Educación Media General

Martes 27 de Abril de 2021
Docente: Martín Marcano
4to Año "A y B"

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien.

Tema Generador

Responsabilidad escolar y comunitaria para el ejercicio de la prevención del covid-19

Referentes Teóricos-Prácticos

Progresiones Aritméticas y Progresiones Geométricas.

Desarrollo del Tema

Sin ser demasiado rigurosos, podemos definir una **sucesión** (o **progresión**) **numérica** como un conjunto de números ordenados. A cada uno de estos números los llamamos **términos** de la sucesión: a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, a_3 es el tercer término... a_n es el n-ésimo término.

Veamos las características que las definen:

a) En función del número que tengan, las sucesiones pueden ser **finitas** o **infinitas**.

b) Crecientes si cada termino es mayor que su anterior, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$ o decrecientes si $a_n \geq a_{n+1}$.

c) Son **aritméticas** cuando cada término es la suma del término anterior más un número constante, al que llamamos **diferencia** y denotamos por *d*. Es decir, $a_{n+1} = a_n + d$

- Son **geométricas** cuando cada término es el término anterior multiplicado por un número constante, al que llamamos **razón** y denotamos por *r* . Es decir, $a_{n+1}=a_n.r$

En el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas podemos encontrar una fórmula, a la que llamamos **fórmula general de la progresión**, que nos indica el valor de cualquier término de la sucesión sin necesidad de escribir los términos anteriores. Igualmente, podemos calcular la suma de *n* términos consecutivos y, en ocasiones, la suma de infinitos términos.

En esta guía resolvemos problemas de progresiones aritméticas y geométricas. Los problemas están ordenados según su dificultad. Antes de empezar, estableceremos todas las fórmulas que se requieren para abordar los problemas.

Progresión Aritmética.

Es de la forma: a_1

____________ $a_2=a_1+d$

____________$a_3=a_2+d=a_1+2d$

____________$a_4=a_3+d=a_1+3d$

Termino general: $a_n=a_1+(n-1).d$

Diferencia: $d=a_{n+1}-a_n$

Suma de los n-primeros términos: $S_n=\frac{(a_1+a_n).n}{2}$

Progresión Geométrica.

Es de la forma: a_1

____________ $a_2=a_1.r$

____________$a_3=a_2.r=a_1.r^2$

____________$a_4=a_3.r=a_1.r^3$

Termino general: $a_n=a_1.r^{n-1}$

Razón: $r = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

Suma de los n-primeros términos: $S_n = \frac{(a_n . r) - a_1}{r-1}$ o $S_n = a_1 . \frac{r^n - 1}{r-1}$

Además...

Una progresión **aritmética** es

- **decreciente** si *d* < 0,
- **creciente** si *d* > 0 y
- **constante** si *d* = 0.

Una progresión **geométrica** cuyo primer término es positivo es

- **decreciente** si 0 < r < 1 y
- es **creciente** si r > 1.

Y si el primer término es negativo, es

- **creciente** si 0 < r < 1 y
- **decreciente** si r > 1.

Es importante señalar que, independientemente del primer término, una progresión geométrica es **constante** si r = 1 y es **alternada** si r es negativo (cambia el signo en cada término).

Resolvamos algunos ejercicios:

1.En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

Solucion:

Conocemos el sexto término y la diferencia: $a_6 = 28, \ d = 5$

Queremos calcular el término general de la sucesión a_n, el cual es de la forma $a_n = a_1 + (n-1) . d$

Luego: $a_n = a_1 + (n-1).5$

Necesitamos calcular el primer término de la progresión, a_1. Para ello, aplicamos la fórmula para el caso n=6 ya que sabemos que $a_6 = 28$. Sustituimos en la fórmula:

$a_6 = a_1 + (6-1).5 = 28 \rightarrow a_1 + 25 = 28 \rightarrow a_1 = 28 - 25 = 3$

Por tanto, el término general de la progresión aritmética es $a_n = 3 + (n-1)$.

Los cinco primeros términos son

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 5 \cdot 1 = 8$$
$$a_3 = 3 + 5 \cdot 2 = 13$$
$$a_4 = 3 + 5 \cdot 3 = 18$$
$$a_5 = 3 + 5 \cdot 4 = 23$$

2.En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

Solución:

Conocemos el primer y el cuarto término:

$a_1 = 6, \qquad a_4 = 48$

Puesto que la progresión es geométrica, su fórmula general es de la forma

$a_n = a_1 r^{n-1}$

De dicha fórmula conocemos el término a_1, pero no conocemos la razón(r). Para calcularla, aplicamos la fórmula para el caso n=4 porque sabemos que $a_4 = 48$:

$48 = 6r^{4-1} \rightarrow 48 = 6r^3 \rightarrow r^3 = \frac{48}{6} \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$. Por lo tanto como la razón es 2, el término general es: $a_n = 6.2^{n-1}$

Para calcular la suma de los 5 primeros términos, calculamos el término a_5 y luego aplicamos la fórmula para sumar los n-primeros términos de una progresión geométrica:

$a_5 = 6.2^{5-1} = 6.2^4 = 6.(16) = 96$, luego: $S_5 = \frac{96(2) - 6}{2-1} = 186$

Por lo tanto la suma de los primeros términos es 186.

3) Encontrar el término general de la sucesión

20, 19.3, 18.6, 17.9, …

¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (a_{10}), vigésimo (a_{20}) y trigésimo (a_{30}).

Solución:

Si la sucesión es aritmética, entonces la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma.

Buscamos la diferencia:

$$d = a_2 - a_1 = 19.3 - 20 = -0.7$$
$$d = a_3 - a_2 = 18.6 - 19.3 = -0.7$$
$$d = a_4 - a_3 = 17.9 - 18.6 = -0.7$$

Se trata de una sucesión aritmética con diferencia *d* = -0.7 (es una sucesión decreciente, *d* < 0). Por tanto, el término general es

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 20 - 0.7(n-1)$$

Aplicando dicha fórmula podemos calcular los términos décimo, vigésimo y trigésimo:

$$a_{10} = 20 - 0.7 \cdot 9 = 17.3$$
$$a_{20} = 20 - 0.7 \cdot 19 = 6.7$$
$$a_{30} = 20 - 0.7 \cdot 29 = -0.3$$

4.En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general.

Solución:

Sustituimos los datos conocidos en la fórmula para la suma de los n-primeros términos y en la fórmula para el término general:

$$63 = S_{10} = \frac{10(1 + a_{10})}{2} \quad \rightarrow \quad 63 = \frac{10(1 + a_{10})}{2}$$
$$a_{10} = 1 + d(10 - 1) = 1 + 9d$$

Podemos sustituir a_{10} en la primera fórmula:

$$63 = \frac{10(1+1+9d)}{2} = \frac{10(2+9d)}{2} = 5(2+9d)$$

De la ecuación resultante obtenemos *d*:

$$63 = 10 + 45d \rightarrow \quad d = \frac{53}{45}$$

Luego la diferencia es $d = \frac{53}{45}$ y el término general es:

$$a_n = 1 + \frac{53}{45}(n-1)$$

5.Calcular la suma de los tres primeros términos de una sucesión geométrica de razón 0.5 sabiendo que su producto es 1000.

Solución:

Como la sucesión es geométrica y conocemos la razón, el término general es

$$a_n = a_1 . (0.5)^{n-1}$$

Sabemos que el producto de los tres primeros términos es 1000. Dicho matemáticamente,

$$a_1 . a_2 . a_3 = 1000$$

Sustituimos a_1, a_2, a_3 de la expresión anterior por el término general con n=1,n=2 y n=3 respectivamente:

$$1000 = a_1 . a_1(0.5) . a_1(0.5)^2$$

Con lo que obtenemos la ecuación:

$$1000 = a_1^3 (0.5)^3$$

Esta ecuación nos proporciona el primer término:

$$a_1^3 = \frac{1000}{0.5^3} = \frac{10^3}{0.5^3} \quad \rightarrow$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{10^3}{0.5^3}} = \frac{10}{0.5} = 20$$

Luego:

$a_2 = 20.(0.5) = 10 \; y \; a_3 = 10.(0.5) = 5$.

Por tanto, la sucesión es 20, 10, 5,… y la suma de los tres primeros términos es 35.

6.El sueldo de un trabajador es de 950€ mensuales y cada año se incrementa en 50€ (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 10 años siguientes.

Solución:

Construimos una sucesión cuyo término *n*-ésimo es el sueldo mensual en el año *n*-ésimo:

En el primer año, el sueldo mensual es de 950. En el segundo año, el sueldo mensual es de 1000. En el tercero, 1050. Luego la sucesión es

$$\begin{aligned} a_1 &= 950 \\ a_2 &= 950 + 50 = 1000 \\ a_3 &= 1000 + 50 = 1050 \\ &\vdots \\ a_n &= 950 + 50(n-1) \end{aligned}$$

Se trata de una progresión aritmética con diferencia $d = 50$.

En total, en el año *n*-ésimo el sueldo es $12 \cdot a_n$ porque hay 12 meses en un año y cada término representa el sueldo mensual. Por tanto, debemos multiplicar por 12 la suma de los 10 primeros términos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \rightarrow S_{10} = \frac{(950 + a_{10}).10}{2} \rightarrow S_{10} = \frac{(950 + 950 + 9.(50)).10}{2} = 11750 \text{ €}$$

Luego, en 10 años, la cifra asciende a $12 \cdot 11750 = 141000$ €.

7.Según una leyenda, un rico brahmán ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el brahmán quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Así pues, le pidió que le pagara con un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc. hasta llegar a los 64 casilleros. Calcular a cuántos granos de trigo ascendía la recompensa.

Solución:

El número de granos en cada casillero corresponde con la los términos de la progresión geométrica

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots \quad a_n = 2^{n-1}$

Queremos calcular la suma de los 64 primeros términos. Como la razón es *r* = 2 y el último término es a_{64}, por lo tanto:

$a_{64} = 2^{63} = 9223372036854775808$

$$S_n = \frac{r \,.\, a_n - a_1}{r-1} \rightarrow S_{64} = \frac{2.\, a_{64} - a_1}{2-1} = 2.(9223372036854775808) - 1.$$

$S_{64} = 18446744073709551615.$

Actividades de Evaluación

<u>Pongamos en práctica lo aprendido.</u>

1) La suma de tres términos consecutivos de una progresión aritmética cuya diferencia es 11 vale 66. Encontrar dichos términos. ¿Cuál es el término general de la progresión?
2) Encontrar el término general de la sucesión 1, -2, 4, -8, 16,... ¿Es aritmética o geométrica?
3) Calcula la razón de una progresión geométrica que empieza en 27.5 ; termina en 110 y tiene 25 términos.
4) Calcula la razón de una progresión aritmética que empieza en 4, termina en 49 y tiene 10 términos.
5) Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 3. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 19683.
6) A las 9 de la mañana, una persona con una enfermedad altamente contagiosa, contagia a 3 amigos. Media hora después, cada uno de estos tres amigos contagia a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos contagia a otras tres personas y así sucesivamente. Calcular cuántas personas están contagiadas a las 9 de la noche suponiendo que cada persona sólo contagia a otras tres personas y a nadie más durante el día.

7) Investiga acerca de la cantidad de habitantes que hay actualmente en el mundo y luego compara esa cantidad con la encontrada en ejercicio anterior (6). ¿Qué concluyes?

Aspectos a Evaluar.

i) Responsabilidad en la realización del trabajo requerido. (4pts)
ii) Resolución de los ejercicios planteados mediante procesos explicados en la guía y en la programación de Tv.(16pts)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Canal oficial de cada familia una escuela o por el canal en Youtube.
Matemática de 4to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 4to año (Santillana, cualquier edición)

www.wikipedia.org.