Ejercicios #4. Bases Duales ⁺.⁺ ˙. ₒ.⁺. 01.09.25

Nombre: Isabella Ucros /2240675

SECCIÓN 3.1.4

6. En el caso tridimensional tenemos que si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) y no necesariamente ortogonal, demuestre que:

a. $e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$, $i,j,k = 1,2,3$ y sus permutaciones cíclicas.

En primer lugar, recordemos que un sistema es dextrógiro si el producto mixto $(e_1 \times e_2)\cdot e_3 > 0$. Ahora, si decimos que $\{e_i\}$ expande un e.V V, es posible construirle una base dual V^* recíproca, tal que si $\{e^i\}$ es base de V^*, $\langle e^j | e_i\rangle = \delta^j_i$. Ahora, encontremos el valor de cada $\{e^i\}$.

↓

Note que el hecho que $\langle e^j | e_i\rangle = \delta^j_i$ nos indica que cada vector de la base dual es ortogonal a dos elementos de la base de V. Nota: El hecho de que $\{e_i\}$ no sea ortogonal no significa que no sea posible construir una base dual ortogonal.

Esta ortogonalidad nos permite establecer que, por ejemplo, e^k, estará en la dirección de $e_i \times e_j$. ← esta dirección es distinta a la de e_i.

$$e^k = \alpha(e_i \times e_j) \quad (1)$$

↓

Pero, como construimos la base dual en función de que $\langle e^j | e_i\rangle = \delta^j_i$, tenemos que asegurar que $\langle e^j | e_j\rangle = 1 = e^j \cdot e_j = e_j \cdot e^j$:

$$e_k \cdot e^k = e_k \cdot (\alpha(e_i \times e_j))$$

$$1 = \alpha(\underbrace{e_k \cdot (e_i \times e_j)}_{>0})$$

>0, por ser un sistema dextrógiro

$$\alpha = \frac{1}{(e_k \cdot (e_i \times e_j))}$$

Y, reemplazando en (1):

$$e^k = \frac{(e_i \times e_j)}{(e_k \cdot (e_i \times e_j))}$$

→ note que seguimos un orden cíclico. //

b. Si los volúmenes: $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ y $\tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$

Por cómo contruimos nuestra base dual, tenemos que $\langle e^j | e_i\rangle = \delta^j_i$. Por tanto, si construimos una matriz cuyas filas sean las bases duales y otra cuyas columnas sean las bases convencionales, tal que:

$$A = \left[e_1 | e_2 | e_3 \right] \quad y \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} e^1 \\ \hline e^2 \\ \hline e^3 \end{bmatrix}$$

Entonces, note que como el producto matricial es renglón columna, y $\langle e^j | e_i\rangle = \delta^j_i$

$$(\tilde{A}A)_{ij} = \langle e^i | e_j\rangle$$

Por lo que:

$$\tilde{A}\ A = I.$$

Ahora bien, si tomamos el det:

$$\det(\tilde{A})\det(A) = \det(I) = 1.$$

Pero, recuerde que el determinante en $\mathbb{R}^3$ representa el volumen que existe entre los vectores de la base (análogo al det en $\mathbb{R}^2$ que es el área comprendida por la base). Justamente, el triple producto mixto simboliza dicho volumen, por lo que tenemos que:

$$(e^1 \cdot (e^2 \times e^3))\,(e_1 \cdot (e_2 \times e_3)) = 1$$

$$\tilde{V}\ V = 1 \quad \leftarrow \text{como } \tilde{V}, V \text{ son escalares:}$$

$$V\ \tilde{V} = 1$$

Una interpretación geométrica de lo anterior tiene que ver con las componentes covariantes y contravariantes, pues como definimos a la base dual como recíproca, esta tiene que contravariar con la base de V. → Un vector $|v\rangle$ es invariante.

c. ¿Qué vector satisface que $\vec{a} \cdot e^i = 1$? Demuestre que $\vec{a}$ es único.

Sea $\vec{a}$ un elemento de V, y teniendo en cuenta que $e^i = \dfrac{(e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$; encontremos el valor de $\vec{a}$:

$$1 = \vec{a} \cdot e^i \quad \text{por ser lo que buscamos}$$

$$1 = \frac{\vec{a} \cdot (e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} \Rightarrow$$

Note entonces que nos quedan dos productos puntos sobre el mismo vector.

El que ese resultado sea 1 (y al estar trabajando con escalares) nos implica que $\vec{a} \cdot (e_j \times e_k) = e_i \cdot (e_j \times e_k)$.

↓

Entonces, $\vec{a} = e_i$, pues el prod interno implica que si $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} \to \vec{a} = \vec{b}$ (ambos son la misma proyección).

UNICIDAD:

Sea $\vec{b}$ que también cumple que $\vec{b} \cdot e^i = 1$, demostremos que $\vec{a} = \vec{b}$.

$$0 = \vec{a} \cdot e^i - \vec{b} \cdot e^i$$

$$0 = \frac{\vec{a} \cdot (e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} - \frac{\vec{b} \cdot (e_j \times e_k)}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} = \frac{1}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}\left(\vec{a} \cdot (e_j \times e_k) - \vec{b} \cdot (e_j \times e_k)\right)$$

$$0 = \vec{a} \cdot (e_j \times e_k) - \vec{b} \cdot (e_j \times e_k)$$

$$0 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (e_j \times e_k)$$

$$0 = (a^i - b^i)\underbrace{(e_i) \cdot (e_j \times e_k)}$$

como los índices no son repetidos y $\{e_i\}$ conforman una base para $\mathbb{R}^3$, esto nunca será nulo.

$$0 = a^i - b^i$$

$$0 = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{a} = \vec{b}$$

7. Considere una vez más el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 y la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de la sección 2.2.4. Hemos comprobado que la matriz unitaria y las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ –presentadas también en los ejercicios de la sección 2.2.4– forman base para ese espacio (ver ejercicios sección 2.3.6). Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente, dado un vector genérico en este espacio vectorial encuentre su 1-forma asociada.

Contexto:

En primer lugar, recordemos que las matrices de Pauli son:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \; ; \; \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios anteriores comprobamos que las matrices de Pauli bajo esa def de prod int son ortogonales entre sí. Sin embargo, no son ortonormales, pues:

$$\|\sigma_0\|^2 = \mathrm{Tr}(\sigma_0^\dagger, \sigma_0) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \; ; \qquad \|\sigma_2\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

$$\|\sigma_1\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \qquad \|\sigma_3\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

a.

→ Para encontrar la base dual de las matrices de Pauli, tenemos que asegurar que:

$$\langle \sigma^\mu | \sigma_\nu \rangle = \mathrm{Tr}\left((\sigma^\mu)^\dagger \sigma_\nu\right) = \delta^\mu_\nu$$

Desarrollo:

Como $\mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ define un prod int y, por ende, $\langle c\mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = c^* \langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle$, tenemos que si σ^μ y σ_ν son matrices de Pauli y $\mu \neq \nu$:

$$\langle \sigma^\mu | \sigma_\nu \rangle = 0 \quad \text{(pues son ortogonales)}$$

Note que este resultado será independiente de si al vector dual (que originalmente era una matriz de Pauli) se lo reescala por un $c \in \mathbb{R}$:

$$\langle (c\,\sigma^\mu) | \sigma_\nu \rangle = c \langle \sigma^\mu | \sigma_\nu \rangle = 0 \quad (\text{si } \mu \neq \nu)$$

Entonces, ya tenemos una parte para la construcción de nuestra base dual, ya que poseemos la parte de cuando $\mu \neq \nu$ de δ^μ_ν

Ahora bien, note que si $\mu = \nu$, tenemos que

$$\langle \sigma^\mu | \sigma_\mu \rangle = \|\sigma_\mu\|^2 = 2.$$

Encontremos c tal que $\langle c\,\sigma^\mu | \sigma_\mu \rangle = 1$, donde $c\,\sigma^\mu$ será nuestro vector dual.

$$\langle c\,\sigma^\mu | \sigma_\mu \rangle = c^* \langle \sigma^\mu | \sigma_\mu \rangle = 1$$

$$c^* (2) = 1$$

este valor es así para todas las matrices de Pauli. Por lo que c es para todos.

$$c^* = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Al final, obtenemos que nuestra base dual es $\left\{\frac{1}{2}\sigma_0, \frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3\right\}$. O:

=

$$\sigma^0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

b. Dado un vector genérico, encuentre su 1-forma asociada.

Si $|A\rangle \in \text{gen}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces $|A\rangle = a^i|\sigma_i\rangle$

Por cómo está definida la correspondencia de 1-formas (kets y brats):

$$\langle A| = (a^i)^* \langle\sigma_i|$$
$$\langle A| = \frac{1}{2}\, a_i^* \, |\sigma_i\rangle$$
$$\downarrow$$
$$a_i^* = \langle A|\sigma_i\rangle$$
$$= \mathrm{Tr}(A^\dagger \sigma_i)$$

y nos queda:

$$\langle A| = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^\dagger \sigma_i)\,|\sigma_i\rangle$$

como A es hermítica:

$$\langle A| = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\,\sigma_i)\,|\sigma_i\rangle$$