Guía Pedagógica de Matemática

2do año

PROF. JORGE OSTOS

La presente guía está realizada por mi persona con mucho cariño y dedicación, espero puedan aprovecharla al máximo y de la mejor manera. La misma lleva una relación importante con la anterior, debemos tener muy claro y presente las partes de un polinomio, los tipos de polinomios, ordenar polinomios, los términos semejantes y la relación entre un polinomio y otro. Los polinomios es un tema muy fundamental en la enseñanza de la matemática porque son y han sido muy importantes para el desarrollo del mundo como hoy lo conocemos. Cualquier duda que tengan pueden comunicarse conmigo dentro de un horario de 8:00 am a 1:00pm y podré responderles cualquier duda que tengan.

Profesor: Jorge Ostos

Correo: j.ostos95@gmail.com

Teléfono: 04124598692

Ciencia, tecnología e innovación

Tema Generador

Tecnología de la información y comunicación en la cotidianidad

Referentes Teóricos-Prácticos

Polinomios

Desarrollo del Tema

Suma o resta de monomio y polinomios

Para sumar o restar monomios, es obligatorio que estos sean **semejantes**. Para ello, se suman o se restan los respectivos coeficientes de cada monomio y a continuación se escribe la misma parte literal. Es decir, una vez que identificamos si dos términos son semejantes, debemos sumar o restar los coeficientes y la variable la dejamos igual, no la tocamos. Por ejemplo:

Sean los siguientes monomios:

1. x^3
2. $2x^3$

Primero debemos verificar si eston dos monomios son semejantes

$$x^3 \qquad\qquad 2x^3$$

Si nos fijamos ambos monomios son semejantes ya que tienen la misma variable y el mismo exponente.

Una vez que determinamos que ambos monomios son semejantes, procedemos a sumarlos o restarlos dependiendo el signo:

$$x^3 + 2x^3$$

¿Sabes cuál es el coeficiente de x^3 *? Cuando tengamos la variable y no veamos el coeficiente como en este caso, no significa que no tenga coeficiente. El coeficiente es uno "1", muchos libros y textos tienden a no indicar los coeficientes cuando este es uno "1", así que debemos estar pendientes siempre de eso.*

$$1x^3 + 2x^3$$

Operamos los coeficientes, ¿cómo saber si debemos sumar o restar? Debemos de tener en cuenta la ley de signos que hemos usado y vimos en primer año. El signo del uno "1"es positivo y el signo del dos "2" es positivo, son signos iguales y signos iguales se suman y se coloca el mismo signo.

$$1x^3 + 2x^3 = 3$$

Una vez que operamos los coeficientes colocamos el resultado

$$x^3 + 2x^3 = 3x^3$$

Por último escribimos la variable y el mismo exponente para culminar el ejercicio.

Veamos otro ejemplo, ¿Podemos sumar los monomios propuestos a continuación?

$$4x^5 + 2x^3$$

La respuesta es no, porque no son semejante. A pesar de que la variable es la misma, el exponente no es igual. Recordemos lo explicado en la guía anterior: Dos términos son semejantes cuando tienen la misma variable y el mismo exponente, debe cumplir ambas cosas.

Adicción y sustracción de polinomios

Para determinar las operaciones aditivas entre polinomios, se realiza lo que se indica a continuación:

Para sumar dos polinomios primero se ordenan los polinomios y luego se suman o restan los términos, estos términos deben ser semejantes para poder operarse entre ellos. Observemos algunos ejemplos:

Supongamos que tenemos los siguientes polinomios:

1) $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$

2) $Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

Sumemos los polinomios antes dados:

$$P(x) + Q(x) =$$

1) ANTES QUE NADA verificar que los polinomios estén **ordenados**, de no ser así podemos hacerlo de la forma que más nos guste (Ascendente o Descendente).

Descendente $\longrightarrow$

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$

Descendente $\longrightarrow$

$Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

En este caso, si nos percatamos ambos polinomios tienen sus términos ya ordenados de manera descendente (de mayor a menor exponente)

2) Luego de ordenarlos, verificamos los términos en común de cada uno.

$2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ $\qquad$ $3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

Como podemos ver ambos polinomios tienen cuatro términos en común

3) Una vez ordenado, procedemos a operar los polinomios. Hay dos maneras de hacer la suma y podemos escoger la que más nos guste. La primera forma es escribiendo un polinomio debajo del otro y luego operarlos entre sí. Veamos la primera forma:

3.1) Primero escribimos P(x):

$$P(x)= 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$$

Luego escribimos Q(x) debajo del mismo polinomio que ya escribimos, tratando con mucho cuidado que **los términos que son semejantes estén uno debajo del otro**.

$$P(x)= 2x^3 + \boxed{4x^2} - 5x - 1$$
$$Q(x)= 3x^3 \boxed{- 5x^2} + 3x + 2$$

Colocamos los términos semejantes uno debajo del otro

$$\begin{array}{lrrrr} P(x)= & 3x^3 & - 5x^2 & + 3x & + 2 \\ Q(x)= + & 2x^3 & + 4x^2 & - 5x & - 1 \\ \hline \end{array}$$

Ahora como en cualquier suma básica como las que hacíamos en la escuela, trazamos una linea debajo de los polinomios y empezamos a sumar o restar los coeficientes según sea el caso.

$$
\begin{array}{lrrrr}
P(x)= & 3x^3 & -\ 5x^2 & +\ 3x & +\ 2 \\
Q(x)=\ + & 2x^3 & +\ 4x^2 & -\ 5x & -\ 1 \\
\hline
P(x)+Q(x)= & & & & 1
\end{array}
$$

Empezamos a operar los términos de derecha a izquierda. El signo del dos "2" es positivo y del uno "1" es negativo. Signos diferentes se restan y se coloca el signo del mayor. Dos menos uno es uno"1" positivo, positivo por que el dos es mayor que el uno.

$$
\begin{array}{lrrrr}
P(x)= & 3x^3 & -\ 5x^2 & +\ 3x & +\ 2 \\
Q(x)=\ + & 2x^3 & +\ 4x^2 & -\ 5x & -\ 1 \\
\hline
P(x)+Q(x)= & & & -\ 2 & +1
\end{array}
$$

El signo del tres "3" es positivo y del cinco "5" es negativo. Signos diferentes se restan y se coloca el signo del mayor. Tres menos cinco es dos "2" negativo, negativo por que el cinco es mayor que el tres.

$$
\begin{array}{lrrrr}
P(x)= & 3x^3 & -\ 5x^2 & +\ 3x & +\ 2 \\
Q(x)=\ + & 2x^3 & +\ 4x^2 & -\ 5x & -\ 1 \\
\hline
P(x)+Q(x)= & & & -\ 2x & +1
\end{array}
$$

Nótese que escribimos la misma variable, eso no lo vamos a alterar.

$$\begin{array}{rrrrr} P(x)= & 3\underline{x}^3 & -\ 5\underline{x}^2 & +\ 3\underline{x} & +\ 2 \\ Q(x)=\ + & 2\underline{x}^3 & +\ 4\underline{x}^2 & -\ 5\underline{x} & -\ 1 \\ \hline P(x)+Q(x)= & 5\underline{x}^3 & -\ \underline{x}^2 & -\ 2\underline{x} & +\ 1 \end{array}$$

De esta forma seguimos operando los coeficientes según sus signos y dejamos la misma variable con su exponente según corresponda el caso.

3.2) La otra forma de hacer la suma de polinomios es un poco más formal, esta se realiza colocando un polinomio al lado del otro y agrupar los términos semejantes. Así:

Supongamos que tenemos los polinomios anteriores:

$$1)\ P(x)=\ 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$$

$$2)\ Q(x)=\ 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$$

$$P(x) + Q(x)=$$

Sustituimos las letras por los polinomios correspondientes

$$\underbrace{(2x^3 + 4x^2 - 5x - 1)}_{P(x)} + \underbrace{(3x^3 - 5x^2 + 3x + 2)}_{Q(x)}$$

$$P(x) \qquad + \qquad Q(x)$$

Luego buscamos los términos semejantes entre ellos:

$$(\underline{2x^3} + \underline{4x^2} \underline{- 5x} \underline{- 1}) + (\underline{3x^3} \underline{- 5x^2} \underline{+ 3x} \underline{+ 2})$$

Asociamos convenientemente los términos semejantes

$$(2+3)\,x^3 + (4-5)\,x^2 + (-5+3)\,x + (-1+2)$$

Por ultimo operamos los coeficientes entre ellos aplicando la ley de signos que corresponda

$$P(x) + Q(x) = 5x^3 - x^2 - 2x + 1$$

Nota: *Se deja al lector la decisión de cual forma utilizara para resolver sus ejercicios, ambas son correctas.*

Una vez vista de manera detallada la suma de polinomios veamos otro ejemplo, para ello utilizaremos tres polinomios:

$$R(x) = 10x^5 + 20x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 9$$

$$S(x) = 8x^4 - 5x - 3$$

$$M(x) = 10x^3 - 5x + 8$$

1. Como ya lo mencionamos anteriormente lo primero es ver si los polinomios están ordenados, de no ser así debemos ordenarlos.

$$R(x) = 10x^5 + 20x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 9$$

$$S(x) = 8x^4 - 5x - 3$$

$$M(x) = 10x^3 - 5x + 8$$

Como podemos observar los tres polinomios están ordenados (forma descendente).

2. Luego de ordenarlos procedemos a buscar los términos semejantes que hay entre ellos.

$$R(x) = 10x^5 + 20x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 9$$

$$S(x) = 8x^4 - 5x - 3$$

$$M(x) = 10x^3 - 5x + 8$$

Observemos que R(x) tiene tres términos semejantes con S(x) y tres términos semejantes con M(x). Por otro lado S(x) tiene tres términos semejantes con R(x) y solo dos términos semejantes con M(x). Para el caso de M(x) tiene tres términos semejantes con R(x) y dos términos semejantes con S(x).

3. Ahora para realizar esta suma utilizaremos convenientemente el primer metodo que ya explicamos en la presente guía.

$$\begin{array}{lcccccc}
R(x)= & 10x^5 & +20x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -3x & -9 \\
S(x)= & & 8x^4 & & & -5x & -3 \\
M(x)= & & & 10x^3 & & -5x & +8 \\
\hline
\end{array}$$

*Colocamos los términos semejantes uno debajo del otro y resolvemos. Como podemos observar hay términos de R(x) que le faltan a S(x) y M(x) simplemente dejamos ese espacio en blanco y ya, nos interesa solamente **alinear** los términos semejantes.*

4. Ahora solo queda aplicar ley de signos y hacer las operaciones correspondientes que ya sabemos

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
R(x)= & 10x^5 & +20x^4 & -2x^3 & +4x^2 & -3x & -9 \\
S(x)= & & 8x^4 & & & -5x & -3 \\
M(x)= & & & 10x^3 & & -5x & +8 \\
\hline
 & 10x^5 & +28x^4 & +8x^3 & +4x^2 & -13x & -4
\end{array}
$$

De esta forma decimos que:

$$R(x)+S(x)+M(x)= 10x^5 + 28x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 13x - 4$$

Resta de polinomios

Para restar dos polinomios debemos tener claro que el procedimiento va a casi igual que en la suma, la diferencia es que el segundo polinomio debemos cambiarlo por su opuesto para poder operarlo con el primero. Veamos:

Supongamos que tenemos los siguientes polinomios ordenados de forma descendente:

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6$$

$$T(x) = 5x^3 - 2x^2 + 8x + 7$$

Debemos resolver:

$$P(x) - T(x) =$$

Como bien lo explicamos anteriormente la resta de polinomios es igual a la suma, la única diferencia es que debemos de cambiar el segundo polinomio por su opuesto. Entonces busquemos el opuesto de T(x):

$$T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$$

Opuesto de T(x)

1. Ahora procedemos a resolver por el método que mas nos guste.

$$\begin{array}{l} P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6 \\ T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7 \\ \hline \end{array}$$

Lo primero es ordenar y alinear los términos semejantes.

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6$$
$$T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1}$$

Como podemos observar tenemos signos diferentes, debemos restar y colocar el signo del mayor. Seis menos siete es igual a uno "1" negativo, negativo por que el signo del número mayor es negativo.

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6$$
$$T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -6x \;\; -1}$$

En este caso tenemos signos diferentes, debemos restar y colocar el signo del mayor. Dos menos ocho es igual a seis "6" negativo, negativo por que el signo del número mayor es negativo, para culminar colocamos la misma variable y exponente.

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6$$
$$T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$$
$$6x^2 - 6x \quad -1$$

Acá tenemos signos iguales, debemos sumar y colocar el mismo signo. De esta forma cuatro mas dos es igual a seis "6" positivo, positivo por que el signo que se repite es positivo, para culminar colocamos la misma variable y exponente.

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x + 6$$
$$T(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8x - 7$$
$$-2x^3 + 6x^2 - 6x \quad -1$$

Fíjense que tenemos signos diferentes, debemos restar y colocar el signo del mayor. Tres menos cinco es igual a dos "2" negativo, negativo por que el signo del número mayor es negativo, para culminar colocamos la misma variable y exponente.

Multiplicación de monomios:

Para multiplicar dos o más monomios se debemos recordar los siguientes temas ya vistos en años anteriores:

Multiplicación básica:

1. $3 \cdot 4 = 12$

2. $5 \cdot 5 = 25$

3. $7 \cdot 8 = 56$

Multiplicación de signos:

1. $+ \cdot + = +$
2. $+ \cdot - = -$
3. $- \cdot - = +$
4. $- \cdot + = -$

Multiplicación de potencias de igual base: Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio se debe aplicar la propiedad distributiva para la suma. Es decir, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta los temas explicados anteriormente.

Supongamos que tenemos el polinomio P(x) y el monomio Z(x)

$$P(x)=5x^2+2x+3$$

$$Z(x)=5x^3$$

Resolvamos:

$$P(x)\bullet Z(x)=$$

Podemos hacerlo de dos formas veamos la primera:

1. Primero debemos verificar que el polinomio este ordenado.

$$5x^2+2x+3$$

Efectivamente el polinomio esta ordenado, de forma descendente.

Ahora luego de ordenar el polinomio escribimos el monomio debajo de el y trazamos una linea como si se tratase de una multiplicación normal.

$$\begin{array}{lr} & 5x^2+2x+3 \\ \text{x} & 5x^3 \\ \hline \end{array}$$

Una vez ordenado empezamos a operar, teniendo en cuenta la multiplicación de signos y la propiedad de potenciación (multiplicación de potencias de igual base).

$$\begin{array}{lr} & 5x^2+2x+3 \\ \text{x} & 5x^3 \\ \hline & +15x^3 \end{array}$$

Multiplicamos cinco por tres, lo cual es igual a quince "15" positivo, positivo porque signo positivo por positivo es igual a positivo y como el tres no tenía variable le colocamos la misma que del cinco.

$$
\begin{array}{r}
5x^2+2x+3 \\
\times \qquad 5x^3 \\
\hline
10? +15x^3
\end{array}
$$

En este caso multiplicamos cinco por dos, lo cual es igual a diez "10" positivo, porque signo positivo por positivo es igual a positivo. ***¿Sabes cuál será la variable y el exponente del diez?***

$$
\begin{array}{r}
5x^2+2x+3 \\
\times \qquad 5x^3 \\
\hline
10x^{1+3} +15x^3
\end{array}
$$

En el caso de las variables debemos colocar la misma variable pero sumar sus exponentes

$$
\begin{array}{r}
5x^2+2x+3 \\
\times \qquad 5x^3 \\
\hline
+10x^4+15x^3
\end{array}
$$

Esto es aplicando la propiedad de potenciación antes vista, “multiplicación de potencias de igual base”.

$$
\begin{array}{r}
5x^2+2x+3 \\
\times \qquad\qquad 5x^3 \\
\hline
25x^{2+3}+10x^4+15x^3
\end{array}
$$

Multiplicamos cinco por cinco lo cual es igual a veinticinco “25”positivo, positivo porque signo positivo por positivo es igual a positivo en el caso de las variables debemos colocar la misma variable pero sumar sus exponentes.

$$
\begin{array}{r}
5x^2+2x+3 \\
\times \qquad\qquad 5x^3 \\
\hline
25x^5+10x^4+15x^3
\end{array}
$$

De lo anterior podemos decir:

$$P(x) \bullet Z(x) = 25x^5+10x^4+15x^3$$

2. La segunda forma de hacer la multiplicación es la siguiente:

$$P(x) \;\bullet\; Z(x) \;=$$

$$\left(5x^2+2x+3\right).\left(5x^3\right) =$$

$$P(x) \quad . \quad Z(x)$$

Aplicamos propiedad distributiva.

$$\left(5x^2+2x+3\right).\left(5x^3\right) =$$

Por ultimo operamos los coeficientes entre ellos aplicando la multiplicación de signos que correspondiente y sumamos los exponentes.

$$\left(5x^2.5x^3\right) + \left(2x.5x^3\right)+\left(3.5x^3\right) =$$

$$25x^5+10x^4+15x^3$$

De lo anterior decimos:

$$P(x).Z(x) = 25x^5+10x^4+15x^3$$

"Cada persona traza su propio destino. No culpes a nadie de los retrasos o adelantos en tu viaje por la vida" José Bello (2010)

Educación Media General

Actividades de Evaluación

1. Resuelva las siguientes expresiones utilizando el primer método para sumar polinomios explicados en la presente guía:

1) $L(x) = x^4 + 5x + 9 + x^2$
2) $Q(x) = -7x^3 + 7x^2 + 6x - 8$
3) $P(x) = 12x^2 + 7x^5 + 5x^8 - 8$
4) $R(x) = 9x - 9x^2 + 1$
5) $T(x) = 12x^2 - 4x^5 + x^3 - 2$
6) $U(x) = x - 9x^3 + 6x^2 - 8x^8 + 1$
7) $M(x) = 4x^3 + x^4 - 6x^6 + 12$
8) $N(x) = x + x^6 - x^4 + x^3 - x^7 + x^2 - 1$

$L(x) + Q(x) =$

$M(x) - N(x) =$

$P(x) + U(x) =$

$R(x) - T(x) =$

$M(x) + U(x) =$

2. Resuelva las siguientes expresiones utilizando el segundo método para sumar polinomios explicados en la presente guía:

2.1. $(12x^3 + 7x^2 + 5x - 8) - (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) =$

2.2. $(9x^2 - 9x + 1) - (12x^2 - x - 6) =$

2.3. $(x^4 + 5x + 9 + x^2) + (x^3 + 4x^2 - 4) =$

2.4. $(-7x^4 + 7x^2 + 6x - 8) + (9x^2 - 9 + 3x^5) =$

3. Realice las siguientes multiplicaciones correspondientes entre monomios y polinomios utilizando el método que más te guste:

3.1. $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ $\qquad$ $R(x) = 10x^4$

3.2. $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x - 72$ $\qquad$ $T(x) = x^2$

3.3. $S(x) = +8x^4 - 5x - 3$ $\qquad$ $W(x) = 6x^3$