

Домашнее задание 3

Чэнь Сюаньдун

Группа 519/2

18 октября 2022 г.

Задача 1

Прямоугольник задан вершинами с координатами $A(0;0)$, $B(u;0)$, $C(u;v)$, $D(0;v)$, где точка $(u;v)$ лежит в первой четверти на графике функции $y = -x^3 + 8$. Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника.

Решение

$$\text{площадь } S(u) = u * (-u^3 + 8) = -u^4 + 8 * u$$

$$\text{производная } S'(u) = -4 * u^3 + 8 = 4 * (2 - u^3)$$

$$\Rightarrow u_0 = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{при } u < 2^{\frac{1}{3}}, S'(u) > 0, S(u) \text{ возрастает}$$

$$\text{при } u > 2^{\frac{1}{3}}, S'(u) < 0, S(u) \text{ убывает}$$

Ответ: Наибольшая возможная площадь прямоугольника $= S(2^{\frac{1}{3}}) = 6 * 2^{\frac{1}{3}}$

Задача 2

В эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник максимальной площади так, чтобы стороны прямоугольника были параллельны осям эллипса.

Решение

$$\text{площадь } S(u) = 2u * 2v = 4u\sqrt{b^2(1 - \frac{u^2}{a^2})}$$

$$\text{производная } S'(u) = 4\sqrt{b^2(1 - \frac{u^2}{a^2})} + 4u * \frac{1}{2} * \frac{-\frac{b^2}{a^2}2u}{\sqrt{b^2(1 - \frac{u^2}{a^2})}}$$

$$\text{пусть его равно нулю, получил } b^2(1 - \frac{u^2}{a^2}) = \frac{b^2}{a^2}u^2$$

$$\Rightarrow a^2 - u^2 = u^2$$

$$\Rightarrow u = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{при } u = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ и } v = \frac{b}{\sqrt{2}}, S_{max} = 2ab$$

Ответ: при $u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $v = \frac{b}{\sqrt{2}}$, Наибольшая площадь прямоугольника это $2ab$.