中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

学术论文

文档标题

学　　院：您的学院

年级专业：您的年级专业

课　　程：课程名称

指导老师：指导教师

报告编号：报告编号

小组成员：姓名 1、姓名 2、姓名 3

学　　号：学号 1、学号 2、学号 3

日　　期：2025 年 12 月 20 日

目录

1 数学建模概述

1.1 什么是数学建模

数学建模是运用数学语言、方法和理论，通过抽象、简化建立能近似刻画并”求解”实际问题的一种强有力的数学手段[9]。数学建模的核心是将实际问题转化为数学问题。

注意：数学建模的一般步骤：问题分析 → 模型假设 → 模型建立 → 模型求解 → 结果分析 → 模型检验

1.2 建模的基本原则

数学建模应遵循以下基本原则[10]：

- 目的性原则 - 明确建模目标
- 简化性原则 - 抓住主要矛盾
  - 忽略次要因素
  - 突出关键变量
- 可行性原则 - 确保模型可解

建模的层次结构：

(1) 描述性模型

(2) 预测性模型

(3) 决策性模型

2 基础数学工具

2.1 微分方程模型

人口增长的 Logistic 模型最初由 Verhulst 提出[1]：

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{1}$$

其中 $N(t)$ 表示时刻 t 的人口数量，r 为内禀增长率，K 为环境容量。

该方程的解为：

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} \tag{2}$$

引用公式：Logistic 模型如公式 eq. (1) 所示。

2.2 优化理论基础

定义 2.1 (凸函数). 设函数 $f(x)$ 定义在凸集 D 上，若对任意 $x_1, x_2 \in D$ 和 $\lambda \in [0,1]$，都有：

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 为凸函数。

凸优化理论为许多实际问题提供了强有力的工具[6]。

定理 2.1 (KKT 条件). 对于约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) && (3)\\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m && (4)\\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l && (5) \end{aligned}$$

若 x^* 为最优解，则存在拉格朗日乘子 $\lambda_i \geq 0$ 和 μ_j，使得 KKT 条件成立[2]。

例 2.1. 考虑简单的线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 && (6)\\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 && (7)\\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 && (8)\\ & x_1, x_2 \geq 0 && (9) \end{aligned}$$

通过图解法可得最优解为 $(2, 2)$，最优值为 10。线性规划的详细理论可参考 Luenberger, Ye [8]。

3 优化算法实现

3.1 梯度下降算法

梯度下降是求解无约束优化问题的经典方法[7]。

算法 1: 梯度下降算法

Input: 目标函数 $f(x)$，初始点 x_0，学习率 α，容忍误差 ϵ

Output: 最优解 x^*

```
函数 主函数 (f, x_0, α, ε):
    x ← x_0;
    k ← 0;
    repeat
        g ← ∇f(x);
        x ← x − α · g;
        k ← k + 1;
    until ‖∇f(x)‖ < ε;
    return x;
```

3.2 遗传算法流程

遗传算法是一种基于自然选择和遗传机制的全局优化算法[3, 4]。

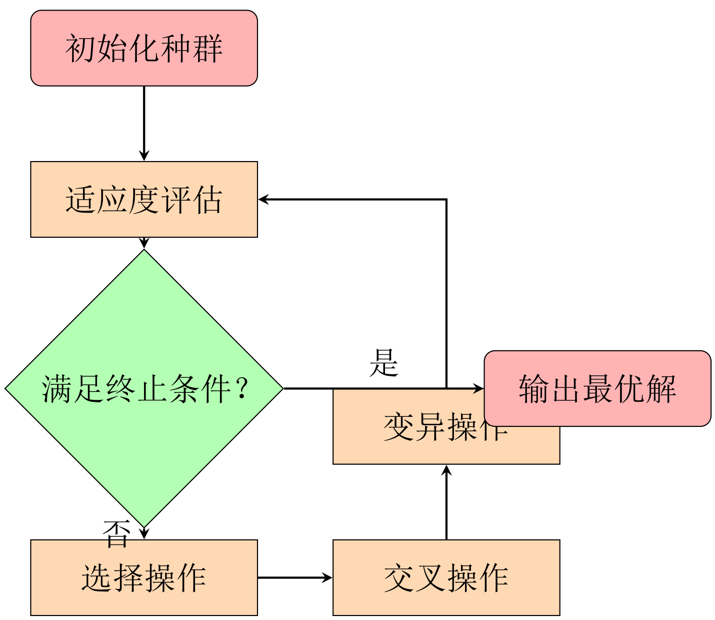

图 1: 遗传算法流程图

除了遗传算法外，粒子群优化算法也是一种有效的群体智能优化方法[5]。

4 数据分析与可视化

4.1 函数优化过程可视化

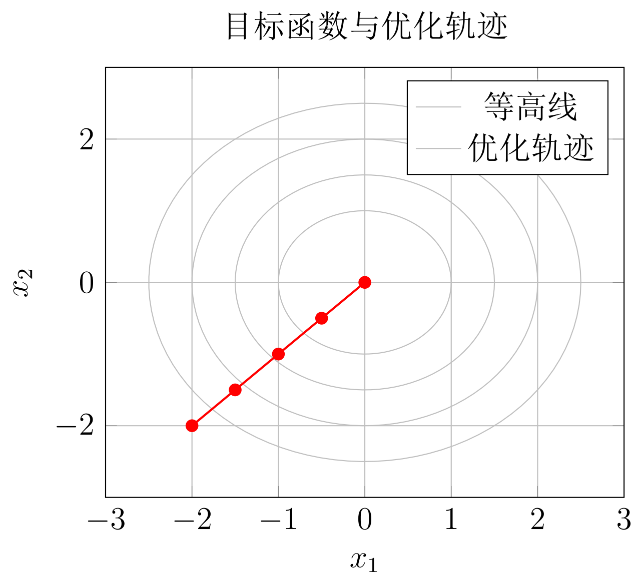

图 2: 二次函数的梯度下降优化轨迹

4.2 算法性能对比

不同优化算法的收敛性能存在显著差异，如 fig. 3所示。

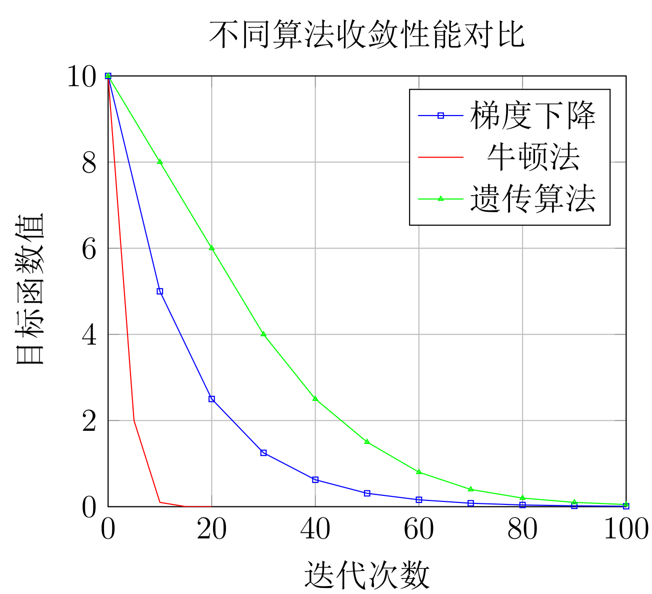

图 3: 算法收敛速度对比

4.3 实验数据统计分析

实验结果的统计分析对于验证模型的有效性至关重要。

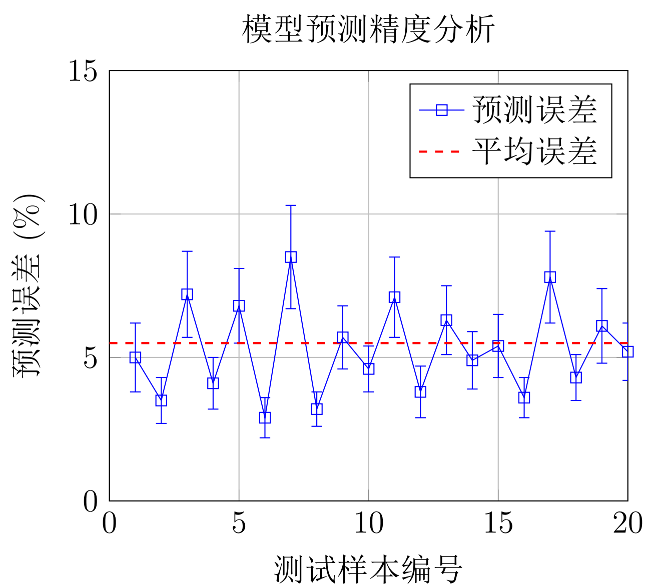

图 4: 模型预测误差分布

从 fig. 4可以看出，模型的平均预测误差约为 5.5%，这表明所建立的数学模型具有较好的预测精度。

参考文献

[1] VERHULST P F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement[J]. Correspondance Mathématique et Physique, 1838, 10: 113-126.

[2] KARUSH W. Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints[J]. Master's thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, 1939.

[3] GOLDBERG D E. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning [M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

[4] HOLLAND J H. Genetic algorithms[J]. Scientific American, 1992, 267(1): 66-72.

[5] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization[J]. 1995, 4: 1942-1948.

[6] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex Optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[7] NOCEDAL J, WRIGHT S J. Numerical Optimization[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2006.

[8] LUENBERGER D G, YE Y. Linear and Nonlinear Programming[M]. 3rd ed. New York: Springer, 2008.

[9] GIORDANO F R, FOX W P, HORTON S B. A First Course in Mathematical Modeling [M]. 5th ed. Boston: Cengage Learning, 2013.

[10] MEERSCHAERT M M. Mathematical Modeling[M]. 4th ed. Amsterdam: Academic Press, 2013.