Chapitre 1

Thème Mesures et incertitudes

Unités et incertitudes de mesures expérimentales

Dans ce chapitre, nous mettons en avant l'importance capitale d'associer des unités et des incertitudes-types à chaque mesure ou calcul. L'utilisation d'outils numériques permet d'évaluer précisément les incertitudes-types, tandis que les écarts par rapport aux valeurs de référence sont analysés en nombre d'incertitudes-types pour renforcer la fiabilité des résultats.

Sommaire

I Écriture d'un résultat

Un résultat s'écrit avec quatre composantes : la grandeur Y, sa valeur y, l'estimation de l'incertitude $u(\overline{Y})$ et son unité.

$$Y = y \pm u(\overline{Y}) \ unit\acute{e}$$

Exemple : $l = 2,1 \pm 0,3$ cm.

1 Grandeur

Une **grandeur** est une propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, qui peut être exprimée quantitativement.

2 Valeur

Une **valeur** est un nombre. Ce nombre doit toujours être exprimé avec en notation scientifique.

2.1 Notation scientifique

En notation scientifique, une valeur y est écrite sous la forme :

$$y = a \times 10^b$$

avec a un nombre tel que $1 \leqslant a < 10$.

Exercice d'application 1

Donner la notation scientifique des valeurs suivantes :

a) $m = 125,53$ g

b) $l = 0,00284$ m

c) $T = 85600$ K

d) $E = 8950000$ J

e) $I = 0,0000063$ A

f) $t = 31557600$ s

g) $n = 0,063$ mol

h) $P = 900000$ W

2.2 Chiffres significatifs

Pour déterminer le nombre de chiffres significatifs dans un nombre, suivre ces règles :

- Tous les chiffres non nuls sont considérés comme significatifs.
  Exemple : 1234 a 4 chiffres significatifs ;
- Les zéros entre des chiffres non nuls sont également considérés comme significatifs.
  Exemple : 10203 a 5 chiffres significatifs ;
- Les zéros à la fin d'un nombre décimal sont significatifs.
  Exemple : 5,00 a 3 chiffres significatifs ;
- Les zéros au début d'un nombre ne sont pas significatifs.
  Exemple : 0,0043 a un deux de chiffres significatifs ;
- Dans les calculs, le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que le nombre ayant le moins de chiffres significatifs dans les valeurs d'origine.
  Exemple : Si on effectue une opération avec $2,5410$ cm (5 chiffres significatifs) et $4,37$ cm (3 chiffres significatifs), le résultat final ne doit pas dépasser 3 chiffres significatifs.

$$\overbrace{0,00}^{z\acute{e}ros\ \grave{a}\ ignorer}\underbrace{\mathbf{6400}}_{4\ chiffres\ significatifs}$$

0,06400 s'écrit en notation scientifique $6,400 \times 10^{-3}$.

3 Unité

À une valeur, on associe une **unité** qui donne un sens physique à la grandeur exprimée.

Le Système International des unités est basé sur sept grandeurs de base, répertoriées dans le tableau suivant :

Grandeur	Longueur	Durée	Masse	Température
Unité	m	s	kg	K

Grandeur	Intensité électrique	Intensité lumineuse	Quantité de matière
Unité	A	Cd	mol

II Estimation de l'incertitude de mesure

1 Notion d'erreur

Si y_i est le résultat d'un mesurage et y_0 la « valeur vraie » du mesurande, l'erreur sur le résultat y_i est le nombre $e_i = y_i - y_0$.
Ce concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent pas être connues exactement.

2 Composantes de l'erreur

Traditionnellement, on attribue à l'erreur deux composantes : une composante **aléatoire** et une composante **systématique**.

Erreur aléatoire : provient des variations non prévisibles. Même s'il n'est pas possible de la compenser, il est envisageable de la diminuer en augmentant le nombre d'observations.

Erreur systématique : se produit sur un résultat de mesure à partir d'un effet reconnu.
Exemple de sources d'erreurs systématiques :

- Effet de grandeurs d'influence (température, pression, ...) ;
- Erreur de justesse des instruments (décalage du zéro, mauvais calibrage, ...) ;
- Perturbation due à la présence des instruments d'observation.

On peut illustrer ces notions d'erreurs systématique et aléatoire par le tir dans une cible :

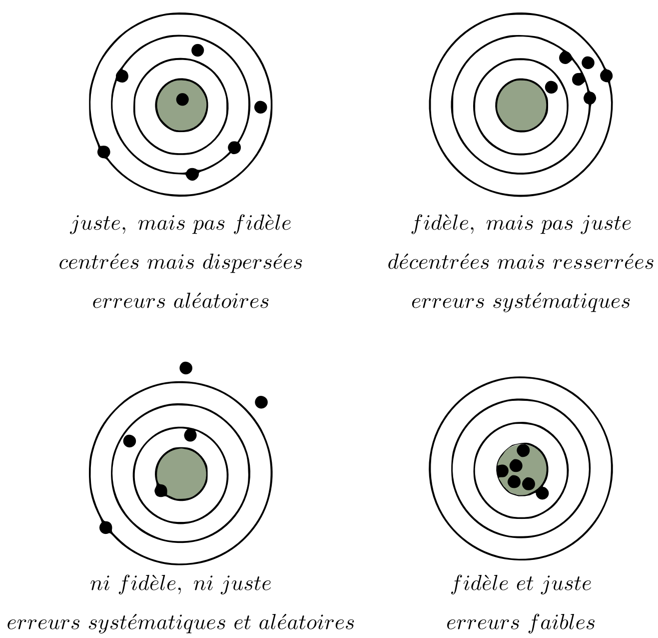

Figure 1 – Illustration de la notion d'erreur

3 Randomisation pour traiter l'erreur

On explique la variabilité des résultats d'un mesurage en considérant les résultats comme des réalisations d'une variable aléatoire. Autrement dit, on remplace la notion d'erreur accidentelle par celle d'incertitude aléatoire.
Si l'on répète le mesurage, on obtient une série de valeurs y_1, y_2 ... y_n que l'on considère comme les valeurs prises par une variable aléatoire Y et une série de valeurs e_1, e_2 ... e_n qui sont les erreurs définies sur chacune des observations. Ces valeurs e_i sont considérées comme celles prises par une variable aléatoire E.
On peut ainsi modéliser le mesurage par : $Y = y_0 + E$.
L'**hypothèse** fondamentale du traitement probabiliste de l'erreur est que la variable E **obéit à une loi de probabilité**.

4 Notion d'incertitude

L'**incertitude** est un paramètre qui caractérise la **dispersion des valeurs** qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande Y. La détermination de l'incertitude sur le mesurage y va être exprimée en fonction de l'écart-type de la variable aléatoire Y.

L'écart-type de Y est appelé **incertitude-type** sur le résultat du mesurage. On note généralement $u(y)$ cette incertitude-type sur Y. L'essentiel de la démarche va consister à déterminer la loi de probabilité suivie par Y (autrement dit par E) et à estimer la valeur de l'écart-type de Y (autrement dit de E).

5 Évaluation de l'incertitude-type

On peut évaluer l'incertitude type suivant deux approches :

- évaluation de **type A** : moyens statistiques ;
- évaluation de **type B** : moyens probabilistes.

6 Évaluation de type A

On suppose dans ce cas que la grandeur Y est estimée à partir d'une série statistique. Si une grandeur Y est estimée à partir de n observations répétées et indépendantes $y_1, y_2, ..., y_n$, l'expression finale de la grande mesurée sera alors constituée de deux parties :

- la moyenne $\overline{y}$ des n observations ;
- l'incertitude-type $u_A(\overline{Y})$ sur l'estimation $\overline{y}$.

$$Y = \overline{y} \pm u_A(\overline{Y})$$

Méthode 1 Calcul d'une incertitude-type $u_A(\overline{Y})$

- **Étape 1** : calculer la moyenne des observations $\overline{y}$;
- **Étape 2** : calculer l'écart-type expérimental d'une mesure $u_A(Y)$;
- **Étape 3** : diviser le résultat par $\sqrt{n}$ pour obtenir l'écart-type expérimental $u_A(\overline{Y})$ de la moyenne.

Remarques

- la moyenne $\overline{y}$ est la meilleure estimation de Y ;
- $u_A(Y) = s(Y) = \sigma_{n-1}$ est la meilleure estimation de la variance de Y. $u_A(Y)$ est aussi nommé écart-type écart-type de répétabilité.
- $u_A(Y)$ **mesure la dispersion** des valeurs autour de la moyenne.

Exercice d'application 2

On obtient 8 valeurs y_i d'une distance focale f' que l'on regroupe dans le tableau ci dessous. Comment exprimer la grandeur f' ?

f'_i (en cm)	8,2	8,1	7,8	7,9	7,4	8,0	8,4	8,2

7 Évaluation de type B

Si on ne peut pas avoir recourt des observations (manque de temps, coût élevé), on peut estimer l'incertitude-type recherchée en utilisant des lois de probabilités. On choisit la loi de probabilité qui semble la plus représentative du phénomène étudié. L'expression finale de la grande mesurée sera alors constitué de deux parties :

- la valeur affichée par l'instrument ;
- l'incertitude-type de type B qui dépend de l'instrument utilisé et du procédé de lecture.

Méthode 2 Choix de l'incertitude de type B

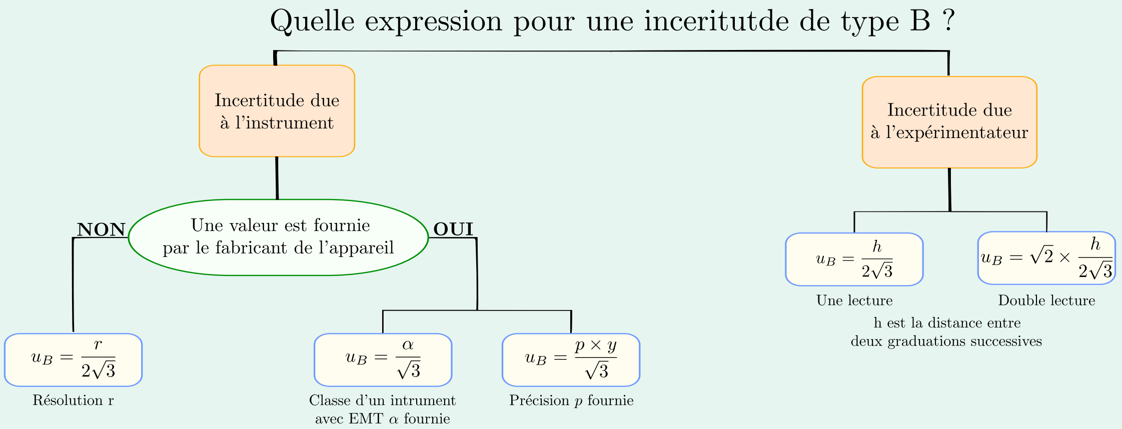

FIGURE 2 – Procédé pour déterminer l'expression d'une incertitude-type de type B

Exercice d'application 3

Pour chacun des cas suivants, donner l'expression complète de la grandeur mesurée.

a) Un thermomètre à alcool indique une température de $\theta = 43$ °C. La résolution du thermomètre est de $0,5$ °C (différence entre deux graduation successives du thermomètre) ;

b) Un voltmètre affiche tension $U = 8,70$ V avec le calibre 20 V. La précision du voltmètre pour ce calibre est $2,1$ % ;

c) La résistance $R = 2000\ \Omega$ pour un conducteur ohmique avec une tolérance de 5 %.

8 Incertitude-type composée

L'estimation d'une grandeur G peut découler de la mesure de plusieurs autres grandeurs (X , Y , Z ...). Chacune de ces grandeurs constitue une source de fluctuation à laquelle on associe une incertitude-type. Afin de prendre en compte la contribution de chacune de ces grandeurs, on utilise une formule de propagation de l'incertitude qui dépend de la relation entre G et $X, Y, Z, ...$:

Méthode 3 Détermination d'une incertitude composée

Relation exprimant G		**Formule de propagation de l'incertitude**
$G = \alpha X + \beta Y$ ou $G = \alpha X - \beta Y$	$\longrightarrow$	$u^2(G) = (\alpha u(X))^2 + (\beta u(Y))^2$
$G = \dfrac{\alpha X \times \beta Y}{\gamma Z}$ ou $G = \alpha X \times \beta Y \times \gamma Z$	$\longrightarrow$	$\left(\dfrac{u(G)}{G}\right)^2 = \left(\dfrac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(\dfrac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\dfrac{u(Z)}{Z}\right)^2$
$G = \alpha X^n Y^m$	$\longrightarrow$	$\left(\dfrac{u(G)}{G}\right)^2 = \left(n\dfrac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(m\dfrac{u(Y)}{Y}\right)^2$

FIGURE 3 – Procédé pour déterminer l'expression d'une incertitude-type composée

Exercice d'application 4

Déterminer l'expression complète de la concentration molaire C_{fille} d'une solution fille obtenue après dilution.

On prépare $V_{fille} = (100,0 \pm 0,3)$ mL de concentration molaire C_{fille} en prélevant $V_{fille} = (10,0 \pm 0,05)$ mL d'une solution mère de concentration molaire $C_{mère} = (0,010 \pm 0,001)$ mol/L. On a donc la relation suivante :

$$C_{fille} = \frac{C_{mère}V_{mère}}{V_{fille}}$$

III Supplément Mathématiques

1 Notions de probabilité

- La probabilité est une branche des mathématiques qui étudie les phénomènes aléatoires et les mesures de l'incertitude.
- Elle est utilisée pour modéliser des situations où les résultats sont incertains, et où plusieurs résultats possibles peuvent se produire avec des probabilités différentes.
- Les concepts clés de la probabilité incluent l'espace des échantillons, les événements, les probabilités et les lois de probabilité (comme la loi de probabilité uniforme, la loi binomiale, la loi normale, etc.).
- La théorie des probabilités est utilisée pour calculer les probabilités, prédire les résultats futurs et évaluer les risques dans de nombreux domaines, y compris les jeux de hasard, la finance, l'épidémiologie et la physique quantique.

2 Notion de statistiques

- La statistique est une discipline qui traite de la collecte, de l'analyse, de l'interprétation, de la présentation et de la modélisation de données.
- Elle implique la collecte de données à partir d'échantillons représentatifs d'une population plus large, puis l'analyse et l'interprétation de ces données pour tirer des conclusions sur la population.
- Les méthodes statistiques comprennent la description des données (moyenne, médiane, écart type, etc.), les tests d'hypothèses, l'analyse de régression, l'échantillonnage, les intervalles de confiance, etc.
- La statistique est utilisée dans de nombreux domaines tels que la recherche scientifique, les études sociales, les études de marché, la médecine, l'économie et bien d'autres. Elle permet de prendre des décisions éclairées en se basant sur des données empiriques.