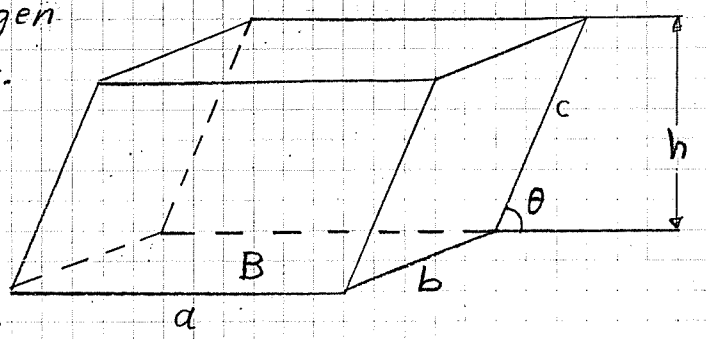


PARALELYÜZ

Tabanları paralelkenar, dikdörtgen veya kare olan eğik prizmadır.

Taban alanı B, yüksekliği h olan bir paralelyüzün hacmi :

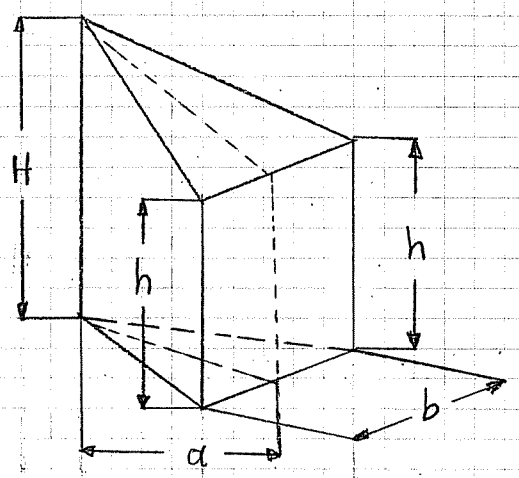
$V = B \cdot h = abh = abc \sin\theta$ dır.



KESİK ÜÇGEN PRİZMA

Kesik Üçgen Prizmanın Hacmi :

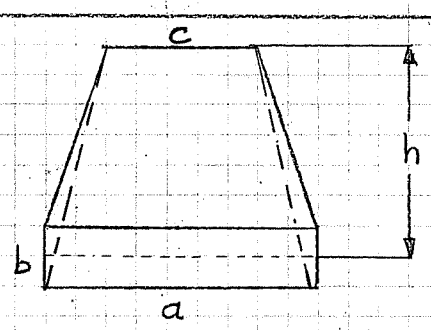
$$V = \frac{ab}{3}(H + 2h)$$



KAMA

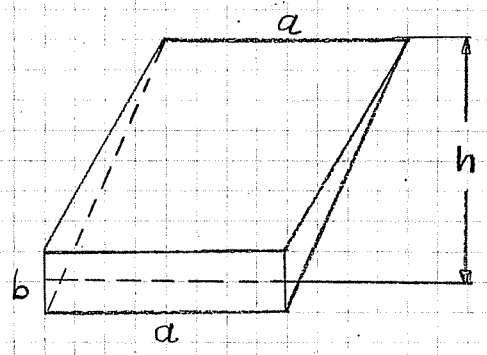
Tabanı Dikdörtgen olan Kamanın Hacmi :

$$V = \frac{(2a + c)bh}{6} \quad \text{dır.}$$



$a = c$ ise :

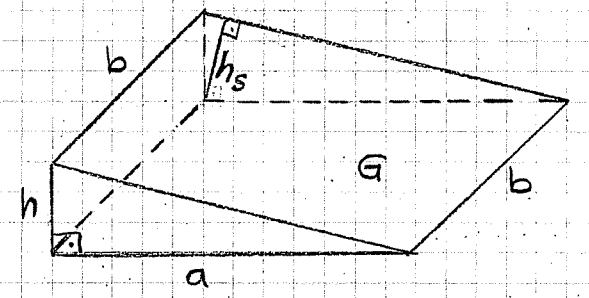
$$V = \frac{abh}{2} \quad \text{dir.}$$



Dik Kama

$$V = \frac{Gh}{2} = \frac{abh}{2} \quad \text{dir.}$$

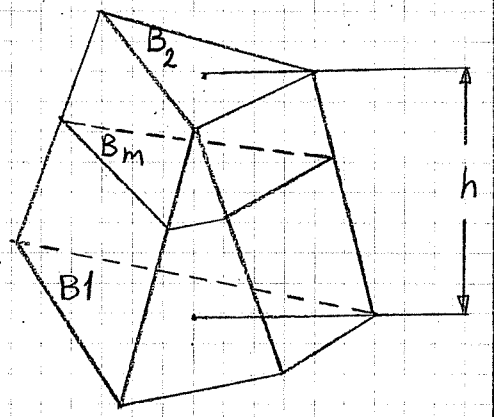
$h_s =$



PRİZMATOİT

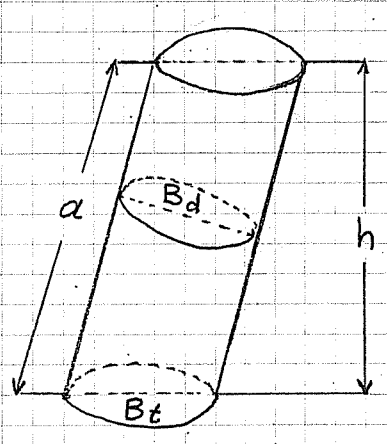
B_m, orta kesidin alanı ise; Prizmatoit'in alanı :

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_m) \quad \text{dir.}$$



SİLİNDİR

DİK SİLİNDİR



Taban alanları toplamı:

$$2B = 2\pi r^2$$

Yanal yüzey alanı:

$$S_{yan.} = 2\pi r h$$

Toplam yüzey alanı:

$$S_{Top.} = 2\pi r (h+r)$$

Hacim:

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

EĞİK SİLİNDİR

Taban alanı B_t; çevresi $Ç_t$;
Dik kesit alanı B_d, çevresi $Ç_d$
ise; Yanal yüzey alanı:

$$S_{yan.} = Ç_d \cdot a = Ç_t \cdot h$$

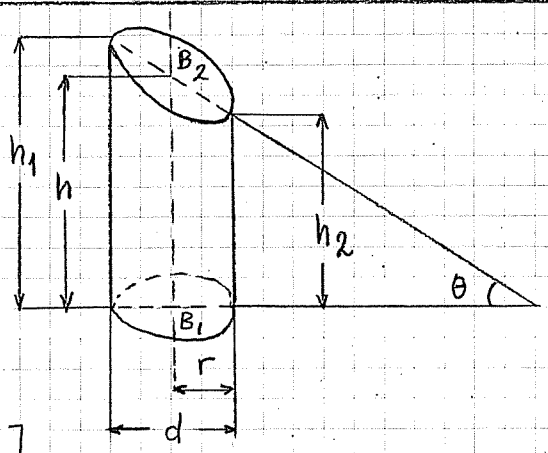
$$S_{yan.} = 2\pi r a = \frac{2\pi r h}{\sin\theta} = 2\pi r h \operatorname{Cosec}\theta$$

Toplam alan: $S_{Top.} = 2B_t + S_{yan}$

Hacim:

$$V = \pi r^2 a = \frac{\pi r^2 h}{\sin\theta} = \pi r^2 h \operatorname{Cosec}\theta$$

KESİK SİLİNDİR



Alt taban dairesinin alanı:

$$B_1 = \pi r^2$$

Üs taban elipsinin alanı:

$$B_2 = \pi r \sqrt{r^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2}$$

Yanal yüzey alanı:

$$S_{yan.} = 2\pi r h = \pi r (h_1 + h_2)$$

Toplam yüzey alanı:

$$S_{Top.} = \pi r \left[h_1 + h_2 + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{h_1 - h_2}{2}\right)^2} \right]$$

Hacim:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{\pi d^2 (h_1 + h_2)}{8}$$

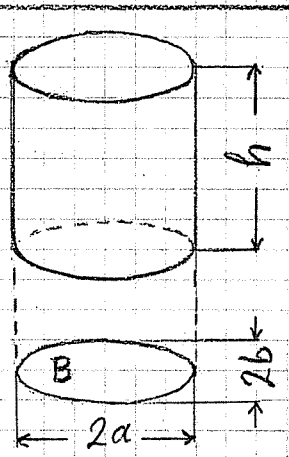
ELİPS KESİTLİ SİLİNDİR

Taban alanı : $B = \pi a b$

Yanal yüzey alanı : $S_{yan.} = \pi h \sqrt{2(a^2+b^2)}$

Toplam yüzey alanı : $S_{Top} = \pi\left(ab + h\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)$

Hacim : $V = B \cdot h = \pi a b h$



DELİK SİLİNDİR (SİLİNDİRİK TÜP)

Taban alanı : $B = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

Yanal yüzey alanı : $S_{yan.} = 2\pi h(R+r) = \pi h(D+d)$

Toplam alan : $S_{Top.} = 2\pi(R+r)(R+h-r)$

$S_{Top.} = \frac{\pi}{2}(D+d)(2h+D-d)$

Hacim :

$V = \pi h(R^2 - r^2) = \frac{\pi h}{4}(D^2 - d^2)$

$V = \pi h t(R+r) = \pi h t(2R - t) = \pi h t(2r+t)$

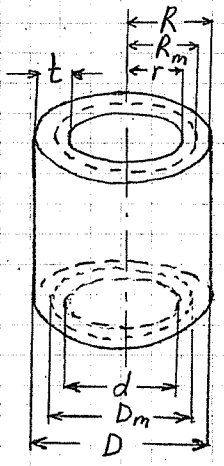
$V = \frac{\pi h t}{2}(D+d) = \pi h t(D-t) = \pi h t(d+t)$

Kenar kalınlığı : $t = R - r = \frac{D-d}{2}$

Ortalama yarıçap : $R_m = (R+r)/2$

Ortalama çap : $D_m = 2R_m = (D+d)/2$ olduğuna göre:

$V = 2\pi h t R_m = \pi h t D_m$ yazılabilir.



SİLİNDİR KESMESİ

Yanal yüzey (silindirik yüzey) alanı:

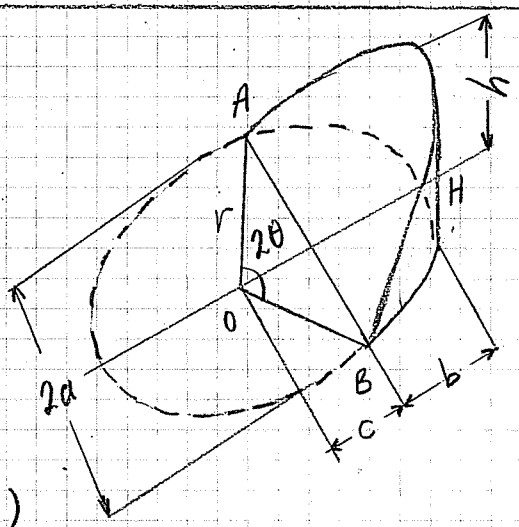
$S_{yan.} = \frac{2rh}{b}[a + (b-r)\theta]$

Diğer yanal yüzey alan formülleri:

$S_{yan.} = (2ar \pm c \cdot \ell)\frac{h}{r \pm c}$ ve

$S_{yan} = 2rh(a \pm c \cdot \theta)/(r \pm c)$ dir.

Burada; $\ell = \overset{\frown}{AHB}$ yay uzunluğudur.
Taban alanı; taban yarım dairesinin alanından büyük ise (+), aksi halde (−) işareti kullanılacaktır.



Taban alanı : $B = \frac{r^2}{2}\left(\theta - 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right)$

θ: Radyan cinsinden. $S_{Top} = S_{yan.} + B$ dir. Hacim:

$V = \frac{h}{3b}[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b-r)\theta] = \frac{hr^3}{b}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} - \theta \cdot \cos\theta\right)$

$V = h\left(\frac{2}{3}a^3 \pm cB\right)/(r \pm c) = h\left[a\left(r^2 - \frac{a^2}{3}\right) \pm r^2 c \cdot \text{rad}\,\theta\right]/(r \pm c)$

SİLİNDİR KESMESİ

YARIM DAİRE TABANLI SİLİNDİR KESMESİ

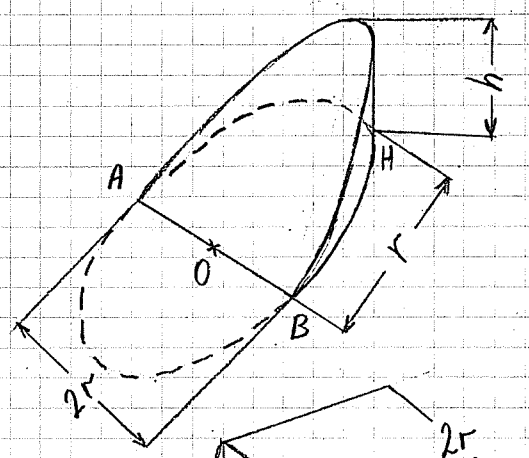
$a = b = r$ ve $2\theta = \pi$ dir.

$S_{yan.} = 2rh$

$B = \frac{\pi r^2}{2}$

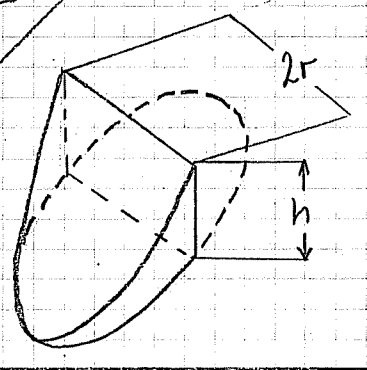
$S_{Top.} = 2rh + \frac{\pi r^2}{2}$

$V = \frac{2r^2h}{3}$ dir.



YARIM DAİRE TABANLI ZIMBA

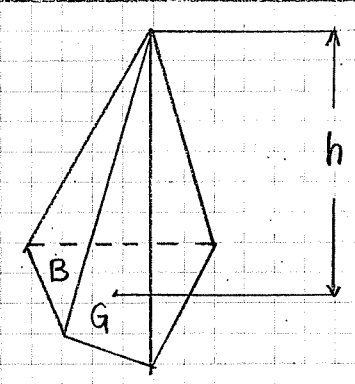
Hacim: $V = \frac{2r^2h}{3}$ dir.



PİRAMİT

Taban alanı B, yüksekliği h olan bir piramidin hacmi:

$V = \frac{B \cdot h}{3}$ dir.



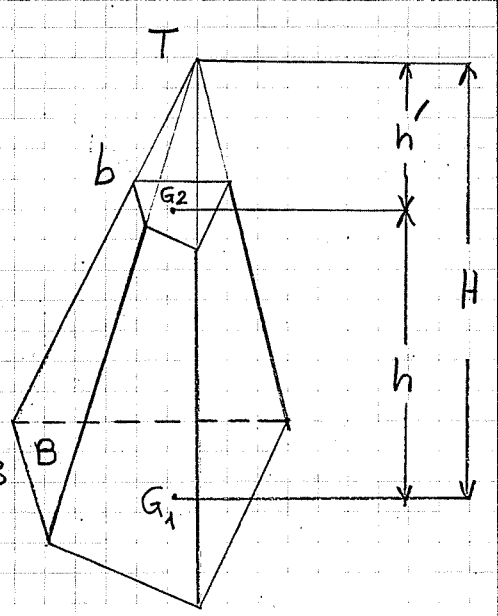
KESİK PİRAMİT

$\frac{b}{B} = \frac{h'^2}{H^2}$

$V = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$

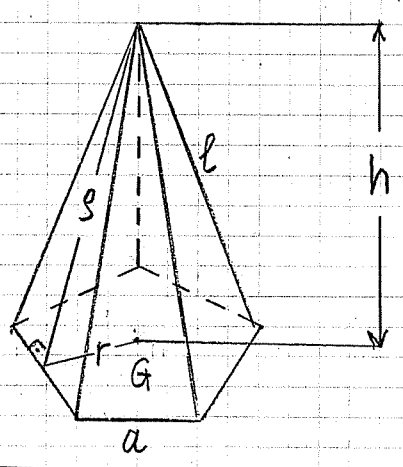
$V \approx \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$

$\frac{(b \text{ Tabanlı Piramidin Hacmi})}{(B \text{ Tabanlı Piramidin Hacmi})} = \left(\frac{h'}{H}\right)^3$



DÜZGÜN PİRAMİT

Düzgün piramit, taban çokgeni düzgün çokgen olan piramittir.



Yan alan: $S_{yan} = \dfrac{n a \rho}{2}$

Burada ρ, yan yükseklik (apotem) dir.

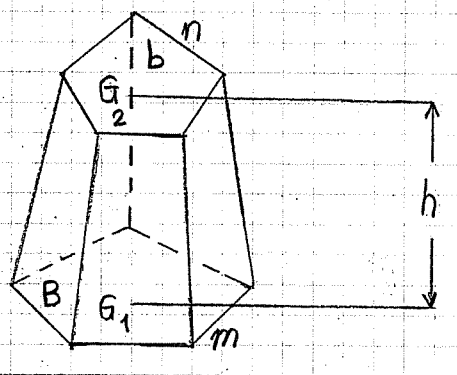
Taban Alanı: $B = \dfrac{n a r}{2}$

Toplam yüzey alanı: $S_{Top.} = \dfrac{na}{2}(\rho + r)$

Hacim: $V = \dfrac{B.h}{3} = \dfrac{n a r h}{3} = \dfrac{n a h}{6} \cdot \sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$ dir.

KESİK DÜZGÜN PİRAMİT

Düzgün poligonlarının kenarları m ve n ; taban alanları B ve b olan kesik düzgün piramidin hacmi:



$V = \dfrac{h}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right)$ ve

$V = \dfrac{B.h}{3} + \left[1 + \left(\dfrac{n}{m}\right) + \left(\dfrac{n}{m}\right)^2\right]$ dir.

KARE TABANLI PİRAMİT

Yanal Alan:

$S_{yan} = a\sqrt{4a^2 + h^2}$

Toplam Yüzey Alanı:

$S_{Top.} = a^2 + a\sqrt{4a^2 + h^2}$

Hacim:

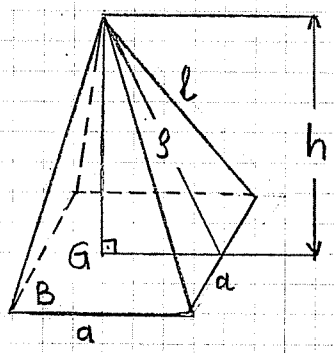
$V = \dfrac{a^2 h}{3}$

Apotem:

$\rho = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$

Yan Ayrıt:

$\ell = \sqrt{\rho^2 + \dfrac{a^2}{4}}$



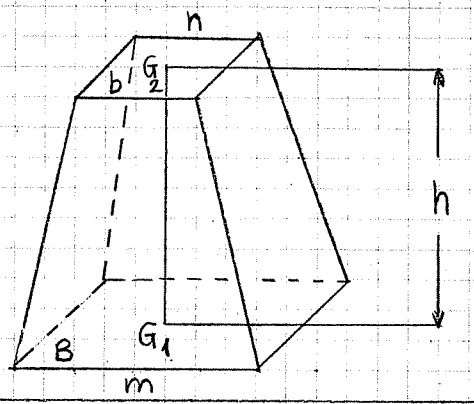
KESİK KARE TABANLI PİRAMİT

Hacim:

$V = \dfrac{h}{3}\left(B + \sqrt{B \cdot b} + b\right)$

$V = \dfrac{h}{3}\left(m^2 + m \cdot n + n^2\right)$

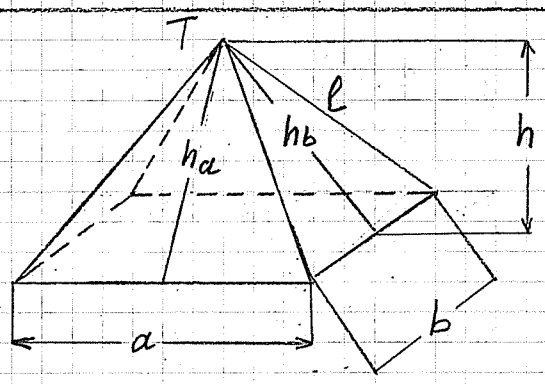
$V \approx B_{ort} \cdot h \approx \left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2 \cdot h$



DİKDÖRTGEN TABANLI PİRAMİT

$$h_a = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} \quad , \quad h_b = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$\ell = \sqrt{h_a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}$$



Yanal Alan: $S_{yan.} = a h_a + b h_b$

Toplam Alan: $S_{Top.} = ab + a h_a + b h_b$

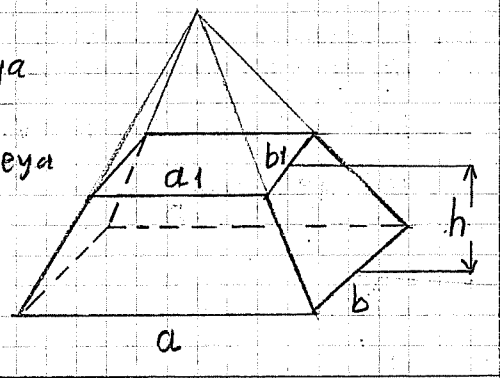
Hacim: $V = \frac{abh}{3}$

KESİK DİKDÖRTGEN TABANLI PİRAMİT

$$V = \frac{h}{6}\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right] \quad \text{veya}$$

$$V = \frac{h}{6}\left[ab + a_1 b_1 + (a + a_1)(b + b_1)\right] \quad \text{veya}$$

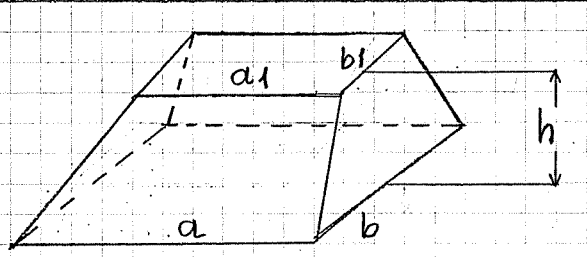
$$V = \frac{h}{6}\left[2ab + 2a_1 b_1 + ab_1 + a_1 b\right] \quad \text{dir.}$$



OBELİSK (PONTON)

Yan yüzlerinin eğimleri çeşitli olan kesik dikdörtgen tabanlı piramittir.

Obelisk'in hacmi, kesik dikdörtgen tabanlı piramidin hacminin aynı hacim formülü ile bulunur.



$$V = \frac{h}{6}\left[(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1\right] = \frac{h}{6}\left[ab + a_1 b_1 + (a + a_1)(b + b_1)\right] \quad \text{veya}$$

$$V = \frac{h}{6}\left[2ab + 2a_1 b_1 + ab_1 + a_1 b\right] \quad \text{dir.}$$

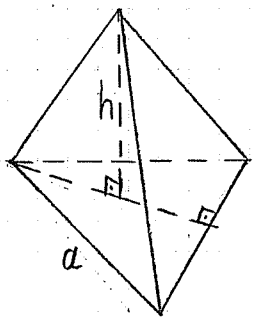
DÜZGÜN DÖRTYÜZLÜ

Bütün ayrıtları birbirine eşit olan dörtyüzlüdür.

$$h = \frac{\sqrt{6}\,a}{3} \approx 0{,}81\,a$$

$$S = \sqrt{3}\,a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{12} \approx 0{,}11\,a^3$$

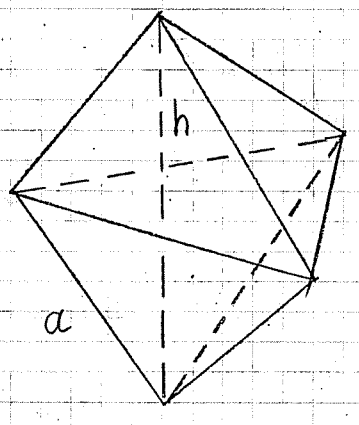


DÜZGÜN ALTIYÜZLÜ

$$h = \frac{2\sqrt{6}\,a}{3} \approx 1{,}6\ a$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2} \approx 2{,}5\ a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{6}\,a^3 \approx 0{,}23\ a^3$$

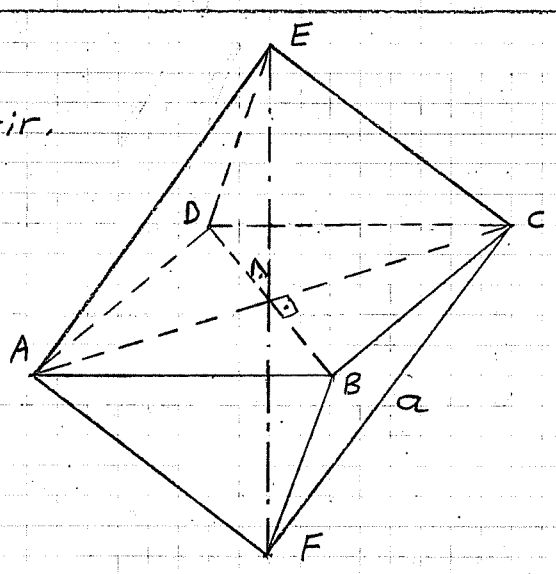


DÜZGÜN SEKİZYÜZLÜ

ÖZELLİKLER

- Köşegenlerin uzunlukları birbirine eşittir.
- Köşegenler birbirini ortalar ve ikişer ikişer birbirlerine diktir.

  $|AC| = |BD| = |EF| = \sqrt{2}\,a$
- iki köşegenin belirttiği düzlemle kesiti karedir.



YÜZEY ALANI :

$$S_{Top.} = 2\sqrt{3}\,a^2 \approx 3{,}46\ a^2$$

HACİM :

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3 \approx 0{,}47\,a^3$$

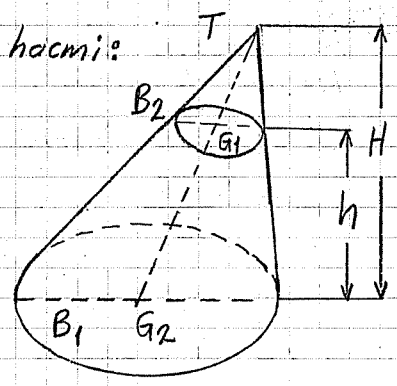
KONİ ve KESİK KONİ (GENEL)

Taban alanı B_1, yüksekliği H olan bir koninin hacmi:

$$V = \frac{B_1 \cdot H}{3} \quad \text{dir.}$$

Taban alanları B_1 ve B_2, yüksekliği h olan kesik koninin hacmi:

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2\right) \quad \text{dir.}$$



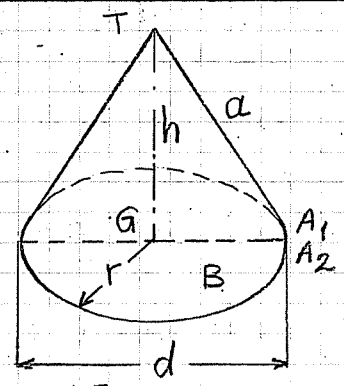
DÖNEL KONİ

$$a = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + 4h^2} \quad \text{dir.}$$

Yanal Alan:

$$S_{yan.} = \pi a r = \frac{\pi a d}{2} \quad \text{ve}$$

$$S_{yan} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{\pi d}{4}\sqrt{d^2 + 4h^2} \quad \text{dir.}$$



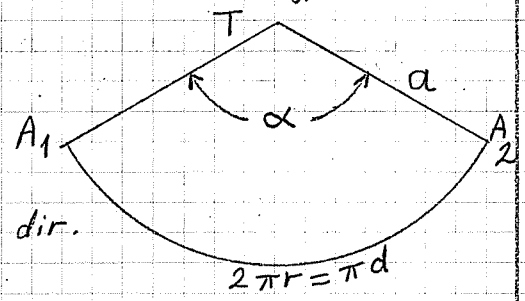
Toplam Alan:

$$S_{Top} = S_{yan} + B = \pi a r + \pi r^2 \quad \text{veya}$$

$$S_{Top} = \pi r (a + r) \quad \text{dir.}$$

Hacim:

$$V = \frac{B h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi d^2 h}{12} \quad \text{dir.}$$



DÖNEL KONİNİN AÇILIMI:

$$\frac{2\pi a}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ = 2\pi r \quad \text{olup, buradan:}$$

$$\alpha^\circ = 360^\circ \cdot \frac{r}{a} \quad \text{yazılır.}$$

KESİK DÖNEL KONİ

$t = R - r$;

$$a = \sqrt{h^2 + t^2} = \sqrt{h^2 + (R-r)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + (D-d)^2}$$

Yanal Alan:

$$S_{yan} = \pi (R + r) a = \frac{\pi (D + d) a}{2} = 2\pi p h$$

Taban Alanları Toplamı:

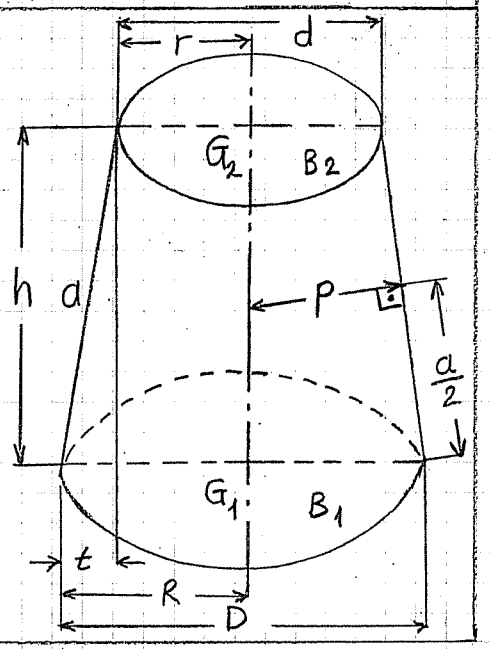
$$B_1 + B_2 = \pi (R^2 + r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 + r^2)$$

Toplam Yüzey Alanı:

$$S_{Top} = B_1 + B_2 + S_{yan} \quad \text{dir.}$$

Hacim:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi h}{12}(D^2 + Dd + d^2)$$

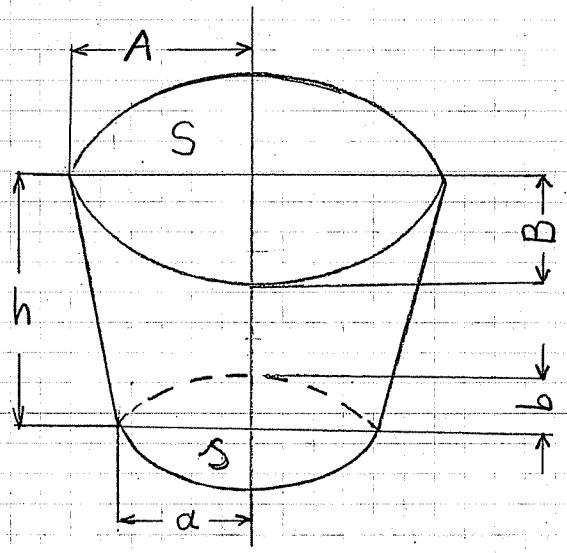


ELİPTİK TEKNE (KÜBEL)

iki tabanı farklı elipsler olan kesik konidir.

Ortalama Yarıçaplar:

$R_m = \frac{A+a}{2}$; $r_m = \frac{B+b}{2}$ olarak tarif edilsin.



S ve s taban alanları ile S_m ortalama taban alanı:

$S = AB\pi$,

$s = ab\pi$,

$S_m = R_m r_m \pi$ formülleri ile bulunur.

Hacim:

$$V = \frac{\pi h}{6}\left[2(AB + ab) + Ab + aB\right] ,$$

$$V = \frac{h}{6}\left(S + s + 4S_m\right) ,$$

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(AB + ab + 4R_m \cdot r_m\right)$$ dir.

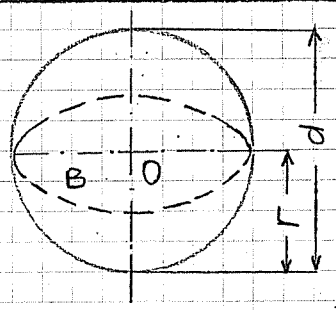
KÜRE

Yüzey:

$S = 4.B = 4\pi r^2 = \pi d^2 \approx 12,566 r^2 \approx 3,142 d^2$ dir.

Burada; B, kürenin en büyük dairesinin alanıdır.

Hacim: $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{\pi d^3}{6} \approx 4.189 r^3 \approx 0,524 d^3$

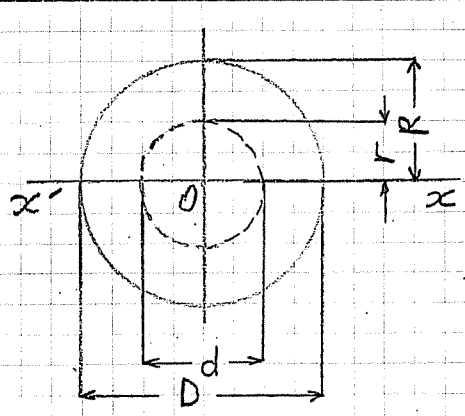


İÇİ BOŞ KÜRE

Hacim:

$V = \dfrac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) = \dfrac{\pi}{6}(D^3 - d^3)$

$V \approx 4.1888(R^3 - r^3) \approx 0,5236(D^3 - d^3)$



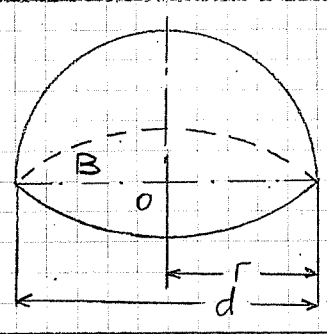
YARIM KÜRE

Küresel Yüzey Alanı:

$S_y = 2B = 2\pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{2}$

Toplam Alan: $S_{top} = 3\pi r^2$

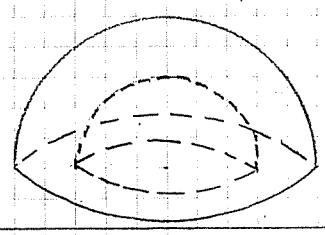
Hacim: $V = \dfrac{2\pi r^3}{3} = \dfrac{\pi d^3}{12}$



İÇİ BOŞ YARIM KÜRE

Hacim:

$V = \dfrac{2\pi}{3}(R^3 - r^3) = \dfrac{\pi}{12}(D^3 - d^3)$



KÜRE PARÇASI (KÜRESEL SEGMENT)

$a = 2\sqrt{h(2r-h)}$ ve $r = \dfrac{a^2 + 4h^2}{8h}$ dir.

Küresel Yüzey Alanı:

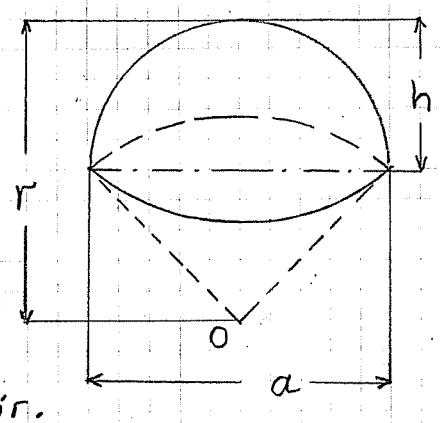
$S = 2\pi r h = \pi\left(\dfrac{a^2}{4} + h^2\right)$

Hacim:

$V = \dfrac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \pi h^2\left(r - \dfrac{h}{3}\right)$

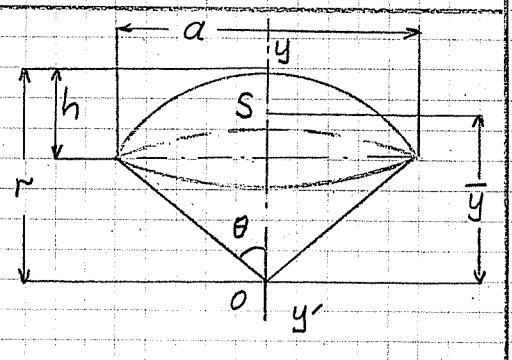
$V = \dfrac{\pi h}{6}\left[3\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2\right]$ Son formül:

$V = \pi h\left[\dfrac{a^2}{8} + \dfrac{h^2}{6}\right]$ olarak da yazılabilir.



KÜRE KESMESİ (KÜRESEL SEKTÖR)

$a = 2\sqrt{h(2r-h)}$ dir.



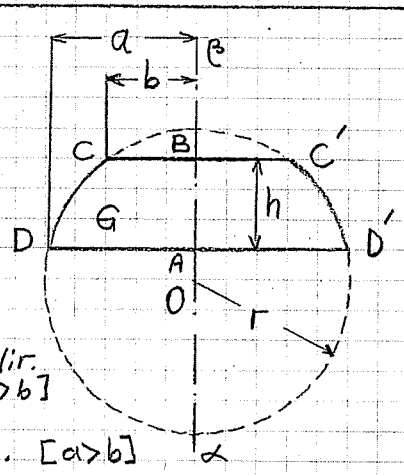
Küresel Yüzeyin Alanı: Küresel yüzeyin alanına KÜRE KAPAĞI denir ve sadece alanı belirtir.

$S_{kapak} = 2\pi r h$ dir.

Hacim: $V = \dfrac{2\pi r^2 h}{3} \approx 2{,}094\, r^2 h$

KÜRE TABAKASI

$|\alpha\beta|$ çapına dik $|AD|$ ve $|BC|$ yarım kirişleri ile $|\widehat{CD}|$ yayı arasındaki alan G olsun. G nin $|\alpha\beta|$ etrafında dönmesi ile meydana gelen $(CC'DD')$ hacmine KÜRE TABAKASI denir. Bir kürenin $|CC'|$ ve $|DD'|$ kesitleri arasında kalan kısmıdır.



KÜRE KUŞAĞI: Küre tabakasının küresel yüzeyi olup küresel yüzeyin alanını belirtir.

Küre Kuşağının Alanı:

$S_{kuşak} = 2\pi r h$ dir.

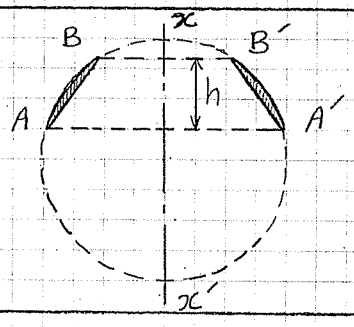
$r^2 = a^2 + \left(\dfrac{a^2-b^2-h^2}{2h}\right)^2$ dir. $[a>b]$

Hacim: $V = \dfrac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ dir. $[a>b]$

Not: $b=0$ olursa; geometrik cisim küre parçası olur.

KÜRE HALKASI

Bir daire parçasının kendini kesmeyen çapı etrafında dönmesinden meydana gelen hacme KÜRE HALKASI denir.

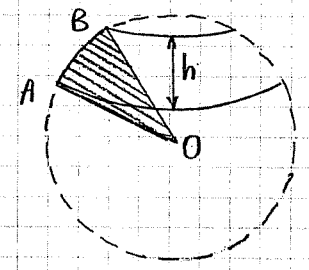


Hacim:

$V = \dfrac{\pi h}{6}|AB|^2$ dir.

KÜRE OYUĞU

Bir (OAB) daire kesmesinin kendini parçalamayan bir çap etrafında dönmesinden meydana gelen hacme KÜRE OYUĞU denir.



Hacim:

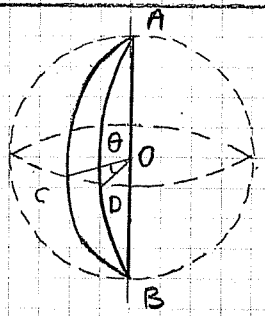
$V = \dfrac{2}{3}\pi r^2 h$ dir.

KÜRESEL KAMA (KÜRE DİLİMİ)

(ABCD) Küresel Yüzeyin Alanı:

$S_{küresel} = 4\pi r^2 \cdot \dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}$

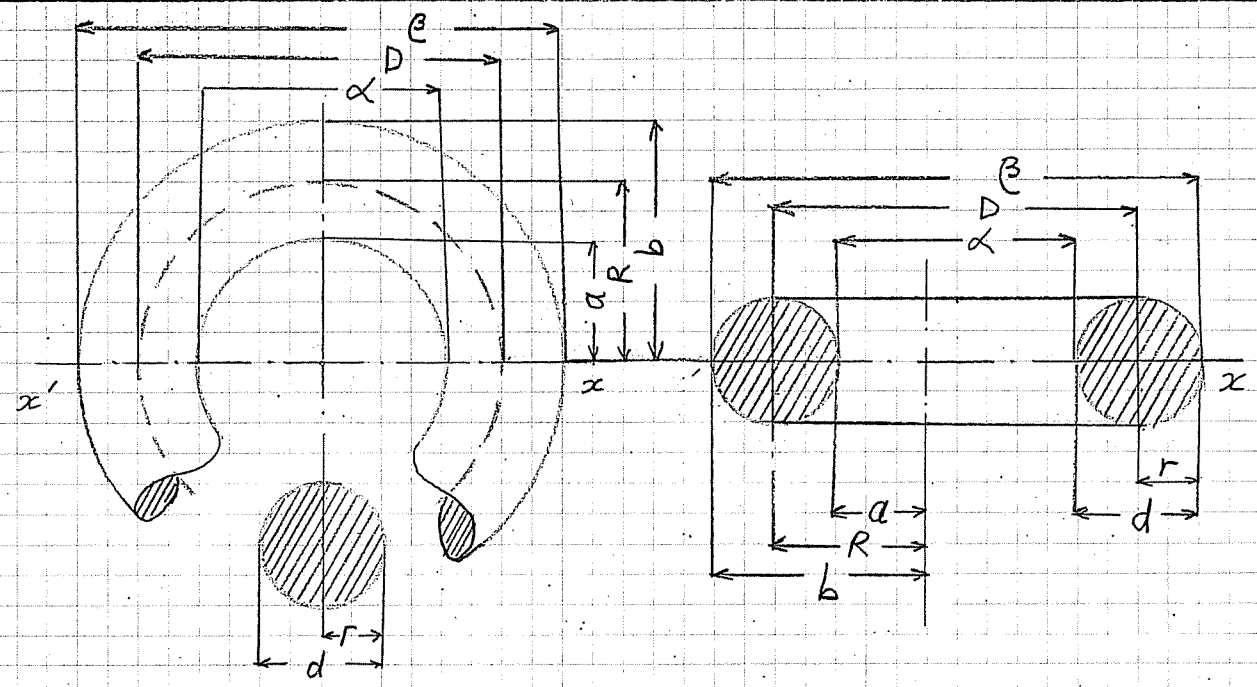
$S_{küresel} = 2r^2\theta$ [θ: radyan]



Hacim:

$V = \dfrac{4\pi r^3}{3} \cdot \dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}$

RİNG (YÜZÜK, TOR)



YÜZEY ALANI :

$S = u \cdot Çort. = u(\pi D) = u(2\pi R)$ dir.

Burada; u; kesit çevresi : $[u = \pi d = 2\pi r]$

Çort, ortalama çevre : $[Çort = \pi D = 2\pi R]$

D, ortalama çap : $[D = \frac{\alpha+\beta}{2}, \; d = \frac{\beta-\alpha}{2}]$

R, ortalama yarıçap : $[R = \frac{a+b}{2}]$

$S = \pi d(\pi D) = \pi^2 d D \approx 9{,}87\, dD$,

$S = 2\pi r(\pi D) = 2\pi^2 r D \approx 19{,}739\, rD$,

$S = \pi d(2\pi R) = 2\pi^2 dR \approx 19{,}739\, dR$,

$S = 2\pi r(2\pi R) = 4\pi^2 rR \approx 39{,}478\, rR$ dir.

Ayrıca aşağıdaki formüller pratiklik sağlar.

$S = \pi^2(b^2 - a^2) \approx 9{,}87(b^2 - a^2)$

$S = \frac{\pi^2}{4}(\beta^2 - \alpha^2) \approx 2{,}467(\beta^2 - \alpha^2)$

HACİM :

$V = A \cdot Çort = A(\pi D) = A(2\pi R)$

Burada; A, kesit alanı : $[A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2]$

$$V = \frac{\pi^2 d^2 D}{4} = \pi^2 r^2 D = \frac{\pi^2 d^2 R}{2} = 2\pi^2 r^2 R$$

$$V \approx 2{,}4674\, d^2 D \approx 9{,}87\, r^2 D \approx 4{,}935\, d^2 R \approx 19{,}739\, r^2 R$$

Ayrıca aşağıdaki formüller pratiklik sağlar.

$$V = \frac{\pi^2}{4}(a+b)(b-a)^2 = \frac{\pi^2}{4}(b-a)(b^2-a^2) = \frac{\pi^2}{32}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^2 = \frac{\pi^2}{32}(\beta-\alpha)(\beta^2-\alpha^2)$$

FIGI (VARIL)

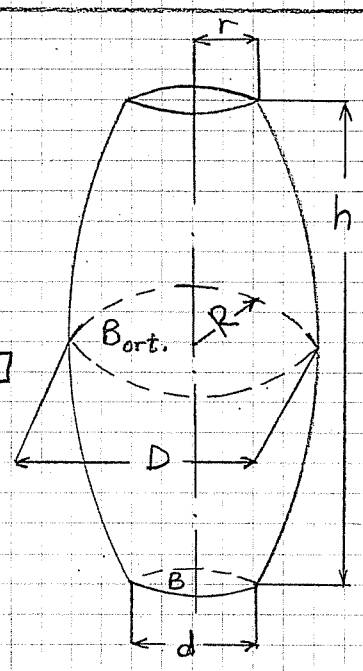
A) Eğri yüzeyin bir küre yüzeyi olması durumunda yaklaşık hacim formülü :

$$V \approx \frac{h}{6}\left(2B + 4\,B_{ort.}\right) \quad \text{dır.}$$

Burada; B, tabanların alanı : $[B = \frac{\pi d^2}{4}]$

$B_{ort.}$, ortalama taban alanı : $[B_{ort} = \frac{\pi D^2}{4}]$

$$V \approx \frac{\pi h}{12}\left(2D^2 + d^2\right) \approx 0{,}262\left(2D^2 + d^2\right)$$



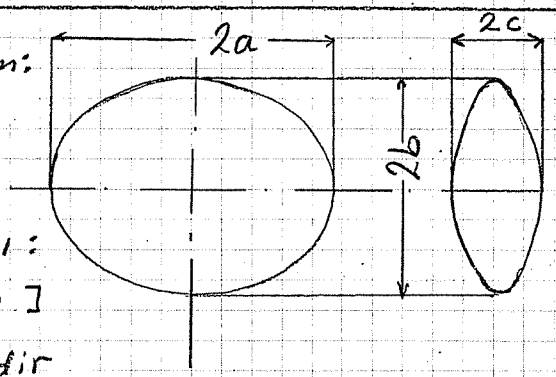
B) Eğri yüzeyin bir paraboloit olması durumunda yaklaşık hacim formülü :

$$V \approx \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right) \quad \text{dir.}$$

ELİPSOİT (SFEROİT)

I) Elipsoit olması durumunda hacim:

$$V = \frac{4}{3}\pi abc \quad \text{dir.}$$



II) Uzatılmış elipsoit olması durumunda; Eğri yüzün alanı :

[$c = b$ ve $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a}$ ise]

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi ab \cdot \frac{\sin^{-1} e}{e} \quad \text{dir}$$

Hacim :

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2 \quad \text{dir.}$$

III) Basık elipsoit olması durumunda ; Eğri yüzün alanı :

[$c = a$ ve $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a}$ ise]

$$S = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \quad \text{dir.}$$

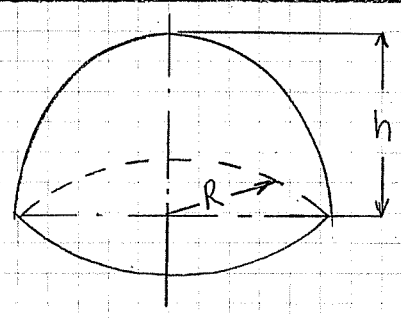
Hacim :

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b \quad \text{dir.}$$

DÖNEL YARIM ELİPSOİT

Hacim :

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad \text{dir.}$$



DÖNEL PARABOLOİT

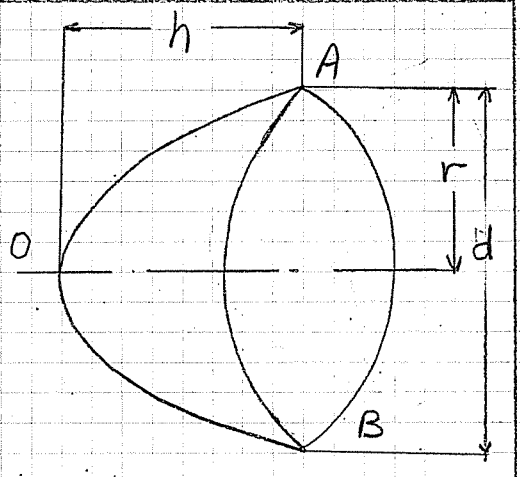
Eğrisel yüzün alanı :

$$S = \frac{2\pi d}{3h^2}\left[\left(\frac{d^2}{16}+h^2\right)^{3/2} - \left(\frac{d}{4}\right)^3\right]$$

Hacim :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{\pi d^2 h}{8}$$

$$V \approx 1{,}5708\, r^2 h \approx 0{,}3927\, d^2 h$$



DÖNEL PARABOLOİT SEGMENTİ

Eğrisel Yüzün alanı :

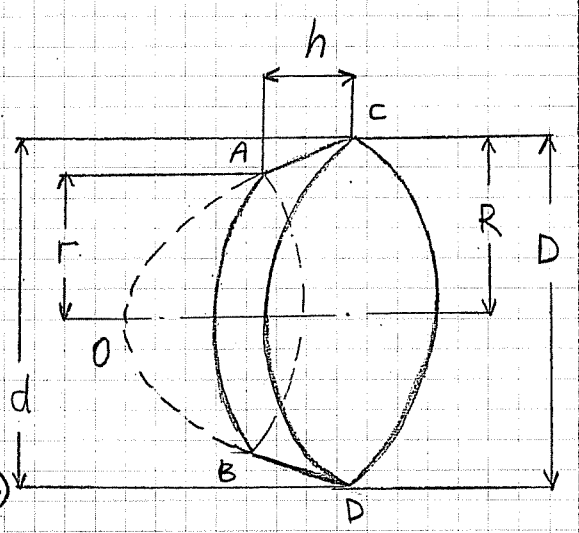
$$S = \frac{2\pi}{3p}\left[\left(\frac{d^2}{4}+p^2\right)^{3/2} - p^3\right]$$

Burada ; $p = \frac{d^2}{8h}$ dir,

Hacim :

$$V = \frac{\pi h}{2}(R^2+r^2) = \frac{\pi h}{8}(D^2+d^2)$$

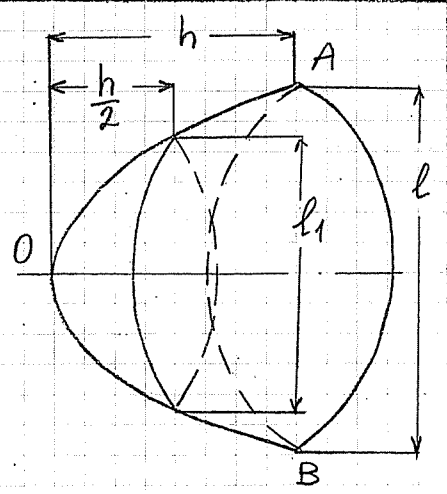
$$V \approx 1{,}5708h(R^2+r^2) \approx 0{,}3927h(D^2+d^2)$$



DÖNEL HİPERBOLOİT

AOB Segmentinin Hacmi :

$$V = \frac{\pi h}{24}\left(\ell^2 + 4\ell_1^2\right)$$



GEOMETRİDE İŞARET KULLANILMASI

VEKTÖR

TANIMLAR 1- Eksen : Üzerinde bir gidiş yönü seçilen doğrulara eksen denir. Gidiş yönü pozitif, tersi negatif olarak alınır.

2- Vektör : Yönlenmiş doğru parçasına vektör denir. A noktasına vektörün başlangıcı, B ye de sonu denir. $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir.

3- Vektörün Cebirsel ölçüsü : Bir $x'x$ ekseni ile bunun üzerinde veya bu eksene paralel bir $\overrightarrow{AB}$ vektörü gözönüne alınsın. Birim uzunluğunda seçilen bir doğru parçası bu vektörde ne kadar varsa o miktara o vektörün uzunluğu denir. AB olarak gösterilir. Vektör; seçilen eksenin pozitif yönünde ise $+AB$, ters yönde ise $-AB$ vektörün cebirsel ölçüsüdür. Vektörün cebirsel ölçüsü AB işareti ile gösterilir.

4- Vektörün Belirtilmesi : Bir $\overrightarrow{AB}$ vektörü aşağıdaki elemanları ile belli olur.

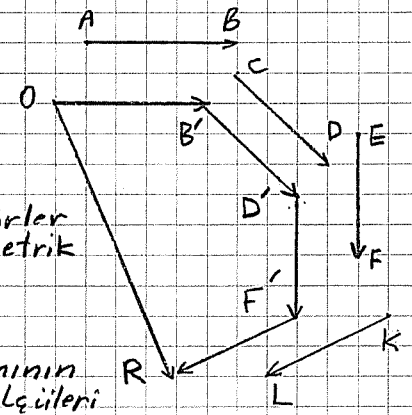
a) A Başlangıç veya B Bitim noktası,

b) Doğrultusu ve yönü,

c) Cebirsel ölçüsü.

5- Özdeş Vektörler : Birbirine paralel olup cebirsel ölçüleri aynı olan vektörlere özdeş vektörler denir.

VEKTÖR SİSTEMLERİNİN GEOMETRİK TOPLAMI



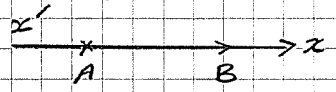
Bir düzlem içinde bulunan ve aynı doğrultuda olmayan $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \ldots, \overrightarrow{KL}$ vektörleri gözönüne alınsın.
Şekilde olduğu gibi herhangibir O noktası alınır.
O dan başlamak üzere vektörlere özdeş vektörler çizilirse, $\overrightarrow{OR}$ vektörüne bu vektörlerin geometrik toplamı denir.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KL}$ şeklinde yazılır.

NOT : Bir takım vektörlerin geometrik toplamının cebirsel ölçüsü, bu vektörlerin cebirsel ölçüleri toplamından küçüktür.

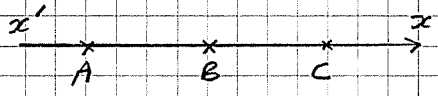
$$\overline{OR} < \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \cdots + \overline{KL} \quad \text{dir.}$$

ŞAL (Chasles) BAĞINTILARI

1) 

$\overline{AB} = -\overline{BA}$ veya

$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ dır.

2) 

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} = -\overline{CA}$ veya

$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA} = 0$ dır.

3) a) $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{BC}$ ise C noktası AB nin arasındadır.

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ ve

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ dır.

b) $\overrightarrow{AB} < \overrightarrow{BC}$ ise C noktası AB nin dışındadır.

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB}$$

$$-\overline{BC} = \overline{CA} + \overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \quad \text{olur.}$$

4) $x'x$ ekseni üzerinde;
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \ldots, \overrightarrow{KL}$ vektörleri gözönüne alınsın. Bu vektörlerin geometrik toplamı $\overrightarrow{AL}$ vektörü olduğuna göre:

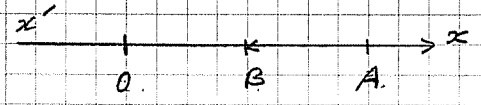
$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \ldots + \overrightarrow{KL} \quad \text{dir.}$$

$$-\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{KL}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LA} = 0 \quad \text{olur.}$$

UYGULAMALAR

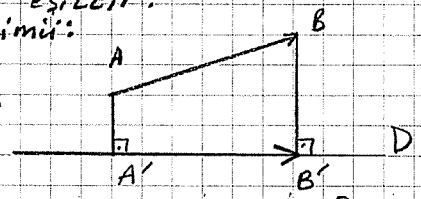
1) Bir vektörün cebirsel ölçüsünün başlangıç ve bitim noktalarının apsisleri cinsinden ifadesi



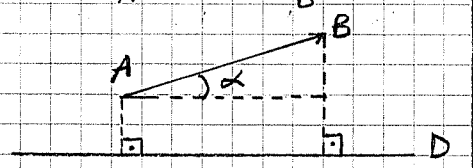
$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ olur. AB vektörünün cebirsel ölçüsü, bitim noktası ile başlangıç noktasının apşişleri farkına eşittir.

2-a) Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü:
Bir $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bir D ekseni üzerindeki izdüşümü, bu vektörün başlangıç ve bitim noktalarının izdüşümleri arasındaki $\overrightarrow{A'B'}$ vektörüdür.



b) Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümünün cebirsel ölçüsü:

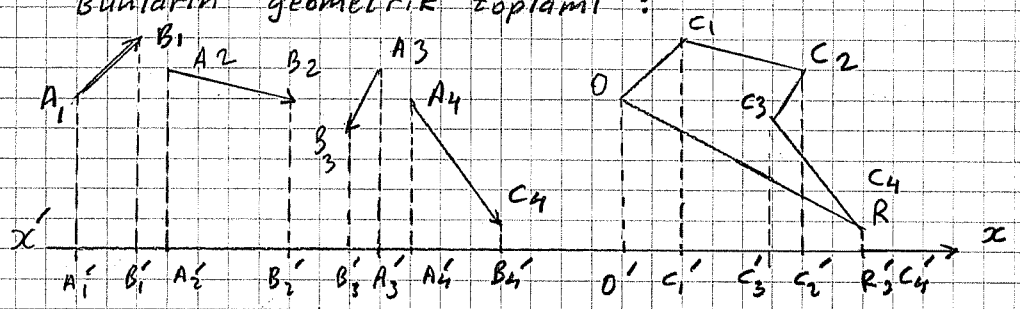


$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$$

VEKTÖRLERİN GEOMETRİK TOPLAMININ İZDÜŞÜMÜ

1) Özdeş iki vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümleri de özdeştir.

2) Birtakım vektörlerin aynı bir eksen üzerindeki izdüşümleri ile bunların geometrik toplamı:



Dört vektörün geometrik toplamı $\overrightarrow{OR}$; $x'x$ ekseni üzerindeki izdüşümleri $\overrightarrow{A_1'B_1'}$, $\overrightarrow{A_2'B_2'}$, $\overrightarrow{A_3'B_3'}$ ve $\overrightarrow{A_4'B_4'}$ dir. Özdeşlerinin $x'x$ ekseni üzerindeki izdüşümleri $\overrightarrow{O'C_1'}$, $\overrightarrow{C_1'C_2'}$, $\overrightarrow{C_2'C_3'}$, $\overrightarrow{C_3'C_4'}$ ve $\overrightarrow{OR}$ vektörünün izdüşümü $\overrightarrow{O'R'}$ olsun.

$$\overrightarrow{O'R'} = \overrightarrow{O'C_1'} + \overrightarrow{C_1'C_2'} + \overrightarrow{C_2'C_3'} + \overrightarrow{C_3'C_4'} \quad \text{dir.}$$

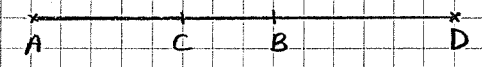
$$\overline{O'R'} = \overline{A_1'B_1'} + \overline{A_2'B_2'} + \overline{A_3'B_3'} + \overline{A_4'B_4'} \quad \text{olur.}$$

Yani: Birtakım vektörlerin geometrik toplamının bir eksen üzerindeki izdüşümünün cebirsel ölçüsü, bu vektörlerin aynı eksen üzerindeki izdüşümlerinin cebirsel ölçülerinin toplamına eşittir.

HARMONİK BÖLME

Tanım: Verilen bir doğru parçasını, verilen bir oranda içten ve dıştan bölen iki noktaya, bu doğru parçasını HARMONİK olarak bölüyor denir.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \text{dir.}$$



C ve D noktaları, A ve B noktalarının eşlenikleridir. C ve D noktalarının AB doğru parçasını harmonik olarak bölüşü, notasyon olarak (ABCD) şeklinde gösterilir.

Teorem: C ve D noktaları AB doğru parçasını harmonik olarak bölerse, A ve B noktaları da CD doğru parçasını harmonik olarak böler.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \text{dir.} \quad \text{veya}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \quad \text{olarak yazılabilir.}$$

Bu bağıntı: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$ şeklinde de yazılabilir.

A, B, C, D noktalarının $x'x$ ekseni üzerindeki apsisleri a, b, c ve d olsun.

$$(c-a)(d-b) + (d-a)(c-b) = 0 \quad \text{veya}$$

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd) \quad \text{Yazılabilir.}$$

Başlangıç noktası A olursa: ($a = 0$ dır.)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \quad \text{Bulunur.}$$

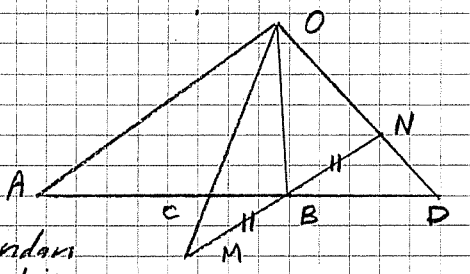
$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}} \quad \text{Olarak da yazılabilir.}$$

HARMONİK DEMET

Tanım: Bir doğru üzerinde harmonik bölme meydana getiren A, B, C ve D noktalarını bu doğru dışındaki bir O noktasına birleştiren dört doğruya HARMONİK DEMET denir. O(ABCD) şeklinde gösterilir. O noktasına harmonik demetin merkezi; |OA|, |OB|, |OC| ve |OD| doğru parçalarına harmonik demetin ışınları denir. |OA| ve |OB| ışınları, |OC| ve |OD| ışınlarının eşlenikleridir.

Teorem: Bir harmonik demette, ışınlardan biri üzerinde alınan bir noktadan eşleniğine çizilen paralel, diğer iki ışın tarafından eşit parçalara bölünür.

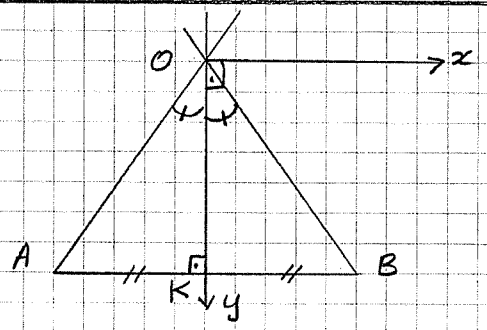
$$BM = BN \quad \text{dir.}$$



Karşıt Teorem: Dörtlü bir demetin ışınlarından birisinin üzerinde alınan bir noktadan diğer bir ışına çizilen paralel; öteki ışınlar tarafından iki eşit parçaya bölünürse, bu demet harmonik demettir.

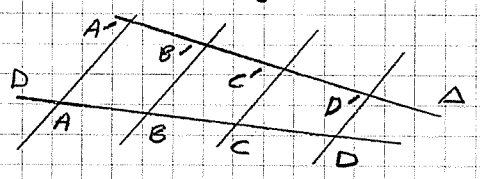
Teorem: Bir harmonik demeti kesen her doğru (kesen), demeti harmonik noktalarda keser.

Teorem : Bir harmonik demetin eşlenik iki ışını birbirine dik ise; bu ışınlar, diğer iki ışının meydana getirdiği açıların açıortaylarıdır.

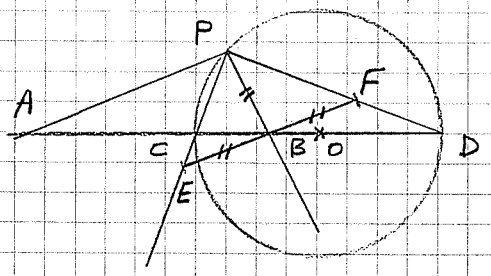


Karşıt Teorem : Dörtlü bir demetin iki ışını birbirine dik ve bu ışınlar diğer iki ışının meydana getirdikleri açıların açıortayları ise, bu demet harmonik demettir.

Teorem : Birbirine paralel dört doğru, bir doğru ile kesilince harmonik bölme meydana getirirse, her kesen bir harmonik bölme meydana getirir.



Teorem : (Apolonyüş Teoremi) Sabit iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri; bu sabit iki noktayı birleştiren doğru parçasını verilen sabit orana göre bölen noktalar arasındaki uzaklık çap olmak üzere çizilen çemberdir.



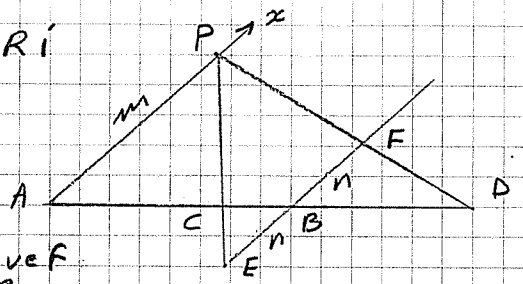
$|PC| \perp |PD|$ ve $|PA| \perp |PB|$

$|BP| = |BE| = |BF|$

$$\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|PA|}{|PB|} = k \quad \text{dır.}$$

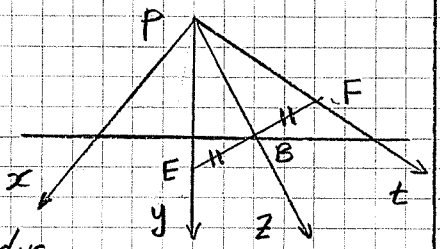
EŞLENİK NOKTA VE IŞIN ÇİZİMLERİ

1) Bir AB doğru parçasını m/n oranında harmonik olarak bölünmesi:
A noktasından herhangibir Ax yarıdoğru çizilip m uzunluğu işaretlenerek P noktası bulunur. B noktasından Ax'e paralel çizilir. $|BE| = |BF|$ alınarak E ve F noktaları bulunur. $|PE|$ ve $|PF|$ nin AB doğrusunu kestiği C ve D noktaları bulunur.



$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n} \quad \text{dir.}$$

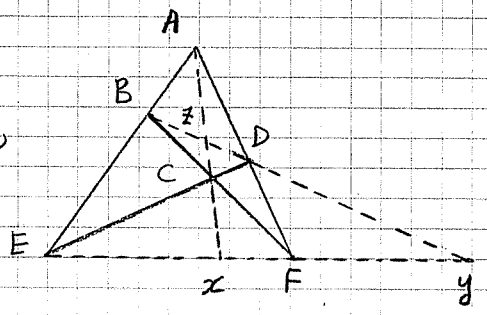
2) Bir harmonik demetin üç ışını biliniyorsa dördüncü ışının bulunması:
Pz ışını üzerindeki herhangibir noktadan Px ışınına çizilen paralel Py'yi E noktasında kessin $|BE| = |BF|$ alınarak F noktası bulunur. PF (t) aranan ışındır.



TAM DÖRTGEN

Tanım: Üçü bir noktada kesişmeyen ve ikisi birbirine paralel olmayan dört doğrunun meydana getirdiği şekil TAMDÖRTGEN dir.

Teorem : Her tamdörtgende bir köşegen, diğer iki köşegen tarafından harmonik olarak bölünür.



$$\frac{\overline{xE}}{\overline{xF}} = -\frac{\overline{yE}}{\overline{yF}} \quad \text{dir.}$$

(EFxy) Harmonik bölmedir.

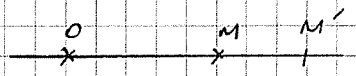
HOMOTETİ

Tanım: Bir M noktasının sabit bir O merkezine ve k oranına göre homotetiği:

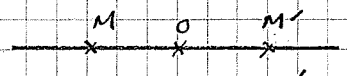
$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ eşitliğini sağlayan M' noktasıdır.

O, M, M' noktaları aynı doğru üzerindedir.

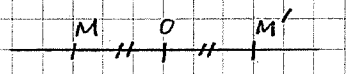
k>0 ise: Pozitif (Düz) Homoteti



k<0 ise: Negatif (Ters) Homoteti

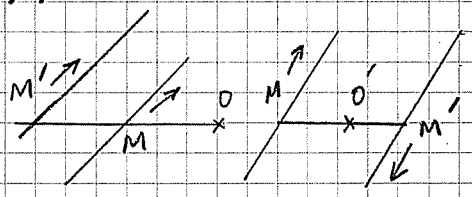


k = −1 ise: M' ve M noktaları O'ya göre simetriktir.



O Noktası: Homoteti Merkezidir.
k cebirsel sayısı: Homoteti oranıdır.
M ve M' Noktaları: Homolog noktalardır.

DOĞRUNUN HOMOTETİĞİ

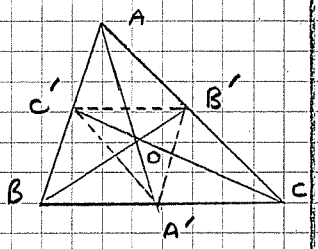


Teorem: Bir doğrunun homotetiği kendisine paralel bir doğrudur.

Sonuçlar:
1- Bir vektörün, bir doğru parçasının, bir yarım doğrunun homotetiği; bir vektör, bir doğru parçası, bir yarım doğrudur.
2- Homoteti merkezinden geçen her doğru, homologu ile çakışır.
3- İki homolog doğru çakışırsa, homoteti merkezinden geçerler.
4- Bir açının homotetiği, kendisine eşit bir açıdır.

Teorem: Homotetik iki vektörün oranı, homoteti oranına eşittir.

Sonuçlar: 1) Bir üçgenin homotetik şekli, bu üçgenin benzeri olan bir üçgendir. Homoteti oranının mutlak değeri benzerlik oranına eşittir.



NOT: Bir ABC üçgeni ile, bu üçgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden A'B'C' üçgeni homotetik iki üçgendir.

2) Bir çokgenin homotetiği, bu çokgenin benzeri olan bir çokgendir.

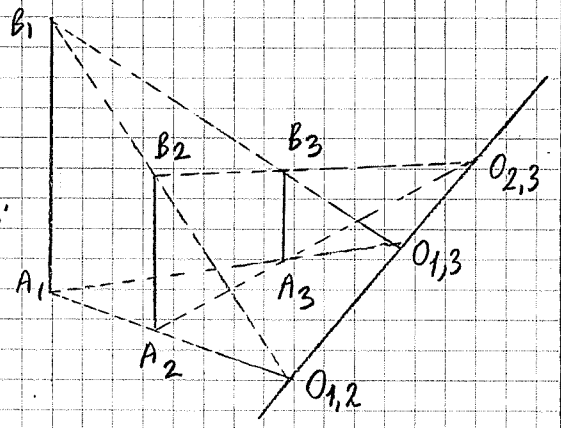
Teorem: Bir çemberin homotetiği bir çemberdir. Homoteti oranının mutlak değeri, yarıçapların oranına eşittir.

Özel Haller: 1) Homoteti merkezi çember merkezine çakışıksa; çemberlerin merkezleri, homoteti merkezidir. Aynı merkezli çemberler, homolog çemberlerdir.

2) içten ve dıştan teğet çemberler birbirinin homologu olup, homoteti merkezi, teğet noktalarıdır.

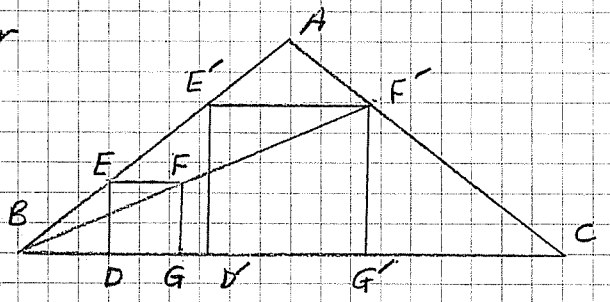
Teorem: Verilen iki çember, birbirinin düz veya ters olmak üzere iki türlü homotetiğidir. Homotetik iki çemberin dış ve iç teğetlerinin O'O merkezler doğrusunu kestiği noktalar homoteti merkezleridir.

Teorem : iki şekil ayrı ayrı başka bir şeklin homotetiği iseler; bu iki şekil de birbirinin homotetiğidirler. üç homoteti merkezi bir doğru üzerindedir ve bu doğruya homoteti ekseni denir.



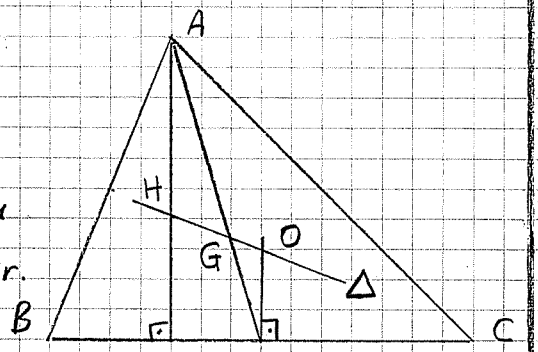
Problem : Bir üçgenin içine bir kare çizilmesi.

BC kenarı üzerinde alınan herhangibir D noktasından BC ye dik çıkılarak E noktası bulunur. Bir kenarı (DE) olan (DEFG) karesi çizilir. Üçgenin B köşesi F noktası ile birleştirilip uzatılırak AC yi kestiği F' noktası bulunur. F' den BC ye inilen dikmenin ayağı G' noktası bulunur. Bir kenarı F'G' olan E'F'G'D' karesi aranan karedir.



BİR ÜÇGENİN EULER DOĞRUSU

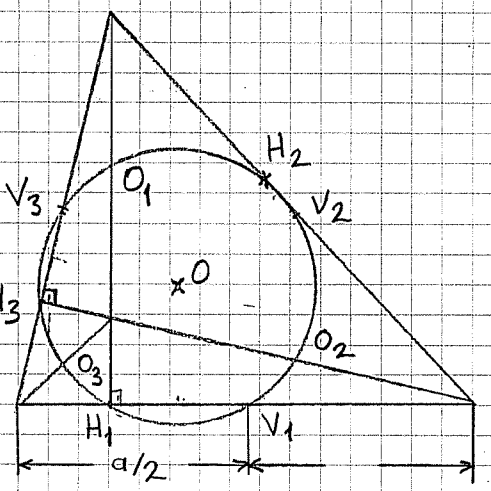
Teorem : Bir üçgende ortosantr, ağırlık merkezi ve üçgenin çevrel çemberinin merkezi bir doğru üzerindedir. Bu doğruya Euler Doğrusu denir.



NOT : Ortosantr, yüksekliklerin kesişme noktasıdır.

BİR ÜÇGENİN EULER ÇEMBERİ (DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ)

Teorem : Bir üçgenin kenarlarının orta noktaları, yükseklik ayakları, ortosantrı köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları bir çember üzerindedir. Bu çembere dokuz nokta çemberi veya Euler Çemberi denir.

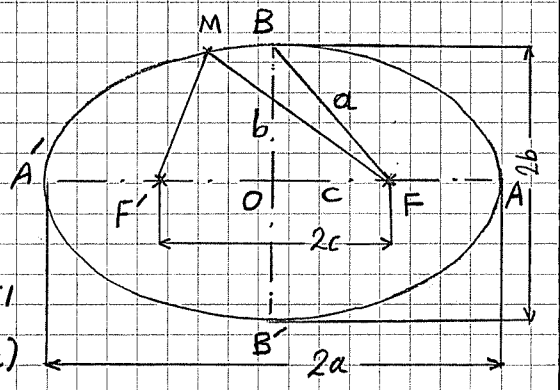


NOT : Çemberin merkezi Euler Doğrusu üzerindedir.

E L İ P S

Tanımlar: Bir düzlem içindeki sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine ELİPS denir.

$$MF' + MF = 2a \quad \text{dır.}$$



1) F', F Noktaları : Elipsin odakları dır.

2) |F'F| Doğru parçası : Elipsin Odaklar arası uzaklık veya Odaklar parçası. (2c)

3) |MF'|, |MF| : Elipsin ışınları veya yarıçap vektörleri.

4) A', A, B', B Noktaları : Elipsin köşeleri.

5) F'F Doğrusu : Büyük eksen veya Odaklar ekseni.

6) |A'A| Doğru parçası : Büyük eksen uzunluğu (2a). [AA', simetri ekseni dir]

7) B'B Doğrusu : Küçük eksen [simetri ekseni dir.]

8) |B'B| Doğru Parçası : Küçük eksen uzunluğu (2b)

NOT : 1) $a^2 = b^2 + c^2$ dir.

2) Bir elipsin eksen uzunlukları belli ise, o elips belli olur.

9) $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ oranına elipsin DIŞ MERKEZLİĞİ denir. [Eksantrikliği de denir]

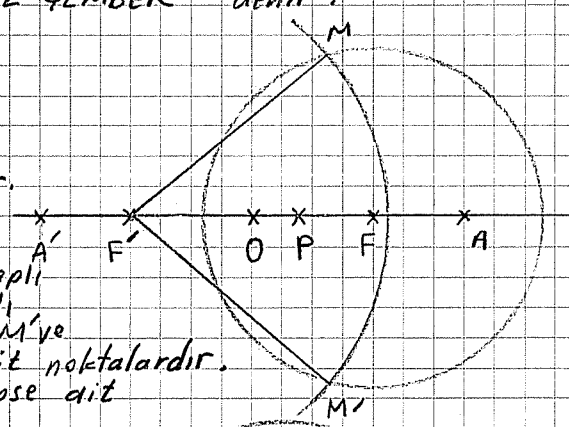
10) $\frac{a-b}{a}$ oranına elipsin BASIKLIĞI denir.

11) Bir elipsin odaklarından ibiri merkez olmak üzere çizilen 2a yarıçaplı çembere DOĞRULTMAN ÇEMBERİ denir.

12) O merkezli a yarıçaplı çembere ASAL ÇEMBER denir. O noktası, simetri merkezidir.

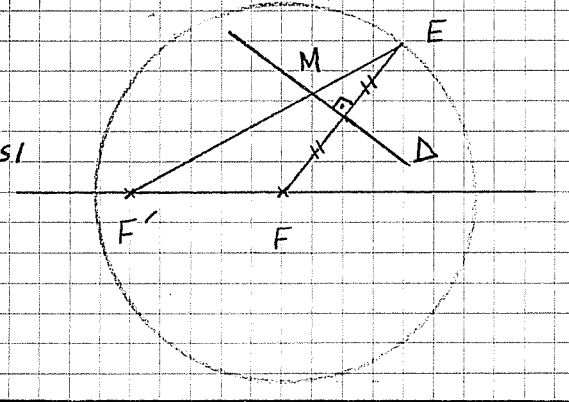
ELİPSİN NOKTA NOKTA ÇİZİLMESİ

1- Elipsin F' ve F odakları ile 2a uzunluğu verilmiş olsun.
F', F ekseni çizilerek, ortası O bulunur.
|OA'| = |OA| = a alınarak A' ve A noktaları bulunur. |A'A| arasında herhangibir P noktası alınır. |PA| yarıçaplı F merkezli çember ile |PA'| yarıçaplı F' merkezli çemberin kesim noktaları M' ve M olsun. M ve M' noktaları elipse ait noktalardır. P noktası, A'A arasında gezdirilerek elipse ait birçok noktalar elde edilir.



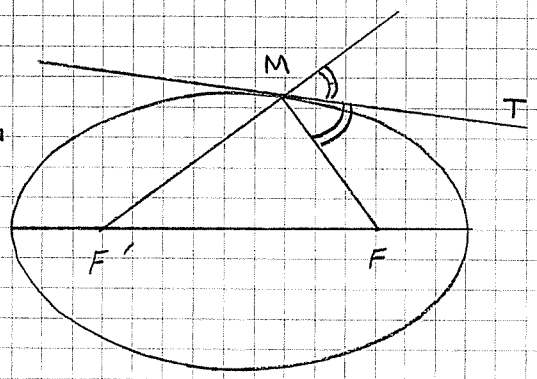
2- Elipsin F' ve F odakları ile Doğrultman Çemberi verilmiş olsun.

Çember üzerinde alınan herhangibir E noktası alınır. F'E ve FE doğru parçaları çizilir. |FE| nin orta dikmesi Δ doğrusunun |F'E| yi kestiği M noktası elipse ait noktadır.



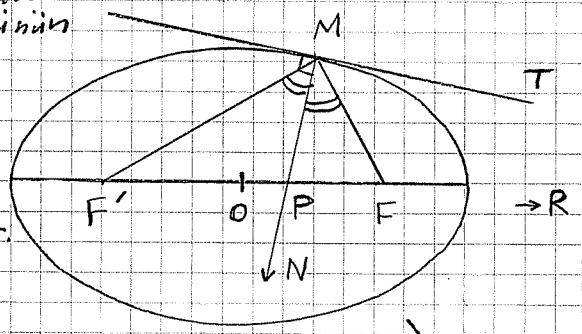
Teorem : Verilen bir çembere teğet olan ve bu çember içinde verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir elipstir.

Teorem : Bir elipsin üzerinde alınan bir M noktasındaki teğet, bu noktayı odaklara birleştiren yarıçap vektörlerinin meydana getirdiği açıların dış açıortayıdır.



SONUÇLAR: 1) Elipsin köşel teğetleri, bu köşelerden geçen eksenlere diktir.

2) Bir elipsin herhangibir normali değme noktasından geçen iki yarıçap vektörünün meydana getirdiği açının açıortayıdır.

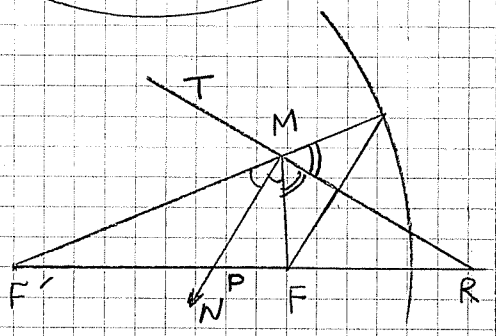


Teğetin FF' eksenini kestiği nokta R olsun.

(FF'PR) bölmesi, bir harmonik bölmedir.

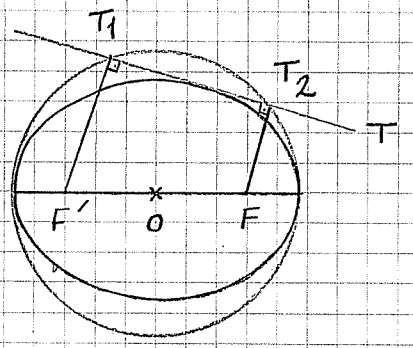
$|OF'|^2 = |OP| \cdot |OR|$ dir.

3) Bir elipsin odaklarından birinin bir teğete göre simetriği odak merkezli doğrultman çemberi üzerindedir.



Karşıt Teorem: Bir elipsin odaklarından birinin bir doğruya göre simetriği, diğer odak merkezli doğrultman çemberi üzerinde ise, bu doğru elipsin bir teğetidir.

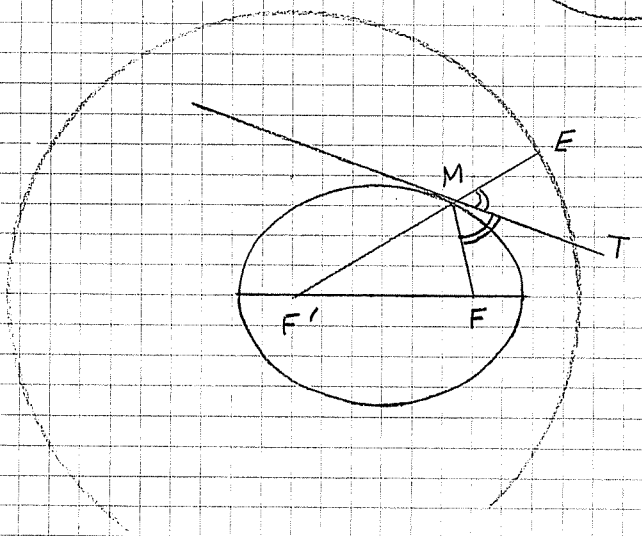
Teorem : Bir elipsin odaklarının teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri, Asal çemberdir.



UYGULAMALAR

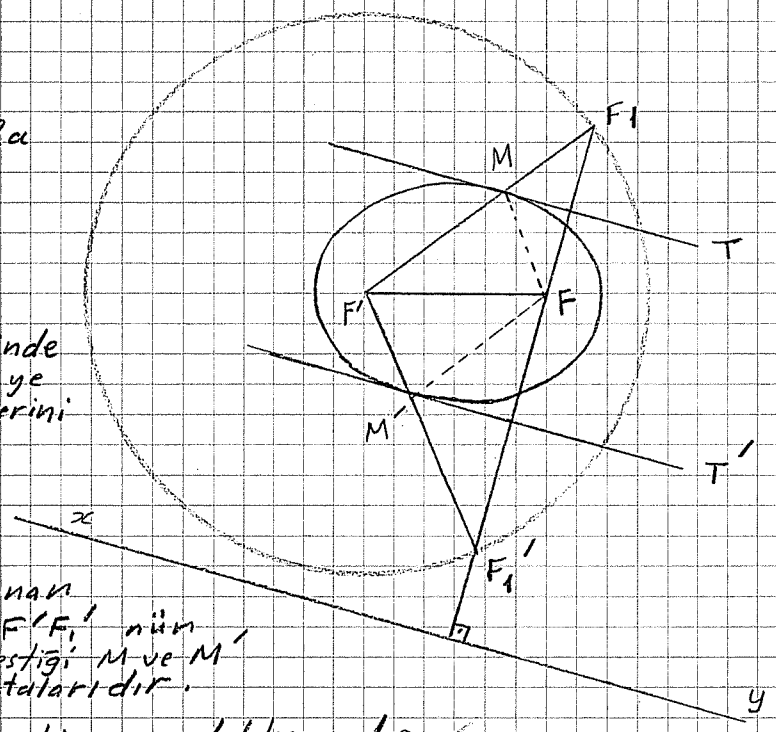
1) Bir elipsin üzerindeki bir noktadan elipse teğet çizilmesi

M değme noktasındaki $|F'M|$ ve $|FM|$ yarıçap vektörleri çizilir. $F\hat{M}E$ açısının açıortayı olan T doğrusu aranan teğettir.



2) Bir elipsin verilen bir doğrultuya paralel teğetinin çizilmesi

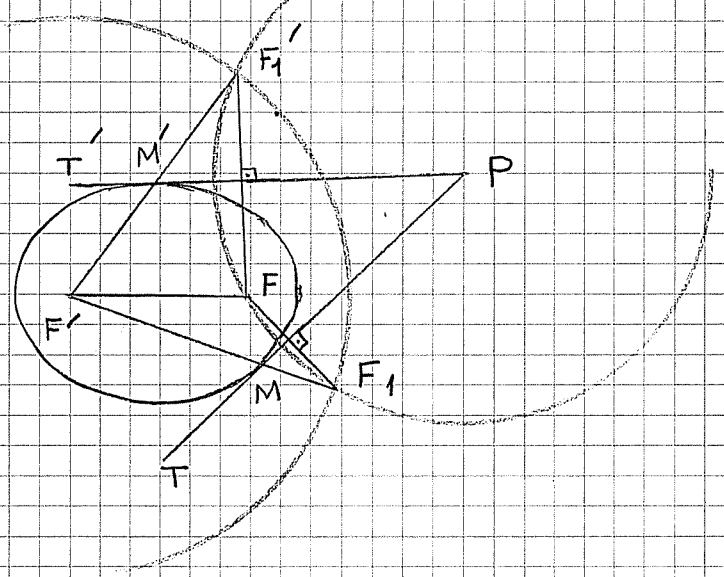
Elips F', F odakları ve $2a$ uzunluğu ile verilsin. xy doğrusuna paralel teğeti çizilecek. Elipsin F odağının çizilecek teğete göre simetriği F' merkezli doğrultman çemberi üzerinde olacağından; F'den xy ye çizilen dikmenin F' çemberini kestiği F_1, F_1' noktaları F nin teğetlere göre simetrik noktalarıdır. FF_1 ve FF_1' nün orta dikmeleri olan T ve T' doğruları aranan teğetlerdir. $F'F_1$ ve $F'F_1'$ nün T ve T' teğetlerini kestiği M ve M' noktaları; değme noktalarıdır.



NOT: $MFM'F'$ dörtgeni bir paralelkenardır.

3) Bir elipse, verilen bir

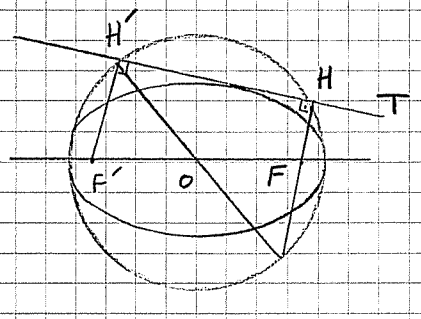
Elips F', F odakları ve $2a$ uzunluğu ile verilsin. F' merkezli doğrultman çemberi ile P merkezli ve F den geçen çemberin kesim noktaları F_1 ve F_1' olsun. FF_1' ve FF_1 in orta dikmeleri PT' ve PT aranan teğetlerdir.



Teorem: Bir elipsin odaklarının herhangibir teğete olan uzaklıklarının çarpımı sabit ve b^2 ye eşittir.

$$|FH| \cdot |F'H'| = (a-c)(a+c) = b^2$$

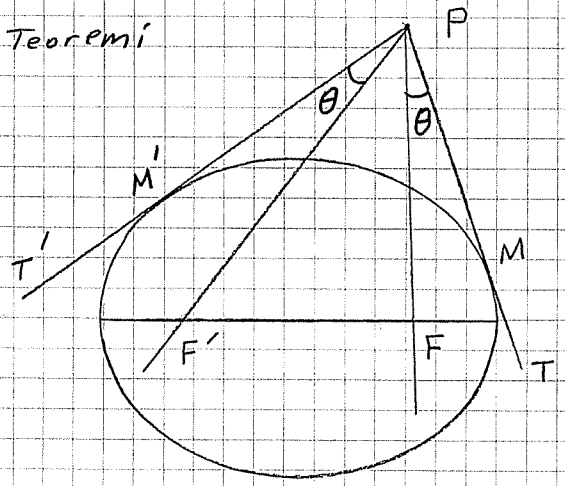
dir.



I. Ponsöle (Jean Victor Poncelet) Teoremi

Bir elipsin dışında alınan bir P noktasından bu elipse çizilen teğetler, bu noktayı odaklara birleştiren doğrularla eşit açılar yaparlar.

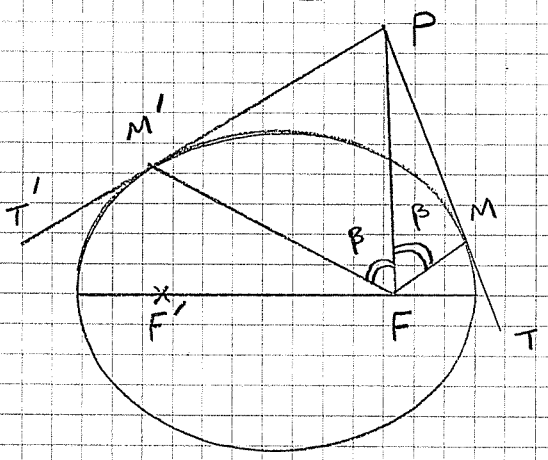
θ açıları eşittir.



II. Ponsöle Teoremi

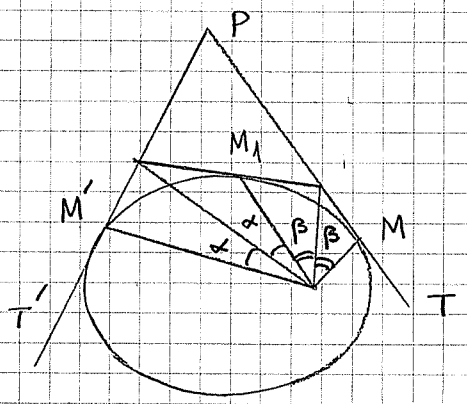
Bir elipsin dışında alınan bir P noktasını odaklardan birine birleştiren doğru, odağı değme noktalarına birleştiren doğruların meydana getirdiği açının açıortayıdır.

[Bir elipse dışındaki bir noktadan teğetler çizilse; teğet parçaları odaklardan eşit açı altında görülür.



Teorem :

Bir elipsin sabit iki teğeti arasında bulunan değişen üçüncü bir teğet parçası, odaklardan sabit açı altında görülür.



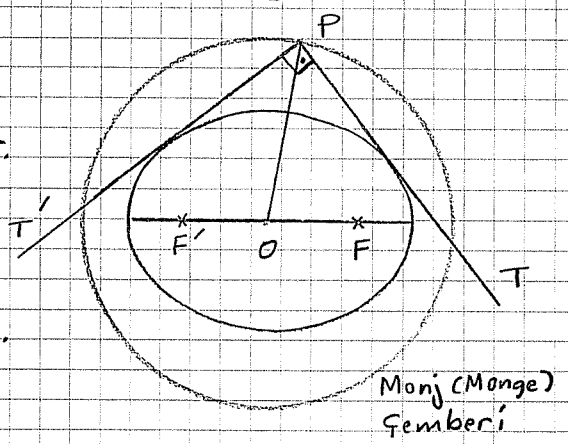
Teorem :

Bir elipsin birbirine dik iki teğetinin kesişme noktalarının geometrik yeri, merkezi elipsin merkezi olan bir çemberdir.

Bu çemberin yarıçapı ;

$|OP| = \sqrt{a^2 + b^2}$ olup,

Monj (Monge) Çemberi denir.



Teorem :

Odakları aynı olan iki elipsin herbirine ait birer teğetleri dik açı yapardk kesişirse, kesişme noktalarının geometrik yeri, elipslerle aynı merkezli olan bir çemberdir.

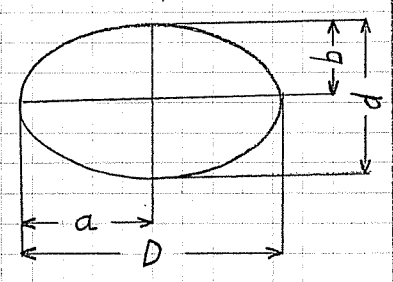
ELİPSİN ÇEVRESİ

$$Ç = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6-\dots\right]$$

Formülü ile bulunur. Burada; $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$ dir. $k^2<1$ olmalıdır.

Başka bir çevre formülü :

$$Ç = \pi(a+b)\left(1+\frac{R^2}{4}+\frac{R^4}{64}+\frac{R^6}{256}+\dots\right) \text{ dir.}$$



Burada : $R=\frac{a-b}{a+b}$ dir.

Yaklaşık çevre formülleri :

$$Ç \approx \pi(a+b)\frac{64-3R^4}{64-16R^2}$$

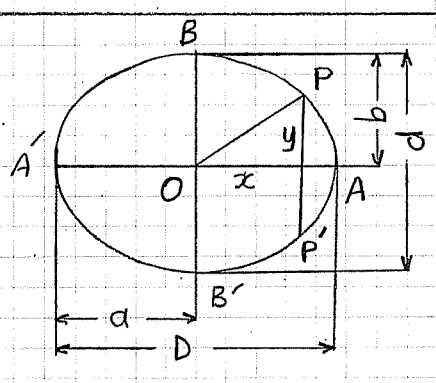
$$Ç \approx \pi(a+b) \approx \pi\sqrt{2(a^2+b^2)} \approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \approx \pi\left(\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$$

$$Ç \approx \frac{D+d}{2}\cdot\pi \approx 1.99\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

ELİPSİN ALANI

$A=\pi ab$ dir.

$A=\pi\frac{D}{2}\cdot\frac{d}{2}=\frac{\pi Dd}{4}$ dir.



AOP Kesmesinin alanı : $A=\frac{ab}{2}\cos^{-1}\frac{x}{a}$

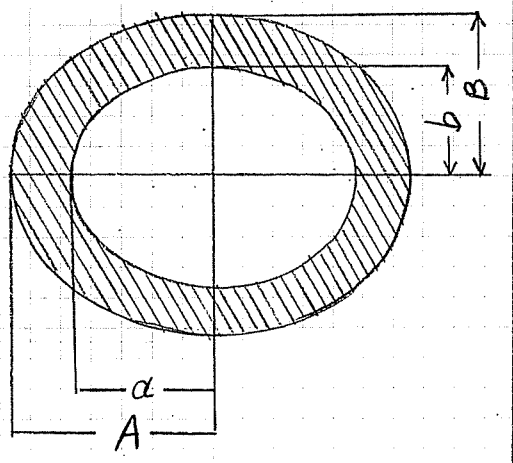
POB Kesmesinin alanı : $A=\frac{ab}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

BPP'B' Kesmesinin alanı : $A=xy+ab\sin^{-1}\frac{x}{a}$

PAP' Parçasının alanı : $A=-xy+ab\cos^{-1}\frac{x}{a}$ dır.

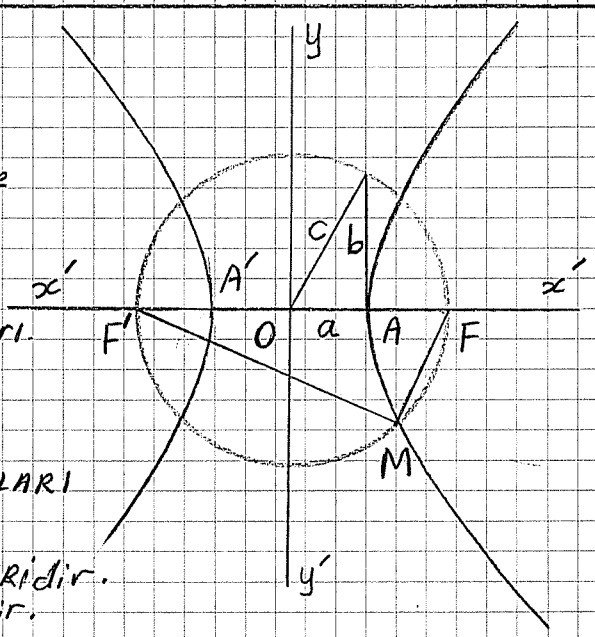
İçi BOŞ ELİPSİN ALANI

$A=\pi(AB-ab)$ dir.



HİPERBOL

Tanımlar :



Bir düzlem içindeki sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine HİPERBOL denir.

$|MF' - MF| = 2a$ dır.

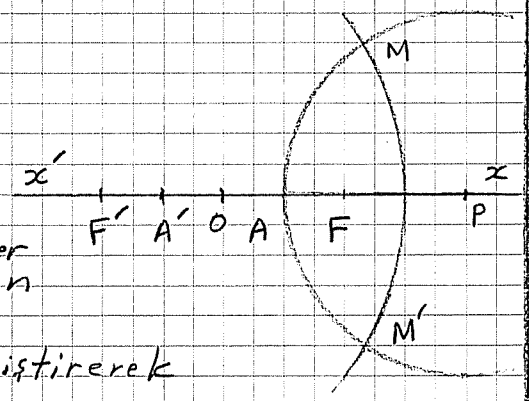
1) F', F Noktaları : Hiperbolün odakları.
2) $|F'F|$ Doğru Parçası : Hiperbolün ODAKLAR ARASI UZAKLIK veya ODAKLAR PARÇASI dır.
3) $|MF'|$, $|MF|$: Hiperbolün ODAK IŞINLARI veya YARIÇAP VEKTÖRLERİ dir.
4) A', A Noktaları : Hiperbolün KÖŞELERİdir.
5) $|F'F|$ Doğrusu : ODAKLAR EKSENİdir. SİMETRİ EKSENİdir.
6) y'y Doğrusu : Odaklar parçasının orta dikmesi olup, simetri eksenidir.
7) O Noktası : Hiperbolün merkezidir. Simetri Merkezidir.
8) a, b, c Uzunlukları : EKSEN PARÇALARI dır.

$c^2 = a^2 + b^2$ dir.

9) $\frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ oranına hiperbolün DIŞ MERKEZLİĞİ denir. [Eksantrikliği de denir.]
10) Bir hiperbolde eksen parçaları eşitse; yani, $a = b$ ise bu hiperbole İKİZKENAR HİPERBOL denir.
11) Bir hiperbolün odaklarından birisi merkez olmak üzere $2a$ yarıçaplı çizilen çembere DOĞRULTMAN ÇEMBERİ denir.
12) Hiperbolün merkezi olan O noktası ile aynı merkezli ve a yarıçaplı çembere ASAL ÇEMBER denir.

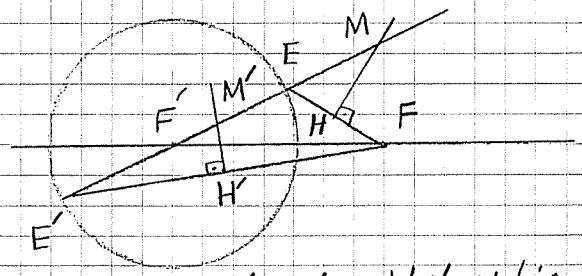
ELİPSİN NOKTA NOKTA ÇİZİLMESİ

1) F' ve F odakları ile $2a$ elemanları verilen hiperbolün çizilmesi



Odaklar arası uzaklığın O orta noktasının iki tarafında A' ve A noktaları alınır. A'A yani x'x doğrusu üzerinde ve F'F nin dışında herhangibir P noktası alınır. PA yarıçaplı ve F merkezli çember ile PA' yarıçaplı ve F' merkezli çemberin M ve M' noktaları hiperbole dittir.
P noktası, odaklar ekseni üzerinde yer değiştirerek birçok noktalar elde edilir.

2) F', F odakları ile doğrultman çemberi verilmiş olsun.

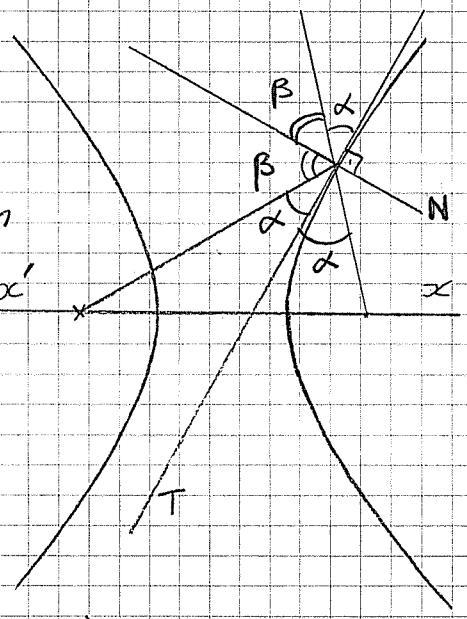


F' merkezli doğrultman çemberi üzerinde herhangibir E noktası alınarak F' ile birleştirilip uzatılır. E' noktası bulunur. E'F ve EF nin orta dikmelerinin F'E yi kestiği M' ve M noktaları hiper-

bole aittir.

Teorem : Verilen bir çembere teğet olan ve bu çemberin dışında verilen bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir HİPERBOL dür.

HİPERBOLÜN TEĞETLERİ



Teorem : Hiperbolün üzerinde alınan bir noktadan bu hiperbole çizilen teğet, bu noktayı odaklara birleştiren yarıçap vektörlerinin meydana getirdiği açının açıortayıdır.

$\alpha = \alpha$ dır.

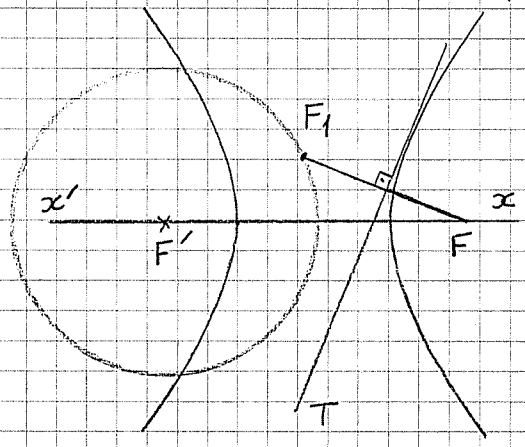
SONUÇLAR :

1) Hiperbolün köşel teğetleri, odaklar eksenine diktir.

2) Hiperbolün bir noktasındaki normali, hiperbolün bu noktasındaki yarıçap vektörlerinin meydana getirdiği açının dış açıortayıdır.

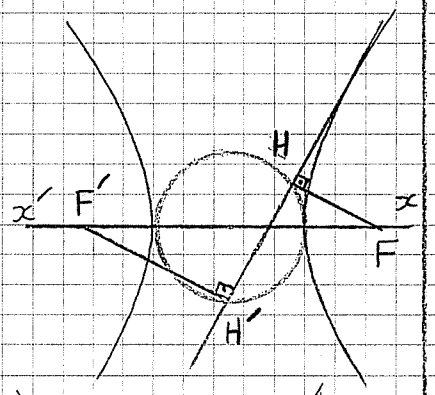
$\beta = \beta$ dır.

3) Bir hiperbolde, bir odağın teğete göre simetriği, diğer odak merkezli doğrultman çemberi üzerindedir.

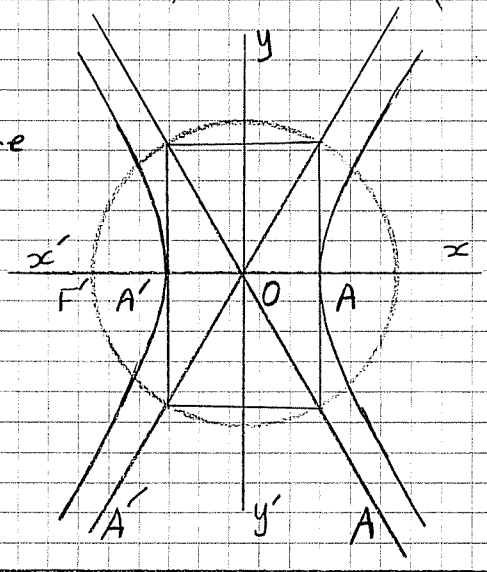


Karşıt Teorem : Bir hiperbolün F odağının bir doğruya göre simetriği F' odak merkezli doğrultman çemberi üzerinde ise, bu doğru hiperbolün bir teğetidir.

Teorem : Bir Hiperbolün odaklarının teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri asal çemberdir.



HİPERBOLÜN ASİMTOTLARI



Teorem : Bir hiperbolün merkezinden geçen iki asimptotu vardır.

Sonuç : Bir hiperbolün asimptotları eksenlere göre simetriktirler.

Teorem : Bir hiperbolün asimptotları, eksen parçalarının meydana getirdiği dikdörtgenin köşelerinden geçer.

Sonuçlar 1: Bir hiperbolde odakların asimptotlara olan uzaklığı b dir.

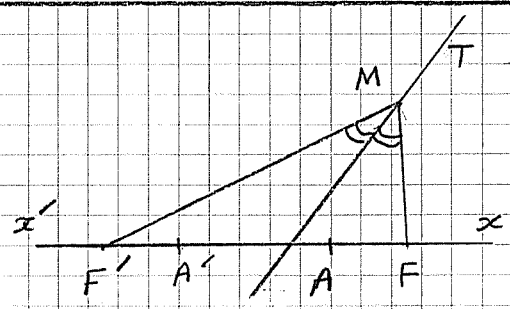
2 : İkizkenar hiperbolün asimptotları birbirine diktir.

3 : İkizkenar hiperbolde asimptotlar eksenlerle 45° Lik açı yaparlar.

HİPERBOLDE TEĞET ÇİZİMLERİ

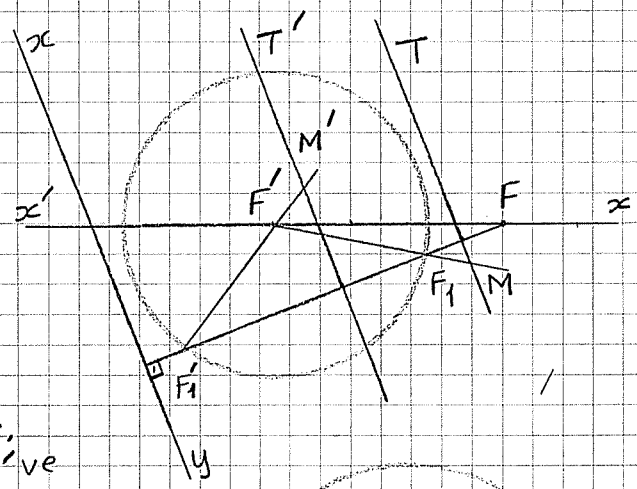
1) Hiperbolün üzerindeki bir noktadan bu hiperbole teğet çizilmesi.

Bu noktayı hiperbolün odaklarına birleştiren yarıçap vektörlerinin meydana getirdiği açının iç açıortayı aranan teğettir.



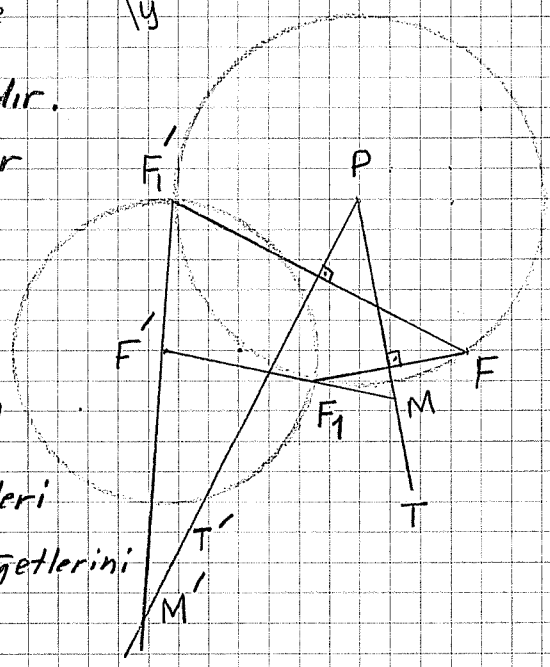
2) Bir hiperbolün verilen bir xy doğrusuna paralel teğetinin çizilmesi.

Hiperbole çizilmesi istenen T ve T' teğetleri, xy ye paralel olacağından F odağından xy ye çizilen dikmenin F' doğrultman çemberini kestiği F_1 ve F_1' noktaları F odağının teğetlere göre simetriği dirler. O halde, FF_1 ile FF_1' nün orta dikmeleri aranan teğetlerdir. $F'F_1'$ nin T' yü kestiği M' ve $F'F_1$ rin T yi kestiği M noktaları değme noktalarıdır.



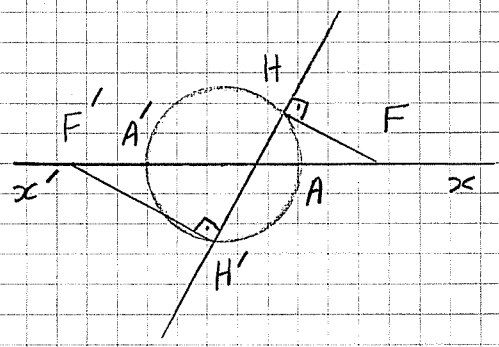
3) Bir Hiperbole, verilen herhangibir P noktasından teğet çizilmesi.

Hiperbol F, F' odakları ve 2a uzunluğu ile verilmiş olsun. Herhangibir P noktasından bu hiperbole teğet çizilmesi için, P merkezli ve PF yarıçaplı bir çember çizilir. Bu çemberin F' doğrultman çemberini kestiği noktalar F_1 ve F_1' olsun. FF_1 ile FF_1' nün orta dikmeleri aranan teğetlerdir. $F'F_1$ ve $F'F_1'$ nün T ve T' teğetlerini kestiği M ve M' noktaları da değme noktalarıdır.



Teorem : Bir hiperbolde odakların teğetlere olan uzaklıklarının çarpımı sabit ve b^2 ye eşittir.

$$|FH| \cdot |F'H'| = b^2 \quad \text{dir.}$$

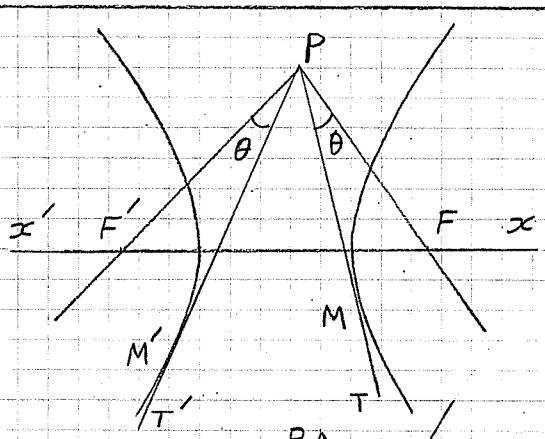


PONSÖLE TEOREMLERİ

I. Ponsöle Teoremi

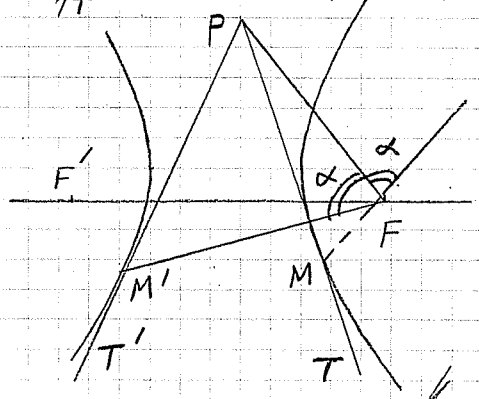
Bir hiperbolün dışında alınan bir noktadan bu hiperbole çizilen teğetler, bu noktayı odaklara birleştiren ışınlarla eşit açılar yaparlar.

$\theta = \theta$ dır.



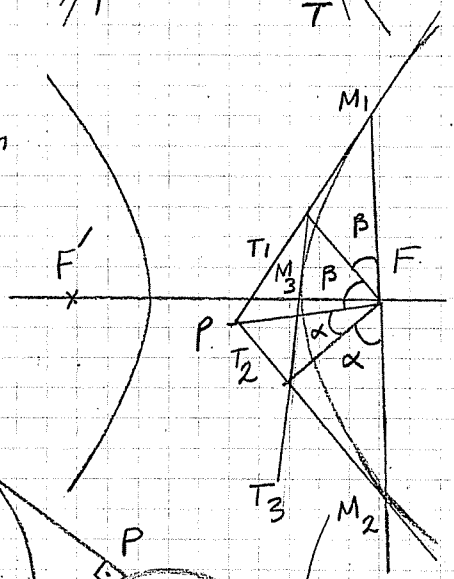
II. Ponsöle Teoremi

Bir hiperbolün dışında alınan bir noktayı odaklardan birine birleştiren ışın, bu odağı değme noktalarına birleştiren doğruların meydana getirdiği açının açıortayıdır.



Teorem :

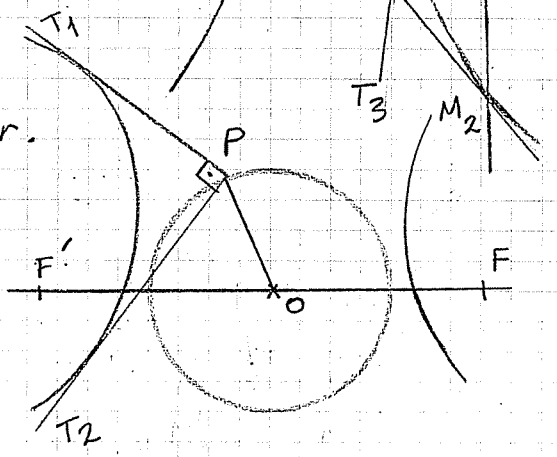
Bir hiperbolün sabit iki teğeti arasında kalan değişen üçüncü bir teğet parçası, odakların birinden sabit açı altında görülür.



Teorem : Bir hiperbolün birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri, merkezi hiperbolün merkezi olan çemberdir.

Bu çemberin çapı :

$|OP| = \sqrt{a^2 - b^2}$ dir.



HİPERBOLÜN ALANI

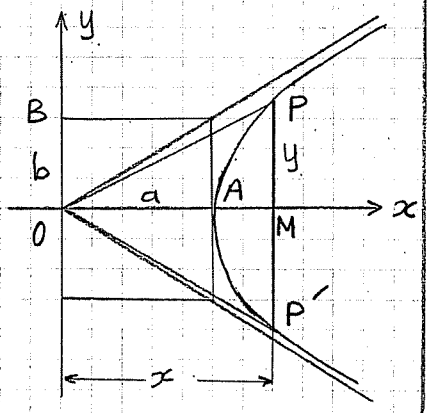
OPAP'O Şeklinin Alanı :

$$A = ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = ab \cosh^{-1}\frac{x}{a}$$

PAP' Kesmesinin Alanı :

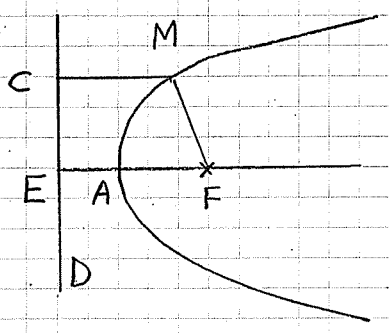
$$A = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

$$A = xy - ab \cosh^{-1}\frac{x}{a}$$



PARABOL

Tanım : Bir düzlem içinde sabit bir doğrü ve sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine PARABOL denir.



$|MF| = |MC|$ dir.

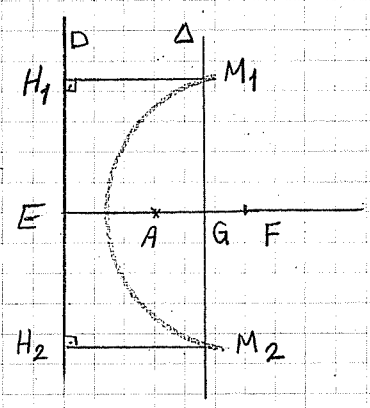
1) F noktası, parabolün odağıdır.
2) D doğrusu, parabolün DOĞRULTMANI dır.
3) A noktası, tepe noktasıdır. Köşe Noktası da denir.

$|AE| = |AF|$ dir.

4) $2|FE| = p$, parabolün PARAMETRESI dir.
5) MF doğrusu, parabol ışını veya yarıçap vektörüdür.

NOT : Elipsin bir odağı ve buna komşu köşesi sabit kalmak üzere, büyük ekseni sonsuza doğru büyüdüğünde, Limit şekli bir paraboldür.

ELIPSIN NOKTA NOKTA ÇIZILMESI



Parabol, odak ve doğrultmanı ile verilmiş olsun. F odağından D doğrultmanına FE dikmesi inilir. EF nin A orta noktası bulunur. A ve F noktaları arasında herhangibir G noktası alınır. G noktasından D doğrultmanına Δ paraleli çizilir. F merkezli ve GE yarıçaplı çemberin Δ doğrusunu kestiği M_1 ve M_2 noktaları Parabole aittir.

PARABOLÜN EKSENI

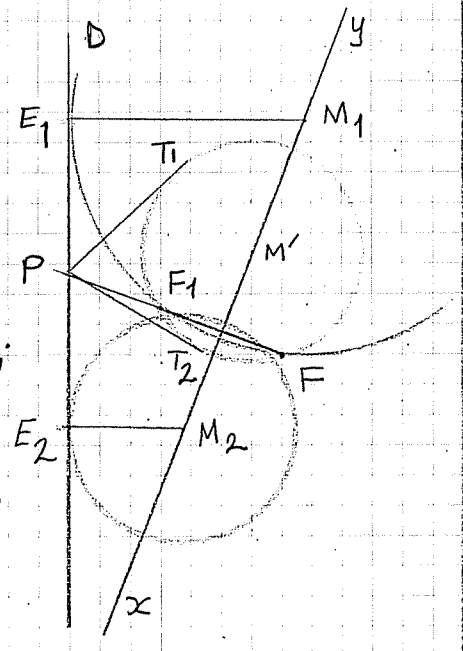
Teorem : Bir parabolde odaktan doğrultmana çizilen dik doğru SIMETRI EKSENI dir.

PARABOLÜN DOĞRULTMANI

Teorem : Sabit bir noktadan geçen ve sabit bir doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bir paraboldür.

Uygulama :

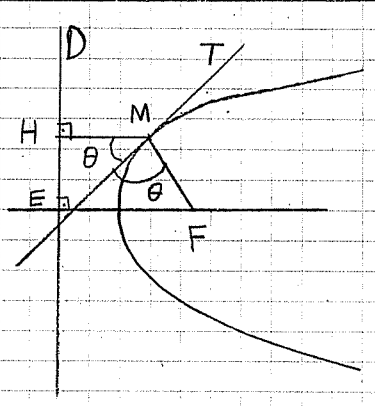
Odak ve doğrultmanı ile verilen bir parabolü çizmeden bir doğru ile ortak noktalarının bulunması.



F odağı ve D doğrultmanı ile verilen bir parabolün xy doğrusu ile kesim noktaları bulunacak. Bu noktalar, F den geçen ve D doğrusuna teğet olan çemberin merkezidir. Kesişme noktası, doğrunun da üzerinde olacağından çizilecek çemberin merkezi xy doğrusu üzerindedir. F den geçen ve merkezi xy doğrusu üzerinde bulunan çember F nin xy ye göre simetriği F_1 noktasından da geçer. Bu durumda problem, F ve F_1 noktalarından geçen ve D doğrusuna teğet olan çemberin çizilmesine dönüşür. Çemberlerin merkezleri kesişme noktalarıdır.

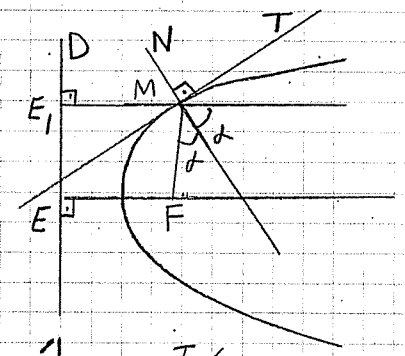
Teorem :

Bir parabolün üzerinde alınan bir noktadan bu parabole bir teğet çizilse; bu teğet değme noktasını odağa birleştiren yarıçap vektörü ile bu noktadan parabolün ekseninde çizilen paralelin meydana getirdiği açının açıortayıdır.

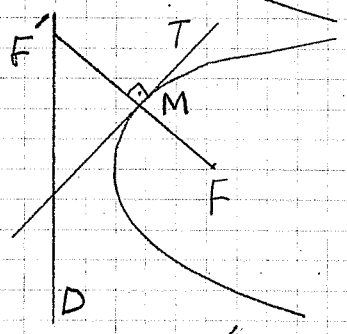


Sonuçlar 1) Parabolün köşel teğeti eksene diktir.

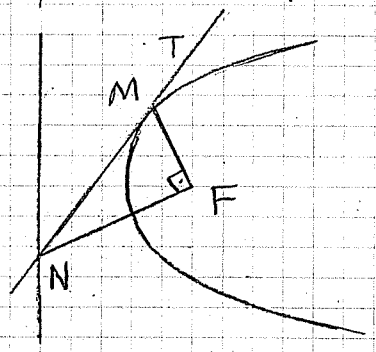
2) Parabolün herhangibir normali, değme noktasını odağa birleştiren yarıçap vektörü ile değme noktasından eksene çizilen paralelin meydana getirdiği açının açıortayıdır.



3) Bir parabolde odağın teğete göre simetriği doğrultman üzerindedir.



4) Bir parabolün değme noktası ile doğrultman arasında kalan teğet parçası odaktan dikaçı altında görülür.



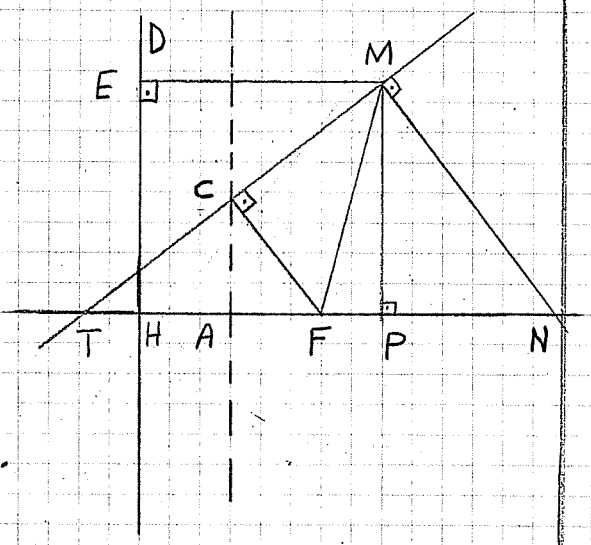
Teorem : Bir parabolün odağının teğetler üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri parabolün köşel teğetidir.

Teorem : Bir parabolde teğetaltı, köşe tarafından iki eşit parçaya bölünür.

$|AT| = |AF|$ dir.

Teorem : Bir parabolde normalaltı sabit ve yarı parametreye eşittir.

$|PN| = |FH|$ dir.

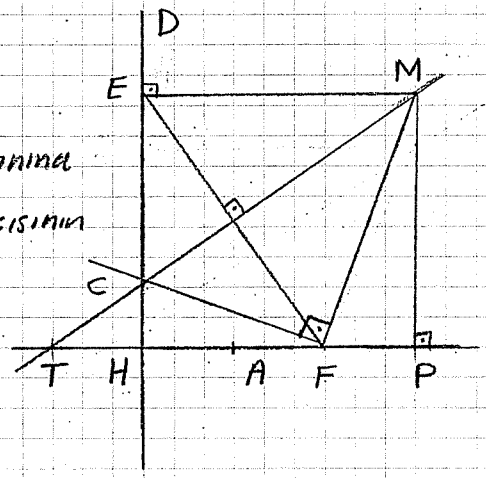


Sonuç : Bir parabolde odak, çizilen teğet ve normalin ekseni kestiği noktalarla teğetin değme noktasına eşit uzaklıktadır.

$|FN| = |ME| = |MF| = |FT|$ dir.

TEĞET ÇİZİMİ

A) Bir parabolün üzerinde alınan bir noktadan bu parabole teğet çizilmesi



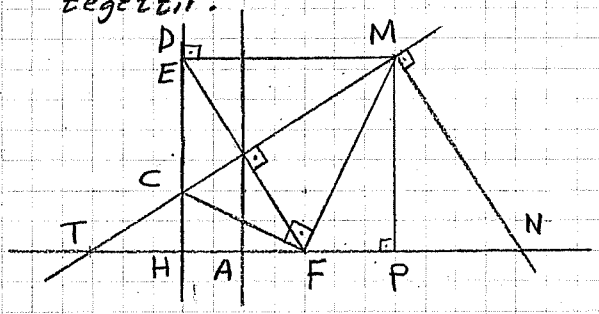
1nci Yol : M noktasından parabolün doğrultmanına bir ME dikmesi inilir. M noktası F odağına birleştirilir. FME açısının açı ortayı veya EF nin orta dikmesi aranılan teğettir.

2nci Yol : Eksen üzerinde ve köşe tarafında $|FT| = |FM|$ alınarak T noktası bulunur. MT aranan teğettir.

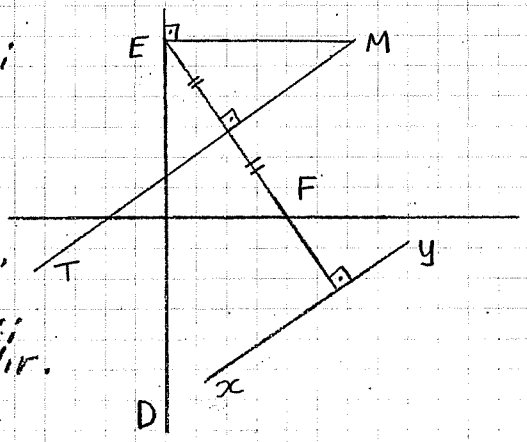
3 ncü Yol : Odak yerine A köşesi biliniyorsa, M den eksene MP dikmesi çizilir. Eksen üzerinde $|AT| = |AP|$ alınarak T noktası bulunur. MT aranan teğettir.

4 ncü Yol : F odağından MF yarıçap vektörüne FC dikmesi çizilir. Dikmenin doğrultmanı kestiği C noktası ile M noktası birleştirilir. MC aranan teğettir.

5 nci Yol : M noktasından eksene MP dikmesi inilir. $|PN| = |FH|$ alınarak N noktası bulunur. M noktasından MN ye dik çıkılır. Bu dikme aranan teğettir.

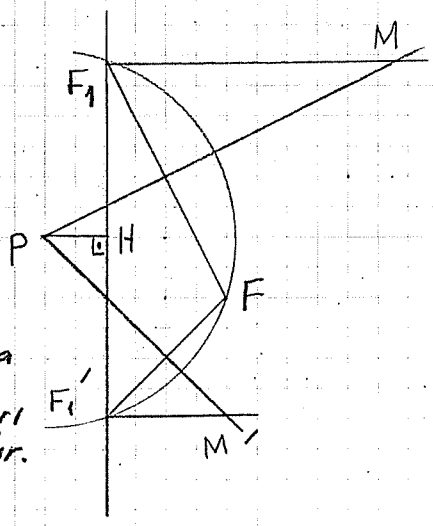


B) Bir parabole verilen bir xy doğrusuna paralel teğet çizilmesi



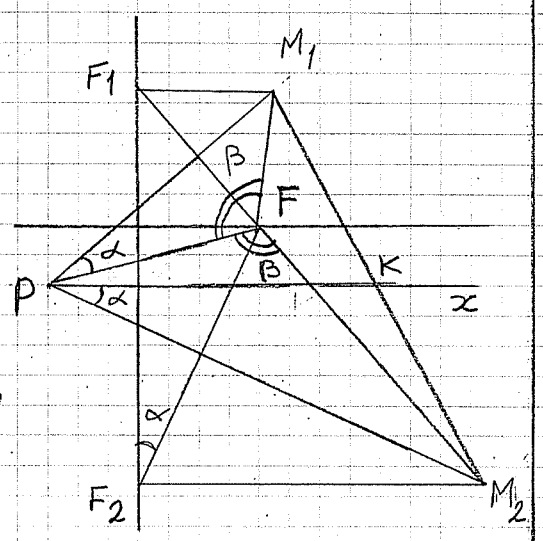
Parabol, F odağı ve D doğrultmanı ile verilmiş olsun. F odağından xy doğrusuna bir dikme çizilerek Doğrultmanı kestiği E noktası bulunur. Bu dikme aranan teğete diktir. EF nin orta dikmesi aranan teğettir. Doğrultmana E noktasından çıkılan dikmenin teğeti kestiği M noktası, teğet noktasıdır.

C) Bir parabole verilen herhangi bir noktadan teğet çizilmesi



Verilen P noktası merkez olmak üzere PF yarıçaplı çemberin, D doğrultmanını kestiği F_1 ve F_1' noktaları F nin çizilecek teğetlere göre simetrikleridir. FF_1 ve FF_1' nün orta dikmeleri aranan teğetlerdir. F_1 ve F_1' den doğrultmana çizilen dikmelerin bu orta dikmeleri kestiği M ve M' noktaları aranan teğetlerin değme noktalarıdır.

PONSÖLE TEOREMLERİ



1) Bir parabolün dışında alınan bir noktadan parabole çizilen teğetlerden biri ile bu noktadan eksene çizilen paralel doğrunun meydana getirdiği açı, diğer teğet ile bu noktayı odağa birleştiren doğrunun meydana getirdiği açıya eşittir. $\alpha = \alpha$ dır.

2) Bir parabolün dışında alınan bir noktayı odağa birleştiren doğru, odağı değme noktalarına birleştiren doğruların meydana getirdiği açının açıortayıdır. $\beta = \beta$ dır.

Sonuç : Bir parabolde iki teğetin kesişme noktasından eksene çizilen paralel, değme noktalarını birleştiren kirişin ortasından geçer

$|KM_1| = |KM_2|$ dir.

Teorem : Bir parabolün sabit iki teğeti arasında kalan değişen bir teğet parçası, odaktan sabit açı altında görülür.

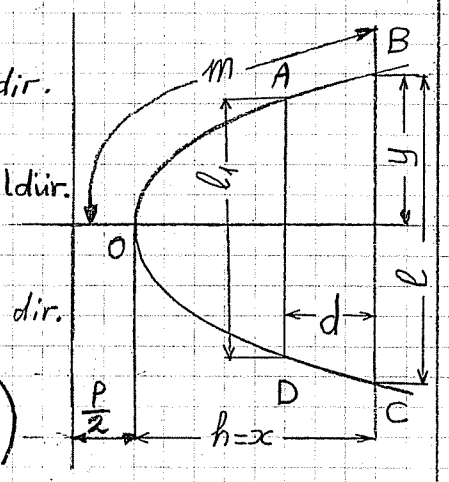
Teorem : Bir parabolün birbirine dik teğetlerinin kesişme noktalarının geometrik yeri, parabolün doğrultmanıdır.

Sonuç : Dik iki teğetin değme noktalarını birleştiren kiriş odaktan geçer.

PABOLÜN YAY UZUNLUĞU

BOC yayının uzunluğu L olsun.

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + 16h^2} + \frac{\ell^2}{8h} \cdot \ln\left(\frac{4h + \sqrt{\ell^2 + 16h^2}}{\ell}\right) \text{ dir.}$$



$$L = \ell\left(1 + \frac{8R^2}{3} - \frac{32R^4}{5} + \cdots\right) \text{ yaklaşık bir formüldür.}$$

Burada $R = \frac{h}{\ell}$ dir.

$$d = \frac{h}{\ell^2}(\ell^2 - \ell_1^2), \quad \ell_1 = \ell\sqrt{\frac{h-d}{h}}, \quad h = \frac{d\ell^2}{\ell^2 - \ell_1^2} \text{ dir.}$$

$$m = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \text{hyp.log}\left(\frac{2x}{p} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}\right)\right]$$

x, y ye göre küçük ise aşağıdaki formül oldukça yaklaşık sonuçlar verir.

$$m = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right] \quad \text{veya} \quad m = \sqrt{y^2 + \frac{4}{3}x^2} \text{ dir.}$$

PARABOLÜN ALANI

Yay uzunluğundaki şekil göz önüne alınırsa, BOC kesmesinin alanı:

$$A = \frac{2h\ell}{3} \text{ dir.}$$

ABCD Kısmının alanı :

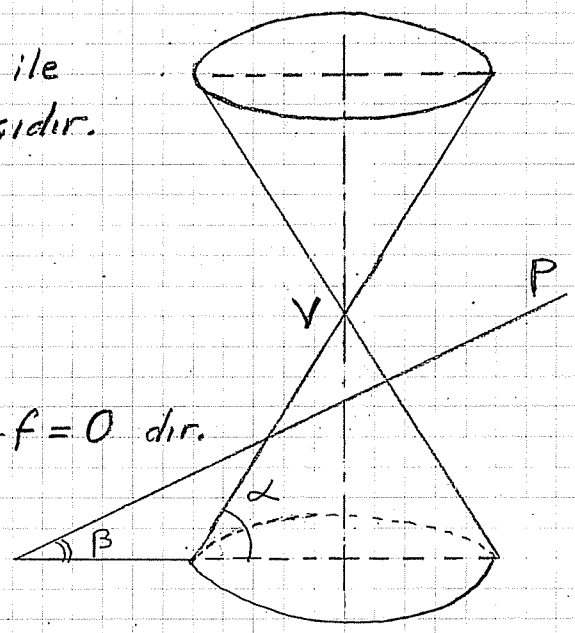
$$A = \frac{2}{3}d\left(\frac{\ell^3 - \ell_1^3}{\ell^2 - \ell_1^2}\right) \text{ dir.}$$

BİR DİK KONİNİN BİR DÜZLEM İLE KESİTLERİ

Elips, hiperbol, parabol bir düzlem ile bir koninin kesitleridir. Bu nedenle, bu eğrilere KONİK denir.

Dandölen (Dandelin) Teoremi :

Bir dönel koninin bir düzlem ile kesitleri aşağıda özet olarak ve tablo yardımıyla verilmiştir.



β, koni eksenine dik bir düzlem ile değişen P düzlemi arasındaki açıdır.

α, koninin taban açısıdır.

Koniklerin ikinci Dereceden Genel Denklemi :

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ dır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$ dir.

Kesitlerin cinsleri aşağıdaki tablodan kolayca anlaşılır.

	[$\Delta \neq 0$] P, V den geçmiyor.	[$\Delta = 0$] P, V den geçiyor	e
$\beta = 0$	$c = a$; $b = 0$; DAİRE	Nokta	0
$0 < \beta < \alpha$	$b^2 - ac < 0$; ELİPS	Nokta	$0 < e < 1$
$\beta = \alpha$	$b^2 - ac = 0$; PARABOL	Çakışan iki Doğru	$e = 1$
$\beta > \alpha$	$b^2 - ac > 0$; HİPERBOL	Kesişen iki Doğru	$e > 1$

KONİKLERİN GENEL TANIMI

Teorem :
Bir düzlem içinde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri koniktir. Bu oran 1 den küçük ise konik bir elips, 1 den büyük ise bir hiperbol ve 1 e eşit ise bir paraboldür.

KONİKLERİN TEĞETLERİ

Teorem : Bir koniğin bir odağının MM′ kirişini gördüğü açının açıortaylarından biri, doğrultman ile MM′ nün kesişme noktasından geçer.

Sonuçlar : 1) Bir konikte doğrultman ile değme noktası arasında kalan teğet parçası odaktan dikaçı altında görülür.

2) Bir koniğin doğrultmanı üzerindeki bir noktadan koniğe çizilen teğetlerin değme noktalarını birleştiren kiriş odaktan geçer.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

1 Geometri Dersleri
Turan Tanın,İnkılap ve Aka kitabevleri,İstanbul.

2 Géométrie
Roland Maillard,Albert Millet,Hachette,Paris.

3 Géométrie
L.Roux,E.Miellou,Imp.Artistique en Couleurs,Lyon.

4 Techniques de l'Ingénieur
C.Monteil,Techniques de l'Ingénieur,21 Rue Cassette,Paris.

5 Tables Numériques Univérselles
Marcel Boll,Dunod,Paris

6 Hutte I
Springer Verlag,Berlin.

7 Taschenbuch Für den Maschinenbau
H.Dubbel,Springer Verlag,Berlin.

8 Metall Westermann Tabellen
Jutz,Scharkus,Georg Westermann Verlag Braunschweig.

9 Tabellenbuch Für Metallgewerbe
Wilhelm Friedrich,Ferd.Dummlers Verlag,Bonn.

10 Tabellenbuch für metallverarbeitende Berufe
A.Leyenssetter,Europa-Lehrmittel O.H.G.,Wuppertal.

11 Mathematical Handbook for Scientists and Engineers
Granino A.Korn,Theresa M.Korn,McGraw-Hill,NewYork.

12 Mechanical Engineers' Handbook
Lionel S. Marks,McGraw-Hill,NewYork.

13 Chemical Engineers' Handbook
John H. Perry,McGraw-Hill,NewYork.

14 Handbook of Engineering Fundamentals
Ovid W. Esbach,John Wiley and Sons,NewYork.

15 Çeşitli Türkçe geometri kitapları.

16 Çeşitli teknik almanaklar.

Ek

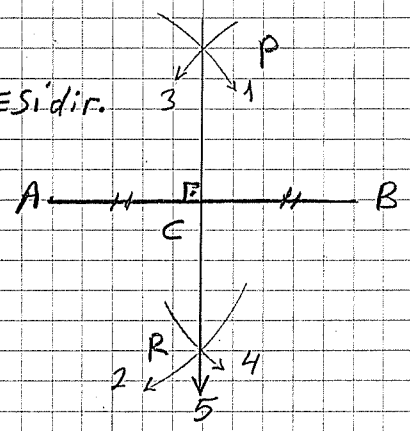
GEOMETRİK ÇİZİMLER

Bu bölümde,cetvel ve pergel kullanılarak yapılan geometrik çizimler verilmektedir.
Çizimler, basitten başlayarak karmaşığa doğru sıra takip etmektedirler.

BİR DOĞRU PARÇASININ İKİ EŞİT PARÇAYA BÖLÜNMESİ

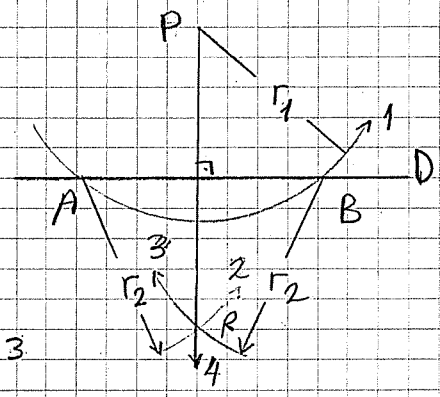
Çizim aynı zamanda, BİR DOĞRU PARÇASININ ORTA DİKMESİNİN ÇİZİLMESİdir.

Çizimin nasıl yapılacağı, yandaki şekilde sıra numaraları ile belirtilmektedir. |AC| = |BC| dir



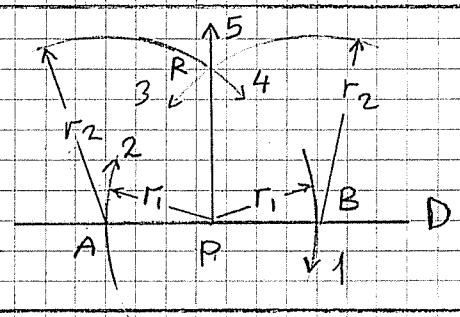
BİR DOĞRUYA DIŞINDAKİ BİR NOKTADAN DİKME İNİLMESİ

Pergel r_1 kadar açılarak sivri ucu verilen P noktasına konulur ve 1 yayı çizilir. 1 yayı D doğrusunu A ve B noktalarında kessin. Pergel r_2 kadar açılarak sivri ucu önce A'ya sonra B'ye konularak 2 ve 3 yayları çizilir. 2 ve 3 yaylarının kesişme noktası R ile ile P 4 nolu işlem ile birleştirilir. |PR| doğrusu aranan dikmedir.



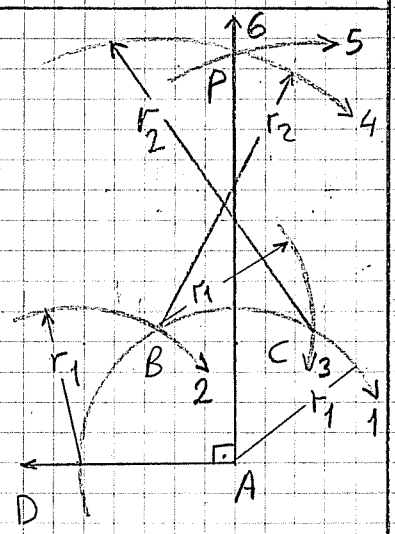
BİR DOĞRUYA ÜZERİNDEKİ BİR NOKTADAN DİKME ÇIKILMASI

İşlem sırası numaralar ile belirtilmiştir. |PR| aranan dikmedir.



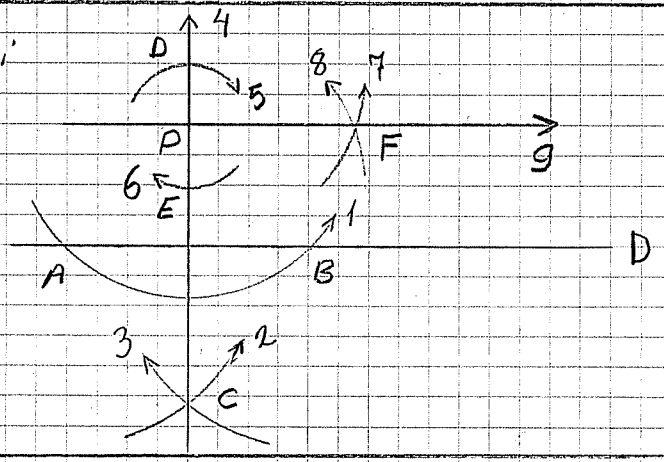
BİR DOĞRU PARÇASININ UCUNDAN DİKME ÇIKILMASI

Pergel r_1 kadar açılarak sivri ucu A ya konulup sırasıyla 1, 2 ve 3 yayları çizilerek B ve C noktaları bulunur. Pergel r_2 kadar açılıp sivri ucu sırasıyla B ve C noktalarına konulup 4 ve 5 yayları çizilir. 4 ve 5 yaylarının kesim noktası P ile A birleştirilir. PA aranılan dikmedir.



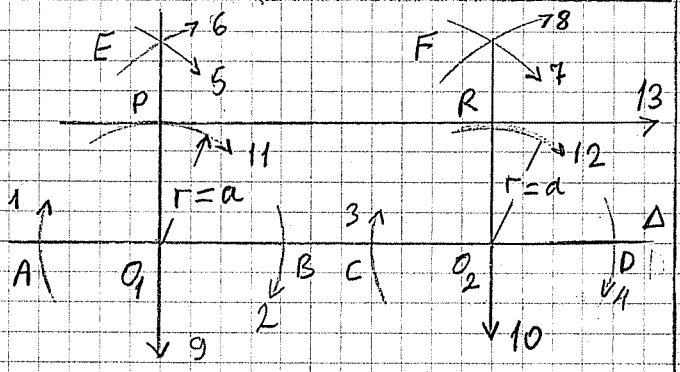
BİR DOĞRUYA DIŞINDAKİ BİR NOKTADAN PARALEL ÇİZİLMESİ

Çizimin nasıl yapılacağı, yandaki şekilde sıra numaraları ile belirtilmektedir. |PF| aranılan paraleldir.



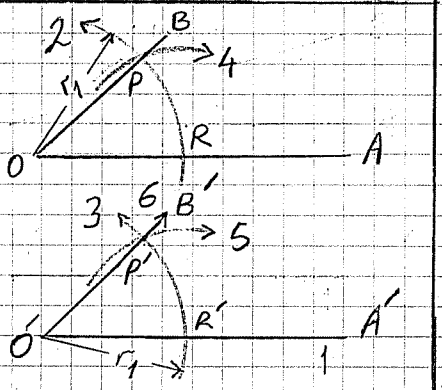
BİR DOĞRUYA İSTENİLEN UZAKLIKTA PARALEL ÇİZİLMESİ

Çizimin nasıl yapılacağı, şekilde sıra numaraları ile belirtilmektedir.
O_1 ve O_2 merkezli, $r = a$ istenilen uzaklık olmak üzere çizilen 11 ve 12 yayları yardımıyla P ve R noktaları bulunur.
|PR| aranılan paraleldir.



BİR AÇININ TAŞINMASI

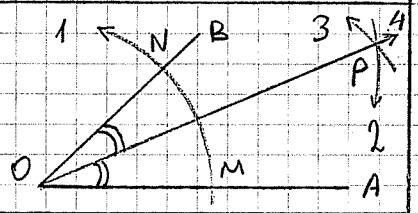
Verilen açı $A\hat{O}B$ olsun. Herhangibir $O'A'$ yarı doğrusu çizilir. Pergel r_1 kadar açılıp sivri ucu verilen açının O köşesine konularak 2 yayı çizilir. Pergelin sivri ucu O' noktasına konulup 3 yayı çizilir. Pergelin PP kadar açılıp 4 yayı, sonra 5 yayı çizilir. $O'P'$ birleştirilir. $A'\hat{O'}B'$, $A\hat{O}B$ açısına eşit olan bir açıdır.



BİR AÇININ İKİ EŞİT PARÇAYA BÖLÜNMESİ [BİR AÇININ AÇI ORTAYININ ÇİZİLMESİ]

Çizimin nasıl yapılacağı, şekilde sıra numaraları ile belirtilmektedir.
|OP| aranılan açıortaydır. Ayrıca;

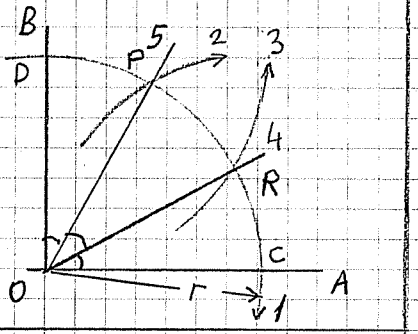
$M\hat{O}P = P\hat{O}B$ dır.



BİR DİK AÇININ ÜÇ EŞİT PARÇAYA BÖLÜNMESİ

Pergelin ucu r kadar açılıp sivri ucu O ya konulup 1 yayı çizilir. Aynı yarıçaplı ve C merkezli 2 yayı çizilerek P noktası bulunur. Aynı yarıçaplı D merkezli 3 yayı çizilerek R noktası bulunur.

$A\hat{O}R = R\hat{O}P = P\hat{O}B$ dir.



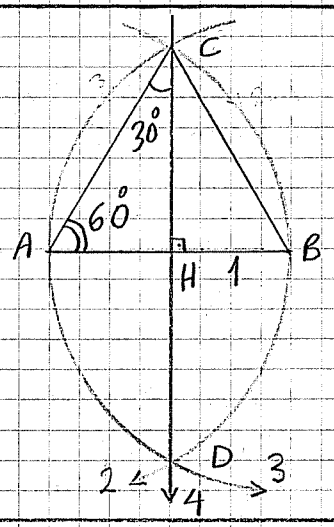
30° ve 60° DEĞERLİ AÇILARIN ELDE EDİLMESİ

Çizimin nasıl yapılacağı şekilde sıra numaraları ile belirtilmiştir.

$|CD| \perp |AB|$ dir.

$B\hat{A}C = 60°$ ve

$A\hat{C}D = 30°$ dir.



45° DEĞERLİ AÇININ ELDE EDİLMESİ

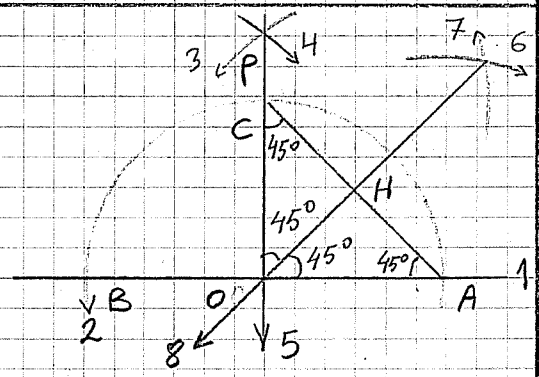
Çizimin nasıl yapılacağı şekilde sıra numaraları ile belirtilmiştir.

$A\hat{O}H = H\hat{O}C = 45°$ dir.

NOT : Aynı zamanda ;

$H\hat{C}O = H\hat{A}O = 45°$ dir.

NOT : $\overset{\triangle}{AOC}$ üçgeni ikizkenar dik üçgendir.

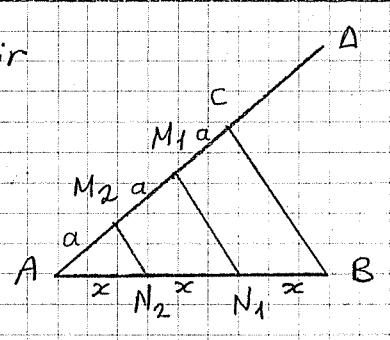


BİR DOĞRU PARÇASININ EŞİT PARÇALARA BÖLÜNMESİ

$|AB|$ doğru parçasının A ucundan herhangibir Δ doğrusu çizilir. Δ doğru üzerinde A dan itibaren herhangi a uzunluğu alınarak M_2 ve M_1 ve C noktaları işaretlenir. C ile B birleştirilir.

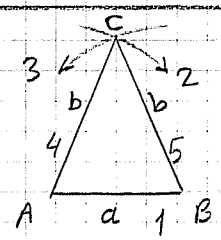
$|M_1N_1| \parallel |M_2N_2| \parallel |CB|$ çizilerek N_2, N_1 noktaları bulunur.

$|AN_2| = |N_2N_1| = |N_1B| = |AB|/3$ dir.



İKİZKENAR ÜÇGEN ÇİZİLMESİ

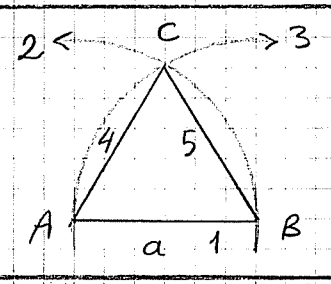
a ve (b = b) kenarları verilmiş olsun. Çizimin nasıl yapılacağı şekilde sıra numaraları ile belirtilmiştir.



EŞKENAR ÜÇGEN ÇİZİLMESİ

Kenar uzunluğu a olsun. $|AB| = a$ alınır. Diğer işlemler sıra numaraları ile şekilde belirtilmiştir.

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni eşkenar üçgendir.



BAZI ANA AÇILARIN ÇİZİLMESİ

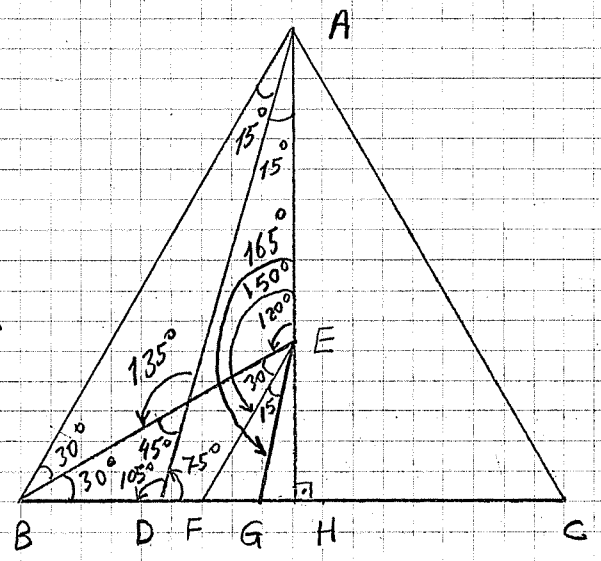
Herhangibir ABC Eşkenar üçgeni çizilir. |AH| yüksekliği çizilir.

$A\hat{B}C$ açısının |BE| açıortayı çizilir. $B\hat{A}H$ açısının |AD| açıortayı çizilir.

$B\hat{E}H$ açısının |EF| açıortayı çizilir.

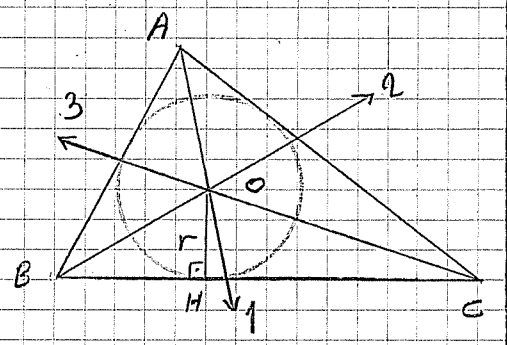
$F\hat{E}H$ açısının |EG| açıortayı çizilir.

Somut olarak görülebilmesi için açılar şekilde belirtilmiştir.



ÜÇGENİN İÇİNE TEĞET ÇEMBER ÇİZİLMESİ

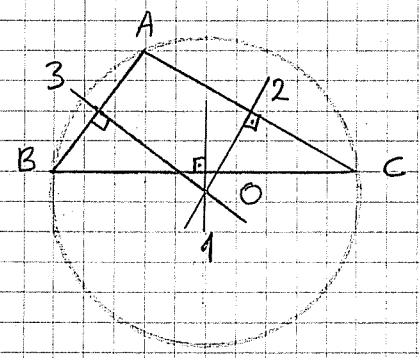
Üçgenin 1, 2 ve 3 açıortayları çizilir. Açıortayların O kesişme noktası iç teğet çemberin merkezidir. $|OH| = r$ yarıçaplı çember, aranan çemberdir.



ÜÇGENİN ÇEVREL ÇEMBERİNİN ÇİZİLMESİ

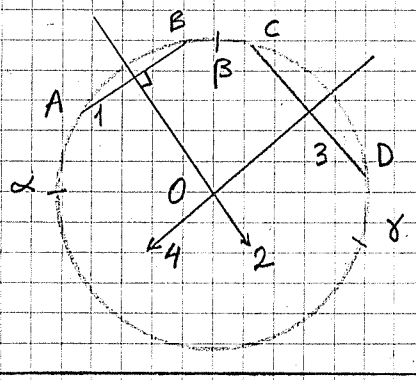
Üçgenin 1, 2 ve 3 kenar orta dikmeleri çizilir. Kenarların orta dikmelerinin O kesişme noktası, aranan çevrel çemberin merkezidir.

UYGULAMA : 3 noktadan geçen çemberin çizilmesi, aynı problemdir.



BİR ÇEMBERİN veya BİR YAYIN MERKEZİNİN BULUNMASI

O çemberi veya $\overset{\frown}{\alpha\beta\gamma}$ yayı verilmiş olsun. O merkezinin bulunması isteniyor. Çemberin herhangi iki $|AB|$ ve $|CD|$ kirişleri çizilir. Kirişlerin orta dikmelerinin kesişme noktası olan O, aranan merkezdir.

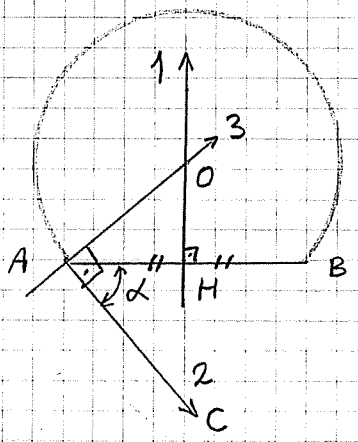


BİR DOĞRU PARÇASINI VERİLEN α AÇISI ALTINDA GÖREN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

$|AB|$ doğru parçasının A ucuna $H\hat{A}C = \alpha$ işaretlenir. $|AB|$ nin orta dikmesi çizilir.

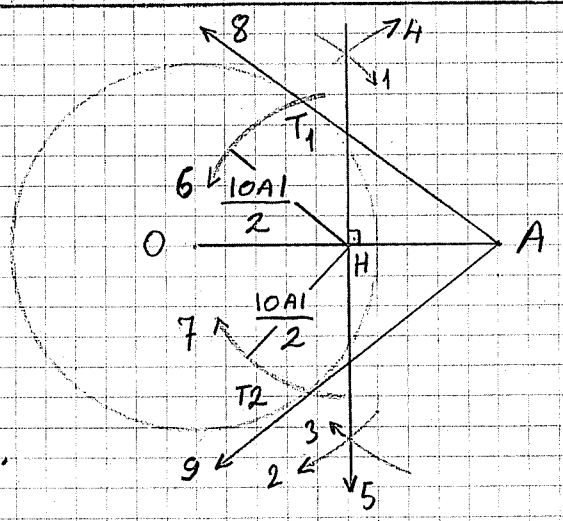
$|AO| \perp |AC|$ çizilir.

$|AO|$ ve $|HO|$ nun kesim noktası olan O, aranan çemberin merkezidir.



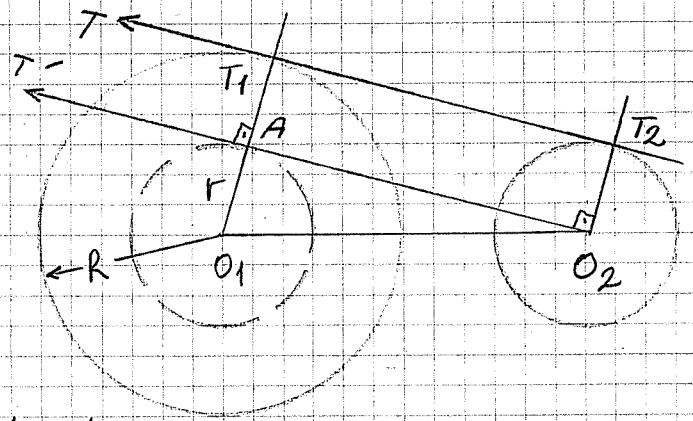
BİR ÇEMBERE DIŞINDAKİ BİR NOKTADAN TEĞET ÇİZİLMESİ

O çemberine dışında verilen A noktasından teğet çizilmesi için, |OA| doğru parçasının orta dikmesi çizilir. H orta noktası bulunur. Pergel |OH| kadar açılarak, H merkezli 6 ve 7 yayları çizilip, T_1 ve T_2 değme noktaları bulunur. $|AT_1|$ ve $|AT_2|$ aranan teğetlerdir.



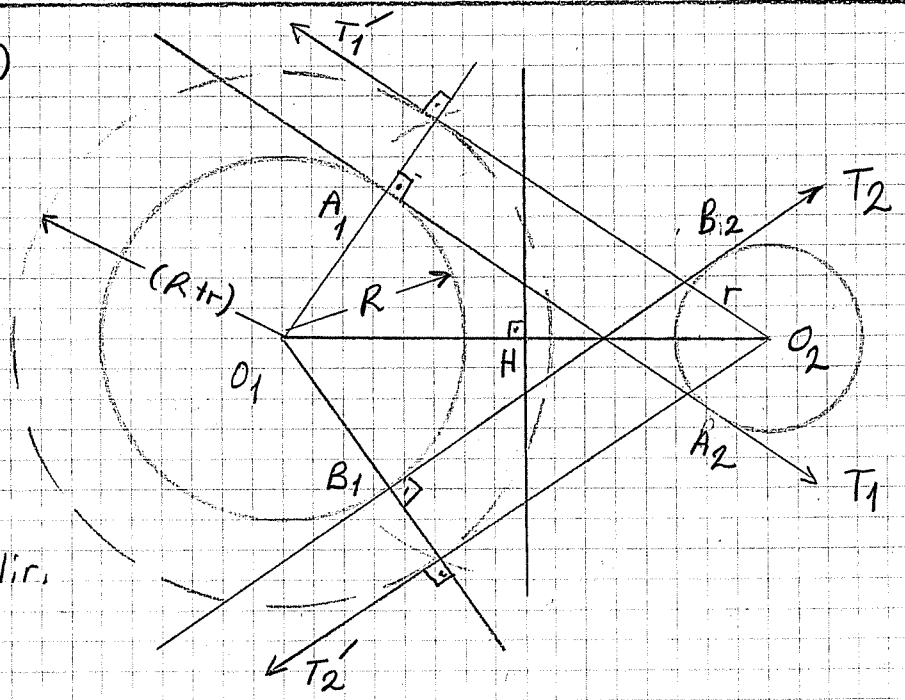
İKİ ÇEMBERİN DIŞTAN ORTAK TEĞETLERİNİN ÇİZİLMESİ

O_1 merkezli r yarıçaplı çember çizilir. Bu çemberde O_2 noktasından T' teğeti çizilir. O_1 ve O_2 merkezlerinden T' teğetine dikmeler inilir. Dikmelerin O_1 ve O_2 çemberlerini kestiği T_1 ve T_2 noktaları, değme noktalarıdır. T doğrusu aranan teğettir.



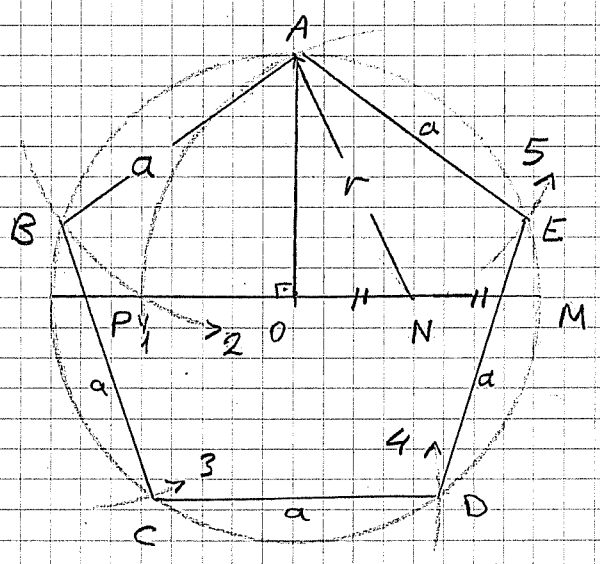
İKİ ÇEMBERİN İÇTEN ORTAK TEĞETLERİNİN ÇİZİLMESİ

O_1 merkezli (R+r) yarıçaplı çembere O_2 noktasından T_1' ve T_2' teğetleri çizilir. O_1 merkezinden bu teğetlere dikmeler inilerek A_1 ve B_1 değme noktaları bulunur. $|O_1A_1| \perp |A_1T_1|$ ve $|O_1B_1| \perp |B_1T_2|$ çizilir. T_1 ve T_2 aranan teğetlerdir.



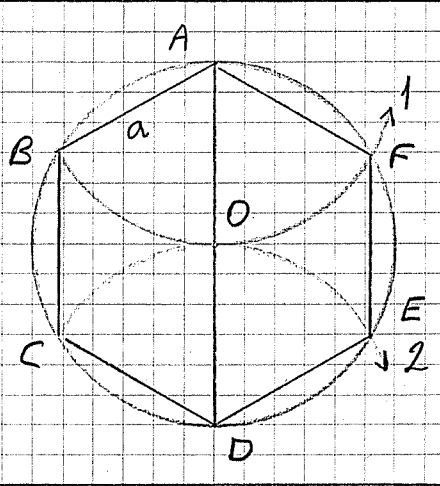
DÜZGÜN BEŞGEN ÇİZİLMESİ

|OM| nin orta noktası N bulunur. |AN| yarıçaplı yay çizilerek P noktası bulunur. |AP| yarıçaplı 2 yayı çemberi B noktasında kessin. |AP|=a düzgün beşgenin bir kenarıdır. Sırasıyla çember üzerinde 3, 4, 5 yayları çizilerek düzgün beşgenin C, D ve E köşeleri bulunur.



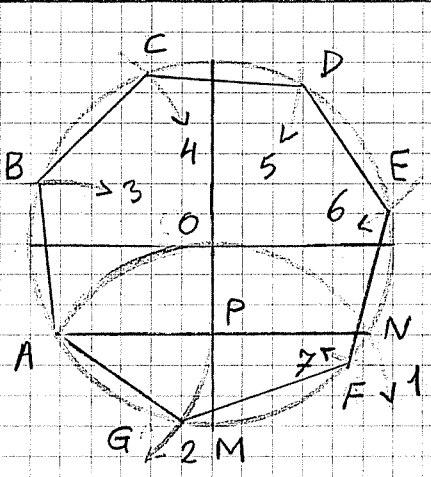
DÜZGÜN ALTIGEN ÇİZİLMESİ

Şekilde, A merkezli ve |AO| yarıçaplı 1 yayı ile D merkezli ve |AO|=|DO| yarıçaplı 2 yayı çizilir. 1 ve 2 yaylarının çemberi kestiği B, C, D, E ve F noktaları düzgün altıgenin köşeleri bulunur.



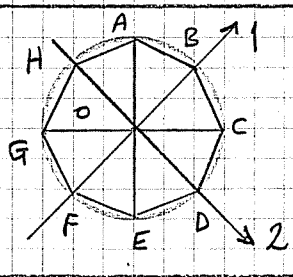
DÜZGÜN YEDİGEN ÇİZİLMESİ

Şekilde, |MO| yarıçaplı 1 yayı çizilerek A noktası (köşesi) ile N noktası bulunur. |AN| ile |MO| nun P kesim noktası bulunur. |AP| uzunluğu düzgün yedigenin bir kenarının uzunluğudur. Bu uzunluk yarıçaplı 3, 4, 5, 6 ve 7 yayları çizilerek düzgün yedigenin B, C, D, E, F ve G köşeleri bulunur.

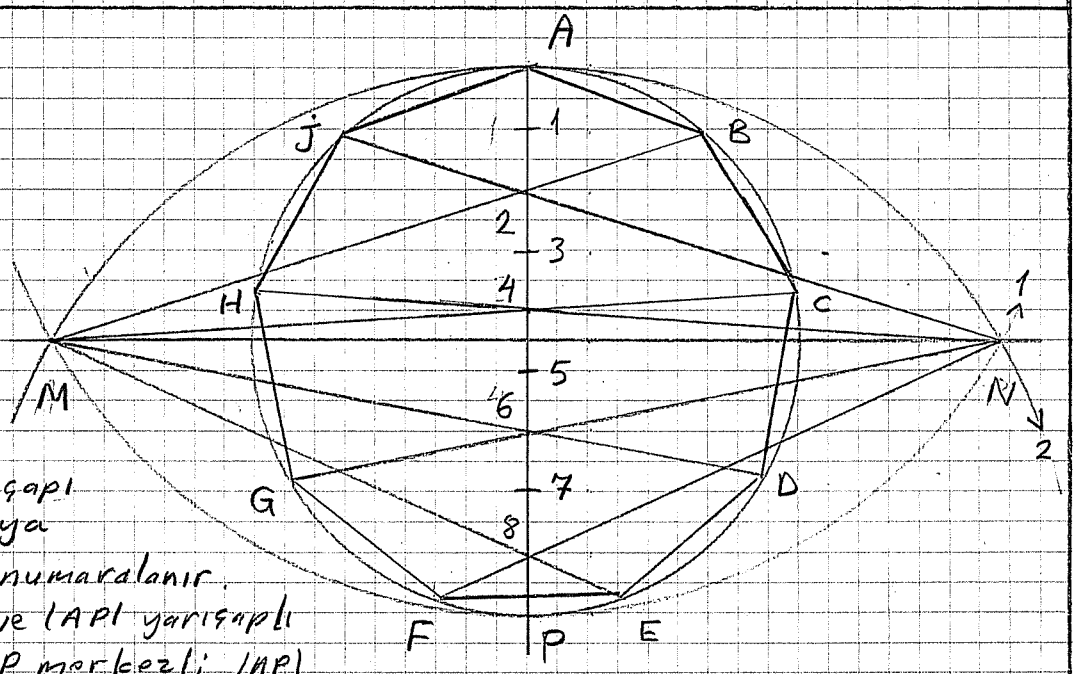


DÜZGÜN SEKİZGEN ÇİZİLMESİ

Şekilde, $A\hat{O}C$ dik açısının 1 açı ortayı ile $E\hat{O}C$ dik açısının 2 açı ortayı çizilir. Açıortayların çemberi kestiği B, D, F ve H noktaları düzgün sekizgenin köşeleridir.



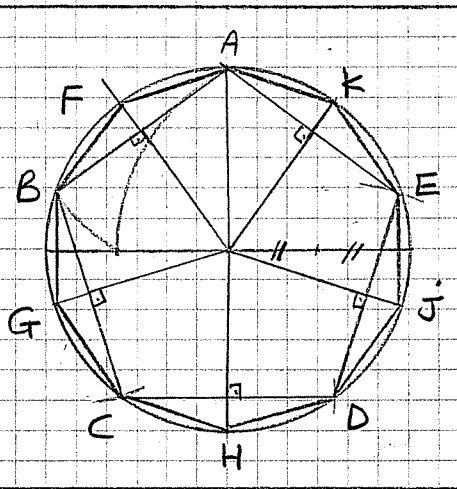
DÜZGÜN DOKUZGEN ÇİZİLMESİ



Şekilde, |AP| çapı 9 eşit parçaya bölünür ve numaralanır. A merkezli ve |AP| yarıçaplı çember ile P merkezli |AP| yarıçaplı 1 ve 2 yayları çizilir. 1 ve 2 yaylarının kesişme noktaları M ve N bulunur. 2, 4, 6 ve 8 noktaları M ve N ile birleştirilerek düzgün dokuzgenin B, C, D, E, F, G, H ve J köşeleri bulunur.

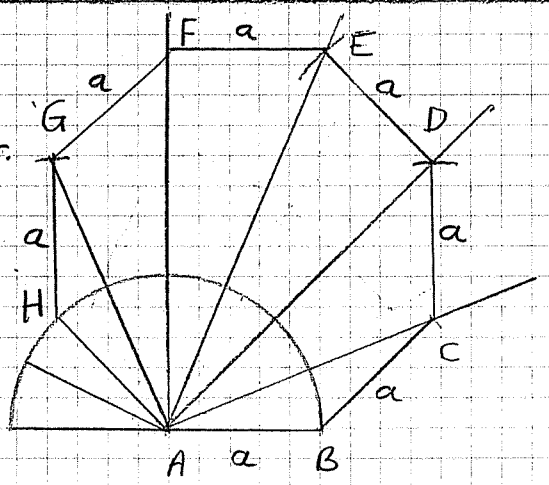
DÜZGÜN ONGEN ÇİZİLMESİ

Şekilde, önce (ABCDE) düzgün beşgeni çizilir. Sonra düzgün beşgenin kenarlarının orta dikmeleri çizilerek çemberi kestiği F, G, H, J ve K noktaları bulunur. A, B, C, D, E, F, G, H, J ve K noktaları düzgün ongenin kenarlarıdır.



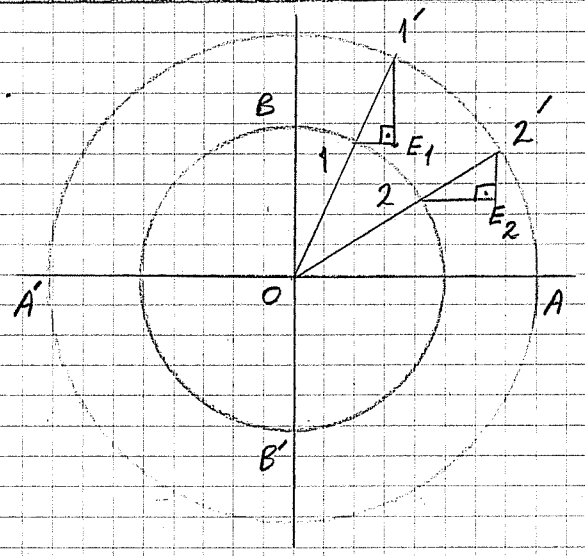
DÜZGÜN POLİGON ÇİZİLMESİ

A merkezli, |AB| yarıçaplı yarım çember çizilir ve n eşit parçaya (Bizim örneğimizde n=8) bölünür. B den itibaren (n-2) bölümü alınır. A ile çemberin bölünen noktaları birleştirilir. Sonra şekilde olduğu gibi A noktasından itibaren a kadar alınır. G bulunur. Bunun gibi devam edilerek poligonun bütün köşeleri bulunur.

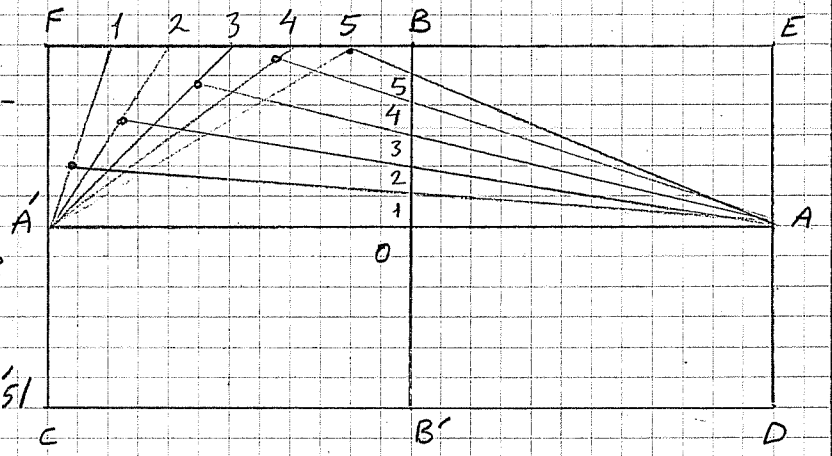


ELİPS ÇİZİLMESİ

Yol 1 : Elipsin büyük ve küçük eksen uzunlukları belli olsun. Yarı eksen uzunlukları alınarak A', A, B' ve B noktaları işaretlenir. O merkezli |OA| ve |OB| yarıçaplı çembeler çizilir. Şekilde olduğu gibi |11'| ve |22'| ışınları çizilir. Eksenlere paraleller çizilerek E_1 ve E_2 kesim noktaları bulunur. E_1 ve E_2 noktaları elipse ait noktalardır. Bu şekilde devam edilerek, ışınlar çizilip elipse ait noktalar bulunur.

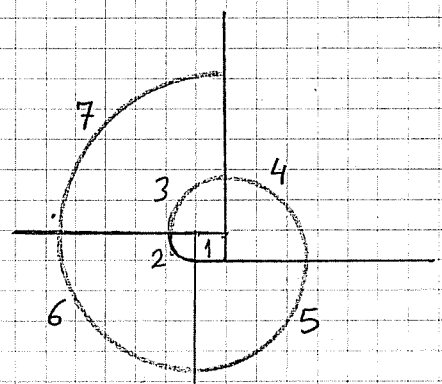


Yol 2 : Şekilde olduğu gibi elipsin eksen uzunlukları işaretlenerek A'A ve B'B noktaları bulunur. CDEF dikdörtgeni çizilir. |FB| ve |OB| aynı sayıda (örneğimizde 6 eşit parça) eşit parçalara bölünür. |A'1|, |A'2|, |A'3|, |A'4| ve |A'5| ışınları ile |A1|, |A2|, |A3| |A4| ve |A5| ışınlarının kesişme noktaları elipse ait noktalardır.

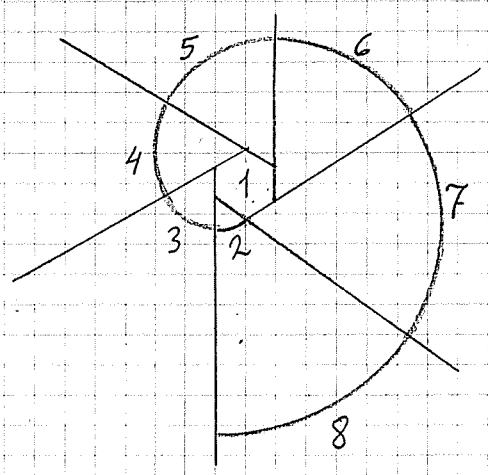


SPİRAL ÇİZİMİ

Yol 1 : Şekilde olduğu gibi 1 karesi çizilir. 2 çeyrek dairesi, 3 çeyrek dairesi çizilir. Devam edilerek 4, 5, 6, 7 çeyrek daireleri çizilerek spiral geliştirilir.



Yol 2 : Şekilde olduğu gibi 1 düzgün altıgeni çizilir ve kenarları uzatılır. Sırasıyla 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 çeyrek daireleri çizilerek spiral geliştirilir.

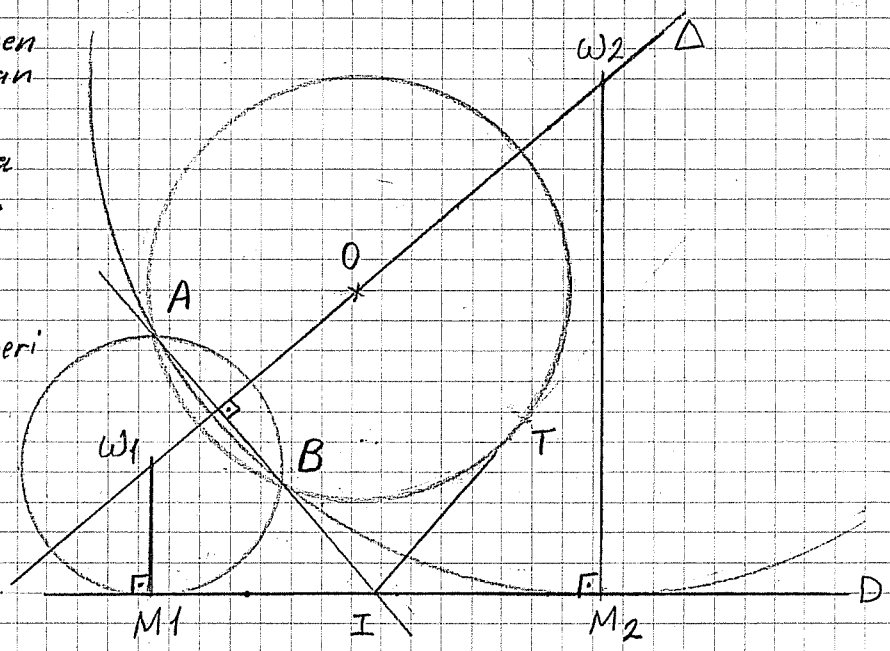


E.I.10

TAKIM ÇİZİMLER

İKİ NOKTADAN GEÇEN ve BİR DOĞRUYA TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

A ve B noktalarından geçen D doğrusuna teğet olan çember çizilecek.
A ve B birleştirilip D doğrusunu I noktasında kestirilir.
|AB| nin orta dikmesi Δ doğrusu çizilir.
A ve B noktalarından geçen herhangibir O çemberi çizilir. O çemberi ile çizilecek ω_1 ve ω_2 çemberlerinin merkezleri Δ orta dikmesi üzerinde olacaktır.
I den O çemberine |IT| teğeti çizilir.

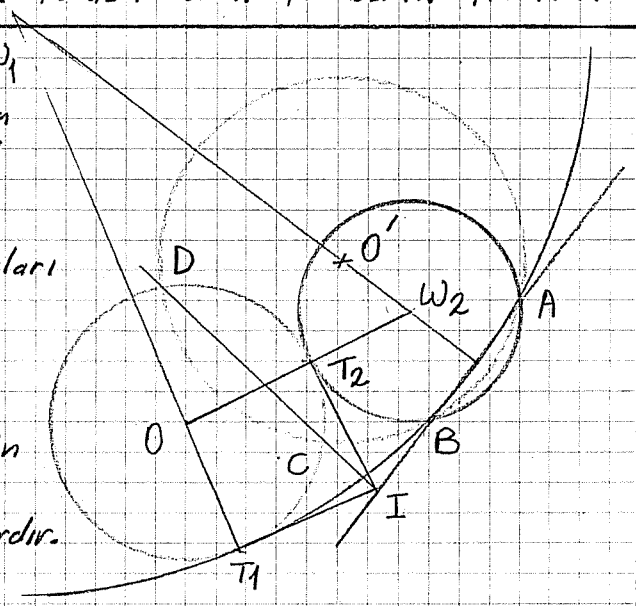


$|IT| = |IM_1| = |IM_2|$ alınarak M_1 ve M_2 noktaları bulunur.
M_1 ve M_2 noktaları aranan teğet çemberlerin değme noktalarıdır.
M_1 ve M_2 noktalarından D doğrusuna dikmeler çıkılarak Δ doğrusunu kestiği ω_1 ve ω_2 noktaları bulunur. Bu noktalar aranılan çemberlerin merkezleridir. İRDELEME:

1- A ve B noktaları, D doğrusunun bir tarafında iseler, problemin iki çözümü vardır.
2- A ve B noktalarından biri D doğrusunun üzerinde ise, bir çözüm vardır.
3- |AB| doğrusu D'ye paralel ise problemin bir çözümü vardır. ω ve M noktaları |AB| nin orta dikmesi üzerindedir.
4- A ve B noktaları D doğrusunun başka taraflarında iseler, çözüm yoktur.

İKİ NOKTADAN GEÇEN ve BİR ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

A ve B noktalarından geçen O çemberine teğet olan çember çizilecek.
A ile B birleştirilerek uzatılır. A ve B den geçen ve O çemberini C ve D noktalarında kesen O' çemberi çizilir. |CD| uzatılarak |AB| doğrusunu I kuvvet merkezinde kestirilir. I noktasından O çemberine teğetler çizilip T_1 ve T_2 değme noktaları bulunur. T_1 ve T_2 noktaları aranan çemberlerin de değme noktalarıdır. T_1 ve T_2 noktaları O ile birleştirilip uzatılır ve |AB| nin orta dikmesini kesim noktaları ω_1 ve ω_2 noktaları bulunur. ω_1 ve ω_2 aranan çemberlerin merkezleridir. İRDELEME:

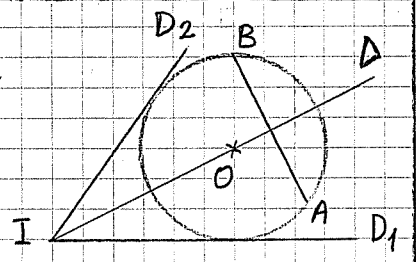


1- A ve B noktaları O çemberinin içinde ise, problemin iki çözümü vardır.
2- a) A ve B noktaları, O çemberinin dışında ise, iki çözüm vardır.
   b) |AB|, O çemberine teğet ise, biri çember ve diğeri |AB| doğrusu olmak üzere iki çözüm vardır.
3- A veya B, O çemberinin üzerinde ise;
   a) |AB|, O çemberine teğet değilse, bir çözüm vardır.
   b) |AB|, O çemberine teğet ise, |AB| doğrusu tek çözümdür.

BİR NOKTADAN GEÇEN ve İKİ DOĞRUYA TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

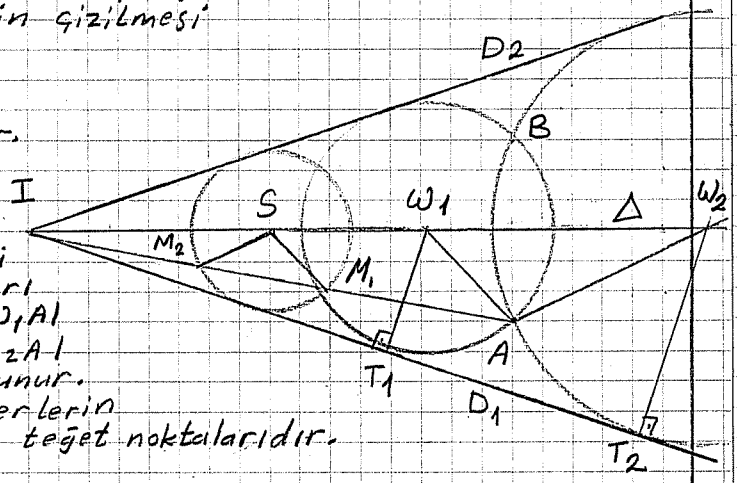
Yol 1:

A noktasından geçen ve D_1 ile D_2 doğrularına teğet olan çember çizilecek. Çizilmiş olduğu varsayılırsa; şekilde olduğu gibi doğruların kesim noktası I olsun. D_1 ve D_2 doğrularına teğet olan çemberin merkezi Δ açıortay üzerindedir. A noktasının Δ'ya göre simetriği olan B noktası da O çemberinin üzerindedir. O halde problem; A ve B noktalarından geçen ve D_1 veya D_2 doğrusuna teğet olan çemberin çizilmesi problemine dönüşür.



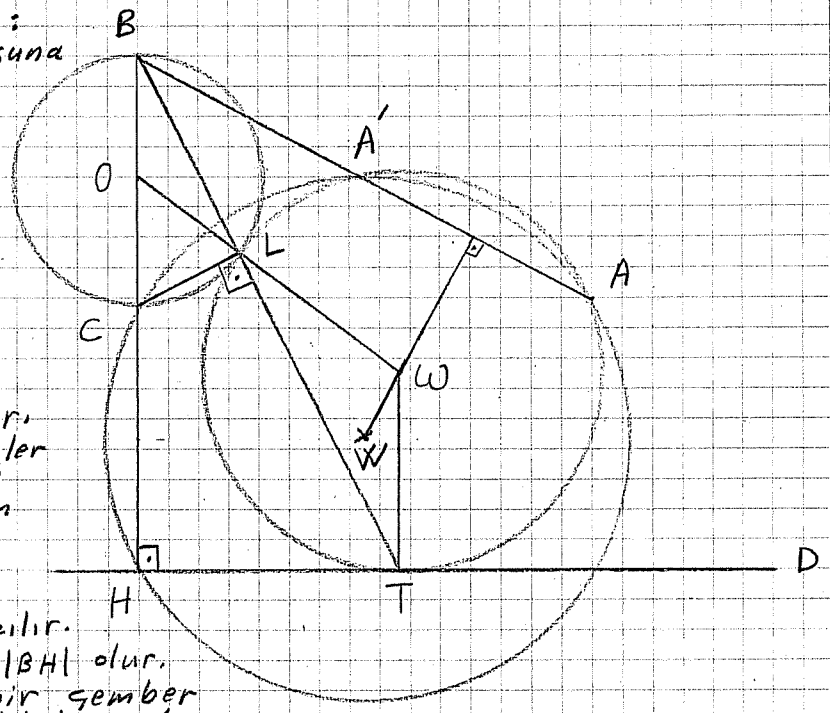
Yol 2:

$(D_1 I D_2)$ açısının Δ açıortayı çizilir. D_1 ve D_2 kenarlarına teğet S merkezli herhangibir yardımcı çember çizilir. I ve A birleştirilir. $|IA|$ doğrusunun S çemberini kestiği $|SM_1|$ ve $|SM_2|$ doğru parçaları bulunur. A noktasından $|SM_1|$'e $|\omega_1 A|$ paraleli çizilerek ω_1; $|SM_2|$'ye $|\omega_2 A|$ paraleli çizilerek ω_2 noktaları bulunur. ω_1 ve ω_2 noktaları aranan çemberlerin merkezleridir. T_1 ve T_2 noktaları teğet noktalarıdır.



BİR NOKTADAN GEÇEN, BİR DOĞRU ve BİR ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

Çizilmiş olduğu varsayılırsa: Çizilecek çemberin D doğrusuna ve O çemberine değdiği noktalar bulunacak. O'dan D'ye bir dikme inilir. ω ve O çemberleri L'ye göre homotetiktirler. $|\omega T| \parallel |OB|$ dir. L iç homoteti merkezi ile C noktası birleştirilirse, $\hat{L} = 90°$ olur. B ile A birleştirilip ω çemberi A' noktasında kesilir. $|BA'| \cdot |BA| = |BL| \cdot |BT|$ dir. (HCLT) dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Çünkü $|CT|$ çaplı çember H ve L den geçer. B noktasının bu çembere göre kuvvetleri de eşit olur. $|BC| \cdot |BH| = |BL| \cdot |BT|$ yazılır. Buradan $|BA'| \cdot |BA| = |BC| \cdot |BH|$ olur. C, H, A ve A' noktaları bir çember üzerindedir. C, H ve A noktalarından geçen çember çizilir. $|BA|$ nın bu çemberi kestiği nokta A' olur. Aranan çemberin ω merkezi, $|AA'|$ nün orta dikmesi üzerindedir. Problem; A ve A' noktalarından geçen ve D doğrusuna teğet olan çemberin çizilmesine dönüşür.



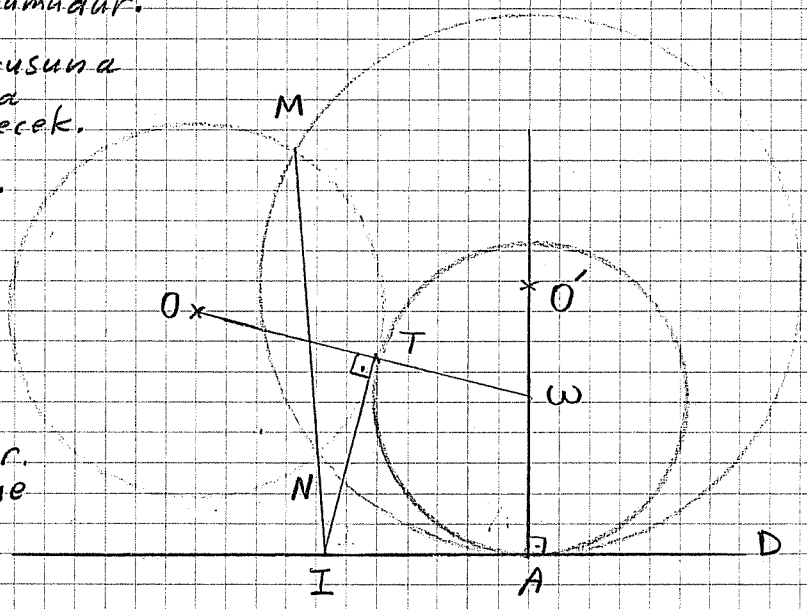
Çizimin yapılması:

O dan D'ye dikme inilerek B, C ve H noktaları bulunur. C, H ve A noktalarından geçen W çemberi çizilir. B ile A noktası birleştirilerek A' noktası bulunur. Böylece; A ve A' noktalarından geçen ve D doğrusuna teğet olan çemberlerin çizilmesi problemine gelinir.

BİR ÇEMBERE ve BİR DOĞRUYA ÜZERİNDEKİ BELLİ BİR NOKTASINDA TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

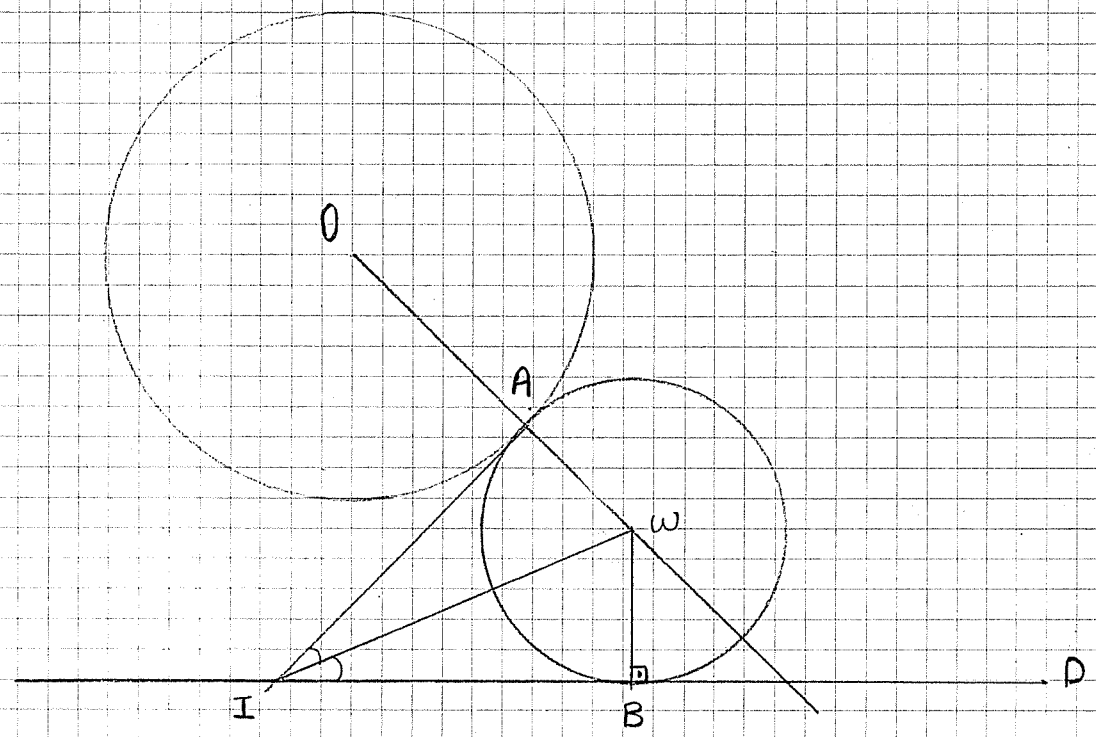
Önceki çizimlerin özel durumudur.

O çemberine ve D doğrusuna üzerindeki A noktasında teğet olan çember çizilecek. D doğrusu üzerindeki belli A noktasından dik çıkılır. D doğrusuna A noktasında teğet olan O′ merkezli yardımcı bir çember çizilir. Bu çember, O çemberini M ve N noktalarında kesecek şekilde çizilir. |MN| uzatılarak D doğrusunu kestiği I noktası bulunur. I noktasından O çemberine |IT| teğeti çizilir. |OT| uzatılarak ω noktası bulunur. ω aranan çemberin merkezidir.



BİR DOĞRUYA ve BİR ÇEMBERE ÜZERİNDEKİ BELLİ BİR NOKTASINDA TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

Önceki çizimlerin özel durumudur.

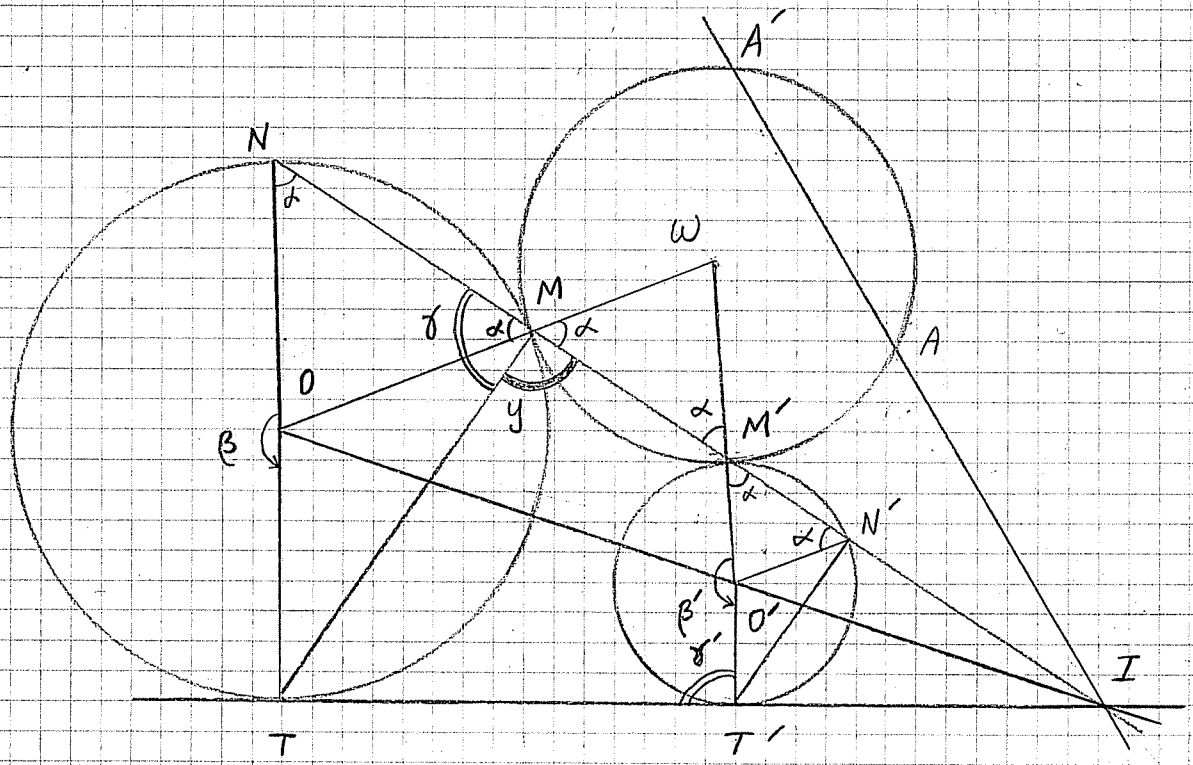


Çizimin Yapılması :
Verilen çemberin O merkezi ile verilen A noktası birleştirilerek uzatılır. Çemberin A noktasındaki teğeti çizilerek D doğrusunu kestiği I noktası bulunur.

|AI| = |IB| alınarak B noktası bulunur. B'den D doğrusuna çıkılan dik doğrunun |OA|'yı kestiği ω noktası aranan çemberin merkezidir.

($A\hat{I}B$ açısının |Iω| açıortayı çizilerek de aranan ω merkezi bulunur.)

BİR NOKTADAN GEÇEN ve İKİ ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ



Çizilmiş olduğu varsayılırsa:
O, ω ve O' çemberleri birbirlerinin homotetikleridir. M ve M' iç homoteti merkezleri, I dış homoteti merkezi olsun. Teoreme göre; M, M' ve I bir doğru üzerinde bulunur. I noktası O ve O' çemberlerinin dış homoteti merkezi olup sabittir. Dış ortak teğetin merkezler doğrusunu kestiği noktadır. O' ile T' ve O ile T birleştirilir. |MM'|; O çemberini N, O' çemberini N' noktalarında keser. N ile O ve N' ile O' birleştirilirse, |ON| // |O'M'| ve |OM| // |O'N'| dir.
N ile M' ve M ile N' birbirlerinin homotetiğidirler. I ile A uzatılarak A' bulunursa, A ve A' den geçen ve O çemberine teğet olan çemberin çizilmesi problemine gelinir.
I noktasının ω çemberine göre kuvvetleri:

$$|IA| \cdot |IA'| = |IM'| \cdot |IM| \quad \text{dir} \quad (1)$$

M ile T ve M' ile T' birleştirilir. |OT| // |O'T'| ve |ON| // |O'M'| olduğundan; $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$ dir. Bunlara ait olan çevre açıları da eşit olur. $\hat{y} + \hat{\gamma} = 180^\circ$

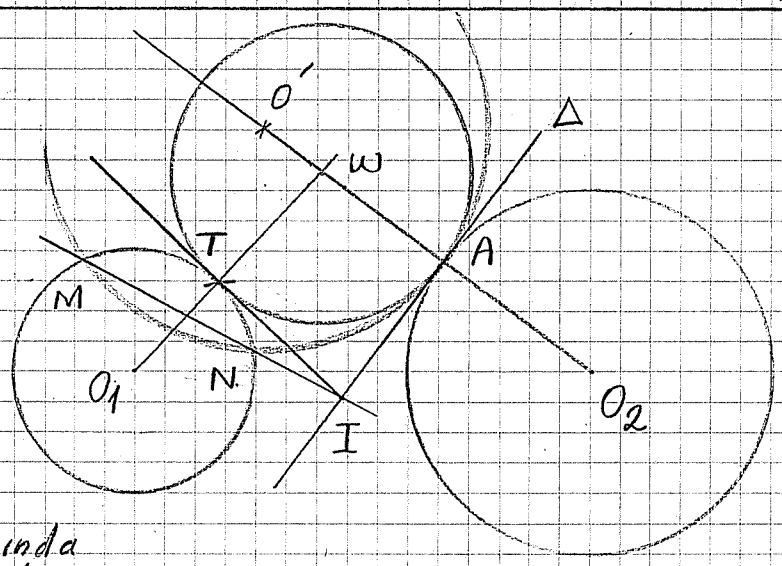
$\hat{y} + \hat{\gamma}' = 180^\circ$ olduğundan TMM'T' kirişler dörtgenidir. Bu dört noktadan bir çember geçer.
I noktasının bu çembere göre kuvvetleri:

$$|IM'| \cdot |IM| = |IT'| \cdot |IT| \quad \text{dir} \quad (2)$$

(1) ve (2) den: $|IA| \cdot |IA'| = |IM'| \cdot |IM|$ olur. Bu da; A, A', T ve T' noktalarının bir çember üzerinde olduğunu gösterir. T, T' ve A noktaları sabit olup bellidir. Bu noktalardan geçen çember çizilir. I ile A birleştirilip uzatılarak A' bulunur.
Çizim şöyle yapılır:

O ve O' merkezleri birleştirilip uzatılır. Ortak dış teğet çizilerek I homoteti merkezi bulunur. T ve T' değme noktaları bulunur. T, T' ve A dan geçen çember çizilir. I ile A birleştirilerek uzatılır. Çemberi A' noktasında keser. Problem, A ve A' den geçen ve O çemberine teğet olan çemberin çizilmesine dönüşür.

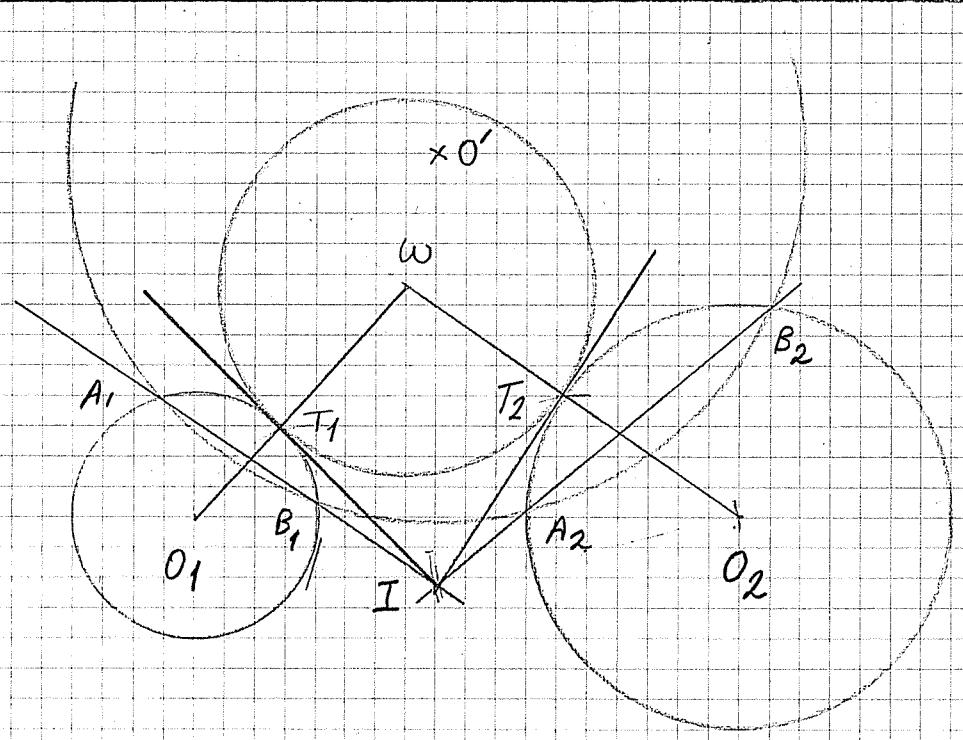
ÇEMBERLERDEN BİRİNİN ÜZERİNDE VERİLEN BİR NOKTASINDA TEĞET OLMAK ÜZERE İKİ ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ



Bir önceki çizimin özel bir durumudur.

O_2 merkezi, çemberin üzerinde verilen A noktası ile birleştirilerek uzatılır. O_2 çemberinin A noktasındaki Δ teğeti çizilir. $|O_2A|$ üzerinde O_1 çemberini M ve N gibi iki noktada kesecek ve O_2 çemberine A noktasında teğet olacak şekilde O' çember merkezi seçilir ve çember çizilir. M ve N birleştirilerek uzatılır. Δ teğetini kestiği I noktası bulunur. I noktasından O_1 çemberine $|IT|$ teğeti çizilir. T noktası O_1 merkezi ile birleştirilip uzatılır. $|O_2O'|$ doğrusunu kestiği ω noktası aranan çemberin merkezidir.

İKİ ÇEMBERE TEĞET ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

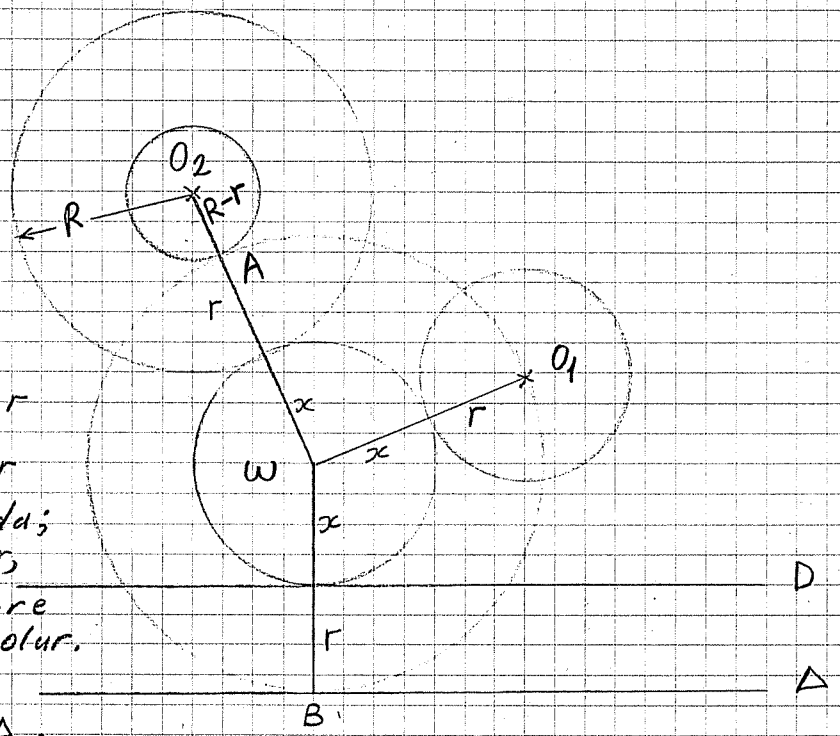


Bir noktadan geçen ve iki çembere teğet olan çemberin çizilmesi probleminin özel durumudur.

Verilen O_1 ve O_2 çemberlerini (A_1B_1) ve (A_2B_2) noktalarında kesen yardımcı bir O' çemberi çizilir. A_1 ile B_1 ve A_2 ile B_2 birleştirilip uzatılarak I noktasında kesiştirilir. I noktasından O_1 ve O_2 çemberlerine $|IT_1|$ ve $|IT_2|$ teğetleri çizilir. $|O_1T_1|$ ile $|O_2T_2|$ nin kesişme noktası olan ω aranan çemberin merkezidir.

İKİ ÇEMBERE ve BİR DOĞRUYA TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

Çizilmiş olduğu varsayılırsa:



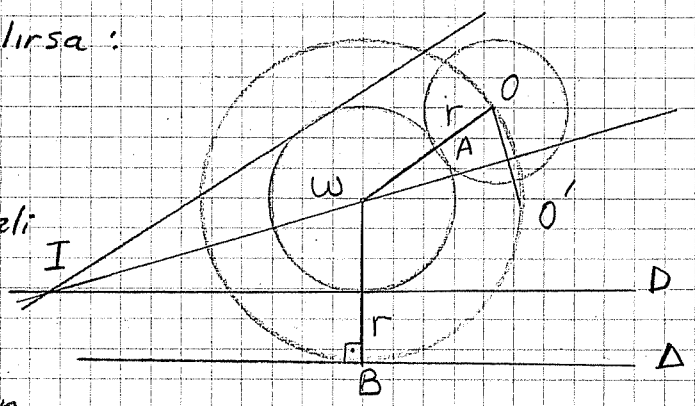
ω merkezinden D doğrusuna dik inilsin. ω merkezi O_1 ve O_2 ile birleştirilsin. ω merkezli, yakın merkeze olan uzaklık yarıçap olacak şekilde bir çember çizilsin. Bu çemberin yarıçapı, r+x dir. $|AO_2| = R-r$ olur. O_2 merkezli, R-r yarıçaplı çember çizilsin. Bu çember sabittir. Bu durumda; r+x yarıçaplı çember, R-r yarıçaplı çembere A noktasında teğet olur. B noktasından |ωB| yarıçapına dik olan Δ doğrusu çizilir. Δ, çembere teğet ve D doğrusuna paraleldir. Bulunacak çemberin merkezi ile |ωB| yarıçaplı çemberin merkezleri aynıdır. |ωB| yarıçaplı çemberin merkezi bulunursa, çizilecek çemberin merkezi bulunmuş olur. |ωB| yarıçaplı çember; Δ doğrusuna, R-r yarıçaplı çembere teğet ve O_1 noktasından geçen çemberdir. Problem bir noktadan geçen ve bir doğru ile bir çembere teğet olan çemberin çizilmesine dönüşür.

Çizimin Yapılışı:

O_2 merkezli, R-r yarıçaplı çember çizilir. D doğrusuna r uzaklığında paralel Δ doğrusu çizilir. Problem; O_1 noktasından geçen, Δ doğrusuna ve R-r yarıçaplı çembere teğet olan probleme dönüşür.

İKİ DOĞRUYA ve BİR ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ

Çizilmiş olduğu varsayılırsa:

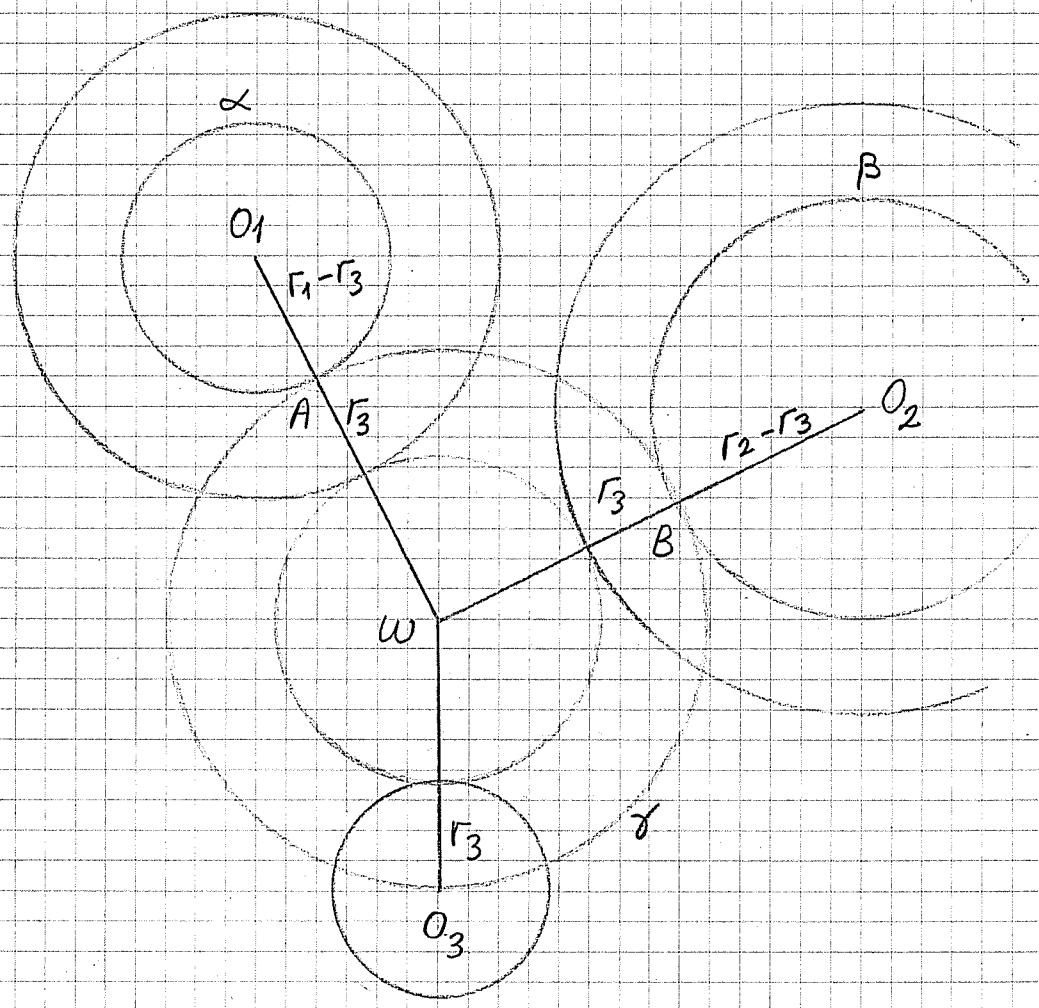


iki doğruya teğet olan çemberlerin merkezi açıortay üzerindedir. ω ile O merkezleri birleştirilerek ω merkezli |ωO| yarıçaplı çember çizilsin. B noktasından |ωB| yarıçapına dik Δ doğrusu çizilsin. Δ doğrusu sabittir. ω yardımcı çemberinin merkezi ile çizilecek çemberin merkezi aynıdır. O halde, yardımcı çemberin merkezi bulunursa, aranılan çemberin merkezi bulunmuş olur. Yardımcı ω çemberinin merkezi açıortay üzerinde olup, O noktasından geçer. O noktasından geçen bu çember, O noktasının açıortaya göre simetriği olan O' noktasından da geçer. Problem; O ve O' noktalarından geçen ve Δ doğrusuna teğet olan çemberin çizilmesine dönüşür.

Çizimin Yapılışı:

Verilen çemberin O merkezinin açıortaya göre simetriği olan O' noktası bulunur. D doğrusuna r uzaklığında paralel Δ doğrusu çizilir. O ve O' noktalarından geçen ve Δ doğrusuna teğet olan çemberin çizilmesi problemine erişilir.

ÜÇ ÇEMBERE TEĞET OLAN ÇEMBERİN ÇİZİLMESİ



Çizilmiş olduğu varsayılırsa:

ω merkezi diğer O_1, O_2 ve O_3 merkezleri ile birleştirilir. ω merkezli ve en yakın merkezin uzaklığı yarıçap olmak üzere bir γ çemberi çizilir.

$$|O_1A| = r_1 - r_3$$

$$|O_2B| = r_2 - r_3 \quad \text{olur.}$$

O_1 merkezli r_1-r_3 yarıçaplı ve O_2 merkezli r_2-r_3 yarıçaplı çemberler çizilir. Bu çemberler sabittir. γ yardımcı çemberin merkezi ile aranan çemberin merkezi aynıdır. γ yardımcı çemberin çizilmesi yeterli olacaktır. Problem; O_3 noktasından geçen, α ve β çemberlerine teğet olan çemberin çizimine dönüşür.

E.I. 18