Domingo 04 de Julio de 2021
Docente: Martín Marcano
4to Año “A y B”

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien.

Tema Generador

Responsabilidad escolar y comunitaria para el ejercicio de la prevención del covid-19

Referentes Teóricos-Prácticos

Definición de logaritmo.
Propiedades de los logaritmos.
Trigonometría.

Educación Media General

Desarrollo del Tema

LOGARITMOS.

Definición

El logaritmo en base a de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número.

$\log_a N = x \leftrightarrow a^x = N$

$a =$ base $\quad N =$ número

$x =$ solución $\quad \leftrightarrow$ Si y sólo si

Ejemplos

a) $\log_3 81 = x$

$\log_3 81 = x \leftrightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

b) $\log_2 128 = x$

$\log_2 128 = x \leftrightarrow 2^x = 128 \rightarrow 2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$

c) $\log_3 \sqrt{243} = x$

$\log_3 \sqrt{243} = x \leftrightarrow 3^x = (243)^{\frac{1}{2}}$

$3^x = (3^5)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \rightarrow x = \frac{5}{2}$

Consecuencias inmediatas de la definición

- El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

$\log_a 1 = 0 \rightarrow \log_2 1 = 0 \quad \log_3 5 = 0$

- El logaritmo de la base es 1.

$\log_a a = 1 \rightarrow \log_3 3 = 1; \quad \log_5 5 = 1$

- Sólo tienen logaritmos los números positivos.

$\log_2(-4) = \nexists; \quad \log_2 0 = \nexists$

Educación Media General

Ministerio del Poder Popular para la Educación

Inclusión y Calidad

Propiedades de los Logaritmos:

Producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$\log_a N + \log_a M = \log_a N \cdot M$

$\log_a 2 + \log_a 7 = \log_a (2 \cdot 7) = \log_a 14$

Cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

$\log_a N - \log_a M = \log_a (N/M)$

$\log_a 75 - \log_a 25 = \log_a (75 / 25) = \log_a 3$

Potencia

La potencia de un logaritmo es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$\log_a N^m = m \cdot \log_a N \quad \rightarrow \quad \log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$

Uso de la calculadora

– Logaritmos decimales

Son los logaritmos en base 10, se designan como $\log_{10}$ o simplemente log sin escribir la base.

La tecla $\boxed{\log}$ sirve para calcular el logaritmo decimal de cualquier número.

$\log\ 2 = 0.30102999$

Cuando conocemos el valor del logaritmo y queremos saber a que número corresponde.

$\log x = 3 \rightarrow x = \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\log}\ 3 \rightarrow x = 1000$

Los Logaritmos Neperianos y Cambio de base de un logaritmo.

Su base es el número e, y se designan mediante ln.

Tecla $\boxed{\ln}$

Cambio de base

Cuando no tenemos base 10 o el número e para calcular el logaritmo con la calculadora debemos aplicar una fórmula para pasar a base 10.

$$\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$$

$$\log_2 11 = \frac{\log 11}{\log 2} \rightarrow \log\ 11 : \log 2 = 3{,}45943162$$

Ejercicios Resueltos.

1. Calcula x aplicando la definición de logaritmo.

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Recuerda como se resuelven las ecuaciones exponenciales:

- Mismas bases, podemos igualar los exponentes.

$\boxed{a^b = a^c \rightarrow b = c}$ Ejemplos a, b y c

- Mismos exponentes podemos igualar las bases.

$\boxed{a^b = c^b \rightarrow a = c}$ Ejemplo d.

a) $\log_2 64 = x$

$$\log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow x = 6$$

b) $\log_2 \sqrt{8} = x$

$$\log_2 \sqrt{8} = x \Leftrightarrow 2^x = 8^{1/2} \rightarrow 2^x = 2^{3/2} \rightarrow x = 3/2$$

c) $\log_{1/2} 4 = x$

$$\log_{1/2} 4 = x \Leftrightarrow (1/2)^x = 4 \rightarrow 2^{-x} = 2^2 \rightarrow x = -2$$

Educación Media General

Ministerio del Poder Popular para la Educación

Inclusión y Calidad

Cada Familia Una Escuela

d) $\log_x 125 = 3$

$\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \rightarrow x^3 = 5^3 \rightarrow x = 5$

e) $\log_3 x = 3$

$\log_3 x = 3 \Leftrightarrow 3^3 = x \rightarrow x = 27$

2. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 (1/4) - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) + \log_3 \left(\frac{1}{27}\right) - \log_2 1$

a) $\log_2 64 + \log_2 (1/4) - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

1° Resolvemos cada término aplicando la definión.

$\log_2 64 = x \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow 2^x = 2^6 \rightarrow x = 6$

$\log_2 (1/4) = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \rightarrow 2^x = 2^{-2} \rightarrow x = -2$

$\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$

$\log_2 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{1/2} \rightarrow x = 1/2$

2° Sustituimos los valores obtenidos y operamos.

$\log_2 64 + \log_2 (1/4) - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} =$

$6 + (-2) - (2) - (1/2) = 3/2$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) + \log_3 \left(\frac{1}{27}\right) - \log_2 1$

$\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{-5} \rightarrow x = -5$

$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \rightarrow x = -3$

$\log_2 1 = x \Leftrightarrow 2^x = 1 \rightarrow x = 0$

$\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) + \log_3 \left(\frac{1}{27}\right) - \log_2 1 = -5 + (-3) = -8$

3. Calcula: a) $\log_3 5 + \log_3 6$ b) $\log_2 30 - \log_2 15$ c) $\log_4 x^5$

a) $\log_3 5 + \log_3 6 = \log_3 (5 \cdot 6) = \log_3 30$

b) $\log_2 30 - \log_2 15 = \log_2 \left(\frac{30}{15}\right) = \log_2 2 = 1$

c) $\log_4 x^5 = 5 \log_4 x$

4. Toma logaritmos en las siguientes expresiones:

a) $A = \frac{x\,y\,z}{t}$ b) $B = x\sqrt{y} \cdot \sqrt{z}$ c) $C = \frac{4\,\pi\,r^3}{3}$

a) $A = \frac{x\,y\,z}{t} \rightarrow \log A = \log \left(\frac{x\,y\,z}{t}\right)$

$\log A = \log (x\;y\;z) - \log t$

$\log A = \log x + \log y + \log z - \log t$

b) $B = x \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z} \rightarrow \log B = \log\left(x \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z}\right)$

$\log B = \log x + \log \sqrt{y} + \log \sqrt{z}$

$\log B = \log x + \log y^{1/2} + \log z^{1/2}$

$\log B = \log x + 1/2 \log y + 1/2 \log z$

c) $C = \frac{4\,\pi\,r^3}{3} \rightarrow \log C = \log\left(\frac{4\,\pi\,r^3}{3}\right)$

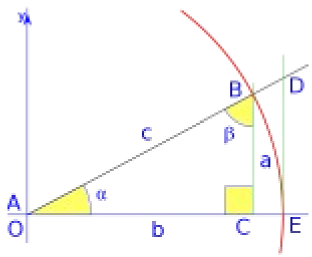
$\log C = \log \left(4\,\pi\,r^3\right) - \log 3$

$\log C = \log 4 + \log \pi + \log r^3 - \log 3$

$\log C = \log 4 + \log \pi + 3 \log r - \log 3$

TRIGONOMETRÍA.

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es “la medición de los triángulos”. Deriva de los términos griegos τριγωνο trigōno triángulo y μετρον metron medida.

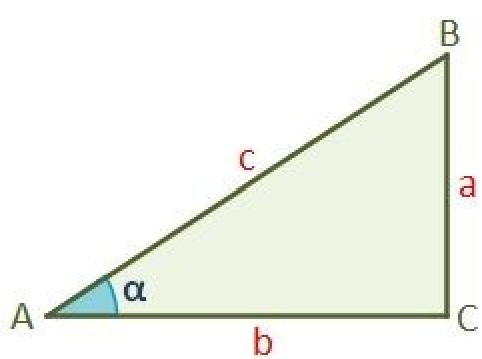


En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones y funciones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIANGULO RECTÁNGULO.

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo en C.



Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, la comparación por su cociente de sus tres lados *a*, *b* y *c*.

Sea α uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

El **seno** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*).

$$sen\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

El **coseno** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

La **tangente** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y el cateto adyacente (*b*).

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente} = \frac{a}{b}$$

Luego tenemos las razones trigonométricas reciprocas.

La razón trigonométrica reciproca de la razón seno es la cosecante definida como:

$$csc\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{c}{a}$$

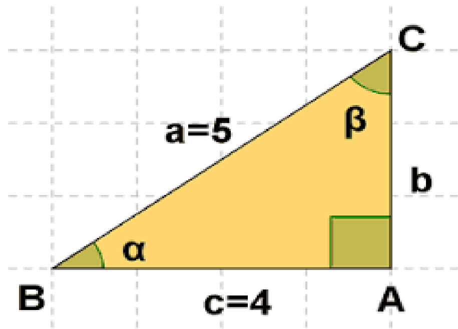
La razón trigonométrica reciproca de la razón coseno es la secante definida como:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

La razón trigonométrica reciproca de la razón tangente es la cotangente definida como:

$$ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{b}{a}$$

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo:



Vamos a determinar las razones trigonométricas con respecto al ángulo α, para ello primero calculamos el lado que falta aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow 5^2=b^2+4^2 \rightarrow b^2=5^2-4^2 \rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2} \rightarrow b=\sqrt{25-16} \rightarrow b=\sqrt{9}=3$$

Luego:

$$sen\,\alpha=\frac{3}{5}\,,\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\,,\ tg\,\alpha=\frac{3}{4}\,,\ csc\,\alpha=\frac{5}{3}\,,\ sec\,\alpha=\frac{5}{4}\ \text{ y }\ ctg\,\alpha=\frac{4}{3}$$

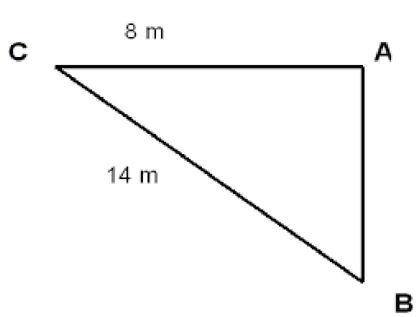
Es importante destacar que no solo se pueden hallar las razones trigonométricas con respecto al ángulo α, sino que también se pueden determinar con respecto al ángulo β, así tenemos:

$$sen\,\beta=\frac{4}{5}\,,\ \cos\beta=\frac{3}{5}\,,\ tg\,\beta=\frac{4}{3}\,,\ csc\,\beta=\frac{5}{4}\,,\ sec\,\beta=\frac{5}{3}\ \text{ y }\ ctg\,\beta=\frac{3}{4}$$

De lo cual se concluye que:

$sen\,\alpha=\cos\beta$ y $\cos\alpha=sen\,\beta$.

Veamos otro ejemplo; consideremos el triangulo ABC con ángulo recto en A, α ubicado en el vértice C y β ubicado en el vértice B.



Educación Media General

Por el teorema de Pitágoras: $14^2 = (AB)^2 + 8^2 \rightarrow (AB)^2 = 14^2 - 8^2 \rightarrow AB = \sqrt{14^2 - 8^2}$

$\rightarrow AB = \sqrt{196 - 64} \rightarrow AB = \sqrt{132} = \sqrt{2^2 .33} = 2\sqrt{33}$

(Recuerde que si la cantidad subradical es un número compuesto, el radical debe simplificarse)

Como el ángulo α está ubicado en el vértice C, tenemos que:

$$sen\,\alpha = \frac{2\sqrt{33}}{14} = \frac{\sqrt{33}}{7},$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{14} = \frac{4}{7},$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{33}}{8} = \frac{\sqrt{33}}{4},$$

$$csc\,\alpha = \frac{14}{2\sqrt{33}} = \frac{7}{\sqrt{33}} . \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{33}} = \frac{7\sqrt{33}}{33},$$

$$sec\,\alpha = \frac{14}{8} = \frac{7}{4},$$

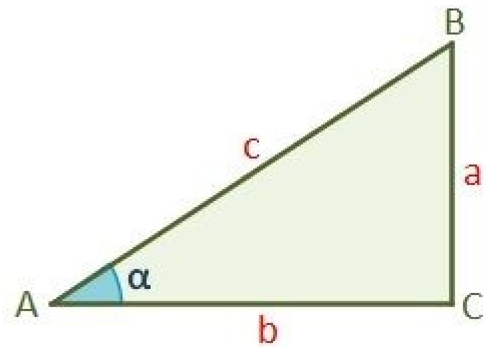
$$ctg\,\alpha = \frac{8}{2\sqrt{33}} = \frac{4}{\sqrt{33}} . \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{33},$$

Es importante destacar que los resultados de las razones trigonométricas deben simplificarse y racionalizarse si el caso lo amerita.

Se deja como ejercicio determinar las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo β.

En el desarrollo de los dos temas previos hemos estudiado los ángulos haciendo énfasis en su comprensión geométrica y en los sistemas de medición que se utilizan; por otra parte se realizo un estudio general de las razones trigonométricas esenciales. Ahora bien, en esta guía explicaremos como se aplican las razones trigonométricas en situaciones cotidianas y estableceremos leyes generales que afianzan a la trigonometría como una rama de la matemática importante para la comprensión geométrica de nuestro entorno.

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo en C, con $\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $b=4$. Supongamos que, con la información anterior se desea determinar los dos lados y el ángulo que faltan.



Solución:

Sabemos que el ángulo en C mide 90° ya que el problema nos indica que es un ángulo recto; la situación que se presenta es que tenemos un ángulo cuya medición está en grados y otro que está en π -radianes($\alpha=\frac{\pi}{3}$¿, entonces realizando la conversión de este ángulo a grados sexagesimal , se tiene:

$\pi_{¿}°$.

$\frac{\pi}{3_{¿}}$.

$$x=\frac{180°.(\frac{\pi}{3})}{\pi}=60°.$$

Ahora podemos decir que $\alpha=60°$; cabe destacar que el proceso anterior también se puede realizar utilizando el factor de conversión explicado en la guía 1 de la primera fase.

Siguiendo con nuestro desarrollo, para calcular el ángulo que falta, el cual está en el vértice B, tenemos:

¿ $B+90°+60°=180°$.

Recuerde que en un triangulo cualquiera la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180°, por lo tanto:

$¿B=180°-90°-60°=30°.$

Ahora bien, el lado "c" de nuestro triangulo anterior es su hipotenusa, entonces para calcular este lado utilizaremos la razón trigonométrica que vincula al cateto adyacente al ángulo α con la hipotenusa, la cual es el $cos\alpha$, así tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

Luego:

$$\cos 60°=\frac{4}{c}$$

$$c=\frac{4}{\cos 60°}=8.$$

Cabe destacar que el camino escogido para calcular el valor de "c" no es el único; al utilizar el ángulo en B y el seno del ángulo en B se obtiene el mismo resultado para "c".

Finalmente para calcular el lado que falta "a" tenemos:

$$sen\,\alpha=\frac{a}{c}.$$

$$sen\,60°=\frac{a}{8}.$$

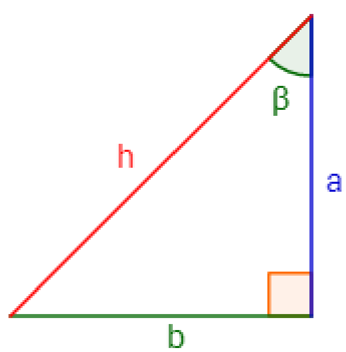
$$a=8.\,sen\,60°=6.93.$$

Razones trigonométricas para ángulos relevantes.

La siguiente tabla lo ayudara a realizar los cálculos cuando se presenten los ángulos que más se utilizan en el desarrollo de los ejercicios.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	-1	∞	1
$\operatorname{cosec}\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	-1	∞

Consideremos el siguiente triangulo, con $\beta = 30°$ y h= 15. Determinemos las medidas que faltan.



Solución:

Como tenemos dos de sus ángulos llamaremos ” al angulo que falta, por lo tanto:

$\theta + 30° + 90° = 180° \rightarrow \theta = 180° - 30° - 90° \rightarrow \theta = 60°$.

Como el lado “b” es opuesto al ángulo β y además conocemos la hipotenusa, utilizamos la razón $sen\,\beta$.

$sen\,30° = \frac{b}{15} \rightarrow b = 15.\,sen\,30° \rightarrow b = 15.\frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7.5.$

Luego, para calcular el lado que falta "a" tenemos:

$\cos 30° = \frac{a}{15} \rightarrow a = 15.\cos 30° \rightarrow a = 15.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{15}{2}\sqrt{3} \approx 12.99.$

Es importante destacar que hemos utilizado la tabla trigonométrica en el desarrollo del ejercicio. Por otra parte se debe simplificar o racionalizar los radicales cuando lo amerite y luego se efectuara la operación final con la calculadora.

Consideremos la siguiente situación:

Solución:

Para resolver este problema se debe utilizar una razón trigonométrica que vincule al cateto opuesto(h) al ángulo de 25° con el cateto adyacente; en ese orden de ideas la razón trigonométrica que cumple con los requerimientos es la $tg\,25°$, por lo tanto:

$tg\,25° = \frac{h}{10\,m} \rightarrow h = 10\,m\,.\,tg\,25° = 4.66\,m,$

La altura de la palmera es 4.66 m.

Fíjese que la solución al problema anterior es totalmente sencilla siempre y cuando se tenga claro cual razón trigonométrica se debe utilizar, además se utiliza directamente la calculadora para el resultado por que el ángulo que indica el problema no está en nuestra tabla trigonométrica.

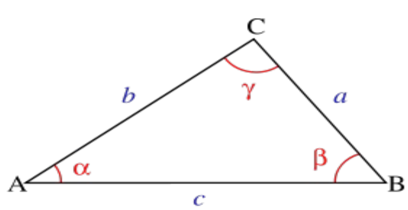
LEY DEL SENO Y DEL COSENO

El descubrimiento de la ley de senos dio gran paso a grandes descubrimientos de la geometría plana, y con ello la solución a muchos problemas que implicaban el cálculo de longitudes y ángulos. Una de las cosas que debemos saber acerca de la ley de senos, es que es aplicable a triángulos **oblicuángulos**, es decir aquellos triángulos los cuales no tienen ningún ángulo recto o de 90°.

También debemos considerar dos puntos importantes, para poder utilizar dicha ley, y consiste en aplicarla solo cuando nos encontramos bajo los siguientes dos casos:

- Cuando los datos conocidos son **dos lados y el ángulo opuesto** a uno de ellos.
- Cuando se tenga **dos ángulos y cualquier lado**.

Consideremos el siguiente triangulo:



Tenemos entonces:

"*En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales*"

Lo cual, en fórmula matemática se escribe como:

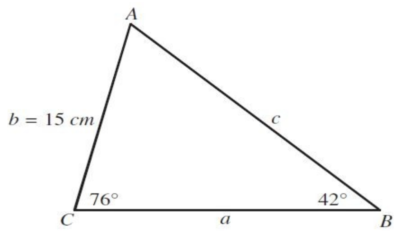
$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

También podemos emplear la misma fórmula, pero recíproca, es decir:

$$\frac{sen A}{a} = \frac{sen B}{b} = \frac{sen C}{c}$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el triángulo ABC, b = 15 cm, <B = 42°, y <C = 76°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.



Si observamos, podemos ver que nuestro triángulo tiene dos ángulos y un solo lado, por lo cual podemos aplicar la ley de senos, sin embargo, podemos realizar un análisis sencillo para hallar el otro ángulo desconocido, tomando en cuenta que; la **suma de los ángulos interiores** de cualquier triángulo deben sumar 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Colocando, los datos que tenemos en nuestro triángulo.

$$\angle A + 42° + 76° = 180°$$

$$\angle A + 118° = 180°$$

$$\angle A = 180° - 118° = 62°$$

Por lo que el ángulo en A, es de 62 grados.

$$\angle A = 62°$$

Ahora tenemos que encontrar el valor de las longitudes de a y c, para ello recurriremos a la fórmula:

$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

Si observamos, nos interesa encontrar el valor del lado a y c, y ya tenemos a nuestra disposición cuanto equivalen los ángulos opuestos a esos lados, por lo cual, se puede tomar la igualdad que desee.

Supongamos que necesita encontrar el lado **"a"** entonces, hacemos:

$$\frac{a}{sen62°} = \frac{b}{sen42°}$$

Por lo que, sustituyendo procedemos a despejar.

$$a = \frac{b \cdot sen62°}{sen42°} = 19.79cm$$

Listo...! hemos encontrado el valor del lado a.

Ahora encontremos el lado restante **"c"**.

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{19.79cm}{sen62°} = \frac{c}{sen76°}$$

despejando a "c"

$$c = \frac{(19.79cm)(sen76°)}{sen62°}$$

realizando la operación:

$$c = \frac{(19.79cm)(sen76°)}{sen62°} = 21.75cm$$

por lo que el lado restante "c" mide 21.75 cm.

Problema resuelto.

Una de las leyes también importantes en la trigonometría y geometría, necesaria para poder comprender las reglas que implica todo triángulo oblicuángulo (obtusángulo y acutángulo),es la **Ley del Coseno**, también conocida como una generalización del teorema de pitágoras.

Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$

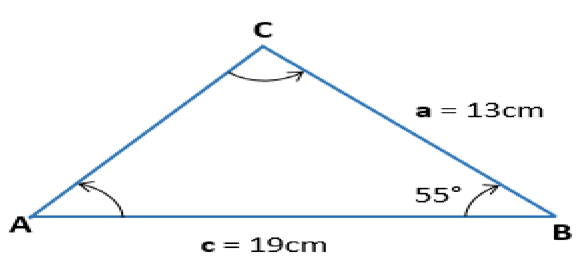
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Hay que tener en cuenta que la relación que nos proporciona ésta ley, puede ser para diversas variables, no casarse con la idea de que los lados tienen que ser ABC, (a, b, c), sino que también pueden tener otras literales. Es por ello muy importante tener en cuenta lo siguiente:

Para encontrar un lado, basta con elevar al cuadrado las variables de los otros dos lados, menos el doble producto de ambas variables, por el coseno del ángulo que es opuesto al lado que deseamos encontrar.

Veamos los siguientes ejemplos:

1) En el siguiente triángulo ABC, a = 13 cm, c = 19cm, <B = 55° , Resuelva el triángulo



Solución:

Para poder resolver el siguiente ejercicio, asumimos que el lado que deseamos encontrar **es el lado b**, puesto que el ángulo opuesto es B, entonces nuestra fórmula queda:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

De esto resulta

$$b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) \cdot \cos(55°)$$

$$b^2 = 169 + 361 - 494(0.5735)$$

Por lo que:

$$b^2 = 246.6532 \rightarrow b = \sqrt{246.6532}$$

$$b = 15.7052cm$$

Ahora tenemos los tres lados de nuestro triángulo, pero nos hace falta conocer los ángulos, para ello, consideramos un ángulo que desee calcular que bien puede ser el ángulo A o el ángulo C.

En este caso, elegiremos el ángulo A, por lo que la ecuación quedará:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Sin embargo, los valores de los lados a, b y c son conocidos, entonces se procede a despejar el coseno de A:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos A$$

Despejando aún más…

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos A$$

Invirtiendo la ecuación

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Listo, ahora es momento de sustituir nuestros valores:

$$\cos A = \frac{13^2 - 15.7052^2 - 19^2}{-2(15.7052)(19)} = 0.7350$$

Ahora aplicando coseno inverso.

$$A = \cos^{-1}(0.7350) = 42.69°$$

Por lo que el ángulo A, es de 42.69 grados.

Es importante indicar que para que aparezca $\cos^{-1}(0.7350)$ en su calculadora científica convencional debe presionar la tecla " SHIFT", después presiona la tecla de "cos" y coloca entre paréntesis la cantidad (en este caso 0.7350). De manera análoga se procede con las demás funciones trigonométricas.

Siguiendo con el desarrollo de nuestro ejercicio; mediante la suma de ángulos internos en un triángulo, aplicamos la propiedad para encontrar el ángulo que falta:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$42.69° + 55° + \angle C = 180°$$

Despejando <C :

$$\angle C = 180° - 42.69° + 55° = 82.31°$$

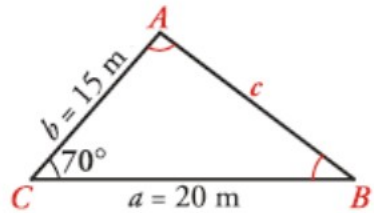
Por lo que nuestro ejercicio está resuelto. Tenemos el triángulo completo

Veamos ahora la solución de un problema que se resuelve aplicando la Ley del Coseno.

Dos de los lados, a y b, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70°. Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos?. Realice un dibujo de la situación.

Solución:

Tenemos la siguiente ilustración de la situación:



Aplicamos la ley del coseno para calcular el lado “c”:

$c^2=(20\,m)^2+(15\,m)^2-2.(20\,m).(15\,m).\cos(70°).$

$\rightarrow c^2=400\,m^2+225\,m^2-600\,m^2.(0.3420)\rightarrow c^2=625\,m^2-205.21\,m^2.$

$\rightarrow c=\sqrt{419.79\,m^2}=20.49\,m.$

Luego necesitamos: 15m+20m+20.49m=55.49m para cercar la finca.

Cabe destacar que también hay múltiples aplicaciones utilizando la ley del seno y se resuelven bajo operaciones parecidas a las explicadas en esta guía.

Actividades de Evaluación

<u>Pongamos en práctica lo aprendido.</u>

1) **Calcula el valor de x aplicando la definición de logaritmo (0.5 pts c/u).**

a) $\log_2 128 = x$ b) $\log_4 1 = x$ c) $\log_5 0,2 = x$

d) $\ln e^3 = x$ e) $\log_2 \frac{1}{8} = x$ f) $\log_x \frac{1}{16} = -4$

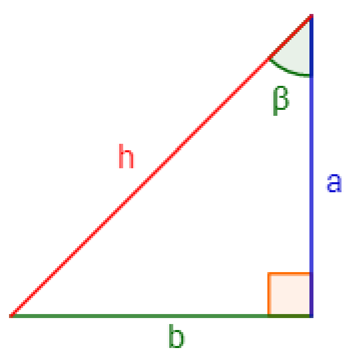
2) **Desarrolla la siguiente expresión aplicando las propiedades de los logaritmos y luego calcula su valor: (1pto).**

$$\log_2\left(\frac{2^3.3^3}{\sqrt{5^3}}\right).$$

3) **Calcula aplicando la definición de logaritmo: (1pto).**

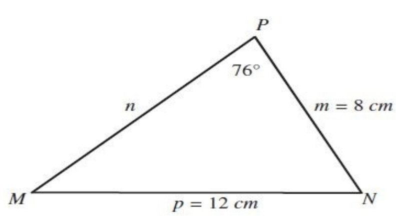
$$\log_2\left(\frac{1}{8}\right)-\log_5(3125)+\log(1000)-\log_3\left(\frac{1}{81}\right).$$

4) **Considere el triangulo de la siguiente figura con $a=3\sqrt{3}$ y $h=9\sqrt{2}$. Determine y simplifique las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo β. (1.5 pts)**



5) **Dibuje un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A. Si la hipotenusa es igual a $4\sqrt{5}$ y el cateto adyacente al ángulo α es igual a 5, determine y simplifique las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo α . (1.5pts)**

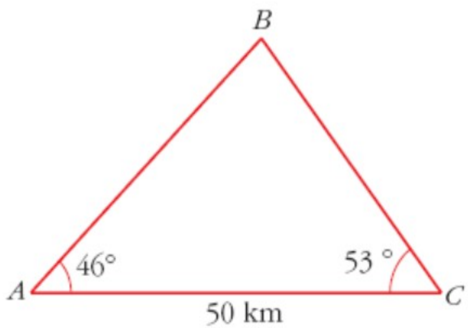
6) **Determine las medidas que faltan en el siguiente triangulo(1.5pts):**



7) **En el triángulo ABC, AB= 18 cm, <B = 46°, y <C = 80°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes. Dibuje el triangulo.(1.5pts)**

8) **Calcula los elementos que faltan de un triángulo oblicuángulo si se sabe que a = 20 cm, b = 26 cm y c = 12 cm. Dibuje el triangulo. (1.5pts)**

9) **Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos** $¿BAC=46°$ **y** $¿BCA=53°$**. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco? (1.5 pts)**



10) **En un entrenamiento de futbol se coloca el balón en un punto situado a 7 m y 10 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 6m. ¿ Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?. Realice un dibujo de la situación. (1pto).**
11) **Realizar un video explicando detalladamente la solución de cualquiera de los 10 ejercicios planteados.(nota: utilice un tono de voz adecuado, el video debe durar entre 3 y 4 minutos). (3pts).**

<u>Aspectos a Evaluar.</u>

i) **Puntualidad en la realización del trabajo requerido. (2pts)**
ii) **Resolución de los ejercicios planteados mediante procesos explicados en la guía(18ptos)**

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Canal oficial de cada familia una escuela o por el canal en Youtube.
Matemática de 4to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 4to año (Santillana, cualquier edición)

www.wikipedia.org.