Ejercicios #2

→ Capítulo 2.1

1

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i .$$

(a). Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

(b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?

(c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?

I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).

IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

a. Sea $p(x), q(x), r(x) \in \mathcal{P}_n$ tal que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ y $r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. cerradura: (suma)

$$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$$

como es suma de polinomios

$$= (a_0+b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1})$$

como $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1}b_{n-1})x_{n-1}$$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

← ¡JUSTAMENTE TIENE LA FORMA DE UN $|p_i\rangle \in \mathcal{P}_n$!

↓

Cerrada bajo la suma

2. Asociatividad: (suma)

$$(p(x) + q(x)) + r(x) = [(a_0+b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \cdots (a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1})] + c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

Por ser la suma convencional de polinomios

$$= (a_0+b_0) + c_0 + (a_1x + b_1x) + c_1x + (a_2x + b_2x) + c_2x + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1}) + c_{n-1}x^{n-1}$$

$$= a_0 + (b_0+c_0) + a_1x + (b_1x + c_1x) + a_2x^2 + (b_2x^2 + c_2x^2) + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + (b_{n-1}x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-1})$$

Por la definición de suma de polinomios

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + (b_0+c_0) + (b_1x + c_1x) + (b_2x^2 + c_2x^2) + \cdots + (b_{n-1}x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-1})$$

$$= p(x) + [q(x) + r(x)]$$

3. Elemento Neutro (suma)

En este apartado, necesitamos demostrar que existe un único $\hat{p}(x) \in \mathcal{P}_n$ / $p(x) + \hat{p}(x) = \hat{p}(x) + p(x) = p(x)$

Sea $\hat{p}(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_{n-1}x^{n-1}$, encontremos dicho elemento neutro que sastifaga tal ec

$$p(x) = p(x) + \hat{p}(x)$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = (a_0+d_0) + (a_1+d_1)x + (a_2+d_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1}+d_{n-1})x^{n-1}$$

Para que la igualdad se cumpla, los coef de cada variable han de ser iguales, por lo que nos queda:

$$a_0 = a_0 + d_0$$
$$a_1 = a_1 + d_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-1} \, d_{n-1}$$

→ Pero todos ellos son reales, y podemos afirmar que para que lo anterior se cumpla la única solución sea

$$d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-1} = 0$$

Así, $\hat{p}(x)$ es único, y $\hat{p}(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1}$ ← y esto hace parte de $\mathcal{P}_n$.

4. Simetrizable (suma)

$\exists!\ p(x)^{-1} \ / \ p(x) + p(x)^{-1} = \hat{p}(x) \ / \ p(x)^{-1} \in \mathcal{P}_n$, → Es decir, $p(x)^{-1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$

Entonces, encontremos dicho elemento:

$$\hat{p}(x) = p(x) + p(x)^{-1}$$

$$0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} b_{n-1}) x_{n-1}$$

Y tenemos:

$$a_0 + b_0 = 0$$
$$a_1 + b_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} + b_{n-1} = 0$$

Nuevamente, ya estamos trabajando con escalares. De allí, podemos la certeza de que la única solución es $b_0 = -a_0$

↳ es decir, el inverso aditivo de cada comp es el coef del $p(x)^{-1}$.

Y así:

$$p(x)^{-1} = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_{n-1})x^{n-1}$$
$$= -(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$$

5. Cerradura (bajo mult con el campo)

¿ $\alpha[p(x)] \overset{?}{\in} \mathcal{P}_n$?

$$\alpha[p(x)] = \alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$$ como cada $a_i x^i$ sigue siendo un escalar, podemos:

$$= \alpha(a_0) + \alpha(a_1 x) + \alpha(a_2 x^2) + \cdots + \alpha(a_{n-1} x^{n-1})$$ ← Como α es escalar, forma un campo.

$$= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_{n-1})x^{n-1}$$

$$= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$$ ← ¡Llegamos a cómo luce un $p(x) \in \mathcal{P}_n$

6. Asociatividad (bajo mult por escalar)

$$\alpha[\beta p(x)] \overset{?}{=} [\alpha\beta] p(x)$$

$$\alpha[\beta p(x)] = \alpha\left((\beta a_0) + (\beta a_1)x + (\beta a_2)x^2 + \cdots + (\beta a_{n-1})x^{n-1} \right)$$

$$= \alpha(\beta a_0) + \alpha(\beta a_1)x + \alpha(\beta a_2)x^2 + \cdots + \alpha(\beta a_{n-1})x^{n-1}$$

$$= (\alpha\beta)a_0 + (\alpha\beta)a_1 x + (\alpha\beta)a_2 x^2 + \cdots + (\alpha\beta)a_{n-1} x^{n-1}$$ Por cómo definimos al producto por escalar

$$= (\alpha\beta)\, p(x)$$

7. Elemento neutro (bajo mult por escalar)

Sea $\gamma \in K$, queremos ver cuál es el valor que hace que este sea el elemento neutro.

$$p(x) = \gamma[p(x)]$$
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \gamma[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}]$$
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \gamma(a_0) + \gamma(a_1x) + \gamma(a_2x^2) + \cdots + \gamma(a_{n-1}x^{n-1})$$
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = (\gamma a_0) + (\gamma a_1)x + (\gamma a_2)x^2 + \cdots + (\gamma a_{n-1})x^{n-1}$$

↳ Y nos queda el sistema formado por elementos de K (escalares):

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \gamma a_0 \\ a_1 = \gamma a_1 \\ a_2 = \gamma a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} = \gamma a_{n-1} \end{array}\right\}$$

Es evidente notar que el único escalar que cumple es $\gamma = 1$. → Como el sistema tiene solución, si existe un elemento neutro.

$\gamma = 1 \in K$ //

8. Conmutatividad (suma)

$$p(x) + q(x) \overset{?}{=} q(x) + p(x)$$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1})$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

como cada uno de esos elementos pertenecen a K:

Trabajando el lado derecho:

$$q(x) + p(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1x + a_1x) + (b_2x^2 + a_2x^2) + \cdots + (b_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + (b_{n-1} + a_{n-1})x^{n-1}$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}$$

Y por ende, $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$ //

9. Distributiva #1

$$\alpha[p(x) + q(x)] \overset{?}{=} \alpha p(x) + \alpha q(x)$$

$$\alpha[p(x) + q(x)] = \alpha[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1}]$$
$$= \alpha[(a_0 + b_0) + (a_1x + b_1x) + (a_2x^2 + b_2x^2) + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1})]$$

como cada $a_ix^i \in K$:

$$= \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1x + b_1x) + \alpha(a_2x^2 + b_2x^2) + \cdots + \alpha(a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-1})$$
$$= \alpha a_0 + \alpha b_0 + \alpha a_1x + \alpha b_1x + \alpha a_2x^2 + \alpha b_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \alpha b_{n-1}x^{n-1}$$

$$= (\alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_{n-1}x^{n-1}) + (\alpha b_0 + \alpha b_1x + \alpha b_2x^2 + \cdots + \alpha b_{n-1}x^{n-1})$$
$$= \alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \alpha(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1})$$
$$= \alpha[p(x)] + \alpha[q(x)] \checkmark //$$

10. Distributiva #2

$$(\alpha + \beta)[p(x)] \overset{?}{=} \alpha p(x) + \beta p(x)$$

$$(\alpha + \beta)[p(x)] = (\alpha + \beta)[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}]$$
$$= (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1x + (\alpha + \beta)a_2x^2 + \cdots + (\alpha + \beta)a_{n-1}x^{n-1}$$
$$= \alpha a_0 + \beta a_0 + \alpha(a_1x) + \beta(a_1x) + \alpha(a_2x^2) + \beta(a_2x^2) + \cdots + \alpha(a_{n-1}x^{n-1}) + \beta(a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= \alpha a_0 + \alpha(a_1x) + \alpha(a_2x^2) + \cdots + \alpha(a_{n-1}x^{n-1}) + \beta a_0 + \beta(a_1x) + \beta(a_2x^2) + \cdots + \beta(a_{n-1}x^{n-1})$$
$$= \alpha[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}] + \beta[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}]$$

Justamente, lo anterior es:

$$= \alpha [p(x)] + \beta [p(x)] \checkmark$$

b. Note que los campos escalares que se pueden utilizar para definir a un E.V son los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$, pues los enteros $\mathbb{Z}$ y los naturales $\mathbb{N}$ no conforman un campo por no ser simetrizables bajo una ($\mathbb{Z}$) o las dos operaciones ($\mathbb{N}$) definidas de la manera usual.

↳ En este sentido, si tomamos cualquiera de los campos escalares "disponibles", tenemos que si tomamos a algún número $1/c$ y lo multiplicamos con algún $p(x) \in \mathcal{P}_n$ con cada $a_i \in \mathbb{Z}$, los coeficientes ahora pertenecerían también a $\mathbb{Z}$ y ya dejarían de ser enteros.

Esto es, este conjunto no es cerrado bajo la multiplicación por escalar para todos los $p(x) \in \mathcal{P}_n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$, y, por ende, no conforma un espacio vectorial.

Para lo anterior, veamos un contraejemplo:

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ donde todo $a_i \in \mathbb{Z}$ y algún campo escalar (racional, real o complejo, en todo caso el número que utilizaremos será miembro de allí) tal que usemos un $\alpha = 1/c$, donde $c \in \mathbb{Z}$. Tenemos:

$$\frac{1}{c}[p(x)] = \frac{1}{c}[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{c} a_0 + \frac{1}{c}(a_1 x) + \frac{1}{c}(a_2 x^2) + \cdots + \frac{1}{c}(a_{n-1} x^{n-1})$$

$$= \left(\frac{1}{c} a_0\right) + \left(\frac{a_1}{c}\right) x + \left(\frac{a_2}{c}\right) x^2 + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{c}\right) x^{n-1}$$

$$= a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + \cdots + a_{n-1}' x^{n-1}$$

Pero, note como los nuevos coeficientes $a_i' \notin \mathbb{Z}$, es decir, no es cerrada bajo la multiplicación por escalar.

c.

I. El polinomio 0 y todos los polinomios de grado n-1.

Para demostrar que un subconjunto de un E.V es o no subespacio bajo las mismas operaciones heredadas, nos basta con verificar que bajo la suma (+) y el prod. por escalar (·) sea cerrado y que el elemento neutro de la suma se encuentre en el subconjunto. Así:

• ¿El $0_{p(x)} \in \mathcal{P}_{n-1}$?

Sí, pues note que:

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-2}$$ ← el 0 es un caso especial, que "puede tener varios grados"

Como puede verse de alguna forma como un elemento de $\mathcal{P}_{n-1}$, podemos afirmar que $0 \in \mathcal{P}_{n-1}$.

• Cerradura suma

¿ $[p(x)+q(x)] \in \mathcal{P}_{n-1}$?

$$[p(x)+q(x)] = (a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-2}x^{n-2})+(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_{n-2}x^{n-2})$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1x+b_1x)+(a_2x^2+b_2x^2)+\dots+(a_{n-2}x^{n-2}+b_{n-2}x^{n-2})$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\dots+(a_{n-2}+b_{n-2})x^{n-2}$$
$$= c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_{n-2}x^{n-2}$$

Como el resultado nos dio un polinomio de orden n-1 (no mayor) o menor, tenemos que bajo la suma es cerrado.

• Cerradura multiplicación por escalar.

Sea $\alpha \in \mathbb{F}$, un escalar:

¿ $\alpha[p(x)] \in \mathcal{P}_{n-1}$?

$$\alpha[p(x)] = \alpha(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-2}x^{n-2})$$
$$= \alpha(a_0)+\alpha(a_1x)+\alpha(a_2x^2)+\dots+\alpha a_{n-2}x^{n-2}$$
$$= (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\dots+(\alpha a_{n-2})x^{n-2}$$

→ como $\alpha \in \mathbb{F}$, el resultado de ese producto solo afectara a los coeficientes y no al grado del polinomio, por lo

incluso si $\alpha=0$ pues ya vimos que $0_{p(x)} \in \mathcal{P}_{n-1}$

→ ¡Si es subespacio vectorial!

II. El polinomio 0 y todos los polinomios de grado par.

Similar al caso anterior, tenemos:

• ¿ El $0_{p(x)} \in \mathcal{P}_{n-1}$?

Sí, pues note que:

$$0 = 0+0x^2+0x^4+\dots+0x^{2n}$$ ← El elemento neutro de la suma hace parte del subconj.

• ¿Es cerrado bajo la suma?

$$p(x)+q(x) = a_0+a_1x^2+a_2x^4+\dots+a_nx^{2n}+b_0+b_1x^2+b_2x^4+\dots+b_nx^{2n}$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^2+(a_2+b_2)x^2+\dots+(a_n+b_n)x^n$$ ← no hay forma de qe aparezca un grado impar.

¡cerrada! ✓✓

• ¿Es cerrado bajo el prod por escalar? ¡si!

$$\alpha[p(x)] = \alpha a_0+(\alpha a_1)x^2+(\alpha a_2)x^4+\dots+(\alpha a_n)x^{2n}$$ ← Como $\alpha \in \mathbb{F}$, no puede cambiar el grado del polinomio.

III Los polinomios que tienen a x como factor.

Sea $p(x) = x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1})$, y $q(x)$:

es lo mismo a los pol sin términos ctes.

→ El 0 pertenece, pues siempre se puede hacer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ para incluirlo.

→ ¿cerrado bajo suma y mult?

$$p(x) + q(x) = (a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$$
$$= (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

← no hay forma de aparecer un termino cte.

→ ¿bajo el prod por escalar?

¡Si! pues:

$$\alpha[p(x)] = \alpha(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$
$$= \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_nx^n \quad \checkmark\checkmark$$

→ Es subespacio

IV Polinomios con x-1 como factor

$$p(x) = (x-1)(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1})$$
$$= a_1x - a_1 + a_2x^3 - a_2x^2 + \cdots + a_nx^n - a_nx^{n-1}$$

grados par ← -

¿el 0 está? ¡Si! Nuevamente, por las razones pasadas.

- cerrado suma

$$[p(x) + q(x)] = (x-1)(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}) + (x-1)(b_1 + b_2x^2 + \cdots + b_nx^{n-1})$$
$$= (x-1)(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + b_1 + b_2x^2 + \cdots + b_nx^{n-1}) //.$$

- cerrado producto:

$$\alpha[p(x)] = \alpha(x-1)(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1})$$
$$= (x-1)\alpha(a_1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^{n-1})$$
$$= (x-1)(\alpha a_1 + \alpha a_2x^2 + \cdots + \alpha a_nx^{n-1}) //.$$

Ejercicio #6: cuaterniones

a). Compruebe que los cuaterniones son $\mathbb{R}$-e.V.

→ cerradura suma:

$|a\rangle + |b\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle + b^\alpha |q_\alpha\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$ ← por definición

← note que como esto tiene la forma, es un cuaternión → cerrada bajo la suma

→ cerradura bajo prod.

$\alpha |c\rangle = \alpha(c^\alpha |q_\alpha\rangle) = (\alpha c^\alpha)|q_\alpha\rangle$ ← de igual forma, esto luce como un cuaternión.

→ Asociativa suma:

$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) \overset{?}{=} (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = a^\alpha |q_\alpha\rangle + (b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha))|q_\alpha\rangle = ((a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle + c^\alpha |q_\alpha\rangle$

$= (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$ //

→ Asociatividad prod:

$\alpha(\beta|c\rangle) \overset{?}{=} (\alpha\beta)|c\rangle$

$\alpha(\beta|c\rangle) = \alpha(\beta c^\alpha |q_\alpha\rangle) = (\alpha(\beta c^\alpha))|q_\alpha\rangle = (\alpha\beta)c^\alpha |q_\alpha\rangle = (\alpha\beta)|c\rangle$ //

→ Neutro suma:

- Es el 0 convencional de siempre, debido a que es el único que al sumar comp a comp vuelve a dar el mismo cuaternión.

→ inverso suma:

- Por lo mismo anterior, como trabajamos comp a comp, el que hará que $|a\rangle + |a\rangle' = |a\rangle' + |a\rangle = 0$ es el inverso aditivo → $|a\rangle' = -|a\rangle$.

→ Conmutatividad:

$|a\rangle + |b\rangle \overset{?}{=} |b\rangle + |a\rangle$

escalares.

$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle = |b\rangle + |a\rangle$ //

→ Distributiva #1:

$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) \overset{?}{=} \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha(a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (\alpha(a^\alpha + b^\alpha))|q_\alpha\rangle = (\alpha a^\alpha + \alpha b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (\alpha a^\alpha)|q_\alpha\rangle + (\alpha b^\alpha)|q_\alpha\rangle$

$= \alpha(a^\alpha)|q_\alpha\rangle + \alpha(b^\alpha)|q_\alpha\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$

→ Distributiva #2.

$(\alpha + \beta)|a\rangle \overset{?}{=} \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

escalares

$(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta)a^\alpha |q_\alpha\rangle = ((\alpha + \beta)a^\alpha)|q_\alpha\rangle = (\alpha a^\alpha + \beta a^\alpha)|q_\alpha\rangle = \alpha(a^\alpha)|q_\alpha\rangle + \beta(a^\alpha)|q_\alpha\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$ //

b. Sean dos cuaterniones $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \vec{r})$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos dos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podría representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

otro cuaternión

La tabla de multiplicación es:

$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
1	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

← cuaterniones base.

En primer lugar, note que:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0, \vec{b}) \odot (r^0, \vec{r})$$
$$= b^\alpha |q_\alpha\rangle \odot r^\alpha |q_\alpha\rangle$$

Pues b^0 y r^0 $\in \mathbb{R}$.

$$= (b^0 + b^i |q_i\rangle) \odot (r^0 + r^i |q_i\rangle)$$
$$= b^0 r^0 + b^0 r^i |q_i\rangle + r^0 b^i |q_i\rangle + b^i |q_i\rangle \odot r^j |q_j\rangle$$
$$= b^0 r^0 + b^0 r^i |q_i\rangle + r^0 b^i |q_i\rangle + b^i |q_i\rangle \odot r^j |q_j\rangle \qquad (1)$$

Note entonces que ese producto entre $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle$ puede verse como $(-\delta^i_j + \varepsilon^{ijk}|q_k\rangle)$ [por la tabla de multiplicación], pues cuando $i=j$ el resultado da un escalar, negativo que es precisamente $-1 \rightarrow -\delta^i_j$, y cuando $i \neq j$, el resultado no se anula sino que nos brinda el otro vector, y el signo es positivo si el orden es cíclico y negativo si es anticíclico [ej, $|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle$ y $|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = -|q_3\rangle$] $\longrightarrow \varepsilon_{kij}\, |q_k\rangle$

Entonces:

$$b^i |q_i\rangle\, r^j |q_j\rangle = b^i r^j |q_i\rangle |q_j\rangle$$
$$= b^i r^j (-\delta^i_j + \varepsilon^{kij} |q_k\rangle)$$
$$= -\delta^i_j b^i r^j + b^i r^j \varepsilon^{kij} |q_k\rangle$$
$$= -b^i r^i + \varepsilon^{kij} b^i r^j |q_k\rangle$$

Por definición:

$$= -\vec{b}\cdot\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r} \quad (2)$$

Ahora, poniendo (2) en (1), tenemos que:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 + b^0 r^i |q_i\rangle + r^0 b^i |q_i\rangle - b^i r^i + \varepsilon^{kij} b^i r^j |q_k\rangle$$
$$= b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r}$$

Note que $\vec{r} = r^i |q_i\rangle$ pues los índices latinos denotan orden 1, 2, 3 $\longrightarrow$ justamente, $\vec{r}$.

Agrupando/separando la parte real de la compleja: (escalares de vectores complejos)

$$= (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r},\ b^0\vec{r} + r^0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{r})$$

c. Dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

→ $S^{ji} = S^{ij}$, $(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$ → simétrico

→ a es un número

→ $A^{[jk]i}$ representa un conjunto antisimétricos en j y k:

↳ $A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$

Nota:
Un elemento simétrico y otro anti se anulan

Desarrollo:

Trabajemos con el lado izquierdo de la igualdad:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^\alpha |q_\alpha\rangle) \odot (r^\alpha |q_\alpha\rangle)$$
$$= (b^0 + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0 + r^j|q_j\rangle)$$
$$= b^0r^0 + b^0r^j|q_j\rangle + r^0b^i|q_i\rangle + b^i|q_i\rangle r^j|q_j\rangle$$
$$= b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + r^0b^j|q_j\rangle + b^ir^j|q_i\rangle|q_j\rangle$$

como los índices son mudos

$$= b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + r^0b^j|q_j\rangle + b^ir^j(-\delta^i_j + \varepsilon^{kij}|q_k\rangle)$$
$$= b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + r^0b^j|q_j\rangle - b^ir^j\delta^i_j + b^ir^j\varepsilon^{kij}|q_k\rangle$$
$$= (b^0r^0 - b^ir^j\delta^i_j)|q_0\rangle + (b^0r^j + r^0b^j)|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$
$$= (b^0r^0 - b^ir_i)|q_0\rangle + (b^0r^j + r^0b^j)|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$

← como $b^0r^0 + b^ir_i \in \mathbb{Z}$, podemos decir que son un número cualquiera a

$$= a|q_0\rangle + (b^0r^j + r^0b^j)|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$
$$= a|q_0\rangle + (b^0r^j + b^jr^0)|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$
$$= a|q_0\rangle + (b^\alpha r^j\delta^0_\alpha + b^jr^\alpha\delta^0_\alpha)|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$
$$= a|q_0\rangle + (b^\alpha r^j + b^jr^\alpha)\delta^0_\alpha|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$

← Por la definición de arriba, podemos identificar la parte subrayada como la parte simétrica de un tensor $S^{\alpha j}$

$$= a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + \varepsilon^{kij}b_ir_j|q_k\rangle$$

$$= a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + A^{[ij]k}b_ir_j|q_k\rangle$$

* Ahora bien, note que el símbolo ε^{ijk} es antisimétrico, pues al cambiar el orden de los índices reconfiguramos la definición de 1 y -1.

→ El signo ⊖ aparece para que ambos resultados sean equiparables:

$\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$ ← Antisimétrico

↓

Entonces, a esa antisimetría es a la que nos referimos con $A^{[ij]k}$

Así, al resultado anterior lo podemos entender como que el producto entre dos cuaterniones puede ser descompuesto en una parte escalar (real) y una parte compleja vectorial simétrica y otra antisimétrica. //.

d. Identifique las cantidades a, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$ en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿$|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ es un vector, pseudovector o ninguno?

- El término a representa la cantidad escalar encontrada en b. por lo que $a = b^0r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}$
- La parte simétrica $S^{(ij)}$ surgió de $b^0\vec{r} + r^0\vec{b}$ [justamente, la parte vectorial]
- La parte antisimétrica $A^{[ij]k}$ surgió del $\vec{b}\times\vec{r}$, un producto cruz [un pseudovector]

Esto nos indica que $|a\rangle \odot |r\rangle$ no es exclusivamente un vector, un pseudovector o un escalar, sino que se trata de una combinación de estos tres objetos matemáticos.

e. (e). Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pueden representar la base de los cuaterniones $\{\underbrace{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle}_{\text{parte compleja vec}}, \underbrace{|q_0\rangle}_{\text{parte escalar real}}\}$. Seguidamente muestre que matrices complejas 2×2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son números complejos. Las Matrices de Pauli aparecen en mecánica cuántica cuando se tiene en cuenta la interacción del espín de una partícula con un campo electromagnético externo y en estas notas las consideraremos en varios momentos (ver, por ejemplo los ejercicios de las secciones 4.3.7 y 4.6.6).

→ ¿Son L.I?

$$\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3 + \alpha_0\sigma_0 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_0 = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\alpha_2 \\ i\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_3 + \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_1 + (-i\alpha_2) &= 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_3 + \alpha_0 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_4 \to f_4 + f_1 \\ f_2 \to f_2 + f_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

→ Como $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_0 = 0$ para que se cumpliera lo planteado en (2), entonces el sistema es L.I.

Ahora bien, es posible analizar que como tenemos 4 vectores de un espacio de 4 dimensiones (matrices 2×2) L.I, estos pueden ser una base a un sistema con esa misma dimensión ⟶ Al igual que de las cuatro dimensiones de un cuaternión.

Además, podremos notar la misma estructura algebraica, pues si hacemos la tabla de multiplicación, obtenemos un isomorfismo (tablas iguales)

→ Así pues, con el teorema de que n vectores L.I en un $\mathbb{F}$.e.V de dimensión n son base para ese e.V, y partiendo de que las matrices de Pauli y la identidad son isomorfos con $|q_i\rangle$, podemos decir que sí pueden ser base para los cuaterniones.

→ #Note el siguiente ejercicio donde se comprueba lo de las tablas de multiplicación.

¿Las matrices complejas $\begin{pmatrix} z & \omega \\ -\omega^* & z^* \end{pmatrix}$ pueden ser consideradas como cuaterniones?

$z = x+iy$, $\omega = a+ib$

Del punto anterior de este mismo enunciado, teníamos que las matrices $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eran base para los cuaterniones, por lo que

Para verificar que ese tipo de matrices pueden ser consideradas como cuaterniones, tenemos que ver si existe alguna forma por la cual a esa matriz se la pueda ver como una combinación lineal de las cuatro bases del espacio de los cuaterniones:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

y nos salen las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_4 &= x+iy \\ a_1 - a_4 &= x-iy \\ (3)\quad a_2 - ia_3 &= a+ib \\ (4)\quad a_2 + ia_3 &= -a+ib \end{aligned}\right\}$$

Es tarea sencilla ver cómo al haber en cada sistema dos ecu. y dos incógnitas como tiene solución:

→ si $a_1 = x$ y $a_4 = iy$, tendríamos la forma propuesta para z.

$a_2 = a+ib+ia_3$ (5)

(5) en (4)

$a+\cancel{ib}+ia_3+ia_3 = -a+\cancel{ib}$

$2ia_3 = -2a$

$\boxed{a_3 = -\frac{a}{i}}$ → $\boxed{a_2 = ib}$

así, como existen coeficientes mediante los cuales se pueden combinar las bases para obtener la forma propuesta, podemos decir que esa clase de matriz compleja sí es un cuaternión.

f.) Muestre que las matrices..., son una representación posible de la base de los cuaterniones

→ una forma de ver el isomorfismo (representación) de las bases de los cuaterniones y dichas matrices es ver las tablas de multiplicación y compararlas:

$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
1	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

Haciendo una ley de correspondencia:

$\hat{\imath} \mapsto \lvert q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\jmath} \mapsto \lvert q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{k} \mapsto q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lvert q_0\rangle \to I$

Veamos:

$$\lvert q_1\rangle \lvert q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\lvert q_2\rangle \lvert q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$|q_3\rangle|q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

#Recuerde la propiedad de matrices:

$AB = -BA$

Evidentemente, $II = I$. ← ya tenemos la diagonal.

Ahora:

$$|q_1\rangle|q_2\rangle = -|q_2\rangle|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$$

↳ dos entradas.

$$|q_2\rangle|q_3\rangle = -|q_3\rangle|q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = |q_1\rangle$$

$$|q_3\rangle|q_1\rangle = -|q_1\rangle|q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, se pueden verificar todos los elementos de la tabla, por lo que este isomorfismo/representación es válido.

g). ¿$\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$ es una buena def de producto interno?
Para verificarlo, debemos verificar las prop de prod int. → $|a\rangle^* = a_0 - a_i|q_i\rangle$

1. $\langle a|a\rangle \overset{?}{=} \|a\|^2 \geq 0$ e igual a 0 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $a=0$

$\langle a|a\rangle = (a_0 - a_i|q_i\rangle)\odot(a_0 + a_i|q_i\rangle) = a_0^2 - a_i^2|q_i\rangle^2 = a_0^2 + a_i^2 = a_\alpha^2$

↖ como esto es una suma de cuadrados, esto siempre será un real, además de que $\langle a|a\rangle \geq 0$ $\forall a \in \mathbb{H}$.

2. $\langle a|b\rangle \overset{?}{=} (\langle b|a\rangle)^*$

$\langle a|b\rangle = (a_0 - a_i|q_i\rangle)\odot(b_0 + b_i|q_i\rangle) = a_0b_0 + a_0b_i|q_i\rangle - b_0a_i|q_i\rangle + a_ib_i$
$= (a_0b_0 + a_ib_i) + (a_0b_i - b_0a_i)|q_i\rangle$.

Ahora con el lado derecho:

$\langle b|a\rangle = (a_0b_0 + a_ib_i) + (b_0a_i - a_0b_i)|q_i\rangle$

$(\langle b|a\rangle)^* = (a_0b_0 + a_ib_i) + (-b_0a_i + a_0b_i)|q_i\rangle$ ✓✓. → $\langle a|b\rangle = (\langle b|a\rangle)^*$

→ linealidad lado izq:

$\langle a | \alpha b + \gamma c\rangle \overset{?}{=} \alpha\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$

$\langle a|\alpha b+\gamma c\rangle = a_0(\alpha b_0+\gamma c_0) + a_i(\alpha b_i+\gamma c_i) + \big(a_0(\alpha b_i+\gamma c_i) - (\alpha b_0+\gamma c_0)a_i\big)|q_i\rangle$

$= \alpha a_0 b_0 + \gamma a_0 c_0 + \alpha a_i b_i + \gamma a_i c_i + (\alpha a_0 b_i + \gamma a_0 c_i - \alpha b_0 a_i - \gamma c_0 a_i)|q_i\rangle$

Desarrollando la parte derecha:

$\alpha\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle : \alpha((a_0 b_0 + a_i b_i) + (a_0 b_i - b_0 a_i)|q_i\rangle) + \gamma((a_0 c_0 + a_i c_i) + (a_0 c_i - c_0 a_i)|q_i\rangle)$

$= \alpha a_0 b_0 + \alpha a_i b_i + (\alpha a_0 b_i - \alpha b_0 a_i)|q_i\rangle + \gamma a_0 c_0 + \gamma a_i c_i + (\gamma a_0 c_i - \gamma a_i c_0)|q_i\rangle$ //.

→ Linealidad lado derecho

$\langle \alpha a + \beta b | c\rangle \overset{?}{=} \alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle$ $\qquad = (a_0 b_0 + a_i b_i) + (a_0 b_i - b_0 a_i)|q_i\rangle$.

$\langle \alpha a+\beta b|c\rangle = \big((\alpha a_0+\beta b_0)c_0 + (\alpha a_i+\beta b_i)c_i\big) + \big((\alpha a_0+\beta b_0)c_i - c_0(\alpha a_i+\beta b_i)\big)|q_i\rangle$

$= \alpha a_0 c_0 + \beta b_0 c_0 + \alpha a_i c_i + \beta b_i c_i + (\alpha a_0 c_i + \beta b_0 c_i - c_0 \alpha a_i - \beta c_0 b_i)|q_i\rangle$

$= \alpha(a_0 c_0 + a_i c_i + (a_0 c_i - c_0 a_i)|q_i\rangle) + \beta(b_0 c_0 + b_i c_i + (b_0 c_i - c_0 b_i)|q_i\rangle)$

Desarrollando el lado derecho:

$\alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle = \alpha^*(a_0 c_0 + a_i c_i + (a_0 c_i - c_0 a_i)|q_i\rangle) + \beta^*(b_0 c_0 + b_i c_i + (b_0 c_i - c_0 b_i)|q_i\rangle)$

* Dado que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^*, \beta^* = \alpha, \beta$.

Verificando lo del 0:

$\langle a|0\rangle \overset{?}{=} 0$

Por la def anterior:

$\langle a|0\rangle = (a\cdot 0 + \cancel{\vec{0}\cdot\vec{a}}) + (a^0\vec{0} - \cancel{0\vec{a}})|q_i\rangle = 0$. //.

h). Modifique la def anterior de tal modo que:

$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a}|b\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a}|b\rangle \odot |q_1\rangle\right]$ → Del punto anterior sabemos que $\langle \widetilde{a}|b\rangle = a_\alpha^2$

• 1era. $\langle v_i|v_i\rangle \equiv \| |v_i\rangle \|^2 \in K$ $\wedge$ $\langle v_i|v_i\rangle \geq 0$ $\forall |v_i\rangle \in V$, y que si $\langle v_i|v_i\rangle = 0 \Rightarrow |v_i\rangle \equiv |0\rangle$

$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[a_\alpha^2 - |q_1\rangle (a_\alpha)^2 |q_1\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[a_\alpha^2 - a_\alpha^2|q_1\rangle|q_1\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[a_\alpha^2 + a_\alpha^2\right] = a_\alpha^2$

→ Adoptando la justificación del punto anterior, esto si satisface $\langle v_i|v_i\rangle \geq 0$

2da. $\langle v_i | v_j \rangle = \langle v_j | v_i \rangle^*$

Antes, será de utilidad demostrar:

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot q_1\right] \quad = 1/2 \left[|x\rangle - |q_1\rangle |x\rangle |q_1\rangle \right.$$

Para acotar la escritura, definamos:

$|x\rangle = \widetilde{\langle a|b\rangle} = x_0 + x^i |q_i\rangle \to |x\rangle$ es un cuaternión.

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = \underbrace{(a_0 b^0 + a_i b_i)}_{x_0} + \underbrace{(a^0 b^i - b^0 a^i)}_{x_i} |q_i\rangle$$

Lo que buscamos es demostrar que

$$1/2 \left[\underbrace{x - |q_1\rangle |x\rangle |q_1\rangle}_{\text{la parte vect conjugada}}\right] = x_0 + x_1|q_1\rangle$$

¿Qué es $|x\rangle|q_1\rangle$?

$$|x\rangle|q_1\rangle = (x_0|q_1\rangle + x^i|q_i\rangle|q_1\rangle) = x_0|q_1\rangle + x^i(\delta^j_i + \epsilon_{ijk}|q_k\rangle)$$

$$= x_0|q_1\rangle + x^i(-\delta^1_i + \epsilon_{i1k}|q_k\rangle) = x_0|q_1\rangle - \delta^1_i x^i + x^i\epsilon_{i1k}|q_k\rangle)$$

$$|x\rangle|q_1\rangle = x_0|q_1\rangle - x^1 - x^2|q_3\rangle + x^3|q_2\rangle$$

Ahora, lleguemos al $|q_1\rangle|x\rangle|q_1\rangle$

$$|q_1\rangle|x\rangle|q_1\rangle = |q_1\rangle(x_0|q_1\rangle - x^1 - x^2|q_3\rangle + x^3|q_2\rangle) = -x_0|q_0\rangle - x^1|q_1\rangle + x^2|q_2\rangle + x^3|q_3\rangle$$

Y ahora:

$$1/2\left[x - |q_1\rangle|x\rangle|q_1\rangle\right] = 1/2\left[x_0 + x_1|q_1\rangle + \cancel{x_2|q_2\rangle} + \cancel{x_3|q_3\rangle} + x_0|q_0\rangle + x^1|q_1\rangle - \cancel{x^2|q_2\rangle} - \cancel{x^3|q_3\rangle}\right]$$

$$= 1/2\left[2x_0|q_0\rangle + 2x_1|q_1\rangle\right.$$

$$= x_0|q_0\rangle + x_1|q_1\rangle \;//$$

Lo que quiere decir que $\langle a|b\rangle = x_0 + x_1|q_1\rangle$ ← solo la 1era comp.

2da propiedad:

$$\langle a|b\rangle \stackrel{?}{=} (\langle b|a\rangle)^*$$

$$\langle a|b\rangle = (a_0b_0 + a_ib_i) + (a_0b_1 - b_0a_1)|q_1\rangle$$

$$\langle b|a\rangle = (a_0b_0 + a_ib_i) + (b_0a_1 - a_0b_1)|q_1\rangle$$

$$(\langle b|a\rangle)^* = (a_0b_0 + a_ib_i) + (a_0b_1 - b_0a_1)|q_1\rangle$$

¡Se cumple!

3era: $\langle a|\beta b + \gamma c\rangle \stackrel{?}{=} \beta\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle$

$$\langle a|\beta b + \gamma c\rangle = (a_0(\beta b_0 + \gamma c_0) + a_i(\beta b_i + \gamma c_i)) + (a_0(\beta b_1 + \gamma c_1) - (\beta b_0 + \gamma c_0)a_1)|q_1\rangle$$

$$= \beta a_0b_0 + \gamma a_0c_0 + \beta a_ib_i + \gamma a_ic_i + \beta a_0b_1|q_1\rangle + \gamma a_0c_1|q_1\rangle - \beta a_1b_0|q_1\rangle - \gamma c_0a_1|q_1\rangle$$

$$= \beta(a_0b_0 + a_ib_i + (a_0b_1 - b_0a_1)|q_1\rangle) + \gamma(a_0c_0 + a_ic_i + (a_0c_1 - c_0a_1)|q_1\rangle)$$

¡Se cumple!

Por el lado derecho:

$$\beta\langle a|b\rangle + \gamma\langle a|c\rangle = \beta[(a_0b_0 - a_ib_i) + (a_0b_1 - b_0a_1)|q_1\rangle) + \gamma[(a_0c_0 - a_ib_i) + (a_0c_1 - c_0a_1)|q_1\rangle)$$

Similar pero para el otro comp:

$\langle \alpha a+\beta b | c\rangle \stackrel{?}{=} \alpha^* \langle a | c\rangle + \beta^* \langle b | c\rangle$ $\qquad x_0 |q_0\rangle + x_1 |q_1\rangle$

$$\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = (\alpha a_0 + \beta b_0)c_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)c_1 + ((\alpha a_0 + \beta b_0)c_1 - c_0(\alpha a_1 + \beta b_1))|q_1\rangle$$

$$= \alpha a_0 c_0 + \beta b_0 c_0 + \alpha a_1 c_1 + \beta b_1 c_1 + (\alpha a_0 c_1 + \beta b_0 c_1 - \alpha c_0 a_1 - \beta c_0 b_1)|q_1\rangle$$

✓✓

y ahora:

$$\alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b | c\rangle = \alpha^* (a_0 c_0 + a_i c_i + (a_0 c_1 - c_0 a_1)|q_1\rangle) + \beta^* (b_0 c_0 + b_i c_i + (b_0 c_1 - c_0 b_1)|q_1\rangle)$$

Ulta: el cero:

$$\langle a | 0\rangle = (a_0 0 - 0 a_i) + (a_0 0 - 0 a_1)|q_1\rangle = 0$$

i) Compruebe que la siguiente es buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|a\rangle) : \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$$

En primer lugar, note que para determinar es o no una buena definición de norma, tenemos que comprobar:

- $\| |v_i\rangle \| \geq 0$, si $\| |v_i\rangle \| = 0 \Rightarrow |v_i\rangle \equiv |0\rangle$.

Tomando la definición:

$$\begin{aligned} |a\rangle^* \odot |a\rangle &= (a_0 - a_i|q_i\rangle) \odot (a_0 + a_i|q_i\rangle) \\ &= a_0^2 - a_i|q_i\rangle(a_0) + a_0 a_i|q_i\rangle - a_i|q_i\rangle a_i|q_i\rangle \\ &= a_0^2 - \cancel{a_0 a_i|q_i\rangle} + \cancel{a_0 a_i|q_i\rangle} - a_i^2|q_i\rangle|q_i\rangle \\ &= a_0^2 + a_i^2 = a_\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow n(|a\rangle) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Entonces, note cómo la existencia de la $\sqrt{\;}$ sobre $\langle a|a\rangle$ produce que el resultado sea siempre positivo. Además, por la expresión algebraica, (como es una suma de cuadrados / elementos positivos), no hay forma de que términos se anulen, lo que tmb implica que para que $n(|a\rangle) = 0$, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

✓✓

- $\| \alpha |v_i\rangle \| = |\alpha| \, \| |v_i\rangle \|$

$$\begin{aligned} \| \alpha |v_i\rangle \|^2 = \| \alpha(b_0 + \vec{b}) \|^2 = (\alpha b_0 + \alpha\vec{b})^* \odot (\alpha b_0 + \alpha\vec{b}) &= \alpha^2 b_0^2 + \cancel{\alpha^2 b_0 \vec{b}} - \cancel{\alpha^2 b_0 \vec{b}} - \alpha^2 \vec{b} \odot \vec{b} \\ &= \alpha^2 b_0^2 - \alpha^2(\vec{b} \odot \vec{b}) \\ &= \alpha^2 (b_0^2 - \vec{b} \odot \vec{b}) \\ &= \alpha^2 \| |v_i\rangle \|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| |v_i\rangle \|^2 &= (b_0 - \vec{b}) \odot (b_0 + \vec{b}) \\ &= b_0^2 + b_0\vec{b} - b_0\vec{b} - \vec{b} \odot \vec{b} \\ &= b_0^2 - \vec{b} \odot \vec{b} \end{aligned}$$

y por tanto: $\| \alpha |v_i\rangle \| = \alpha \| |v_i\rangle \|$ ✓ //.

- Desigualdad triangular: $\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|$

$$\begin{aligned} \| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 = \| (a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b}) \| &= \big((a_0 + b_0) - (\vec{a} + \vec{b})\big) \odot \big((a_0 + b_0) + (\vec{a} + \vec{b})\big) \\ &= (a_0 + b_0)^2 + \cancel{(a_0 + b_0)(\vec{a} + \vec{b})} - \cancel{(a_0 + b_0)(\vec{a} + \vec{b})} - (\vec{a} + \vec{b}) \odot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (a_0 + b_0)^2 - (a_i + b_i)|q_i\rangle (a_i + b_i)|q_i\rangle \\ &= (a_0 + b_0)^2 + (a_i + b_i)^2 \\ &= a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 + a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 + 2\langle v_i, v_j\rangle \end{aligned}$$

Ahora:

$$(\| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|)^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 + 2\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|$$

→ como $\langle p, q\rangle \leq \|p\| \, \|q\|$; tenemos que: # desigualdad de cauchy-Schwart

$$\| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 + 2\langle v_i, v_j\rangle \leq \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 + 2\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|$$

$$\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 \leq (\| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|)^2$$

$$\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \| \quad //$$

Por tanto, esta si es una buena definición para norma.

j) Compruebe si el cuaternión definido por: $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2}$, puede ser considerado como el inverso de $|a\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$.

Utilizando la definición de norma anterior:

$$\|a\|^2 = |a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0 - a_i|q_i\rangle) \odot (a_0 + a_i|q_i\rangle)$$
$$= a_0^2 + a_0 a_i|q_i\rangle - (a_i|q_i\rangle)a_0 - a_i|q_i\rangle a_i|q_i\rangle$$
$$= a_0^2 + \cancel{a_0 a_i|q_i\rangle} - \cancel{a_0 a_i|q_i\rangle} - a_i^2 |q_i\rangle|q_i\rangle$$

*Por la tabla de multiplicación

$$= a_0^2 + a_i^2 = a_\alpha^2 \; //$$

Ahora, para comprobar que $|\bar{a}\rangle$ sea considerado como el inverso, tenemos que ver que $|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = e$ ← el elemento neutro.

→ ¿Quién es el elemento neutro? Note que todo real es un cuaternión, por lo que si buscamos a un elemento neutro para un cuaternión, tenemos que verificar que el elemento neutro también lo sea para un escalar. Note entonces que si tenemos $e \odot 1 = 1$, e tendrá que ser 1 obligatoriamente, y que cualquier otra componente imaginaria vectorial en e harra que no se cumpliera con la definición de que e sea el elemento neutro.

→ $e = 1$

Ahora, ya con el neutro, verifiquemos que $|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = 1$

← cuaternión escalado

$$|\bar{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2} = \left(\frac{(a_0 - a_i|q_i\rangle)}{a_\alpha^2} \right)$$

escalar →

$$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \left(\frac{(a_0 - a_i|q_i\rangle)}{a_\alpha^2} \right) \odot (a_0 + a_i|q_i\rangle) = \left(\frac{a_0}{a_\alpha^2} - \frac{a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} \right) \odot (a_0 + a_i|q_i\rangle)$$

$$= \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} + \frac{a_0}{a_\alpha^2} a_i|q_i\rangle - \frac{a_i|q_i\rangle (a_0)}{a_\alpha^2} - \frac{a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}(a_i|q_i\rangle)$$

$$= \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} + \cancel{\frac{a_0 a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}} - \cancel{\frac{a_0 a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}} - \frac{a_i^2}{a_\alpha^2}|q_i\rangle|q_i\rangle$$

← $|q_i\rangle^2 = -1$ (según la tabla de multiplicación)

$$= \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} - \frac{a_i^2}{a_\alpha^2}(-1) = \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} + \frac{a_i^2}{a_\alpha^2} = \frac{a_0^2 + a_i^2}{a_\alpha^2} = \frac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2} = 1 \; //$$

← justamente, el inverso :D

$$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = (a_0 + a_i|q_i\rangle) \odot \left(\frac{a_0 - a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} \right) = \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} - \frac{a_0 a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2} + a_i|q_i\rangle\left(\frac{a_0}{a_\alpha^2}\right) - a_i|q_i\rangle\left(\frac{a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}\right)$$

$$= \frac{a_0^2}{a_\alpha^2} - \cancel{\frac{a_0 a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}} + \cancel{\frac{a_0 a_i|q_i\rangle}{a_\alpha^2}} - \frac{a_i^2|q_i\rangle|q_i\rangle}{a_\alpha^2} = 1 \; //$$

Entonces, $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\|a\|^2}$ es una buena definición para inverso.

k). Comprueba si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a $\odot$. Construya la tabla de multiplicación

→ Sea $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ cuaterniones y $\odot$ la multiplicación, veamos si forman un grupo:

1. ¿Cerrado?

$$(a_0 + a_i|q_i\rangle)\odot(b_0 + b_j|q_j\rangle) = a_0b_0 + a_0b_i|q_i\rangle + b_0a_i|q_i\rangle + a_ib_j|q_j\rangle + a_i|q_i\rangle b_j|q_j\rangle$$

Por el punto b:

$$= (\underbrace{a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{Parte escalar, } |q_0\rangle}, \underbrace{b_0\vec{a} + a\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}}_{\text{parte vectorial}})$$

¿es esto un cuaternión? ¡sí!

¿Por qué lo que encontramos es un cuaternión? pues porque poseemos de una componente real y una vectorial, donde dicha parte vectorial tiene tres componentes por la definición que hicimos en un comienzo. → $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, componentes complejas.

esto es, regresamos a la forma escalar + vector en $\mathbb{R}^3$.

2. Asociatividad:

$$|a\rangle\odot|b\rangle = (a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a_0\vec{b} + b_0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b})$$

$$(|a\rangle\odot|b\rangle)\odot|c\rangle \overset{?}{=} |a\rangle\odot(|b\rangle\odot|c\rangle)$$

$$(|a\rangle\odot|b\rangle)\odot|c\rangle = (a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ b_0\vec{a} + a_0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})\odot(c_0 + \vec{c}\ \rangle)$$

$$= \left([a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b}]c_0 - [b_0\vec{a} + a_0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c},\ (a_0b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + c_0(b_0\vec{a} + a_0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}) + (b_0\vec{a} + a_0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\right)$$

$$= \left(a_0b_0c_0 - c_0(\vec{a}\cdot\vec{b}) - b_0(\vec{a}\cdot\vec{c}) - a_0(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ a_0b_0\vec{c} - \underline{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}} + c_0b_0\vec{a} + c_0a_0\vec{b} + c_0(\vec{a}\times\vec{b}) + b_0(\vec{a}\times\vec{c}) + a_0(\vec{b}\times\vec{c}) + \underline{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}}\right)$$

Nota: recuerde que: $A\cdot(B\times C) = (A\times B)\cdot C$

Ahora, trabajemos el lado derecho y veamos si se cumple la igualdad:

$$|a\rangle\odot(|b\rangle\odot|c\rangle) = |a\rangle\odot(b_0c_0 - \vec{b}\cdot\vec{c},\ b_0\vec{c} + c_0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \left(a_0[b_0c_0 - \vec{b}\cdot\vec{c}] - \vec{a}\cdot(b_0\vec{c} + c_0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c}),\ a_0(b_0\vec{c} + c_0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c}) + (b_0c_0 - \vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + \vec{a}\times(b_0\vec{c} + c_0\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c})\right)$$

$$= \left(a_0b_0c_0 - a_0(\vec{b}\cdot\vec{c}) - b_0(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_0(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}),\ a_0b_0\vec{c} + a_0c_0\vec{b} + a_0(b\times\vec{c}) + b_0c_0\vec{a} - \underline{(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}} + b_0(\vec{a}\times\vec{c}) + c_0(\vec{a}\times\vec{b}) + \underline{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}\right)$$

→ Ahora bien, solo nos queda por comprobar las partes que no están subrayadas. de la parte vectorial

De la primera expresión tenemos:

$$-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}))$$

$$= -(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

Y de la segunda:

$$-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

→ Por tanto, $(|a\rangle\odot|b\rangle)\odot|c\rangle = |a\rangle\odot(|b\rangle\odot|c\rangle)$ // ← es asociativa.

3. Elemento neutro

→ Como se indicó en el punto j, el elemento neutro es 1 debido a que todo escalar es un cuaternión, y es el único elemento que así lo cumple debido a que lo hereda del campo escalar complejo.

Aun así, note que para cualquier cuaternión $|a\rangle$:

$$1 \odot |a\rangle = (a_0(1), (1)\vec{a}) = (a_0, \vec{a}) = |a\rangle \qquad |a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$$

↳ pues la parte vectorial de 1 es nula, y los términos $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $b_0\vec{a}$ y $\vec{a}\times\vec{B}$ se anulan. Lo mismo ocurre al contrario.

$$|a\rangle \odot 1 = (a_0(1), (1)\vec{a}) = (a_0, \vec{a}) = |a\rangle //$$

→ Tiene elemento neutro y es único.

4. Inversos:

Como se demostró en el punto j, existe un elemento inverso que cumple que $|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = 1$, pero, ¿existe $\forall |q\rangle$?

La respuesta: ¡No!

Note el caso del $|0\rangle$: No existe cuaternión $|b\rangle$ alguno que logre hacer que $0 \odot |b\rangle = |b\rangle \odot 0 = 1$, pues note cómo todas las componentes de $|a\rangle \odot |b\rangle$ se basan en la multiplicación, y la existencia del 0 produce que sin importar el valor de $|b\rangle$, $0 \odot |b\rangle = |b\rangle \odot 0 = 0$.

Rta: $\mathbb{H}$ es un cuerpo siempre que se excluya al 0, pues este elemento no es invertible:

$\mathbb{H} \setminus \{0\}$ es un grupo //

Tabla de Multiplicación:

Para todos los cuaterniones $\mathbb{H}$ no existe una tabla de multiplicación finita, pues $\mathbb{H}$ posee de infinitos elementos.

→ Se puede crear la tabla de mult. para los cuaterniones base, $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$\|a\rangle \odot \|b\rangle$	1	-1	$\hat{i}$	$-\hat{i}$	$\hat{j}$	$-\hat{j}$	$\hat{k}$	$-\hat{k}$
1	1	-1	$\hat{i}$	$-\hat{i}$	$\hat{j}$	$-\hat{j}$	$\hat{k}$	$-\hat{k}$
-1	-1	1	$-\hat{i}$	$\hat{i}$	$-\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	$-\hat{i}$	-1	1	$\hat{k}$	$-\hat{k}$	$-\hat{j}$	$\hat{j}$
$-\hat{i}$	$-\hat{i}$	$\hat{i}$	1	-1	$-\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{j}$	$-\hat{k}$	k	-1	1	$\hat{i}$	$-\hat{i}$
$-\hat{j}$	$-\hat{j}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$-k$	1	-1	$-\hat{i}$	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$-\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{j}$	$-\hat{i}$	$\hat{i}$	-1	1
$-\hat{k}$	$-\hat{k}$	$\hat{k}$	$-\hat{j}$	$\hat{j}$	$\hat{i}$	$-\hat{i}$	1	-1

1) Compruebe si el siguiente producto conserva la norma $\| |v'\rangle \|^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \| |v\rangle \|^2$

$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$ ← como es grupo, es asociativo.

$\rightarrow |a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$

Para demostrar lo anterior, será de utilidad notar que $\| |p\rangle \odot |q\rangle \| = \| |p\rangle \| \, \| |q\rangle \|$:

$$\| |p\rangle \odot |q\rangle \|^2 = |\,|p\rangle \odot |q\rangle\,\rangle^* \odot (|p\rangle \odot |q\rangle)$$
$$= (|q\rangle^* \odot |p\rangle^*) \odot (|p\rangle \odot |q\rangle)$$
$$= |q\rangle^* \odot (|p\rangle^* \odot |p\rangle) \odot |q\rangle$$
$$= |q\rangle^* \odot \|p\|^2 \odot |q\rangle \quad \leftarrow \text{escalar, conmuta}$$
$$= \|p\|^2 \odot |q\rangle^* \odot |q\rangle$$
$$= \| |p\rangle \|^2 \odot \| |q\rangle \|^2$$
$$= \| |p\rangle \|^2 \, \| |q\rangle \|^2$$
$$\downarrow$$
$$\| |p\rangle \odot |q\rangle \| = \| |p\rangle \|^2 \, \| |q\rangle \|^2$$

$$\overline{|p\rangle \odot |q\rangle}$$
$$= (p_0 q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q},\ p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q})$$
$$\rightarrow (p_0 q_0 - \vec{p}\cdot\vec{q},\ -p_0\vec{q}, -q_0\vec{p} - \vec{p}\times\vec{q})$$

$$\overline{|q\rangle} \odot \overline{|p\rangle} = (p_0 q_0 - \vec{q}\cdot\vec{p},\ q_0(-\vec{p}) + p_0(-\vec{q}) + (-\vec{q})\times(-\vec{p}))$$
$$= p_0 q_0 - \vec{q}\cdot\vec{p},\ q_0(-\vec{p}) - p_0\vec{q} - (\vec{p}\times\vec{q})) \quad //.$$

Entonces:

$$\| |v'\rangle \| = \left\| \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle \right\|$$
$$= \left\| \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} \right\| \, \| |v\rangle \| \, \| |a\rangle \| = \frac{\cancel{\| |a\rangle \|}}{\cancel{\| |a\rangle \|^2}} \| |v\rangle \| \, \cancel{\| |a\rangle \|} = \| |v\rangle \|$$

pues $\| |a\rangle^* \| = \| |a\rangle \|$

Y, por tanto:

$$\| |v'\rangle \| = \| |v\rangle \| \quad //$$