EJERCICIOS TALLER 1 y 2

Problemas 1

Punto 3 (sección 1.4.5)

Demuestre que:

$$A^{i'}_{k} \tilde{A}^{j}_{i'} \stackrel{?}{=} \delta^{j}_{k}$$

Ademas, como un caso especial, demostrar la relacion de los cosenos directores que satisfacen :

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

(a.) En primer lugar, recuerde que la matriz de cambio de base de un sistema k a uno i' viene dado por $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$. Entonces:

$$A^{i'}_{k} \tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Si lo comprimimos usando la regla de la cadena, obtenemos que:

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^k} //$$

Ahora, analicemos cada componente $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$:

→ si $j=k$ Se tiene $\frac{\partial x^j}{\partial x^j}$ (derivada respecto a sí misma) $= 1$.

→ si $j \neq k$ Si derivamos x^j respecto a x^k, y como x^j es independiente de x^k (son base), tenemos: $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = 0$

Justamente, esa es la definición de δ^j_k. Por ende:

$$A^{i'}_{k} \tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^j_k //$$

(b.) El ejercicio nos pide encontrar el caso especial en el cual se tiene la relacion de los cosenos directores.

Sea $\{\hat{e}^{i'}\}$ y $\{\hat{e}^j\}$ dos bases ortonormales, note que tenemos que a $\{\hat{e}^{i'}\}$ se la puede obtener multiplicando por una matriz de transf. de $\{e^j\}$ a $\{e^{i'}\}$, tal que:

$$\hat{e}^{i'} = A^{i'}_j \hat{e}^j$$

Ahora bien, note que también se tiene que:

$$\hat{e}^{i'} \cdot \hat{e}_k = \cos\theta_{\langle i', k\rangle} \quad \text{y también:}$$

$$= (A^{i'}_k \underbrace{\hat{e}_k) \cdot \hat{e}^k}_{=1,\ \text{ortonormales}} = A^{i'}_k // \longrightarrow \cos\theta_{\langle i', k\rangle} = A^{i'}_k \quad (1)$$

Ahora:

$$\underset{\text{norma}}{1} = \hat{e}^{i'} \cdot \hat{e}^{i'} = (A^{i'}_k \hat{e}^k) \cdot (A^{i'}_j \hat{e}^j)$$

$$= A^{i'}_k A^{i'}_j (\hat{e}^k \cdot \hat{e}_j)$$

Como son ortonormales, note que esta op. tiene dos posibles valores:

- $=1$ si es la proy de un vector sobre el mismo $(k=j)$
- $=0$ si son bases distintas, ortogonalidad.

↳ δ^j_k

$$= A^{i'}_k A^{i'}_j \delta^j_k$$

$$= A^{i'}_k A^{i'}_k = (A^{i'}_k)^2 \quad \text{usando (1):}$$

$$1 = \cos^2\theta_{\langle i', k\rangle} + \cos^2\theta_{\langle i', j\rangle} + \cos^2\theta_{\langle i', i\rangle} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma //$$

PUNTO 4

usamos de base a la canónica.

Considere el radio vector posición $\mathbf{r} = x^i\hat{\mathbf{i}}_i \equiv x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de $\mathbf{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

$$\underbrace{(x,y) \to (-y,x)}_{\text{I}}\,, \quad \underbrace{(x,y) \to (x,-y)}_{\text{II}}\,, \quad \underbrace{(x,y) \to (x-y,x+y)}_{\text{III}}\,, \quad \underbrace{(x,y) \to (x+y,x-y)}_{\text{IV}}\,.$$

En primer lugar, para considerar a una transf como que transforme en una verdadera componente de vector, hay que tener en cuenta que un vector es un objeto que es independiente al sistema de coordenadas, por lo que no se debería de reescalarse. Esto implica que al armar la matriz de la transf su determinante sea 1 o -1 (en caso de reflexiones).

I $(x,y) \to (-y,x)$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

como estamos en $\mathbb{R}^2$, una base de este espacio es la canonica $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to$ El determinante: $\left|\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right| = 1 \leftarrow$ ✓✓

rotación de $\pi/2$ rad en sentido antihorario.

II $(x,y) \to (x,-y)$

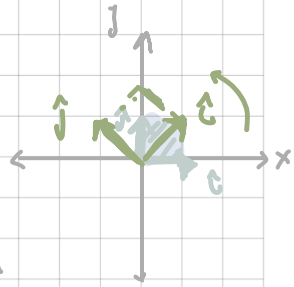
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\swarrow$ una reflexión respecto al eje x.

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow |T| = \left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right| = -1$ ✓✓ hace una reflexión

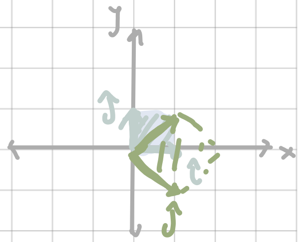
III $(x,y) \to (x-y, x+y)$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |T| = 1+1 = 2$ ✗ $\to$ rota y escala

IV $(x,y) \to (x+y, x-y)$



$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |T| = -2$ ✗ $\to$ refleja y escala.

Ejercicios: Problemas 2.

2 considere que:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i\hat{\imath}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = a_i(x^j)\hat{\imath}_i \quad y \quad \vec{b} = \vec{b}(\vec{r}) = b^i(x^j)\hat{\imath}_i$$

$$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(x^j) \quad y \quad \psi = \psi(\vec{r}) = \psi(x^j)$$

campo escalar

(a) Pruebe que: $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi) = \phi\,\partial^i\psi + \psi\,\partial^i\phi$$

← Derivar parcialmente al campo escalar respecto a una de las componentes

$$= \phi(\nabla\psi)^i + \psi(\nabla\phi)^i$$

Por definición del gradiente

Como lo anterior se cumplió para la componente i-ésima, para las demás coordenadas es igual, y se llega a que:

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \;//$$

(d) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$, ¿Qué puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$?

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})}_{\text{escalar}} = \partial^i(\nabla\times\vec{a})_i = \partial^i(\underbrace{\varepsilon^{ijk}}_{\text{cte}}\partial_j a_k) = \varepsilon^{ijk}\partial^i(\partial_j a_k) = \overbrace{\varepsilon^{ijk}}^{\text{antisimétrico}}\underbrace{\partial_j\partial_i}_{\text{simétrico}} a_k$$

Supongamos $k=1$

$$\varepsilon^{ij}\partial_j\partial_i a_1$$

$$= 0 \;//$$

Nota: aca las nociones de simetrico y antisimetrico vienen por definicion. Note que el Levi-civita es antisimetrico por definicion, pues al cambiar el orden de los indices obtenemos el inverso. → el orden cambia lo que definimos que es 1 y -1. → Caso contrario pasa con el tensor $\partial_i\partial_j f$, donde la conmutividad nos permite decir que es simétrico

$$\underbrace{\nabla\times}_{\text{operación vectorial}}(\underbrace{\nabla\cdot\vec{a}}_{\text{escalar}}) \Rightarrow \text{No tiene sentido}$$

(f) Pruebe que $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) \stackrel{?}{=} \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$.

$$(\nabla\times(\nabla\times\vec{a}))^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j(\nabla\times\vec{a})_k$$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon^{kmn}\partial^m a_n = \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{kmn}\partial_j\partial^m a_n = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}\partial_j\partial^m a_n$$

$$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)\partial_j\partial^m a_n = \delta^i_m\delta^j_n\partial_j\partial^m a_n - \delta^i_n\delta^j_m\partial_j\partial^m a_n = \delta^i_m\delta^j_n\partial^m\partial_j a_n - \delta^i_n\delta^j_m\partial_j\partial^m a_n$$

$$= \delta^i_m\partial^m\partial_j\delta^j_n a_n - \delta^j_m\partial_j\partial^m\delta^i_n a^n$$

$$= \delta^i_m\partial^m\partial_j a^j - \delta^j_m\partial_j\partial^m a_i$$

$$= \partial^i\partial_j a^j - \partial^m\partial_m a_i$$

$$= \partial^i(\nabla\cdot\vec{a}) - (\nabla^2 a)^i$$

$$= (\nabla(\nabla\cdot\vec{a}))^i - (\nabla^2 a)^i$$

$$\rightarrow = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2 \;//$$

$[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta$

Ejercicios:

2. Pruebe que

(a.) $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)$

$$\cos(3\theta) = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta - i\,\text{sen}\,3\theta$$ usando la fórmula de Moivre:
$$= [\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]^3 - i\,\text{sen}\,3\theta$$
$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3\cos\theta(i\,\text{sen}\,\theta)^2 - i\,\text{sen}\,3\theta$$
$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}\,3\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta + i(3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,3\theta)$$ ← igualando las partes reales

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha \;//.$$

(b.) $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3(\alpha)$

$$i\,\text{sen}\,3\alpha = i\,\text{sen}\,3\alpha + \cos 3\alpha - \cos 3\alpha$$
$$= [\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 - \cos 3\alpha$$ trinomio al cubo
$$= \cos^3\alpha + (i\,\text{sen}\,\alpha)^3 + i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha(i\,\text{sen}\,\alpha)^2$$

$$= \cos^3\alpha - i\,\text{sen}^3\alpha + i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$$
$$= (\cos^3\alpha - \cos\,\text{sen}^2\alpha) + i(\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha)$$ igualando la parte imaginaria.

$$\text{sen}\,3\alpha = \cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^3\alpha \;//.$$

5 Encuentre todas las raíces de las siguientes expresiones: $\quad re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta$

(a.) $\sqrt{2i}$

$$= (2i)^{1/2} = \left(2e^{i(\pi/2 + 2\pi k)}\right)^{1/2}$$

$|r| = 2$

$\theta = \pi/2 + 2\pi k$

$k = 0, 1.$

→ si $k=0$:

$= \sqrt{2}\,e^{i(\pi/2)1/2} = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \rightarrow = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 1 + i$

→ si $k=1$

$= \sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi)1/2}$

$= \sqrt{2}\,e^{i\,5\pi/4} \rightarrow = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -1 - i$

(b.) $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$

$$= (1 - \sqrt{3}i)^{1/2} = \left(2e^{i(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}\right)^{1/2}$$

$|r| = (1+3)^{1/2} = 2.$

$\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$k = 0, 1.$

⟶ si $k=0$:

$= \sqrt{2}\,e^{i\frac{-\pi}{6}} \rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

⟶ si $k=1$

$= \sqrt{2}\,e^{i(\frac{5\pi}{3})\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,e^{i\,5\pi/6} \rightarrow \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c.) $(-1)^{1/3}$

$|r| = 1$

$\theta = \pi$

$k = 0, 1,$

$= \left(e^{i(\pi+2\pi k)}\right)^{1/3}$

→ Si $k=0$:

$= e^{i\pi/3} \rightarrow \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

→ Si $k=1$:

$= e^{i\pi} \rightarrow \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$

→ Si $k=2$:

$= e^{i\,5\pi/3} \rightarrow \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d.) $8^{1/6}$

$= \left(8e^{i(2\pi k)}\right)^{1/6}$

$|r| = 8$

$\theta = 0$

$k = 0,1,2,3,4,5$

→ Si $k=0$:

$\Rightarrow 8^{1/6}$

$= \sqrt{2}$

→ Si $k=1$:

$\Rightarrow \sqrt{2}\,e^{i\pi/3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) + i\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

→ Si $k=2$:

$\Rightarrow \sqrt{2}\,e^{i\,2\pi/3}$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + i\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

→ Si $k=3$:

$\Rightarrow \sqrt{2}\,e^{i\pi}$

$= -\sqrt{2}$

→ Si $k=4$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,e^{i\,4\pi/3}$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

→ Si $k=5$

$= \sqrt{2}\,e^{i\,5\pi/3}$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) + i\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

(e.) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i} = 16\,e^{i(4\pi/3+2\pi k)\cdot 1/4}$

$|r| = \sqrt{8^2 + 8^2\cdot 3}$

→ III cuadrante:

$\theta = \arctan\sqrt{3} + \pi$

$= 4\pi/3$

$k = 0,1,2,3$

→ Si $k=0$

$\Rightarrow 2\,e^{i\pi/3}$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right) + i\,2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1 + \sqrt{3}\,i$

→ Si $k=1$

$\Rightarrow 2e^{i\,5\pi/6}$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\,2\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -\sqrt{3} + i$

→ Si $k=2$

$\Rightarrow 2e^{i\,4\pi/3}$

$= 2\left(-\frac{1}{2}\right) + i\,2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -1 - \sqrt{3}\,i$

→ Si $k=3$

$\Rightarrow 2e^{i\,11\pi/6}$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\,2\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} - i$

6. Demuestre que:

(a.) $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

$\text{Log}(-ie)$

$z = -ie$

$|z| = e$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$

$= -\frac{\pi}{2}$

Por definición: $\text{Log}(z) = \ln|r| + i(\theta + 2\pi n)$

$\text{Log}(-ie) = \ln|e| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$= 1 - \frac{\pi}{2}i + 2\pi i n$ (?

//

(b.) $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

$z = 1 - i$ ← IV cuadrante

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$\text{Log}(1-i) = \ln|\sqrt{2}| + i\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \ln(2^{1/2}) - \frac{\pi}{4}i$

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$ //

(?)

(c.) $\operatorname{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$

$z = e$

$|z| = e$

$\theta = 0 \leftarrow$ eje real

$$\operatorname{Log}(e) = \ln|e| + i(0 + 2\pi n)$$
$$= 1 + 2n\pi i$$

(d.) $\operatorname{Log}(i) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$

$z = i$

$|z| = 1$

$\theta = \pi/2$

$$\operatorname{Log}(i) = \cancel{\ln(1)} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$
$$= \pi i\left(\frac{1}{2} + 2n\right)$$