Ejercicios #3

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix},$$

$z_1^* = z_1$ (Real)
$z_4^* = z_4$ (Real
$z_2^* = z_3$ (complejos).

Entonces:

a. Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

1. Independencia lineal.

En primer lugar, para poder corroborar que las matrices de Pauli son base del e.V, tenemos que comprobar que son I.I. → Para ello, es posible utilizar Sympy. (veáse en la carpeta de códigos).

2. ¿Generan?

Queremos corroborar que la combinación lineal de $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ siempre genera matrices hermíticas.

Tomemos el campo real (pues en caso de tomar el campo complejo, no cumpliríamos el que siempre la componente a_{11} y a_{22} sean reales).

Sea $A = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$:

$$A = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - a_2 i \\ a_1 + a_2 i & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, veamos $\mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & (a_1 + a_2 i)^* \\ (a_1 - a_2 i)^* & a_0 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - a_2 i \\ a_1 + a_2 i & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$

transponiendo A

Como para una combinación lineal arbitraria de $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ el resultado dio como resultado a las matrices hermíticas iguales a su adjunta (generan) y son LI, hemos demostrado que las matrices de Pauli son base para este e.V.

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real}, \\ z_4^* = z_4 & \text{real}, \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos}. \end{cases}.$$

Entonces

(a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

(b). Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

c. Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras

En primer lugar, note que para probar que es o no un subespacio, tenemos que verificar cerradura y la pertenencia del elemento neutro.

→ Por el lado del elemento neutro, es evidente que para ambos casos, si hacemos que cada uno de los escalares que conforman al cada z_1, z_2, z_3 y z_4 se hacen 0, obtenemos al elemento neutro. Por ello, nos falta únicamente corroborar cerradura.

MATRICES REALES:

En primer lugar, notemos el espacio vectorial conformado por este tipo de matrices pero con entradas reales. Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, una matriz dentro de este e.V, se debe cumplir

$$A = A^* \Rightarrow \quad A^* = \left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\right)^T\right)^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a_2 = a_3}$$

→ Las entradas a_{12} y a_{21} están condicionadas, mientras que las entradas parte de la diagonal son libres. Esto es, si A pertenece a dicho subespacio, tiene que tener la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos que es un subespacio de las matrices reales y del propuesto. Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ (matrices dentro de ambos e.V), y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_2 & \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta b_1 & \beta b_2 \\ \beta b_2 & \beta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Note entonces que la matriz resultante sigue siendo real (pues $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) y sigue cumpliendo que $c_{12} = c_{21} = c_2$, por lo que este sí es un subespacio.

MATRICES IMAGINARIAS PURAS:

Análogo al caso con las matrices reales, notemos el subespacio de las matrices que cumplen con $A^\dagger = A$ que son imaginarias puras.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ a_3 i & a_4 \end{pmatrix}$, una matriz dentro del e.V tiene que cumplir:

pues para ser parte del e.V la diagonal tiene que ser de carácter real

$$A^\dagger = A \Rightarrow (A^T)^* = A \Rightarrow \left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ a_3 i & a_4 \end{pmatrix}\right)^T\right)^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ a_3 i & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & -a_3 i \\ -a_2 i & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ a_3 i & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a_2 = -a_3}$$

Entonces, para ser parte de este subespacio, A tiene que tener la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ -a_2 i & a_4 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que es un e.V:

Sea $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ -a_2 i & a_4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 i \\ -b_2 i & b_4 \end{pmatrix}$ con $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$C = \alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 i \\ -a_2 i & a_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 & b_2 i \\ -b_2 i & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 i + \beta b_2 i \\ -\alpha a_2 i - \beta b_2 i & \alpha a_4 + \beta b_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & (\alpha a_2 + \beta b_2) i \\ -(\alpha a_2 + \beta b_2) i & \alpha a_4 + \beta b_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 i \\ -c_2 i & c_4 \end{pmatrix}$$

Justamente, llegamos a una forma donde se sigue manteniendo la condición del e.V y del subespacio (nuestra diagonal es real y las otras casillas son imaginarias puras, siendo una la inversa aditiva de la otra.