Miércoles 17 de enero del 2024.
Docente: José Aly Jiménez Angulo.
5to Año “A” Y “B”.

Área de formación: Matemática

Desarrollo del Tema

Propiedades de la suma de matrices

Si A, B y C son matrices mxn, se verifica que:

- A + B = B + A (Propiedad conmutativa)
- (A + B) + C = A + (B + C) (Propiedad asociativa)
- A + O = O + A = A (Elemento Neutro)
- Sea A, cualquier matriz mxn, Existe D, tal que A + D = 0 (existencia de elemento opuesto)

A partir de esta última propiedad se puede definir la diferencia de dos matrices.

Ejercicio:

1. Sean las siguientes matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule: a) A – B y b) B – A=

$$a)\ A - B = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5+4 & -5+6 \\ -3-2 & 3+1 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Con este paso solo se intenta evidenciar que es el mismo procedimiento de la suma, simplemente invertimos los signos de los elementos que están dentro de la matriz B

2. Sean las siguientes matrices C y D

$$C = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5\pi \\ \sqrt{2} & 4 & -15 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & x & -2\pi \\ \sqrt{2} & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Calcule: a) D – C y b) C – D

$$a) D - C = \begin{pmatrix} 6 & x & -2\pi \\ \sqrt{2} & 4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5\pi \\ \sqrt{2} & 6 & -15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6-10 & x+2 & -2\pi-5\pi \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} & 4-6 & 12+15 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -4 & x+2 & -7\pi \\ 0 & -2 & 27 \end{pmatrix}}$$

Como pueden observar, las matrices se pueden restar de forma directa.

Producto de un número Real por una matriz

Sea α un número real, y la matriz A_{mxn} entonces el producto de α por A, es la matriz mxn que se obtiene de multiplicar cada elemento de A por α, es decir:

$$A_{mxn} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \cdots & \alpha.a_{1n} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \cdots & \alpha.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \cdots & \alpha.a_{mn} \end{pmatrix}}$$

1) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \pi & 4 \end{pmatrix}$$

Calcule $\propto.A$, para los siguientes valores de α:

$1)\ \alpha = -\frac{1}{3}$

$$\alpha A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ \pi & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3} & \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) \\ \left(-\frac{1}{3}\right)\pi & \left(-\frac{1}{3}\right)4 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\pi & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}$$

$2)\ \alpha = 3 \qquad 3)\ \alpha = -10 \qquad 4)\ \alpha = \pi \qquad 5)\ \alpha = \sqrt{3}$

Propiedades del producto de un número real por una matriz

Sean $\propto$ y β dos números reales cualesquiera, A y B dos matriz mxn, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\propto.A$, es una matriz mxn
- $\propto(A+B) = \propto.A + \propto.B$
- $1.A = A$
- $\propto.(\beta.A) = (\propto.\beta).A$
- $-1.A = -A$
- $(\propto + \beta).A = \propto.A + \beta.A$

PRODUCTO DE MATRICES

El producto de matrices no resulta tan evidente o natural como la suma de matrices ya que, para este procedimiento, las matrices deben cumplir con el siguiente criterio: Para poder multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz. Si esto no se cumple, las matrices no se pueden multiplicar.

El resultado de la multiplicación es una matriz cuyo número de filas será igual al número de filas de la primera matriz y el número de columnas sera igual al número de columnas de la segunda matriz.

Pasos para el producto de dos matrices:

Si tenemos dos matrices A_{2x3} y B_{3x2}, el producto de estas matrices es una matriz C de dimensiones 2x2, es decir:

$$A.B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

La matriz C_{2x2} se calcula multiplicando cada elemento en la fila de la matriz A por cada elemento en la columna de la matriz B y sumando los productos resultantes, tal y como se mostrara a continuación:

1) Para obtener el elemento $\boldsymbol{c_{11}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{11}} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31}$$

2) Para obtener el elemento $\boldsymbol{c_{12}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{12}} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32}$$

3) Para obtener el elemento $\boldsymbol{c_{21}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{21}} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31}$$

4) Para obtener el elemento $\boldsymbol{c_{22}}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_{22}} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32}$$

Una vez obtenido cada uno de esos resultados podemos escribir la matriz resultante.

Ejercicios:

1) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes operaciones:

$$1)\ A.B \qquad 2) A.C \qquad 3) C.D \qquad 4) B.D$$

Soluciones:

$1)\ A.B =$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Para obtener el elemento c_{11}:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 10.1 + (-3).3 + 0.6 = 10 - 9 + 0 = \boxed{1}$$

2) Para obtener el elemento c_{12}:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = 10.9 + (-3).(-7) + 0.0 = 90 + 21 + 0 = \boxed{111}$$

3) Para obtener el elemento c_{21}:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = 5.1 + (-2).3 + 9.6 = 5 - 6 + 54 = \boxed{53}$$

4) Para obtener el elemento c_{22}:

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = 5.9 + (-2).(-7) + 9.0 = 45 + 14 + 0 = \boxed{59}$$

$$\boxed{A.B = \begin{pmatrix} 1 & 111 \\ 53 & 59 \end{pmatrix}}$$

Nota:

También podemos resolver de forma más “directa” de la siguiente manera:

$$A.B = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10.9 + (-3).(-7) + 0.0 & 10.9 + (-3).(-7) + 0.0 \\ 5.1 + (-2).3 + 9.6 & 5.9 + (-2).(-7) + 9.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 - 9 + 0 & 90 + 21 + 0 \\ 5 - 6 + 54 & 45 + 14 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 111 \\ 53 & 59 \end{pmatrix}}$$

Aquí pueden observar que formamos directamente la matriz resultante, pero debido a las operaciones que se están realizando dicha matriz en un inicio queda bastante extendida y mientras más grande sea la matriz la escritura se puede volver más confusa, por lo tanto, **recomiendo hacerlo como desarrollar estos ejercicios paso a paso como he realizado previamente**, aunque dejo a criterio del estudiante el realizarlo de la manera en la cual se sienta más cómodo.

NOTA DE INTERES

,

Todo lo que aquí sale, **será explicado en clases**, por lo tanto, la principal intención es que vayan leyendo sobre el tema y se animen a resolver por su propia cuenta los ejercicios que les dejo al final. ***Recuerden que la evaluación tiene como fecha tentativa a ser realizado los días:***

Sección B: *01-02-24 y* ***Sección A:*** *02-02-24.*

Es importante que copien esta información en sus cuadernos para aprovechar el máximo tiempo posible que tengas en el aula.

Lunes 22 de enero del 2024.
Docente: José Aly Jiménez Angulo.
Teléfono: 0412-8783907
5to Año “A” Y “B”.

Área de formación: Matemática

GUIA DE EJERCICIOS

Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 9\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 4 & -8\\ 0 & 6\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}x & 8\\ 10 & 9\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}12 & 2\\ 6 & x\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}0 & 9\\ \pi & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -11 & 7\\ 10 & 0\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}8 & 0 & 12\\ 2 & 13 & 10\\ 1 & -9 & 0\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}2 & 0 & 9\\ 17 & -3 & -4\\ 8 & -12 & 7\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}8 & 4\\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix}\qquad K=\begin{pmatrix}0 & -10 & 3\\ 5 & -1 & 9\end{pmatrix}\qquad L=\begin{pmatrix}-1 & \pi & 2\\ 7 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Realice las siguientes operaciones:

1) C+D=
2) A+L=
3) K – L=
4) E – B=
5) H+G=
6) B – F=
7) 4.A=
8) π.E=
9) – 2.J=
10) $\frac{1}{2}$. G=
11) A.B=
12) C . D=
13) G . H=
14) I . J=
15) E.J=
16) C.D=
17) L.G=
18) K.A=
19) I+A.B=
20) 4A – L.G=

NOTA DE INTERES

Si se les recuerda que este tema será evaluado con **una prueba escrita (**pautada para: **Sección A:** Viernes 02-02-24 y **Sección B:** Jueves 01-02-24.

La finalidad de esta guía de ejercicios es que los estudiantes practiquen los mismos, realicen el mayor número de ejercicios posibles y se comuniquen conmigo en caso de duda o revisión de los mismos. De igual manera el Martes 30 (sección B) y Miércoles 31(sección A) estaríamos practicando algunos de los ejercicios de esta guía.

No es obligatorio tener estos ejercicios resueltos en el cuaderno