Educación Media General

Viernes, 27 de Enero 2022
Docente: Martín Marcano
5to Año “A y B”

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Conocimiento de nuestro entorno.

Tema Generador

Tradiciones y evolución histórica.

Referentes Teóricos-Prácticos

Factorización de polinomios.

Desarrollo del Tema

Factorización de polinomios.

Cuando se habla de **factorizar polinomios** se hace referencia a la posibilidad de expresar el polinomio como un conjunto de factores. En la guía explicativa anterior se realizaron factorizaciones aplicando la regla de Ruffini, pero ese es solo un método entre varios existentes para factorizar un polinomio. **Factorizar un polinomio tiene una gran ventaja**. Ocurre que es más fácil trabajar un polinomio cuando tiene el formato de un conjunto de factores que se multiplican entre sí. De esa manera, es más sencillo efectuar operaciones como la división o la radicación de estos polinomios. Por ejemplo, en el área de la computación es muy frecuente que un polinomio sea mejor expresado cuando aparece como un conjunto de **múltiplos**. Lo mismo se hace al momento de calcular áreas o en **determinadas fórmulas científicas**. Por ello, en esta guía se presentarán varios métodos que les permita obtener los conocimientos necesarios para aprender a factorizar un polinomio de manera correcta.

Antes de ver ejercicios de factorización de polinomios, será bueno saber con exactitud a que corresponden, ya que la factorización de polinomios es un contenido matemático que reúne las técnicas para escribirlos como producto de monomios o incluso entre otros polinomios. Esta descomposición se basa en el teorema aritmético fundamental, que garantiza lo siguiente: "***Cualquier número entero mayor que 1 puede descomponerse".***

Las técnicas utilizadas para la factorización de polinomios, llamados casos de factorización, **se basan en las propiedades de la multiplicación,** especialmente en la propiedad distributiva. Por tal motivo, se hace necesario recordar los **"productos notables"** estudiados en años anteriores. A continuación, se muestran los productos notables necesarios para factorizar polinomios:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

5) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

8) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

9) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Existen diferentes maneras en que podemos factorizar un polinomio dado. Entre estas, las más usadas son:

Factor Común:

Si todos los términos de la expresión contienen un mismo factor, se puede escribir esta como el producto de dicho factor común, multiplicado por la expresión necesaria para que, al efectuar el producto, obtengamos la expresión original. Si el factor común a todos los términos es literal(variable), se debe extraer elevado a la menor potencia con que aparece en los términos. **Ejemplos:**

1) $2xa - 2xb$, note que esta es una expresión que contiene dos términos y el factor común a ambos términos es "2x", por lo tanto, podemos escribir:

$$2xa - 2xb = 2x(a - b)$$

2) $6x^2y^2 - 3x^2y + 9xy$, en este caso el factor común que está en los tres términos de la expresión es "3xy", por lo tanto:

$$6x^2y^2 - 3x^2y + 9xy = 3xy(2x^2y - x + 3)$$

Es importante señalar que al aplicar la propiedad distributiva al resultado obtenido volvemos a la expresión inicial.

Factorización por Agrupación de términos:

Puede ser que, al extraer los factores comunes en un primer momento, el resultado será un polinomio que también tiene factores comunes. Por lo tanto, debemos hacer un segundo paso: volver a poner en primer plano los factores comunes.

Por lo tanto, la factorización por agrupación de términos es una factorización doble por factor común. Veamos los siguientes ejemplos:

1) $xy + 4y + 5x + 20$, note que entre los términos 1 y 2 el factor común es "y"; entre los términos 3 y 4 el factor común es "5", así tenemos:

$$xy + 4y + 5x + 20 = y(x + 4) + 5(x + 4)$$

Ahora la expresión original, la cual tenía cuatro términos, tiene solo dos términos cuyo factor común es "x+4", por lo tanto:

$$xy + 4y + 5x + 20 = y(x + 4) + 5(x + 4) = (x + 4)(y + 5)$$

2) $mw + 3m - aw - 3a$, aplicando un proceso análogo al ejercicio anterior tenemos:

$$mw + 3m - aw - 3a = m(w + 3) - a(w + 3) = (w + 3)(m - a)$$

Factorización por diferencia de cuadrados:

Se basa en el producto notable de una suma por diferencia (fórmula 3). En base a esto, una diferencia de cuadrados, la podemos expresar como un producto de binomios conjugados. Veamos los siguientes ejemplos:

1) $w^2 - 9$, en este caso el término "w" esta elevado al cuadrado y el 9 se puede escribir como 3^2, luego:
   $w^2 - 9 = w^2 - 3^2$, luego aplicando la fórmula 3 se cumple que:

$$w^2 - 9 = w^2 - 3^2 = (w - 3)(w + 3)$$

2) $16x^2 - 25y^2$, en este caso los números 16 y 25 se pueden escribir como 4^2 y 5^2, luego:

$$16x^2 - 25y^2 = 4^2x^2 - 5^2y^2 = (4x)^2 - (5y)^2 = (4x - 5y)(4x + 5y)$$

3) $\frac{4}{9}h^2 - 36$, bajo procedimientos análogos al ejercicio anterior tenemos:

$$\frac{4}{9}h^2 - 36 = \frac{2^2h^2}{3^2} - 6^2 = (\frac{2h}{3})^2 - 6^2 = \left(\frac{2h}{3} - 6\right)(\frac{2h}{3} + 6)$$

Factorización de un trinomio:

a) Trinomio cuadrado perfecto.

Cuando tenemos un trinomio, reconocemos que se trata de un trinomio cuadrado perfecto si:

i) Dos de los términos son cuadrados perfectos.

ii) El término restante corresponde al doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos.

Si las dos condiciones anteriores se cumplen, el trinomio se puede factorizar en la forma: $(a \pm b)^2$, que es sencillamente aplicar la formula 1 o 2 según sea el caso que corresponda. Ejemplos:

1) $9x^2 + 24xy - 16y^2$, observemos que:
$\sqrt{9x^2} = 3x$.
$\sqrt{16y^2} = 4y$. Luego, se cumple que: $\mathbf{2}.(3x)(4y) = 24xy$, por lo tanto:

$$9x^2 + 24xy - 16y^2 = (3x + 4y)^2$$

2) $x^2 + 10x + 25$, observemos que:
$\sqrt{x^2} = x$.
$\sqrt{25} = 5$. Luego, se cumple que: $\mathbf{2}.(x)(5) = 10x$, por lo tanto:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

3) $x^4 + 2x^2 + 1$, observemos que:
$\sqrt{x^4} = x^2$.
$\sqrt{1} = 1$. Luego, se cumple que: $\mathbf{2}.(x^2)(1) = 2x^2$, por lo tanto:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

4) $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$, observemos que:
$\sqrt{m^4} = m^2$.
$\sqrt{n^4} = n^2$. Luego, se cumple que: $-\mathbf{2}.(m^2)(n^2) = -2m^2n^2$, por lo tanto:

$$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

b) **Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$**

Un trinomio como este se puede factorizar como el producto de dos binomios que tienen un término común (fórmula 4). La idea es determinar dos números cuya suma genere el coeficiente "b" y cuyo producto genere el termino independiente "c". Veamos los siguientes ejemplos:

1) $x^2 + 8x + 15$, note que en este caso el trinomio no es perfecto ya que solo un término tiene raíz perfecta. Por lo tanto debemos buscar dos números que sumados generen "8" y multiplicados generen "15". Los números son 3 y 5, así tenemos que:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

Es importante señalar que en muchos casos se requiere de práctica y "astucia" para encontrar los números que cumplan con la condición.

2) $x^2 - 3x - 10$, para este caso los números que hacen que se cumpla la condición son "-5" y "2". Por lo tanto:
$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

3) $x^2 - 11x + 28$, para este caso los números que hacen que se cumpla la condición son "-4" y "-7". Por lo tanto:
$x^2 - 11x + 28 = (x - 4)(x - 7)$

Factorización por suma o diferencia de cubos:

Factorizar por suma o diferencia de cubos (fórmulas 8 y 9) consiste en transformar la expresión algebraica en el producto de dos factores.

Procedimiento:
Recuerda que el exponente de un cubo es múltiplo de 3.
i) Se extrae la raíz cúbica del primer y segundo término.
Es decir: $\sqrt[3]{a^3} = a$ y $\sqrt[3]{b^3} = b$

ii) Luego formamos los dos factores. Para el caso de la suma de cubos el primer factor es una suma y el segundo factor el signo del término central es negativo. Para el caso de la diferencia de cubos el primer factor es una diferencia y el segundo factor el signo del término central pasa a positivo. Veamos los siguientes ejemplos:

1) $x^3 + 8$, extraemos la raíz cubica de cada termino:

$\sqrt[3]{x^3} = x$.
$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$. Ahora le damos la forma de una suma de cubos:
$x^3 + 8 = x^3 + 2^3$, aplicamos la fórmula 8.
$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - (x)(2) + (2)^2) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

2) $8w^3 - 27$, extraemos la raíz cubica de cada termino:
$\sqrt[3]{8w^3} = \sqrt[3]{2^3 w^3} = 2w$.
$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$. Ahora le damos la forma de una diferencia de cubos:
$8w^3 - 27 = (2w)^3 - 3^3$, aplicamos la fórmula 9.
$$8w^3 - 27 = (2w)^3 - 3^3 = (2w-3)((2w)^2 + (2w)(3) + (3)^2)$$
$$= (2w-3)(4w^2 + 6w + 9)$$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan **variables** o **incógnitas**.
Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Simplificar una expresión algebraica consiste en escribirla de la forma más sencilla posible. Para lograrlo se debe manejar todos los procesos utilizados en las operaciones con polinomios incluyendo los distintos casos de factorización. Resolvamos algunos ejercicios:

1) $\frac{5(x+4)-3x}{2} = \frac{5x+20-3x}{2} = \frac{2x+20}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{20}{2} = x + 10$; fíjese que en este proceso sencillo lo que se hace es aplicar la propiedad distributiva, sumar o restar términos semejantes y reducir la fracción resultante.

2) $\frac{9x^3y^3}{36x^5y^6} = \frac{1}{4x^2y^3}$; este caso es más directo, se simplifican los coeficientes entre 9 y se aplica la propiedad de división de potencias de igual base.

3) $\frac{y^2-4}{y^2-y-6} = \frac{y^2-2^2}{(y+2)(y-3)} = \frac{(y-2)(y+2)}{(y+2)(y-3)} = \frac{y-2}{y-3}$; ahora utilizamos la factorización de polinomios, en el numerador tenemos una diferencia de cuadrados y en el denominador se tiene un trinomio cuadrado no perfecto con raíces enteras. Finalmente se reduce la expresión algebraica resultante.

4) $\frac{8a^3+27}{4a^2+12a+9} = \frac{(2a)^3+3^3}{(2a+3)^2} = \frac{(\mathbf{2a+3})(4a^2-6a+9)}{(\mathbf{2a+3})(2a+3)} = \frac{4a^2-6a+9}{2a+3}$; se factoriza el numerador aplicando la fórmula de suma de cubos y el denominador es un trinomio cuadrado perfecto. Por último se simplifica la fracción equivalente.

Educación Media General

5) $\frac{hx^3+hx^2-4xh-4h+kx^3+kx^2-4xk-4k}{hx-2h+kx-2k} = \frac{h(x^3+x^2-4x-4)+k(x^3+x^2-4x-4)}{h(x-2)+k(x-2)} = \frac{(h+k)(x^3+x^2-4x-4)}{(h+k)(x-2)}$

$$\frac{(h+k)(x+1)(x+2)(x-2)}{(h+k)(x-2)} = (x+1)(x+2);$$

en este ejercicio, en el primer paso se aplica factorización por agrupación de términos tanto en el numerador como en el denominador; en el segundo proceso tenemos un polinomio de grado 3 en el numerador el cual se factoriza aplicando la regla de Ruffini(proceso explicado en la guía anterior), por último simplificamos la expresión resultante.

Actividades de Evaluación

Pongamos en práctica lo aprendido.

1) En cada caso, factorice según el método que corresponda. (1pto c/u)
   a) $h^2 - h^2x^2$
   b) $w^3x^3 + 2w^2x$
   c) $64w^2 - 81$
   d) $\frac{4x^2}{9} - 49$
   e) $2km + 2kw - hm - hw$
   f) $x^2 + 9x - 22$
   g) $4x^2 - 12x + 9$
   h) $w^4 + 10w^2 + 25$
   i) $125w^3 - 216$
   j) $\frac{8x^3}{27} - 64h^3$
2) Factorice y Simplifique las siguientes expresiones algebraicas.(1pto c/u)

   a) $\frac{4(x-1)+x+9}{5}$

   b) $\frac{2x^2y+4xy-6(yx^2+xy)}{2xy}$

   c) $\frac{-n-m+3xn+3xm}{6x-2}$

   d) $\frac{32k^2-40k+50}{64k^3+125}$

e) $\frac{2x^2-2}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}$

f) $\frac{4y+6wh}{9w^2h^2+12why+4y^2}$

Aspectos a Evaluar.

i) Responsabilidad y puntualidad en la realización del trabajo requerido. (2pts)

Nota: la fecha tope para entregar esta actividad es **25/02/2022**, cualquier entrega después de la fecha implica perder los 2 puntos indicados)

i) Presentación y trabajo legible(1pts)

ii) Resolución de los ejercicios planteados mediante procesos explicados en la guía. (17pts)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Canal oficial de cada familia una escuela.
Matemática de 5to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 5to año (Santillana, cualquier edición)
www.wikipedia.org.

Nota: En esta fase, la entrega de las guías se realizarán vía online al correo **marcanom05@gmail.com** y también se estarán recibiendo en las instalaciones de la escuela y del ESEM en fechas que con antelación se notificará.