Lunes, 11 de abril 2022
Docente: Martín Marcano
5to Año “A y B”

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien.

Tema Generador

Responsabilidad escolar y comunitaria para el ejercicio de la prevención del covid-19.

Referentes Teóricos-Prácticos

Funciones definidas a trozos.

Desarrollo del Tema

Funciones definidas a trozos(función ramificada)

Una **función a trozos** es un tipo de función que necesita dos o más expresiones para poder definirla. Cada expresión corresponde a una parte de la función (o a un trozo de función) y existe solamente para un determinado intervalo de valores de x, como por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x<-1 \\ 1-2x & si \;\; -1\leq x<1 \\ 2x-1 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$$

Valor de la función definida a trozos

Para cualquier valor de x que sea menor que -1, la función quedaría definida por el primer tramo:

$$f(x)=3 \qquad si \;\; x<-1$$

Si queremos calcular el valor de la función para x=-5, que es menor que -1, sustituimos la x por -5 en este tramo. En este caso, como esta parte de la función es constante, cualquier valor de x menor que -1 sería igual a 3 (ya que no hay ninguna x para sustituir):

$$f(-5)=3$$

Para cualquier valor de x que sea mayor o igual que -1 y menor que 1, la función queda definida por el segundo tramo:

$$f(x)=1-2x \;\; si \;\; -1\leq x<1$$

Por ejemplo, si queremos calcular el valor de la función cuando x=0, tendríamos que sustituir la x por 0 en este segundo tramo, ya que 0 pertenece a este conjunto de valores de x:

$$f(0)=1-2.0=1$$

¿Qué tramo tendríamos que utilizar para calcular el valor de la función cuando x=-1? ¿El primero o el segundo?

x=-1 es un **punto crítico**. Los puntos críticos son los puntos donde **la función cambia de tramo.**

El primer tramo está definido para los valores de x menores que -1, no iguales y el segundo tramo para los valores de x mayores **o iguales** a -1, por tanto, para calcular el valor de la función en x=-1, tendríamos que sustituir la x por -1 en el segundo tramo:

$$f(-1)=1-2.(-1)=1+2=3$$

Educación Media General

Para los **puntos críticos**, se elige siempre el tramo donde el intervalo tiene el signo «mayor o igual» o «menor o igual». Si ninguno de los tramos tuviera el signo igual, entonces la función no existe en ese punto.

Para cualquier valor de x que sea mayor o igual que 1, la función queda definida por el tercer tramo:

$$f(x)=2x-1 \quad si \quad x\geq 1$$

Por tanto, si por ejemplo queremos calcular el valor de la función cuando x=3, que es mayor que 1, tendríamos que sustituir la x por 3 en el tercer tramo:

$$f(3)=2.3-1=6-1=5$$

También puedes encontrar los intervalos de las funciones definidas a trozos expresados con esta otra nomenclatura:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \ x \in (-\infty,-1) \\ 1-2x & si \ x \in [-1,1) \\ 2x-1 & si \ x \in [1,\infty) \end{cases}$$

Donde el intervalo que sea cerrado por la izquierda o por la derecha es al que pertenece cada punto crítico.

Cómo representar una función definida a trozos.

Para representar una función definida a trozos debemos representar cada uno de los tramos, teniendo en cuenta los puntos críticos que pertenezcan o no pertenezcan a cada intervalo.

Vamos a ver a representar la función definida a trozos del ejemplo anterior:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \;\; x<-1 \\ 1-2x & si \;\; -1\leq x<1 \\ 2x-1 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$$

Empezamos representando el primer trozo:

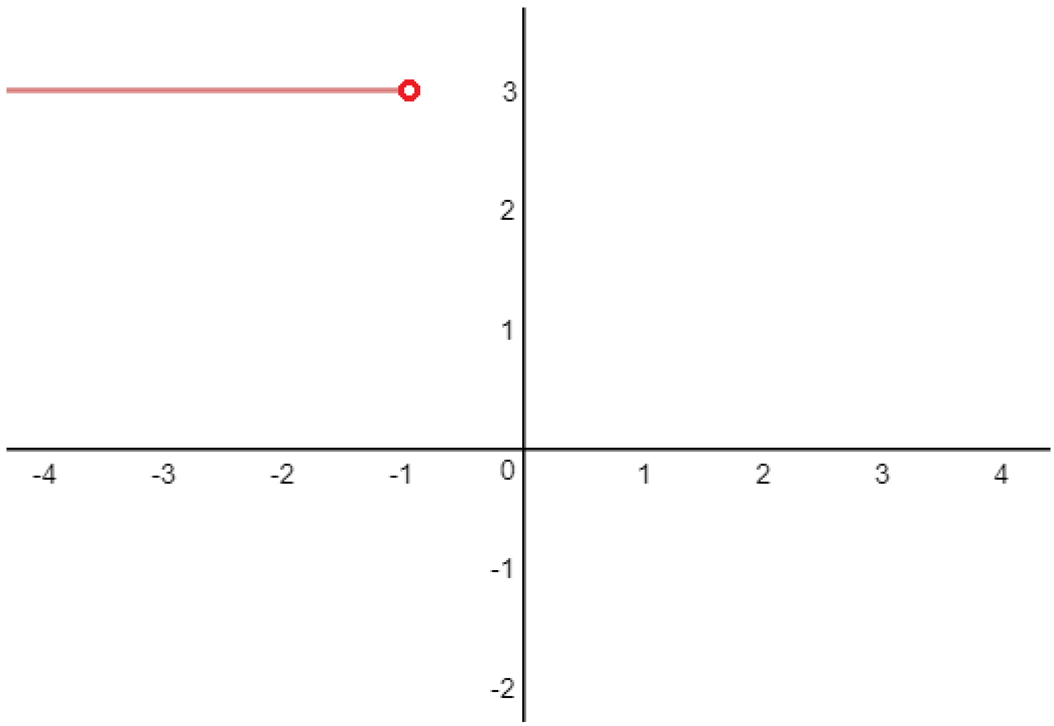
$$f(x)=3 \qquad si \;\; x<-1$$

En este caso es una función constante, que siempre vale 3. Aun así, vamos a darle dos puntos igual que hacemos al representar una recta, para que veas cómo funciona. Los puntos que podemos darle a la x deben ser menores que -1.

Le vamos a dar a x los valores -2 y -1. Aunque x=-1 no pertenece a este intervalo, la recta sí llega en las cercanías de este punto. Por tanto, le damos este valor, pero en la tabla de valores **indicamos que no pertenece**. La tabla queda de la siguiente forma:

	x	y	
	-2	3	$\rightarrow f(-2)=3$
NO	$\boxed{-1}$	$\boxed{3}$	$\rightarrow f(-1)=3$

A la hora de representar este tramo en los ejes de coordenadas, el punto (-1,3), que no pertenece al tramo, lo representamos como un **punto hueco**, lo que quiere decir, que es un punto vacío y la función no existe en ese punto:



Seguimos representando el segundo tramo:

$$f(x)=1-2x \quad si \quad -1 \leq x<1$$

Este tramo se trata de una recta. Para representar una recta solamente necesitamos 2 puntos y esos 2 puntos deben ser mayores o iguales que -1 y menores que 1.

Una vez más, voy a darle a la x los valores -1 y 1 que son los puntos críticos de este intervalo. x=-1 sí pertenece al intervalo pero x=1 no pertenece, por lo que lo dejo indicado en la tabla de valores:

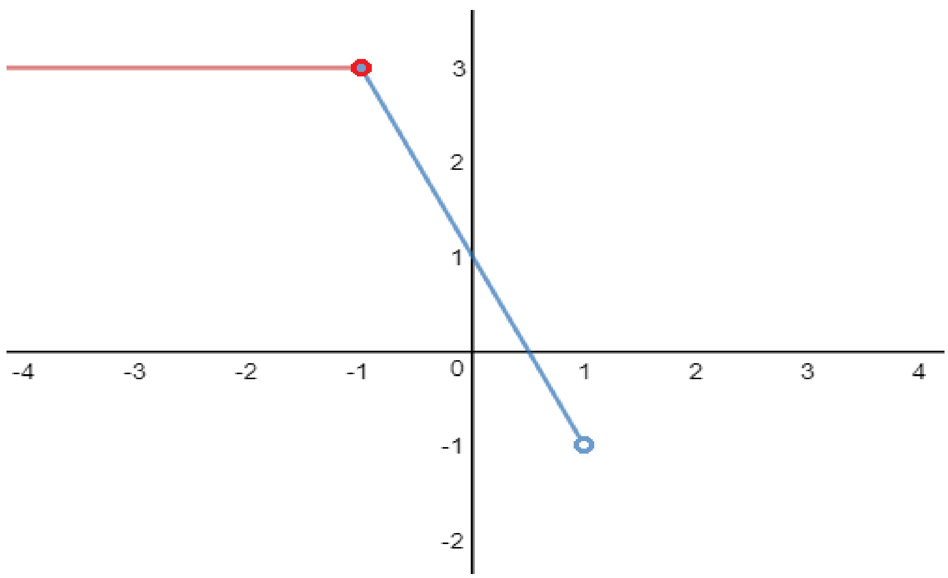
	x	y	
SI	-1	3	$\rightarrow f(-1)=1-2.(-1)=1+2=3$
NO	1	-1	$\rightarrow f(1)=1-2.1=1-2=-1$

Educación Media General

Ministerio del Poder Popular para la Educación

Inclusión y Calidad

A la hora de representar este tramo, como x=-1 sí pertenece al tramo, el punto (-1,3) lo represento como un punto relleno, en este caso de color azul, que es el del segundo tramo. En x=1,el punto (1,-1) queda hueco al no pertenecer al intervalo:



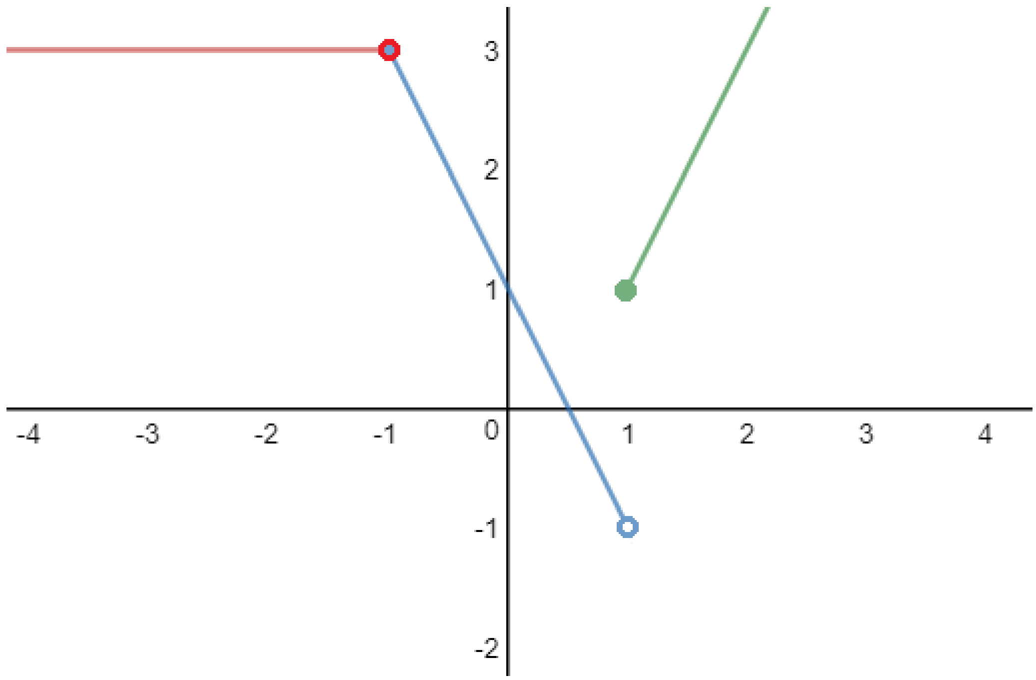
Por último representamos el tercer tramo:

$$f(x)=2x-1 \quad si \quad x\geq 1$$

La tabla de valores queda de la siguiente forma, donde indicamos que esta vez x=1 sí pertenece al intervalo de valores de x:

	x	y	
SI	1	1	$\rightarrow f(1)=2.1-1=2-1=1$
	2	3	$\rightarrow f(2)=2.2-1=4-1=3$

En x=1, el punto (1,1) queda relleno de color verde, ya que es el color del tercer tramo:



Vemos gráficamente que f(1) es igual a 1, que es donde el punto está relleno. Analíticamente puedes comprobar que da el mismo resultado, ya que x=1 pertenece al tercer tramo:

$$f(1)=2.1-1=2-1=1$$

Dominio de una función definida a trozos.

El **dominio de una función definida a trozos** será el resultado de la unión de los dominios de cada tramo. El domino de cada tramo es el conjunto de valores de x para los que existe cada tramo.

En nuestra función anterior, para el primer tramo tenemos:

$$f(x)=3 \;\longrightarrow\; Dom\ \ f=(-\infty,-1)$$

Si no estuviera restringido por la condición de si x<-1, el domino de este tramo sería todo R, pero de esta forma, los valores para los que existe la función son desde menos infinito hasta -1 sin incluirlo.

Para el segundo tramo tenemos:

$$f(x)=1-2x \;\rightarrow\; Dom \;\; f=[-1,1)$$

Para el tercer tramo tenemos:

$$f(x)=2x-1 \;\rightarrow\; Dom \;\; f=[1,\infty)$$

El domino de la función es la unión de los dominios de cada tramo:

$$Dom \;\; f=(-\infty,1) \cup [-1,1) \cup [1,\infty)=$$

Representando la unión anterior en la recta real tenemos:

Toda la recta queda cubierta, por lo que el dominio de la función es todo R.

$$(-\infty,\infty)=R$$

También podemos obtener el dominio a partir de la representación gráfica de la función, observando que la función existe para todos los valores de x.

Rango o conjunto de imágenes de una función definida a trozos.

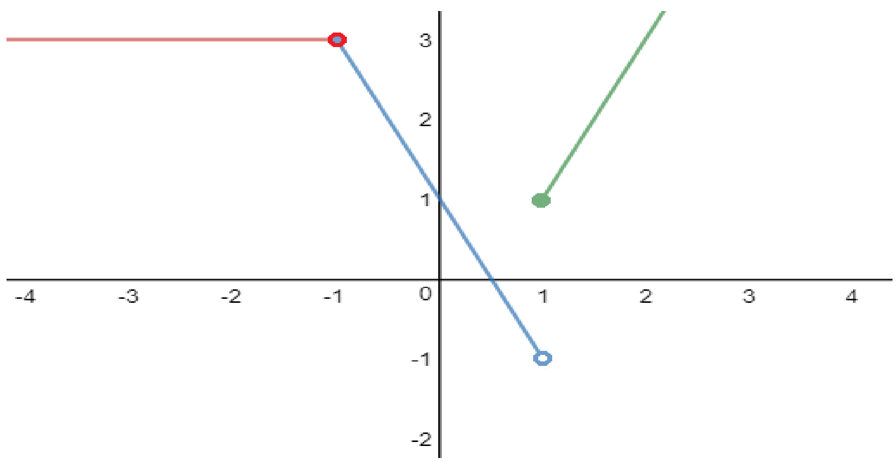
Vamos a ver ahora cómo obtener la imagen de una función definida a trozos.

La forma más fácil es obtener el rango después de representar la función en los ejes de coordenadas.

Consideremos nuevamente:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si\ \ x<-1 \\ 1-2x & si\ \ -1\leq x<1 \\ 2x-1 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Cuya representación en los ejes es:



La imagen del primer tramo es:

$$f(x)=3 \ \longrightarrow \ Im\ \ f=3$$

La imagen del segundo tramo es:

$$f(x)=1-2x \ \longrightarrow \ Im\ \ f=(-1,3]$$

La imagen del tercer tramo es:

$$f(x)=2x-1 \ \longrightarrow \ Im\ \ f=[1,\infty)$$

El rango o conjunto de imágenes es la unión de todas las imágenes:

$$Rg = \{3\} \cup (-1,3] \cup [1,\infty) = (-1,\infty)$$

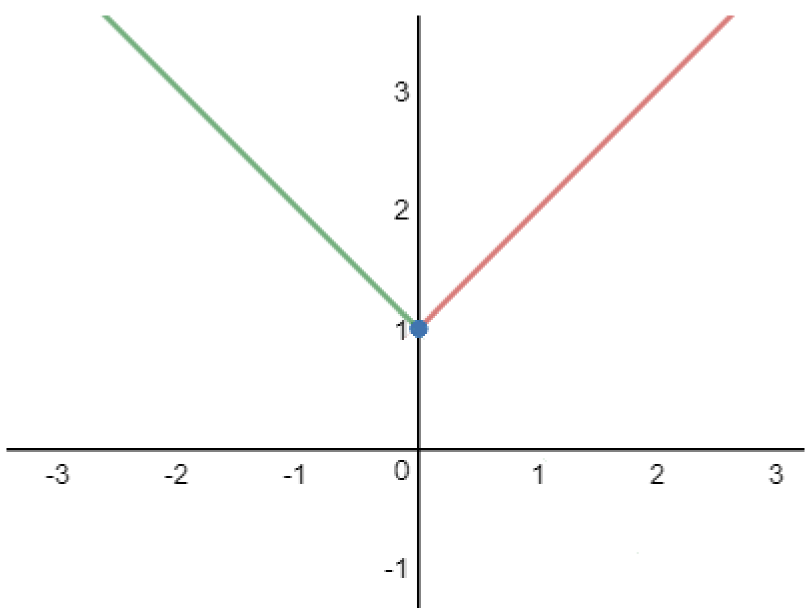
Es decir, el rango de la función es desde y=-1, sin incluirlo, hasta infinito.

Veamos otros ejercicios.

a) Representa la siguiente función definida a trozos y halla su dominio y su imagen:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si \;\; x>0 \\ 1 & si \;\; x=0 \\ -x+1 & si \;\; x<0 \end{cases}$$

Representamos la función y queda:



El dominio del primer tramo es:

$$f(x)=x+1 \;\longrightarrow\; Dom\;\; f=(0,\infty)$$

El dominio del segundo tramo es:

$$f(x)=1 \;\longrightarrow\; Dom\;\; f=0$$

El dominio del tercer tramo es:

$$f(x)=-x+1 \;\longrightarrow\; Dom\;\; f=(-\infty,0)$$

El dominio de la función es la unión de todos los dominios:

$Domf = (0,\infty) \cup \{0\} \cup (-\infty, 0).$

Que es igual a:

$$=(-\infty,\infty)=R$$

El rango de la función la obtenemos a partir de la gráfica y queda:

$Rg = [1,\infty).$

b) Representa la siguiente función definida a trozos y halla su dominio y su imagen:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si\;\; x<-1 \\ x^2+1 & si\;\; x>-1 \end{cases}$$

Empezamos representando la función.

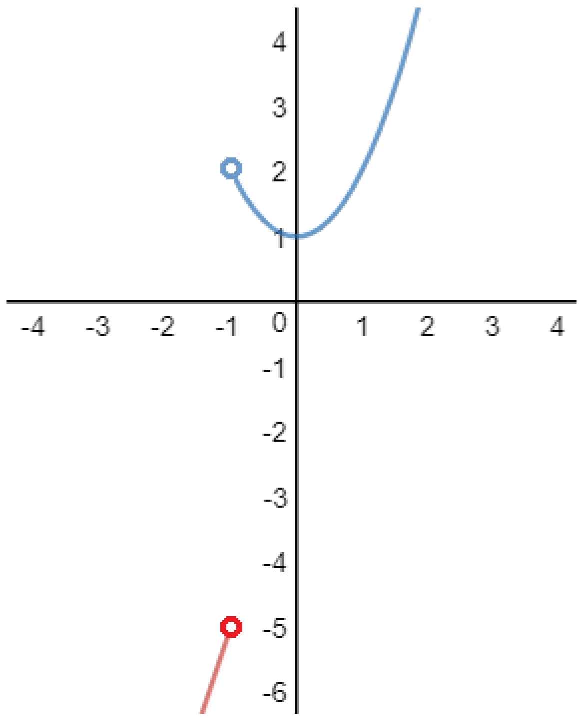
La tabla de valores del primer tramo, indicando el punto que no pertenece al tramo es:

	x	y	
	-2	-8	$\rightarrow f(-2)=3.(-2)-2=-6-2=-8$
NO	$\boxed{-1}$	$\boxed{-5}$	$\rightarrow f(-1)=3.(-1)-2=-3-2=-5$

La tabla de valores del segundo tramo, indicando el punto que no pertenece al tramo es:

	x	y	
	0	1	$\rightarrow f(0)=0^2+1=0+1=1$
NO	$\boxed{-1}$	$\boxed{2}$	$\rightarrow f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$
	1	2	$\rightarrow f(1)=1^2+1=1+1=2$
	2	5	$\rightarrow f(2)=2^2+1=4+1=5$

La función representada queda:



Observando la gráfica, el domino es:

$$Dom\ \ f = R - \{-1\}$$

Y su rango:

$Rg = (-\infty, -5) \cup [1, \infty)$.

Educación Media General

Ministerio del Poder Popular para la Educación

Inclusión y Calidad

Cada Familia Una Escuela

Actividades de Evaluación

Pongamos en práctica lo aprendido.

Determine dominio, rango y grafico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2, & Si\ x \in (-\infty, -3] \\ -x, & Si\ x \in (-3,0) \\ 2, & Si\ x \in [0, \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & Si\ x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & Si\ x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x, & Si\ x < 0 \\ 2, & Si\ 0 < x < 2 \\ x+1, & Si\ x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & Si\ x < -1 \\ 0, & Si\ -1 < x < 1 \\ x^2 - 4x + 4, & Si\ x \geq 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -4, & Si\ x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & Si\ 3 < x < 5 \\ 0, & Si\ x > 5 \end{cases}$

Aspectos a Evaluar.

i) Realización de por lo menos 3 ejercicios planteados en la guía. (3pts)

ii) Evaluación presencial referida al tema de estudio (17 pts)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Matemática de 4to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 4to año (Júpiter Figuera Yibirín, cualquier edición)
Vídeos en YouTube (Funciones definidas a trozos)
www.wikipedia.org.