

Minimalidad en diagramas de conjuntos simpliciales

junto con Carles Broto y Ramón Flores

Después de la introducción por D. Kan en los cincuenta de la teoría de los conjuntos simpliciales y las fibraciones de Kan, M.G. Barratt, V.K. Gugenheim, y J.C. Moore desarrollaron en su celebrado artículo [1] una versión apropiada de haces fibrados, que en particular son fibraciones de Kan cuando la fibra es un complejo de Kan. Recíprocamente, dada una fibración de Kan, los autores propusieron la noción de fibración minimal, la cual es un retracto fuerte de deformación de la función fibrada original. Está siempre existe y es en si misma un haz fibrado, siempre que el espacio base sea conexo. De esta forma, la clasificación de fibraciones simpliciales se reduce a la clasificación haces fibrados simpliciales. Lo demás se logra posteriormente al asociar a cada haz fibrado un producto cartesiano torcido (TCP), para los cuales las funciones de torcido toman valores en el grupo estructural G del haz fibrado. Así, el grupo simplicial G proporciona un espacio clasificador $\overline{W}(G)$ y un haz fibrado universal para el que cada G -haz sobre un espacio base B puede ser obtenido como un pullback de una aplicación $B \rightarrow \overline{W}(G)$, a lo largo del haz universal.

Denotamos por \mathbf{S} la categoría de los conjuntos simpliciales. Dada una categoría pequeña \mathcal{C} , el logro principal de nuestro trabajo ha sido extender el trabajo de Barratt-Gugenheim-Moore a la categoría $\mathbf{S}^{\mathcal{C}}$ de los \mathcal{C} -diagramas de conjuntos simpliciales, asumiendo que las fibraciones involucradas están definidas sobre una base constante. La primera observación que hacemos es que la categoría de los diagramas tiene una estructura de categoría de modelos cofibrantemente generada que hereda la estructura simplicial de \mathbf{S} [12]. Tomando una base constante para los diagramas, es posible hacer una traslación natural de las nociones de fibración simplicial, haz fibrado y producto cartesiano torcido para la categoría de los diagramas de conjuntos simpliciales.

Cuando la categoría \mathcal{C} es una EI-categoría artiniana, mostramos que cada fibración de \mathcal{C} -diagramas admite un modelo minimal con buenas propiedades. Adicionalmente logramos clasificar \mathcal{C} -diagramas de haces fibrados y junto con el argumento del objeto pequeño de Quillen culminamos el proceso de clasificación de fibraciones en $\mathbf{S}^{\mathcal{C}}$.

Referencias

- [1] M.G. Barratt, V.K. Gugenheim and J.C. Moore, On Semisimplicial fibre bundles, Amer. J. Math. 81 (1959), 639–657.
- [2] Hirschhorn, Model categories and their localization, Mathematical Surveys and Monographs 99, AMS (2003).