Viernes 14 de Enero de 2022
Docente: Martín Marcano
Guía superación pedagógica 4to año.

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Proceso social del trabajo.

Tema Generador

Todos a producir por nuestra Venezuela soberana.

Referentes Teóricos-Prácticos

Estudio y medición de ángulos.
Trigonometría.

Desarrollo del Tema

Los ángulos los utilizamos o vemos diariamente en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo en construcciones de casa, escaleras, en nuestros útiles escolares, en el parque, cuando observamos la hora en un reloj de agujas, entre otros. Debemos pensar que serán utilizados de una forma u otra; de manera que le den total perfección en la terminación de cada labor realizada desde lo más simple hasta lo más complejo teniendo en cuenta su buen funcionamiento.
Los ángulos son empleados en cada actividad que realizamos aunque no nos demos cuenta, desde cosas tan simples como cambiar un bombillo en donde se debe conocer el ángulo perfecto como insertarlo debidamente hasta cosas más complicadas como la elaboración de unos planos en la construcción de un edificio. Cuando clavamos un clavo, cambiamos un bombillo o apretamos un tornillo debemos tener en cuenta la posición del ángulo de inclinación y de rotación, ya que si tratamos de hacer algunas de estas labores y no utilizamos un ángulo perpendicular (ángulo recto) a la superficie en la que se trabaja, el clavo se

resbalara, el tornillo y el bombillo no se dejaran rotar sobre su propio eje y por consecuencia no se realizaran los trabajos indicados.
Ahora bien, en virtud de lo expuesto, es necesario dar a conocer una definición geométrica del angulo para avanzar en su estudio.

DEFINICION DE ÁNGULO.

El ángulo es la porción del plano comprendida entre dos semirrectas con un origen común llamado vértice. En otros casos se hace referencia a la abertura que conforman dos lados que parten de ese punto común, o se centran en el giro que da el plano respecto de su origen.

Los ángulos se pueden medir mediante utensilios tales como el goniómetro, el cuadrante, el sextante, la ballestina, el transportador de ángulos o semicírculo graduado, graduador, etc.

MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL.

El sistema sexagesimal es un sistema de unidades muy empleado cuyo fundamento es que cada unidad se divide en 60 unidades de una orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60. Se aplica en la actualidad fundamentalmente para la medida de ángulos y también en la medida del tiempo.

La unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado (°), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales, o bien un ángulo recto en 90 partes, o un ángulo completo en 360 partes. A cada una de esas partes se les llama grado (°).

A su vez, cada grado se subdivide en otras unidades inferiores, en concreto, en sesenta partes iguales. De esta manera, cada grado se divide en 60 minutos (1° = 60´) y cada minuto, a su vez, en 60 segundos (1´ = 60´´).

La cantidad de grados podrá ascender hasta 360, que es considerado el giro completo. Por poner un ejemplo cotidiano que ejemplifique esto, podemos ver el reloj de agujas: constantemente las agujas están formando ángulos. A las 12 en punto, cuando las dos agujas apuntan exactamente para el mismo lado, el ángulo es de 0°. A las 3 pasa a ser de 90°, a las 6 de 180°, a las 9 de 270°, y en el giro de las 12 de nuevo serán los 360°, y volverá a empezar.

Por tanto, en general, un ángulo en el sistema sexagesimal vendrá expresado en grados, minutos y segundos, de la forma, por ejemplo: 38° 50´ 35´´ (38 grados, 50 minutos y 35 segundos). Si se omiten los minutos y segundos, por ejemplo, 45°, es porque se entiende que es 45° 0´ 0´´.

Cuando un ángulo se mide en grados, minutos y segundos, se dice que está expresado con medida compleja, mientras que si se expresa con una sola clase de unidades, se dice que es una medida incompleja o simple, por ejemplo:

32° → medida simple

11´´ → medida simple

52° 17´ 45´´ → medida compleja

4° 22´ → medida compleja

Para sumar ángulos expresados en medidas complejas, primero se colocan los grados debajo de los grados, los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos, y se suman.

Paso de una medida compleja a simple:

Para pasar de medidas complejas a simple hay que transformar cada una de las unidades que tenemos en la que queremos obtener y posteriormente sumarlas, por ejemplo: Pasar de la forma compleja

2° 25´ 30´´ a un simple en segundos.

1) Se pasan los 2° a minutos: 2·60 = 120 minutos, y posteriormente a segundos: 120·60 = 7200 segundos.

2) Se pasan los 25 minutos a segundos: 25·60 = 1500 segundos.

3) Se suman todos los segundos: 7200´´ + 1500´´ + 30´´ = 8730 ´´

Por lo tanto, 2° 25´ 30´´ = 8730 ´´

Paso de una medida simple a compleja:

Para pasar una medida expresada en unidades simples a complejas, habrá que dividir cuando el caso sea de pasar a unidades de orden superior, o multiplicar para pasar a unidades de orden inferior, por ejemplo:

Pasar 52,45° a forma compleja.

1) Se separa la medida: 52,453° = 52° + 0,453°

2) Se pasan los 0,453° a minutos: 0,453.60 = 27,18' = 27'+ 0,18'

3) Se pasan los 0,18' a segundos = 0,18 .60 = 10,8"

Por lo tanto 52,45° = 52° 27' 10,8"

Pasar 124,53' a forma compleja.

1) Separamos la medida así: 120' + 4' + 0,53'

2) Se pasan los 120' a grados: 120/60 = 2°

3) Se pasan los 0,53' a segundos: 0,53.60 = 31,8"

Por lo tanto 124,53' = 2° 4' 31,8"

NOMBRES QUE RECIBEN LOS ANGULOS SEGÚN SU MEDIDA.

Son muchísimas las clases de ángulos que se pueden dar en el plano, se indican a continuación algunos ejemplos:

Ángulo nulo: es el que mide 0°.

Ángulo agudo: es el que cuya medida es menor a 90°.

Ángulo recto: es aquel que mide 90°.

Ángulo obtuso: es el que cuya medida es mayor a 90° pero menor a 180°.

Ángulo llano: es aquel que mide 180°.

Ángulo cóncavo: es aquel que es mayor a 180°.

Ángulo completo: es aquel que mide 360°.

RELACIONES IMPORTANTES QUE SE PUEDEN DAR ENTRE DOS ÁNGULOS .

Ángulos complementarios: si las medidas de dos ángulos suman 90° se dice que son complementarios.

Ángulos suplementarios: si las medidas de dos ángulos suman 180° se dice que son suplementarios.

SISTEMA CÍCLICO DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS Y EQUIVALENCIA CON EL SISTEMA SEXAGESIMAL.

La unidad de medida utilizada en el sistema cíclico es el radián. Un radián es la unidad de medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados delimitan un arco de circunferencia que tiene la misma longitud que el radio.

La relación del radián con la otra unidad de medida para ángulos más ampliamente utilizada, los grados sexagesimales o simplemente grados (°), es la siguiente: 1 vuelta completa de la circunferencia = 360° = $2 \cdot \pi$ radianes

Para entender la anterior igualdad, se parte de saber que la medida en radianes de un ángulo (θ) medido en una circunferencia es igual a la longitud del arco que abarca dividida entre el radio de dicha circunferencia, es decir:

θ(radianes) = longitud de arco / radio

Por tanto, cuando se trata del ángulo correspondiente a una circunferencia completa, cuya longitud total es $2 \cdot \pi \cdot r$ (siendo r el radio de la circunferencia) le corresponden en radianes un ángulo de:

θ (circunferencia completa) = $2 \cdot \pi \cdot r / r = 2 \cdot \pi$ radianes

En el sistema sexagesimal, el ángulo que abarca la circunferencia completa mide 360°, por lo que se puede establecer la ya vista relación entre grados y radianes:

1 vuelta completa = 360° = $2 \cdot \pi$ radianes

Otras equivalencias útiles entre grados y radianes son las siguientes:

0° = 0 rad

90° = ($\pi/2$) rad

180° = π rad

Pasar de Radianes a Grados Sexagesimales o Viceversa.

Para pasar de radianes a grados sexagesimales hay que recordar la relación para un ángulo que describe una circunferencia completa expresado en grados y radianes, como: 360° = $2 \cdot \pi$ rad, por lo tanto, la expresión general que permite relacionar las medidas de un ángulo expresadas en grados y radianes es la siguiente:

$G/360° = R/2 \cdot \pi$

"G" es la medida del ángulo expresada en grados y "R" es la medida en radianes (rad)

Despejando " G ", tenemos: $G = (R/2 \cdot \pi).360°$ (A)

Si lo que se desea es calcular los radianes a partir de los grados sexagesimales, se despeja "R" de la expresión anterior, quedando: $R = (G/360°).\ 2 \cdot \pi$ (B)

EJEMPLO 1: Pasar 1 radián a grados sexagesimales

Sustituyendo el valor de 1 radián en la fórmula (A): $G = (1/2 \cdot \pi).360° = 57{,}29578°$ por lo tanto, 1 rad = 57,29578°. También se puede expresar la medida de ángulo obtenida en forma compleja (grados minutos y segundos) de la siguiente forma:

Grados: $57{,}29578° = 57° + 0{,}29578°$

Minutos: $0{,}29578° \rightarrow 0{,}29578 \cdot 60 = 17{,}7468´ \rightarrow 17{,}7468´ = 17´ + 0{,}7468´$

Segundos: $0{,}7468 \cdot 60 = 44{,}81´´$

Por lo tanto, 1 rad = 57,29578° = 57º 17´ 44,81´´ (57 grados 17 minutos 44,81 segundos)

EJEMPLO 2: Pasar $0{,}75\,\pi$ a grados sexagesimales

Sustituyendo el valor de $0{,}75\,\pi$ en la fórmula (A): $G = (0{,}75\,\pi/ 2\,\pi).\ 360° = 135°$

EJEMPLO 3: Pasar 45° a rad

Sustituyendo el valor de 45° en la fórmula (B): $R = (45°/360°).\ 2.\pi = (\pi/4)$ rad

EJEMPLO 4: Pasar un ángulo de 60° 18´ 50´´ a rad

En este caso se parte de un ángulo expresado en grados minutos y segundos y se quiere pasar a radianes. En primer lugar, habrá que pasar el ángulo expresado en grados minutos y segundos (forma compleja) a simple (sólo en grados). Para pasar 60° 18´ 50´´ a forma simple en grados (°) se opera de la siguiente forma:

1) Los grados se dejan en grados: $60° \rightarrow 60°$
2) Los minutos se pasan a grados: $18´ \rightarrow 18´/60 = 0{,}3°$
3) Los segundos se pasan a minutos, y éstos a grados: $50´´ \rightarrow 50/60 = 0{,}8333´ \rightarrow 0{,}8333/60 = 0{,}0139°$
4) Se suman todos los grados obtenidos: $60° + 0{,}3° + 0{,}0139° = 60{,}3139°$

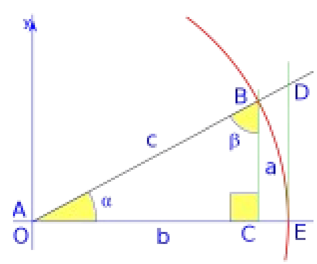
Por lo tanto, 60° 18´ 50´´ = 60,3139°
Ahora se opera como en el ejemplo anterior, para pasar de grados sexagesimales a radianes:

Sustituyendo el valor de 60,3139° en la fórmula (B): R = (60,3139°/360°). 2.π = 1,0527 rad.

Como ven, el estudio de los ángulos es un tema sencillo en el cual los ejercicios se resuelven aplicando aritmética básica. En tal sentido uno de los objetivos que nos proponemos con este tema es que recuerdes operaciones sencillas que incluso se estudian desde el nivel primario y logres observar y comprender en que parte de tu entorno están presentes los ángulos.

TRIGONOMETRÍA.

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es “la medición de los triángulos”. Deriva de los términos griegos τριγωνο trigōno



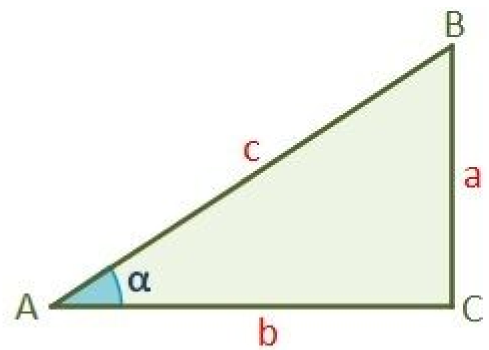
triángulo y μετρον metron medida.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones y funciones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

RAZONES TRIGONOMETRICAS EN UN TRIANGULO RECTANGULO.

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo en C.



Las **razones trigonométricas** de un ángulo α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, la comparación por su cociente de sus tres lados *a*, *b* y *c*.

Sea α uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.

El **seno** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*).

$$sen\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

El **coseno** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

$$\cos\alpha = \frac{cateto\,adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

La **tangente** del **ángulo α** se define como la **razón** entre el cateto opuesto (*a*) y el cateto adyacente (*b*).

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,adyacente} = \frac{a}{b}$$

Luego tenemos las razones trigonométricas reciprocas.

La razón trigonométrica reciproca de la razón seno es la cosecante definida como:

$$csc\,\alpha=\frac{1}{sen\,\alpha}=\frac{c}{a}$$

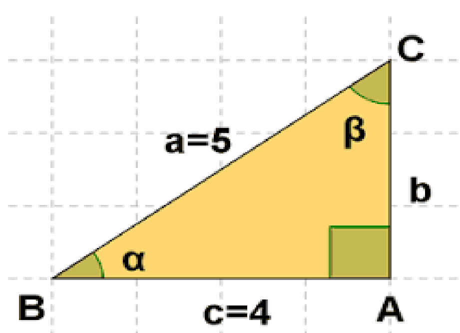
La razón trigonométrica reciproca de la razón coseno es la secante definida como:

$$sec\,\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{c}{b}$$

La razón trigonométrica reciproca de la razón tangente es la cotangente definida como:

$$ctg\,\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{b}{a}$$

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo:



Vamos a determinar las razones trigonométricas con respecto al ángulo α, para ello primero calculamos el lado que falta aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2\rightarrow 5^2=b^2+4^2\rightarrow b^2=5^2-4^2\rightarrow b=\sqrt{5^2-4^2}\rightarrow b=\sqrt{25-16}\rightarrow b=\sqrt{9}=3$$

Luego:

$$sen\,\alpha=\frac{3}{5}\ ,\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\ ,\ tg\,\alpha=\frac{3}{4}\ ,\ csc\,\alpha=\frac{5}{3}\ ,\ sec\,\alpha=\frac{5}{4}\ \text{ y }\ ctg\,\alpha=\frac{4}{3}$$

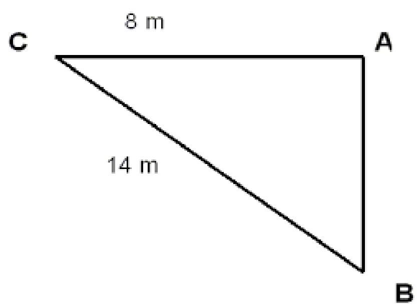
Es importante destacar que no solo se pueden hallar las razones trigonométricas con respecto al ángulo α, sino que también se pueden determinar con respecto al ángulo β, así tenemos:

$$sen\,\beta=\frac{4}{5}\ ,\ \cos\beta=\frac{3}{5}\ ,\ tg\,\beta=\frac{4}{3}\ ,\ csc\,\beta=\frac{5}{4}\ ,\ sec\,\beta=\frac{5}{3}\ \text{ y }\ ctg\,\beta=\frac{3}{4}$$

De lo cual se concluye que:

$sen\,\alpha = \cos\beta$ y $\cos\alpha = sen\,\beta$.

Veamos otro ejemplo; consideremos el triangulo ABC con ángulo recto en A, α ubicado en el vértice C y β ubicado en el vértice B.



Por el teorema de Pitágoras: $14^2 = (AB)^2 + 8^2 \rightarrow (AB)^2 = 14^2 - 8^2 \rightarrow AB = \sqrt{14^2 - 8^2}$

$\rightarrow AB = \sqrt{196 - 64} \rightarrow AB = \sqrt{132} = \sqrt{2^2 .33} = 2\sqrt{33}$

(Recuerde que si la cantidad subradical es un número compuesto, el radical debe simplificarse)

Como el ángulo α está ubicado en el vértice C, tenemos que:

$sen\,\alpha = \frac{2\sqrt{33}}{14} = \frac{\sqrt{33}}{7}$,

$\cos\alpha = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$,

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{33}}{8} = \frac{\sqrt{33}}{4}$,

$csc\,\alpha = \frac{14}{2\sqrt{33}} = \frac{7}{\sqrt{33}} . \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{33}} = \frac{7\sqrt{33}}{33}$,

$$sec\,\alpha=\frac{14}{8}=\frac{7}{4},$$

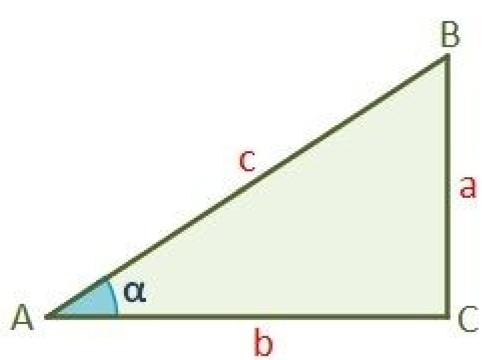
$$ctg\,\alpha=\frac{8}{2\sqrt{33}}=\frac{4}{\sqrt{33}}\cdot\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{33}}=\frac{4\sqrt{33}}{33},$$

Es importante destacar que los resultados de las razones trigonométricas deben simplificarse y racionalizarse si el caso lo amerita.

Se deja como ejercicio determinar las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo β.

En el desarrollo de los dos temas previos hemos estudiado los ángulos haciendo énfasis en su comprensión geométrica y en los sistemas de medición que se utilizan; por otra parte se realizo un estudio general de las razones trigonométricas esenciales. Ahora bien, en esta guía explicaremos como se aplican las razones trigonométricas en situaciones cotidianas y estableceremos leyes generales que afianzan a la trigonometría como una rama de la matemática importante para la comprensión geométrica de nuestro entorno.

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo en C, con $\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $b=4$. Supongamos que, con la información anterior se desea determinar los dos lados y el ángulo que faltan.



Solución:

Sabemos que el ángulo en C mide 90° ya que el problema nos indica que es un ángulo recto; la situación que se presenta es que tenemos un ángulo cuya medición está en grados y otro que está en π-radianes($\alpha=\frac{\pi}{3}$¿, entonces realizando la conversión de este ángulo a grados sexagesimal , se tiene:

π¿°.

$\frac{\pi}{3}$¿.

$$x=\frac{180°.(\frac{\pi}{3})}{\pi}=60°.$$

Ahora podemos decir que $\alpha=60°$; cabe destacar que el proceso anterior también se puede realizar utilizando el factor de conversión explicado en la guía 1 de la primera fase.

Siguiendo con nuestro desarrollo, para calcular el ángulo que falta, el cual está en el vértice B, tenemos:

¿$B+90°+60°=180°$.

Recuerde que en un triangulo cualquiera la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180°, por lo tanto:

¿$B=180°-90°-60°=30°$.

Ahora bien, el lado “c” de nuestro triangulo anterior es su hipotenusa, entonces para calcular este lado utilizaremos la razón trigonométrica que vincula al cateto adyacente al ángulo α con la hipotenusa, la cual es el $cos\alpha$, así tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

Luego:

$\cos 60° = \frac{4}{c}$

$c = \frac{4}{\cos 60°} = 8.$

Cabe destacar que el camino escogido para calcular el valor de “c” no es el único; al utilizar el ángulo en B y el seno del ángulo en B se obtiene el mismo resultado para “c”.

Finalmente para calcular el lado que falta “a” tenemos:

$sen\,\alpha = \frac{a}{c}.$

$sen\,60° = \frac{a}{8}.$

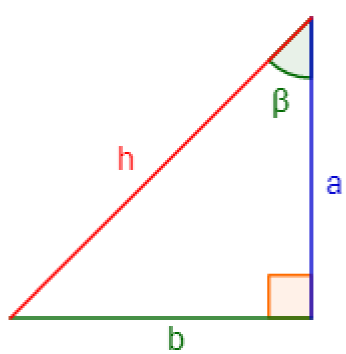
$a = 8.\,sen\,60° = 6.93.$

Razones trigonométricas para ángulos relevantes.

La siguiente tabla lo ayudara a realizar los cálculos cuando se presenten los ángulos que más se utilizan en el desarrollo de los ejercicios.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	-1	∞	1
$\operatorname{cosec}\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	-1	∞

Consideremos el siguiente triangulo, con $\beta=30°$ y h= 15. Determinemos las medidas que faltan.



Solución:

Como tenemos dos de sus ángulos llamaremos ” al angulo que falta, por lo tanto:

$\theta+30°+90°=180° \rightarrow \theta=180°-30°-90° \rightarrow \theta=60°$.

Como el lado “b” es opuesto al ángulo β y además conocemos la hipotenusa, utilizamos la razón $sen\beta$.

$$sen 30° = \frac{b}{15} \rightarrow b = 15.sen 30° \rightarrow b = 15.\frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7.5.$$

Luego, para calcular el lado que falta ”a” tenemos:

$$\cos 30° = \frac{a}{15} \rightarrow a = 15.\cos 30° \rightarrow a = 15.\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{15}{2}\sqrt{3} \approx 12.99.$$

Es importante destacar que hemos utilizado la tabla trigonométrica en el desarrollo del ejercicio. Por otra parte se debe simplificar o racionalizar los radicales cuando lo amerite y luego se efectuara la operación final con la calculadora.

Consideremos la siguiente situación:

Solución:

Para resolver este problema se debe utilizar una razón trigonométrica que vincule al cateto opuesto(h) al ángulo de 25° con el cateto adyacente; en ese orden de ideas la razón trigonométrica que cumple con los requerimientos es la $tg 25°$, por lo tanto:

$$tg 25° = \frac{h}{10m} \rightarrow h = 10m.tg 25° = 4.66m,$$

La altura de la palmera es 4.66 m.

Fíjese que la solución al problema anterior es totalmente sencilla siempre y cuando se tenga claro cual razón trigonométrica se debe utilizar, además se utiliza directamente la calculadora para el resultado por que el ángulo que indica el problema no está en nuestra tabla trigonométrica.

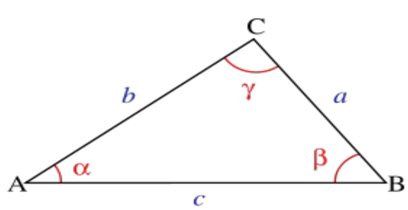
LEY DEL SENO Y DEL COSENO

El descubrimiento de la ley de senos dio gran paso a grandes descubrimientos de la geometría plana, y con ello la solución a muchos problemas que implicaban el cálculo de longitudes y ángulos. Una de las cosas que debemos saber acerca de la ley de senos, es que es aplicable a triángulos **oblicuángulos**, es decir aquellos triángulos los cuales no tienen ningún ángulo recto o de 90°.

También debemos considerar dos puntos importantes, para poder utilizar dicha ley, y consiste en aplicarla solo cuando nos encontramos bajo los siguientes dos casos:

- Cuando los datos conocidos son **dos lados y el ángulo opuesto** a uno de ellos.
- Cuando se tenga **dos ángulos y cualquier lado**.

Consideremos el siguiente triangulo:



Tenemos entonces:

"*En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales*"

Lo cual, en fórmula matemática se escribe como:

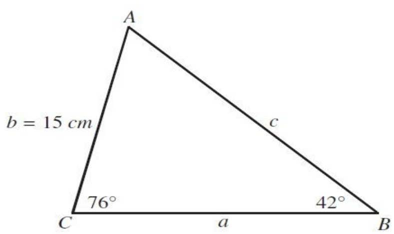
$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

También podemos emplear la misma fórmula, pero recíproca, es decir:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el triángulo ABC, b = 15 cm, <B = 42°, y <C = 76°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.



Si observamos, podemos ver que nuestro triángulo tiene dos ángulos y un solo lado, por lo cual podemos aplicar la ley de senos, sin embargo, podemos realizar un análisis sencillo para hallar el otro ángulo desconocido, tomando en cuenta que; la **suma de los ángulos interiores** de cualquier triángulo deben sumar 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Colocando, los datos que tenemos en nuestro triángulo.

$$\angle A + 42^\circ + 76^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A + 118^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

Por lo que el ángulo en A, es de 62 grados.

$$\angle A = 62^\circ$$

Ahora tenemos que encontrar el valor de las longitudes de a y c, para ello recurriremos a la fórmula:

Educación Media General

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$

Si observamos, nos interesa encontrar el valor del lado a y c, y ya tenemos a nuestra disposición cuanto equivalen los ángulos opuestos a esos lados, por lo cual, se puede tomar la igualdad que desee.

Supongamos que necesita encontrar el lado **“a”** entonces, hacemos:

$$\frac{a}{sen62^{\circ}}=\frac{b}{sen42^{\circ}}$$

Por lo que, sustituyendo procedemos a despejar.

$$a=\frac{b\cdot sen62^{\circ}}{sen42^{\circ}}=19.79cm$$

Listo…! hemos encontrado el valor del lado a.

Ahora encontremos el lado restante **“c”**.

$$\frac{a}{senA}=\frac{c}{senC}$$

$$\frac{19.79cm}{sen62^{\circ}}=\frac{c}{sen76^{\circ}}$$

despejando a “c”

$$c=\frac{(19.79cm)(sen76^{\circ})}{sen62^{\circ}}$$

realizando la operación:

$$c=\frac{(19.79cm)(sen76^{\circ})}{sen62^{\circ}}=21.75cm$$

por lo que el lado restante “c” mide 21.75 cm.

Problema resuelto.

Una de las leyes también importantes en la trigonometría y geometría, necesaria para poder comprender las reglas que implica todo triángulo oblicuángulo (obtusángulo y acutángulo),es la **Ley del Coseno**, también conocida como una generalización del teorema de pitágoras.

Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$

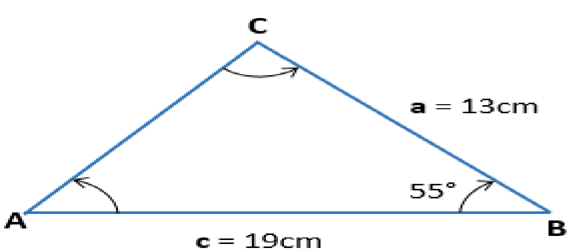
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Hay que tener en cuenta que la relación que nos proporciona ésta ley, puede ser para diversas variables, no casarse con la idea de que los lados tienen que ser ABC, (a, b, c), sino que también pueden tener otras literales. Es por ello muy importante tener en cuenta lo siguiente:

Para encontrar un lado, basta con elevar al cuadrado las variables de los otros dos lados, menos el doble producto de ambas variables, por el coseno del ángulo que es opuesto al lado que deseamos encontrar.

Veamos los siguientes ejemplos:

1) En el siguiente triángulo ABC, a = 13 cm, c = 19cm, <B = 55° , Resuelva el triángulo



Solución:

Para poder resolver el siguiente ejercicio, asumimos que el lado que deseamos encontrar **es el lado b**, puesto que el ángulo opuesto es B, entonces nuestra fórmula queda:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

De esto resulta

$$b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) \cdot \cos(55°)$$

$$b^2 = 169 + 361 - 494(0.5735)$$

Por lo que:

$$b^2 = 246.6532 \rightarrow b = \sqrt{246.6532}$$

$$b = 15.7052cm$$

Ahora tenemos los tres lados de nuestro triángulo, pero nos hace falta conocer los ángulos, para ello, consideramos un ángulo que desee calcular que bien puede ser el ángulo A o el ángulo C.

En este caso, elegiremos el ángulo A, por lo que la ecuación quedará:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Sin embargo, los valores de los lados a, b y c son conocidos, entonces se procede a despejar el coseno de A:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos A$$

Despejando aún más…

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos A$$

Invirtiendo la ecuación

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Listo, ahora es momento de sustituir nuestros valores:

$$\cos A = \frac{13^2 - 15.7052^2 - 19^2}{-2(15.7052)(19)} = 0.7350$$

Ahora aplicando coseno inverso.

$$A = \cos^{-1}(0.7350) = 42.69°$$

Por lo que el ángulo A, es de 42.69 grados.

Es importante indicar que para que aparezca $\cos^{-1}(0.7350)$ en su calculadora científica convencional debe presionar la tecla " SHIFT", después presiona la tecla de "cos" y coloca entre paréntesis la cantidad (en este caso 0.7350). De manera análoga se procede con las demás funciones trigonométricas.

Siguiendo con el desarrollo de nuestro ejercicio; mediante la suma de ángulos internos en un triángulo, aplicamos la propiedad para encontrar el ángulo que falta:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$42.69° + 55° + \angle C = 180°$$

Despejando <C :

$$\angle C = 180° - 42.69° + 55° = 82.31°$$

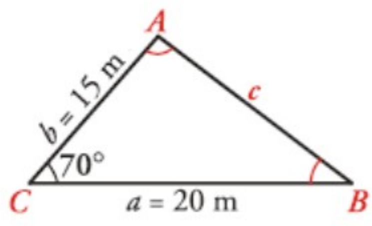
Por lo que nuestro ejercicio está resuelto. Tenemos el triángulo completo

Veamos ahora la solución de un problema que se resuelve aplicando la Ley del Coseno.

Dos de los lados, a y b, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70°. Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos?. Realice un dibujo de la situación.

Solución:

Tenemos la siguiente ilustración de la situación:



Aplicamos la ley del coseno para calcular el lado “c”:

$$c^2=(20\,m)^2+(15\,m)^2-2.(20\,m).(15\,m).\cos(70°).$$

$$\rightarrow c^2=400\,m^2+225\,m^2-600\,m^2.(0.3420)\rightarrow c^2=625\,m^2-205.21\,m^2.$$

$$\rightarrow c=\sqrt{419.79\,m^2}=20.49\,m.$$

Luego necesitamos: 15m+20m+20.49m=55.49m para cercar la finca.

Cabe destacar que también hay múltiples aplicaciones utilizando la ley del seno y se resuelven bajo operaciones parecidas a las explicadas en esta guía.

Actividades de Evaluación

<u>Pongamos en práctica lo aprendido.</u>

1) Pasar de forma simple a forma compleja los siguientes ángulos.(1.5 pts)
   (a) 54,75° (b) 1600´´ (c) 193,5´

2) Pasar de forma compleja a forma simple según se indique.(1pto)
(a) 75° 15´ 40´´ a min (b) 38° 50´ 48´´ a grados

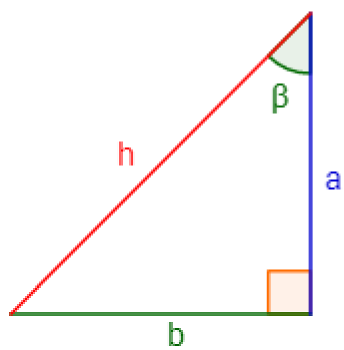
3) Pasar los siguientes ángulos del sistema cíclico al sistema sexagesimal (en grados minutos y segundos). (1pto)
(a) $1{,}5\ \pi$ rad (b) 2,05 rad

4) Pasar los siguientes ángulos del sistema sexagesimal al sistema cíclico.(1.5 pts)
(a) 124,75° (b) 150° 45´ 36´´ (c) 1471,8´

5) Con el uso de un transportador o cualquier otro instrumento (rudimentario o tecnológico) que sirva para medir ángulos, tome las medidas en grados de 3 ángulos que observe en su entorno y luego transforme estas medidas al sistema cíclico.
(**Nota:** indique de que parte de su entorno tomo cada una de las 3 medidas) (1.5 pts)

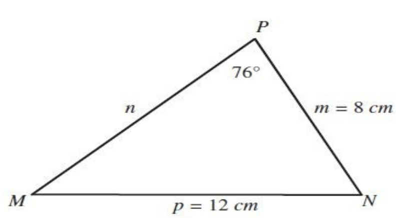
6) A continuación se dan dos imágenes, observe e indique por lo menos dos ángulos en cada imagen y clasifíquelos según su medida.(**Nota:** puede dibujar nuevamente la imagen o editarla para indicar los ángulos que usted observa) (1.5 pts)

7) Considere el triangulo de la siguiente figura con $a=2\sqrt{2}$ y $h=5\sqrt{3}$. Determine y simplifique las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo β. (1.5 pts)



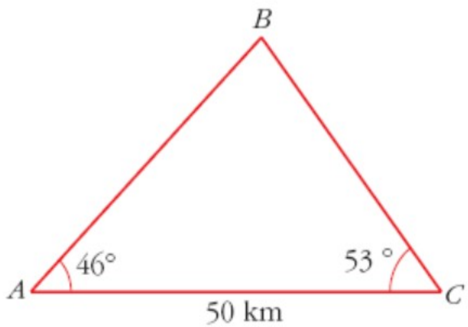
8) Dibuje un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A. Si la hipotenusa es igual a $4\sqrt{3}$ y el cateto adyacente al ángulo α es igual a 3, determine y simplifique las 6 razones trigonométricas con respecto al ángulo α . (1.5pts)

9) Determine las medidas que faltan en el siguiente triangulo(1.5pts):



10) En el triángulo ABC, AB= 12 cm, <B = 40°, y <C = 72°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes. Dibuje el triangulo.(1.5pts)

11) Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos ¿$BAC=46°$ y ¿$BCA=53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco? (1 pto)



12) En un entrenamiento de futbol se coloca el balón en un punto situado a 7 m y 10 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 6m. ¿ Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?. Realice un dibujo de la situación. (1pto).

13) Realizar un video explicando detalladamente la solución de un ejercicio(entre el ejercicio 7 y el ejercico 10).(3pts)

Nota: utilice un tono de voz adecuado, el video debe durar entre 3 y 5 minutos, el ejercicio debe empezar a resolverlo en el momento que inicia el video en pizarra o papel bond

Aspectos a Evaluar.

i) Puntualidad en la realización del trabajo requerido. (1pto)

ii) Resolución de los ejercicios planteados mediante procesos explicados en la guía y realización de vídeo (19ptos)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Canal oficial de cada familia una escuela o por el canal en Youtube.
Matemática de 4to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 4to año (Santillana, cualquier edición)

www.wikipedia.org.

Observación importante: En esta fase, la entrega de las guías se realizaran vía online al correo **marcanom05@gmail.com** y también se estarán recibiendo en las instalaciones de la escuela y del esem en fechas que con antelación se les notificara. Si decide entregar la guía en el edificio Esem, también se puede coordinar para que ese día realice la explicación de uno de los ejercicios indicados y de esta manera puede sustituir el video por la explicación presencial.
Cualquier consulta puede realizarla al **tf: (0412) 942 9171**