Sobre la geometría diferencial afín de superfícies en $\mathbb{R}^3$

Martín Barajas Sichacá
mbarajass@udistrital.edu.co

Resumen

En este trabajo estudiamos la geometría diferencial de superficies en el espacio Euclidiano, desde el punto de vista de la geometría afín. Centraremos nuestro esfuerzo en el estudio de las lineas de curvatura afín y los puntos umbílicos afines.

*Este es un trabajo en co-autoría con **Ronaldo Alves Garcia** (Universidade Federal de Goiás) y **Marcos Craizer** (Pontificia Universidade Católica de Rio de Janeiro).*

Sea S una superficie suave (C^∞) en $\mathbb{R}^3$. Fuera del conjunto parabólico, dotamos S con la métrica de Berwald-Blaschke dada por

$$\mathcal{G} = |K_e|^{-\frac{1}{4}}\, II_e, \tag{1}$$

donde K_e y II_e son la Curvatura Gaussiana y la Segunda Forma Fundamental Euclidianas de S respectivamente. La métrica de Berwald-Blaschke es también llamada *Primera forma fundamental afín.*

Existe un campo transversal ξ definido sobre S, tal que para cada $p \in S$, $d\xi_p \in T_pS$ y la forma de área sobre S definida por ξ coincide con el área dada por la primera forma fundamental afín. El campo ξ es llamado *campo normal afín* y localmente está únicamente determinado salvo signo.

Para cada $p \in S$ y $v \in T_pS$, podemos escribir

$$d\xi_p(v) = B_p(v), \tag{2}$$

donde $B_p : T_pS \to T_pS$ es lineal y llamada *Operador de Forma Afín.* Definimos las curvaturas principales y las direcciones principales afines en $p \in S$ como los autovalores reales de $-B_p$ y sus autovectores respectivamente.

Una curva $\alpha : I \to S$ es una linea de curvatura afín si $\alpha'(t)$ es una dirección principal afín para todo $t \in I$. Decimos que $p \in S$ es un punto umbílico afín si B_p es un múltiplo de la identidad. En la región donde los autovalores de B son reales y lejos de puntos umbílicos afines, existe un par de foliaciones tangentes a las direcciones principales afines, llamadas foliaciones de lineas de curvatura afin (o foliaciones principales afines). Los puntos umbílicos afines son las singularidades aisladas de los campos de direcciones principales afines. Un punto $p \in S$ es llamado de ξ-dirección doble si existe una única dirección principal afín, esto es, las direcciones principales coinciden. El conjunto de ξ-direcciones dobles delimita la región donde las lineas de curvatura afín estan definidas.

Existe una estratificación natural sobre la superficie S inducida por la curvatura Gaussiana así: $p \in S$ es un punto elíptico, parabólico o hiperbólico si $K_e(p) > 0$, $K_e(p) = 0$ o $K_e(p) < 0$ respectivamente. Naturalmente consideramos los casos en los cuales la singularidad del campo de direcciones afines se encuentra en cada uno de los estratos inducidos por la curvatura Gaussiana y analisamos el comportamiento topologico de las foliaciones principales afines cerca de estos puntos como se muestra en las figuras 1, 2, 3, 4 y 5.

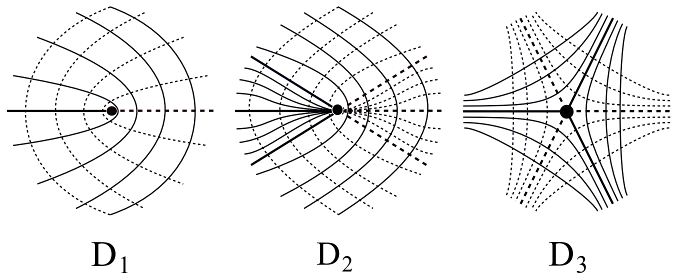

Figura 1: Modelos topológicos de las lineas de curvatura afín en una vecindad de un punto umbílico elíptico.

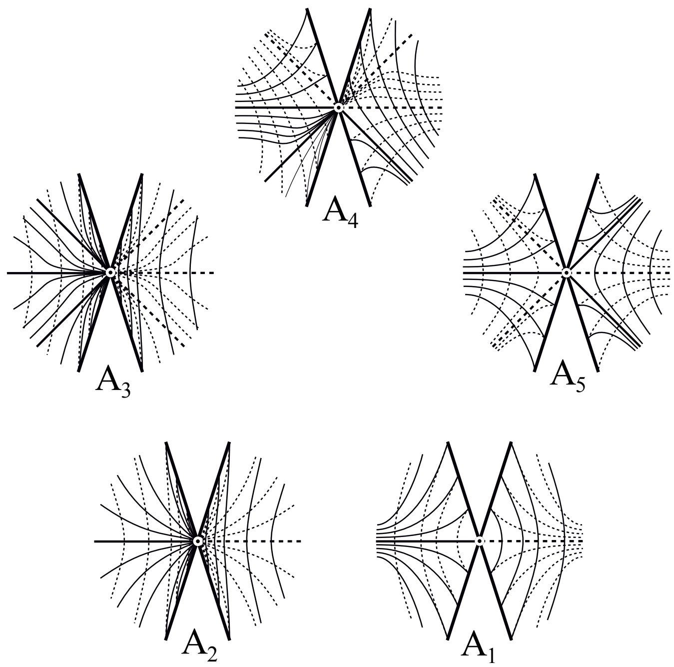

Figura 2: Modelos topológicos de las lineas de curvatura afín en una vecindad de un punto umbílico hiperbólico.

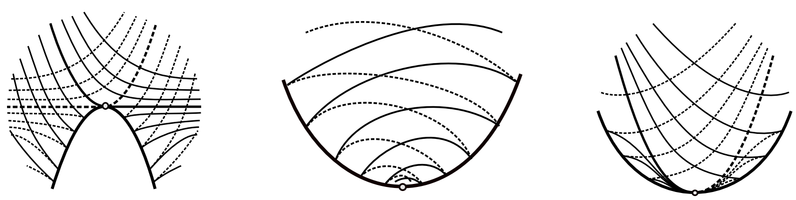

Figura 3: Modelos topológicos de las lineas de curvatura afín en una vecindad de un punto con doble autovalor del operador de forma afín.

Referencias

[1] Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M., and Varchenko, A. N., Singularities of Differentiable Maps I. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts, Birkhauser, (1985).

[2] Blaschke, W., and Reidemeister, K., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometris-

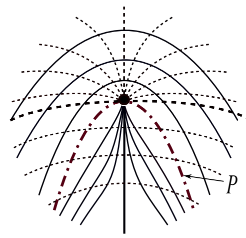

Figura 4: Modelo topológico de las lineas de curvatura afín en una vecindad de un punto umbílico parabólico, cuya función discriminante de la ecuación diferencial binaria tiene una singularidad de tipo A_3^+.

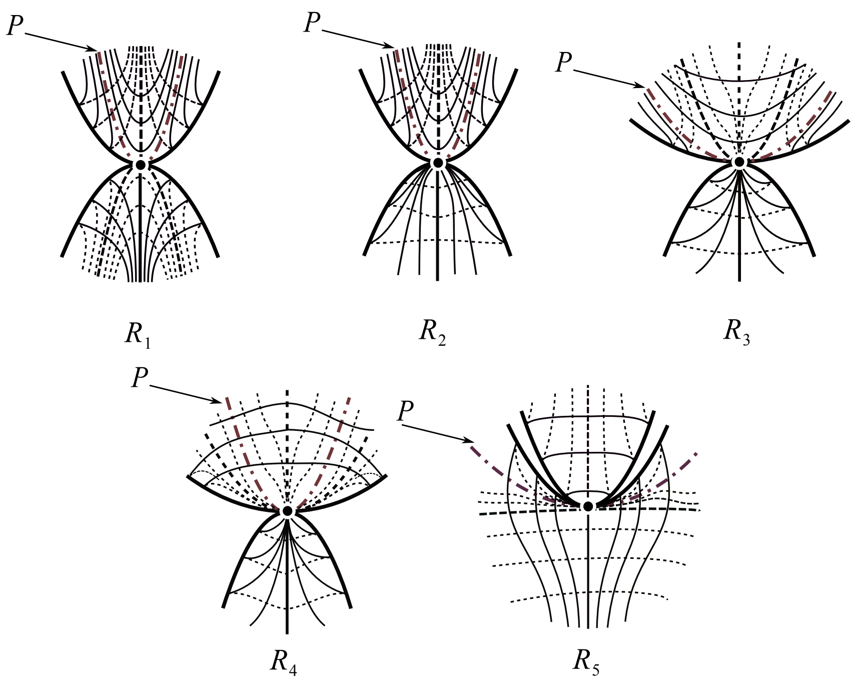

Figura 5: Modelos topológicos de las lineas de curvatura afín en una vecindad de un punto umbílico parabólico, cuya función discriminante de la ecuación diferencial binaria tiene una singularidad de tipo A_3^-.

che Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie II. Affine Differentialgeometrie., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1923).

[3] Bruce, J. W., and Fidal, D. L., On binary differential equations and umbilics. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 111A, 147–168, (1989).

[4] Bruce, J. W., and Tari, F., On binary differential equations, Nonlinearity, 8, Number 2, 255–271, (1995).

[5] Bruce, J.W. and Tari, F., Families of surfaces in $\mathbb{R}^4$, Proc. Edimburgh. Math. Soc., 45, 181–203, (2002).

[6] Su, B., On the theory of lines of curvature of the surfaces. Tohoku Math. Journal, 30, (First Series), 457–467, (1929).

[7] Su, B., Affine differential geometry, Routledge, (1983).

[8] Calabi, E., Hipersurfaces with maximal affinely invariants area, American Journal of Mathematics, 104, 91–126, (1982).

[9] Craizer, M., Alvim, M., and Teixeira, R., Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, SIAM J. Imaging Sci., 1, 3, 209–227, (2008).

[10] Darboux, J. G., Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic, Leçons sur la Théorie des Surfaces, IV, Note 7, Gauthier Villars, Paris, (1896).

[11] Davis, D., Affine Differential Geometry & Singularity Theory, PhD thesis, University of Liverpool, (2008).

[12] Decruyenaere, F.; Dillen, F.; Verstraelen, L.; Vrancken, L. Affine differential geometry for surfaces in codimension one, two and three. Geometry and topology of submanifolds, VI (Leuven, 1993/Brussels, 1993), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 82–90, (1994).

[13] Fox, D. J. F., What is ... an affine sphere?, Notices Amer. Math. Soc., 59, 3, 420–423, (2012).

[14] Garcia, R., Gutierrez, C., and Sotomayor, J., Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$. Bull. Sci. Math. 123 no. 8, 599–622 (1999).

[15] Garcia, R., Gutierrez, C., and Sotomayor, J., Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas, Tohoku Math. Journal, 52, 163–172, (2000).

[16] Garcia, R., Mochida, D.K.H., Romero Fuster, M.C. and Ruas, M.A.S., Inflection points and topology of surfaces in 4-space, Trans. Amer. Math. Soc., 352, 3029–3043, (2000).

[17] Garcia, R., and Sotomayor, J., Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory, Brazilian 27^{th} Math. Coll., IMPA, Brazil, 2009.

[18] Garcia, R., and Sotomayor, J., Historical comments on Monge's ellipsoid and the configurations of lines of curvature on surfaces, Antiq. Math., 10, 169–182, (2016).

[19] Gutierrez, C., and Sotomayor, J., Structurally stable configurations of lines of principal curvature, Asterisque, 98–99:195–215, (1982).

[20] Gutierrez, C., and Sotomayor, J., An approximation theorem for immersions with stable configurations of lines of principal curvature, Springer Lecture Notes in Math, 1007, 332–368, (1983).

[21] Gutierrez C., Sotomayor J. . *Lines of curvature and umbilic points on surfaces*, Lecture Notes, 18^{th} Brazilian Math. Colloq , IMPA, (1991). Reprinted and updated as Structurally Stable Configurations of Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces, Lima, Monografias del IMCA, 1998.

[22] Izumiya, S., Fuster M. C. R., Ruas, M. A. S., and Tari, F., Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint, World Scientific Publishing Company, 2016.

[23] Loftin, J., Survey on affine spheres, Handbook of geometric analysis, No. 2,(L Ji, P Li, R Schoen, L Simon, editors), Adv. Lect. Math.(ALM), 13, Int. Press, Somerville, MA, 161–191, (2010).

[24] Li, A.-M., Simon, U., Zhao, G., and Hu, Z., Global affine differential geometry of hypersurfaces, extended ed, 11, De Gruyter Expositions in Mathematics, De Gruyter, Berlin, 2015.

[25] Martínez, A. and Milán, F., Improper affine spheres and the Hessian one equation, Differential Geom. Appl., 54, part A, 81–90, (2017).

[26] Monge, G., Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide, Journal de l'École Polytechnique IIeme cahier, cours de Floréal an III (around 1795), 145, (1795).

[27] Nomizu, K., and Sasaki, T., Affine differential geometry, Geometry of Affine Immersions, Cambridge University Press, 1994.

[28] Tari, F., On pairs of geometric foliations on a cross-cap, Tohoku Math. Journal, 59, 233–258, (2007).