Educación Media General

Domingo, 04 de Julio 2021
Docente: Martín Marcano
5 to Año “A y B”

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien.

Tema Generador

Responsabilidad escolar y comunitaria para el ejercicio de la prevención del covid-19.

Referentes Teóricos-Prácticos

Propiedades elementales en el estudio de las Probabilidades.
Matrices.
Operaciones con Matrices.
Ecuación de Segundo Grado y Aplicaciones.

Desarrollo del Tema

Propiedades elementales en el estudio de las Probabilidades.

Uno de los problemas que el estadístico debe considerar e intentar evaluar es el elemento de aleatoriedad asociado con la ocurrencia de ciertos eventos cuando se realiza un experimento, en ese orden de ideas, continuando con lo estudiado en la guía numero uno desarrollaremos las propiedades más elementales en el estudio probabilístico considerando que en muchos casos debemos ser capaces de resolver un problema de probabilidad mediante el conteo del número de puntos en el espacio muestral, sin listar realmente cada elemento y es por ello que se hace necesario utilizar las reglas de conteo.

Considere un experimento en el que se registran los hábitos del tabaquismo de los empleados de una empresa industrial. Un posible espacio muestral podría clasificar a un individuo como no fumador, fumador ocasional, fumador moderado o fumador empedernido. Si se determina que el subconjunto de fumadores sea un evento, entonces la totalidad de los no fumadores seria un evento diferente, también subconjunto del espacio muestral, que se denomina **complemento** del conjunto de fumadores.

Definición 4. El complemento de un evento A respecto a S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A′.

Luego se cumple que si A y A′ son eventos complementarios, entonces

$P(A) + P(A') = 1$

Es importante destacar que P(A′) se interpreta como la probabilidad de que no ocurra el evento A.

A menudo resulta más sencillo calcular la probabilidad de algún evento a partir de las probabilidades conocidas de otros eventos. Esto puede ser cierto si el evento en cuestión se puede representar como la unión de otros eventos o como el complemento de algún evento. A continuación se presentan varias leyes importantes que con frecuencia simplifican el cálculo de las probabilidades.

Si A y B son dos eventos, entonces

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B)$: se lee probabilidad de que ocurra A o que ocurra B.

Eventos Incompatibles

En algunos experimentos, hay eventos que no pueden ocurrir a la vez, denominados eventos incompatibles o mutuamente excluyentes. Por ejemplo, si se lanza un dado al azar, los eventos “obtener el número 3” y “obtener un número par” son incompatibles, debido a que no tienen ningún elemento en común. En cambio los eventos de “obtener el número 3” y “obtener un número impar” no son incompatibles, ya que pueden ocurrir juntos.

Luego si A y B son eventos incompatibles, entonces

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eventos Independientes

Dos eventos son independientes cuando el hecho de que ocurra uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro. Por ejemplo, los resultados que se obtienen al lanzar varios dados a la vez son sucesos independientes, ya que el resultado de un dado no modifica las posibilidades de los otros dados.

Luego si A y B son independientes, entonces:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap B)$: se lee probabilidad de que ocurran A y B.

Resolvamos los siguientes ejercicios para ir poniendo en práctica las definiciones y reglas anteriores:

1) Al final del semestre John se va a graduar en la facultad de ingeniería industrial de una universidad. Después de tener entrevistas en dos empresas en donde quiere trabajar, determina que la probabilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en la empresa *A* es 0.8, y que la probabilidad de obtenerla en la empresa *B* es 0.6. Si, por otro lado, considera que la probabilidad de recibir ofertas de ambas empresas es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que Jhon logre una oferta de trabajo de la empresa A o en la empresa B?, ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa B no le realice oferta de trabajo a Jhon?, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos empresas le ofrezca trabajo a Jhon?

   Solución:

Tenemos las siguientes probabilidades:
$P(A) = 0.8$
$P(B) = 0.6$
$P(A \cap B) = 0.5$
Para calcular de que Jhon logre una oferta de trabajo de la empresa A o en la empresa B, aplicamos la siguiente fórmula:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$__________90%
Por lo tanto hay un 90% de probabilidad de que Jhon logre una oferta de trabajo de la empresa A o de la empresa B.
Para dar respuesta a las preguntas 2 y 3 del problema debemos hacer uso de la siguiente propiedad del complemento en probabilidades.
En función del evento B tenemos que:
$P(B) + P(B') = 1$
Luego: $P(B') = 1 - P(B)$_____________ $P(B') = 1 - 0.6 = 0.4$__________40%
Hay un 40% de probabilidad de que la empresa B no le realice oferta de trabajo a Jhon.
Por último como la probabilidad de que la empresa A o la empresa B le ofrezca trabajo a Jhon es $P(A \cup B)$, bajo el mismo principio se cumple que:
$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$____________ $P(A \cup B)' = 1 - 0.9 = 0.1$________10%
Por lo tanto hay 10% de probabilidad de que ninguna empresa le realice oferta de trabajo a Jhon.

2) En un grupo de 100 estudiantes graduados de preparatoria, 54 estudiaron matemáticas, 69 estudiaron

Historia y 35 cursaron matemáticas e historia. Si se selecciona al azar uno de estos estudiantes, calcule la probabilidad de que:
a) el estudiante haya cursado matemáticas o historia;
b) el estudiante no haya cursado ninguna de estas materias;
c) el estudiante no haya cursado historia.

Solución:
Sean los eventos A y B definidos de la siguiente manera:
A: evento de que el estudiante haya cursado Matemáticas.
B: evento de que el estudiante haya cursado Historia
Como el tamaño del espacio muestral (S) es 100, tenemos que:

$P(A)=\frac{54}{100}=0.54$

$P(B)=\frac{69}{100}=0.69$

Ahora bien, definamos el evento A∩B de la siguiente manera:

A ∩B: evento de que el estudiante haya cursado Matemáticas e Historia.

$P(A\cap B)=\frac{35}{100}=0.35$

Ahora damos respuestas a cada parte del problema:

a) $P(A\cup B)= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
   $P(A\cup B)= 0.54 + 0.69 - 0.35 = 0.88$____________88%
   Hay un 88% de probabilidad de que el estudiante haya cursado Matemática o Historia.

b) $P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B)$
   $P(A\cup B)' = 1 - 0.88 = 0.12$__________________12%
   Hay un 12% de probabilidad de que el estudiante no haya cursado ninguna de las dos asignatura.

c) $P(B')= 1 - P(B)$
   $P(B')= 1 - 0.69 = 0.31$_____________________31%
   Hay un 31% de probabilidad de que el estudiante no haya cursado Historia.

REGLAS BÁSICAS DE CONTEO.

Regla1. Si una operación se puede llevar a cabo en $n1$ formas, y si para cada una de estas se puede realizar una segunda operación en $n2$ formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de $n1n2$ formas.

Ejemplo1. ¿Cuantos puntos muestrales hay en el espacio muestral cuando se lanza un par de dados
una vez?
Solución: El primer dado puede caer en cualquiera de $n1 = 6$ maneras. Para cada una de esas 6 maneras el segundo dado también puede caer en $n2 = 6$ formas. Por lo tanto, el par de dados puede caer en $n1n2 = (6)(6) = 36$ formas posibles.
Es importante destacar que en este parte del estudio no estamos interesados en escribir todos los eventos del espacio muestral(S), sino en desarrollar reglas que nos permitan obtener el número total de los elementos que están en S.

Ejemplo 2. Un urbanista de una nueva subdivisión ofrece a los posibles compradores de una casa
elegir entre Tudor, rustica, colonial y tradicional el estilo de la fachada, y entre una planta, dos pisos y tres pisos según el tamaño de la casa. ¿En cuántas formas diferentes puede un comprador ordenar una de estas casas?
Solución: Como se puede elegir una de 4 fachadas disponibles tenemos que $n1 = 4$ y para el tamaño de la casa hay 3 opciones disponibles, entonces $n2 = 3$, un comprador debe elegir entre $n1n2 = (4)(3) = 12$ casas posibles.

Ejemplo 3. Si un miembro de un club que tiene 22 integrantes necesitara elegir un presidente y un
tesorero, ¿de cuantas maneras diferentes se podría elegir a ambos?
Solución: Para el puesto de presidente hay 22 posibilidades en total. Luego como ya elegimos el presidente, hay 21 posibilidades de elegir al tesorero. Si utilizamos la regla de la multiplicación, obtenemos $n1 \times n2 = 22 \times 21 = 462$ maneras diferentes.

La regla de la multiplicación (regla 1) se puede extender para abarcar cualquier número de operaciones. Por ejemplo, suponga que un cliente desea comprar un nuevo teléfono celular y que puede elegir entre $n1 = 5$ marcas, $n2 = 5$ tipos de capacidad y $n3 = 4$ colores. Estas tres clasificaciones dan como resultado $n1n2n3 = (5)(5)(4) = 100$ diferentes formas en las que un cliente puede ordenar uno de estos teléfonos.

A continuación se formula la **regla de multiplicación generalizada** que cubre k operaciones.

Regla 2. Si una operación se puede ejecutar en $n1$ formas, y si para cada una de estas se puede llevar a cabo una segunda operación en $n2$ formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en $n3$ formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en $n1n2...nk$ formas.

Ejemplo 4. Sam va a armar una computadora y para comprar las partes tiene que elegir entre las siguientes opciones: dos marcas de circuitos integrados, cuatro marcas de discos duros, tres marcas de memorias y cinco tiendas locales en las que puede adquirir un conjunto de accesorios. .De cuantas formas diferentes puede Sam comprar las partes?
Solución: Como $n1 = 2$, $n2 = 4$, $n3 = 3$ y $n4 = 5$, hay $n1 \times n2 \times n3 \times n4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ formas diferentes de comprar las partes.

Con frecuencia nos interesamos en un espacio muestral que contiene como elementos a todas las posibles ordenaciones o arreglos de un grupo de objetos. Por ejemplo, cuando queremos saber cuántos arreglos diferentes son posibles para sentar a seis personas alrededor de una mesa, o cuando nos preguntamos cuantas ordenaciones diferentes son posibles para sacar dos billetes de lotería de un total de 20. En este caso los diferentes arreglos se llaman **permutaciones**.

Definición 5. Una **permutación** es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos.

Definicion 6. Para cualquier entero no negativo n, $n!$, denominado "n factorial" se define como $n! = n(n - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)(1)$,
con el caso especial de $0! = 1$.
Si utilizamos el argumento anterior llegamos a la siguiente conclusión:
El número de permutaciones de n objetos es $n!$, es decir, $P_n = n!$

Ejemplo 6. ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar con las letras a,b,c y d?
Solución: como $n=4$, entonces $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ arreglos diferentes.

Fíjese que en el ejemplo anterior se toman todos los elementos a la vez, ahora bien, si queremos tomar **k** de los n-elementos, se aplica la siguiente fórmula: $P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo 7. En un año se otorgara uno de tres premios (a la investigación, la enseñanza y el servicio)
a algunos de los estudiantes, de un grupo de 25, de posgrado del departamento de estadística.

Si cada estudiante puede recibir un premio como máximo, ¿cuántas selecciones posibles habría?

Solución: Como los premios son distinguibles, se trata de un problema de permutación. El número

total de selecciones posibles es $P_{25,3}=\frac{25!}{(25-3)!}=\frac{25!}{22!}=\frac{25.24.23.22!}{22!}=25.24.23=13800$

Ejemplo 8. En un club estudiantil compuesto por 50 personas se va a elegir a un presidente y a un
Tesorero. ¿Cuántas opciones diferentes de funcionarios son posibles si
a) no hay restricciones;
b) *A* participara solo si él es el presidente;
c) *B* y *C* participaran juntos o no lo harán;
d) *D* y *E* no participaran juntos?

Solución: *a*) El número total de opciones de funcionarios, si no hay restricciones, es

$P_{50,2}=\frac{50!}{(50-2)!}=\frac{50!}{48!}=\frac{50.49.48!}{48!}=50.49=2450$ formas diferentes.

b) Como *A* participaría solo si es el presidente, tenemos dos situaciones: i) *A* se elige como presidente, lo cual produce 49 resultados posibles para el puesto de tesorero; o ii) los funcionarios se eligen de entre las 49 personas restantes sin tomar en cuenta a A, en cuyo caso el número de opciones es $P_{49,2}=\frac{49!}{(49-2)!}=\frac{49.48.47!}{47!}=49.48=$¿ 2352. Por lo tanto, el número total de opciones es 49 + 2352 = 2401.

c)El numero de selecciones cuando *B* y *C* participan juntos es 2. El número de selecciones cuando ni *B* ni *C* se eligen es $P_{48,2}=\frac{48!}{(48-2)!}=\frac{48.47.46!}{46!}=48.47=2256$. Por lo tanto, el número total de opciones en esta situación es 2 + 2256 =2258.

d) El numero de selecciones cuando *D* participa como funcionario pero sin *E* es (2)(48) = 96, donde 2 es el número de puestos que *D* puede ocupar y 48 es el número de selecciones de los otros funcionarios de las personas restantes en el club, excepto *E*. El numero de selecciones cuando *E* participa como funcionario pero sin *D* también es (2)(48) = 96. El número de selecciones cuando tanto *D* como *E* no son elegidos es $P_{48,2}=2256$. Por lo tanto, el número to-

tal de opciones es (2)(96) + 2256 = 2448. Este problema también tiene otra solución rápida: como *D* y *E* solo pueden participar
Juntos de dos maneras, la respuesta es 2450 – 2 = 2448.

MATRICES.

Una matriz es una forma rectangular donde se ordenan los números reales mediante coordenadas reflejadas en los subíndices.
La dimensión de una matriz se representa como la multiplicación de la dimensión de la fila con la dimensión de la columna. Denominamos (m) para la dimensión de las filas y (n) para la dimensión de las columnas. Entonces, una matriz *mxn* tendrá *m* filas y *n* columnas.

Suma y resta.
La unión de dos o más matrices solo puede hacerse si dichas matrices tienen la misma dimensión. Cada elemento de las matrices puede sumarse con los elementos que coincidan en posición en diferentes matrices.
En el caso de restar dos o más matrices se sigue el mismo procedimiento que usamos para sumar dos o más matrices.
En otras palabras, cuando sumamos o restamos matrices nos vamos a fijar en:

1. Las matrices compartan la misma dimensión.
2. Sumar o restar los elementos con la misma posición en matrices distintas.

$$\text{Sumar: } \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\text{Restar: } \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

Como hemos dicho, primero comprovamos que sean matrices de igual dimensión. En este caso, son dos matrices 2×2. A continuación, sumamos los elementos que tienen las mismas coordenadas. Por ejemplo, (d) y (h) comparten la misma posición en matrices distintas. La posición, denotada como **P**, para (d) y (h) es P_{22} que significa segunda fila-segunda columna.

Ejemplo práctico:

$$\boldsymbol{A_{2x3}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B_{2x3}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 17 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 11 \\ 13 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Cuando restamos matrices es como en álgebra común, multiplicamos por (-1) la matriz que tiene el signo de restar delante. En este caso es la matriz B.

<u>Producto escalar de un numero por una matriz.</u>

Tambien podemos multiplicar un numero “k” por una matriz, la idea es que el escalar multiplica a cada uno de los elementos de la matriz. Veamos los siguientes ejemplos:

$$1)\ 2A = 2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & 2\cdot 4 \\ 2\cdot(-8) & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(-2) & \frac{1}{2}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\cdot(-8) & \frac{1}{2}\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos el siguiente ejemplo donde multilicamos las matrices por escalares y luego restamos las matrices:

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 10 & -6 \\ 2 & -27 & -15 \\ 9 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-2) \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/3 & 10/3 & -6/3 \\ 2/3 & -27/3 & -15/3 \\ 9/3 & 2/3 & -3/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 10/3 & -2 \\ 2/3 & -9 & -5 \\ 3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-1 & 0-10/3 & 3-(-2) \\ 0-2/3 & 6-(-9) & -6-(-5) \\ -3-3 & 6-2/3 & -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10/3 & 5 \\ -2/3 & 15 & -1 \\ -6 & 16/3 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de Matrices.
Generalmente, la multiplicación de matrices no cumple la propiedad conmutativa, es decir, importa el orden de los elementos durante la multiplicación.
Sean R y X dos matrices, entonces se cumple que:

RX ≠ XR

Para multiplicar dos matrices necesitamos que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A_{m\times n}.B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

Deben ser iguales para que
pueda realizarse el producto de matrices

Es evidente que si las matrices tienen el mismo orden se pueden multiplicar.

Ejemplos prácticos:

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\5&1&1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}1&-3&6\\5&0&-2\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&-3\\9&2\\3&0\end{pmatrix};E=\begin{pmatrix}-1&\frac{2}{3}\\3&-3\end{pmatrix};$$

$$F=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&3\\4&-2\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) E.F
b) C.D
c) A.B

Solucion (a):

$$E.F=\begin{pmatrix}-1&\frac{2}{3}\\3&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&3\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1).\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.4&(-1).3+\frac{2}{3}.(-2)\\3.\frac{1}{2}+(-3).4&3.3+(-3).(-2)\end{pmatrix}$$

Luego: $E.F=\begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{8}{3} & (-3)+\left(\frac{-4}{3}\right) \\ \frac{3}{2}+(-12) & 9+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{-13}{3} \\ \frac{-21}{2} & 15 \end{pmatrix}$

Es importante resaltar que se debe multiplicar la fila 1 de la primera matriz por la columna 1 de la segunda para hallar a_{11}, luego multiplicamos la fila 1 de la primera matriz por la columna 2 de la segunda matriz para hallar $a_{12.}$ Bajo un proceso analogo partiendo de la fila 2 de la primera matriz hallamos a_{21} y $a_{22.}$

Solucion(b):

$$C.D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.1+(-3).9+6.3 & 1.(-3)+(-3).2+6.0 \\ 5.1+0.9+(-2).3 & 5.(-3)+0.2+(-2).0 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $C.D=\begin{pmatrix} -8 & -9 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}$

Notese que las matrices no tienen el mismo orden, pero la multiplicacion es posible ya que el numero de columnas de la primera matriz(primer factor) es igual al numero de filas de la segunda matriz(segundo factor).

Solucion (c):

Educación Media General

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \\ 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 5\cdot0+1\cdot2+1\cdot1 & 5\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Segundo Grado y Aplicaciones.

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que la incógnita aparece elevada al cuadrado. De la forma general:

$$ax^2+bx+c=0 \text{ donde } a \neq 0$$

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Soluciones de una ecuación de segundo grado

Si queremos saber las posibles soluciones de la ecuación sin llegar a resolverla nos podemos fijar en el valor del radicando

$D=b^2-4ac$ (discriminante)

- Cuando $D>0$, es decir, si b^2-4ac es positivo, hay dos soluciones reales y distintas.
- Si $D=0$, es decir, si b^2-4ac es cero, tiene una solución.
- Si $D<0$, es decir, si b^2-4ac es negativo, no tiene solución.

EJEMPLO 1.

$$5x^2 - 15x - 50 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} =$$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-50)}}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{225 + 1000}}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{15 \pm 35}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{3 \cdot 5 \pm 7 \cdot 5}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

EJEMPLO 2.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

- **Ecuaciones de segundo grado incompletas**

Hay que recordar que las ecuaciones de segundo grado **$ax^2+bx+c=0$** no siempre nos aparecen de forma completa. **Cuando b=0 o c=0 la ecuación se llama incompleta.**

Ejemplos:

$3x^2-27=0$ Si b=0

$2x^2-4x=0$ Si c=0

¿Cómo se resuelven las ecuaciones incompletas?

1) **Si c=0______________$ax^2+bx=0$**

La resolvemos extrayendo factor común x. De manera que nos quedaría:

- x.(ax+b)=0.

Teniendo en cuenta que si el producto de dos o más factores es cero al menos uno de ellos es cero, las soluciones son x=0 y x= -b/a.

2) **Si b=0_____________$ax^2+c=0$**

Resolvemos la ecuación despejando la x.

$ax^2=-c$_______________ $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

3) A continuación se presentan varios ejemplos resueltos para que te sean más útiles:

$3x^2-27=0$ $x=27/3=9$ $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$	**$2x^2-4x=0$** $x.(2x-4)=0$ $x=0$ $x=2$	**$x^2=16$** $x=\pm\sqrt{16}=\pm4$	**$9x^2=4$** $x=\pm\sqrt{4/9}=\pm2/3$

APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Observa cómo se resuelven las siguientes situaciones o problemas.

1) Los organizadores de un recital encargaron la construcción de un escenario rectangular, que tendrá una franja de 2 metros de ancho en todo su contorno. Toda el área, incluida la franja, estará cercada por una valla de seguridad. Los artistas solicitaron que el escenario tenga una superficie de 240 m^2, y los encargados de seguridad requieren que el largo del área cercada sea el doble de su ancho. ¿ Qué longitud debe tener la valla de seguridad?

Solución: se sabe que el escenario es rectangular y que tendrá una franja de 2m en todo su contorno; también, que el largo del área cercada es el doble del ancho. Entonces si el ancho es x, el largo es 2x. En ese orden de ideas, como la franja mide 2m, el ancho del escenario mide $x-4$ y el largo del escenario mide $2x-4$. Ya que el área solicitada por los artistas es de 240 m^2 y recordando que el área de un rectángulo es el producto del ancho por el largo, tenemos que:

$$(x-4)(2x-4)=240$$

Luego: ___________________________ $2x^2-8x-4x+16=240$, sumando términos semejantes e igualando a cero, tenemos:___________ $2x^2-12x-224=0$

Luego: ___________________________ $x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4.(2).(-224)}}{2.(2)}$

Luego:___________________________ $x=\frac{12\pm\sqrt{144+1792}}{4}$

Luego:___________________________ $x=\frac{12\pm 44}{4}$

Por lo tanto: $x_1=\frac{12+44}{4}=14$ y $x_2=\frac{12-44}{4}=-8$

Como x es la medida del ancho del area cercada, x no puede ser negativo, por lo cual $x=14$. Luego la longitud de la valla de seguridad debe ser $2x+x+2x+x=6x=6.(14)=84\,metros$.

2) Andrea compro cierta cantidad de chocolates por 12 100 Bs. Si hubiera comprado 21 chocolates mas por el mismo precio, cada uno hubiera costado 21 Bs menos. ¿ Cuántos chocolates compro Andrea y a qué precio?
 Solución: si x representa el numero de chocolates, entonces Andrea hubiera comprado $x+21$ chocolates; y el precio en cada caso sería $\frac{12100}{x}$ y $\frac{12100}{x+21}$. Ahora bien, de acuerdo con las condiciones
 del problema se puede escribir que:

$$\frac{12100}{x}-21=\frac{12100}{x+21} \rightarrow \frac{12100-21x}{x}=\frac{12100}{x+21} \rightarrow (12100-21x)(x+21)=12100x$$

$\rightarrow 12100x+254100-21x^2-441x=12100x$
$\rightarrow 12100x-12100x+254100-21x^2-441x=0$
$\rightarrow -21x^2-441x+254100=0$

Podemos simplificar la ecuación cuadrática dividiendo entre 21 con lo cual obtenemos que:

Educación Media General

$-x^2-21x+12100=0$ (se deja como ejercicio resolver la ecuación)
Las soluciones obtenidas son $x_1=100$ y $x_2=-121$. Ya que x representa el número de chocolates, x no puede ser negativo. Luego la solución adecuada es $x=100$; por lo tanto, Andrea compró 100 chocolates y cada uno de ellos costó $\frac{12100}{100}=121\,Bs$

Actividades de Evaluación

<u>Pongamos en práctica lo aprendido.</u>

1) **De una caja con 8 bolas rojas, 10 negras y 6 blancas, todas de igual tamaño, se extrae una al azar. (1pto)**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja o sea negra?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca o roja?**
c) **¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída no sea negra?**

2) **Basado en su experiencia, un agente bursátil considera que en las condiciones económicas actuales la probabilidad de que un cliente invierta en bonos libres de impuestos es 0.5, la de que invierta en fondos comunes de inversión es 0.25 y la de que invierta en ambos es 0.12. En esta ocasión encuentre la probabilidad de que un cliente invierta: (1pto)**

***a*) en bonos libres de impuestos o en fondos comunes de inversión;**
***b*) en ninguno de esos dos instrumentos.**

3) **Si un experimento consiste en lanzar un dado y después extraer una letra al azar del alfabeto español, ¿cuantos puntos habrá en el espacio muestral? (1pto)**

4) **Cierta marca de calzado existe en 5 diferentes estilos y cada estilo está disponible en 4 colores distintos. Si la tienda deseara mostrar la cantidad de pares de zapatos que incluya todos los diversos estilos y colores, ¿cuantos pares diferentes tendría que mostrar? (1pto)**

5) **Un estudio en California concluyo que siguiendo siete sencillas reglas para la salud un hombre y una mujer pueden prolongar su vida 11 y 7 años en promedio, respectivamente. Estas 7 reglas son: no fumar, hacer ejercicio de manera habitual, moderar su consumo de alcohol, dormir siete u ocho horas, mantener el peso adecuado, desayunar y no ingerir alimentos entre comidas. De cuantas formas puede una persona adoptar cinco de estas reglas: (1pto)**

¿Si la persona actualmente infringe las siete reglas?

¿Si la persona nunca bebe y siempre desayuna?

6) **En un concurso regional de ortografía, los 6 finalistas son 4 niños y 2 niñas. Encuentre el número de puntos muestrales en el espacio muestral (*S*) para el numero de ordenamientos posibles al final del concurso para: (1pto)**

***a*) los 8 finalistas;**

***b*) los 3 primeros lugares.**

7) **Sean las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{4} & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & -3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E=\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; F=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hallar si es posible, de no ser posible, justicar: (0.5 pts c/u)

a) **2A – 3B**

b) **C.D**

c) **D.C**

d) **F+C**

e) **F.D**

f) **A.D +** $\frac{3}{2}$ **D**

8) **Resuelve detalladamente las siguientes ecuaciones de segundo grado.(1pto c/u)**

a) $6x^2+x-2=0$

b) $\frac{8x}{3x+5}+\frac{3x-1}{x-1}=3$

c) $7(x-2)=5(x^2-4)+x^2-5(x+2)$

9) **Resuelve los siguientes problemas: (1.5ptsc/u)**

a) **El costo de una excursión para un grupo de personas es de 425000 Bs. Si desistieran de ir 3 personas, cada una de las restantes tendría que pagar 1200 Bs más. ¿Cuántas personas van de excursión y cuanto paga cada una?**
b) **Un jardín rectangular de 60 m de largo por 32 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 580**m^2

10) **Realizar un video explicando detalladamente la solución de cualquiera de los 9 ejercicios planteados.(nota:puede explicar una o más partes de algún ejercicio en particular según su nivel de complejidad, utilice un tono de voz adecuado, el video debe durar entre 3 y 4 minutos).(3pts).**

Aspectos a Evaluar.

i) Responsabilidad en la realización del trabajo requerido. (2pts)
ii) Resolución de los ejercicios planteados mediante procesos explicados en la guía (18pts)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Canal oficial de cada familia una escuela o por el canal en Youtube.
Matemática de 5TO año (Colección Bicentenario)
Matemática de 5T0 año (Santillana, cualquier edición)

www.wikipedia.org.