Educación Media General

Ministerio del Poder Popular para la Educación
Inclusión y Calidad

Lunes, 11 de abril 2022
Docente: Martín Marcano
4to Año “A y B”

Área de formación: Matemática

Tema Indispensable

Preservación de la vida en el planeta, salud y vivir bien.

Tema Generador

Patrimonios naturales y culturales de Venezuela.

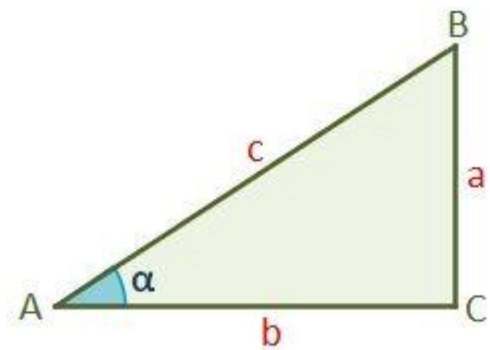
Referentes Teóricos-Prácticos

Aplicaciones Trigonométricas.
Tabla trigonométrica para ángulos relevantes.
Teorema del seno y coseno.

Desarrollo del Tema

En el desarrollo de los dos temas previos hemos estudiado los ángulos haciendo énfasis en su comprensión geométrica y en los sistemas de medición que se utilizan; por otra parte se realizó un estudio general de las razones trigonométricas esenciales. Ahora bien, en esta guía explicaremos como se aplican las razones trigonométricas en situaciones cotidianas y estableceremos leyes generales que afianzan a la trigonometría como una rama de la matemática importante para la comprensión geométrica de nuestro entorno.

Consideremos el siguiente triangulo rectángulo en C, con $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $b = 4$. Supongamos que, con la información anterior se desea determinar los dos lados y el ángulo que faltan.



Solución:

Sabemos que el ángulo en C mide 90° ya que el problema nos indica que es un ángulo recto; la situación que se presenta es que tenemos un ángulo cuya medición está en grados y otro que está en π-radianes($\alpha = \frac{\pi}{3}$), entonces realizando la conversión de este ángulo a grados sexagesimal , se tiene:

π________________$180°.$

$\frac{\pi}{3}$_______________$x.$

$$x = \frac{180°.(\frac{\pi}{3})}{\pi} = 60°.$$

Ahora podemos decir que $\alpha = 60°$; cabe destacar que el proceso anterior también se puede realizar utilizando el factor de conversión explicado en la guía 1 de la primera fase.

Siguiendo con nuestro desarrollo, para calcular el ángulo que falta, el cual está en el vértice B, tenemos:

$$< B + 90° + 60° = 180°.$$

Recuerde que en un triángulo cualquiera la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180°, por lo tanto:

$$< B = 180° - 90° - 60° = 30°.$$

Ahora bien, el lado "c" de nuestro triangulo anterior es su hipotenusa, entonces para calcular este lado utilizaremos la razón trigonométrica que vincula al cateto adyacente al ángulo α con la hipotenusa, la cual es el $cos\alpha$, así tenemos:

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Luego:

$\cos 60° = \frac{4}{c}$

$c = \frac{4}{\cos 60°} = 8.$

Cabe destacar que, el camino escogido para calcular el valor de "c" no es el único; al utilizar el ángulo en B y el seno del ángulo en B se obtiene el mismo resultado para "c".

Finalmente, para calcular el lado que falta "a" tenemos:

$sen\ \alpha = \frac{a}{c}$.

$sen\ 60° = \frac{a}{8}$.

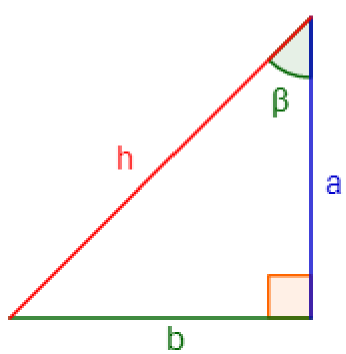
$a = 8. sen\ 60° = 6.93.$

Razones trigonométricas para ángulos relevantes.

La siguiente tabla lo ayudara a realizar los cálculos cuando se presenten los ángulos que más se utilizan en el desarrollo de los ejercicios.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	-1	∞	1
$\operatorname{cosec}\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	-1	∞

Consideremos el siguiente triangulo, con $\beta = 30°$ y h= 15. Determinemos las medidas que faltan.



Solución:

Como tenemos dos de sus ángulos llamaremos "θ" al angulo que falta, por lo tanto:

$\theta + 30° + 90° = 180° \rightarrow \theta = 180° - 30° - 90° \rightarrow \theta = 60°.$

Como el lado "b" es opuesto al ángulo β y además conocemos la hipotenusa, utilizamos la razón $sen\,\beta$.

$$sen\ 30° = \frac{b}{15} \to b = 15.sen\ 30° \to b = 15.\frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7.5.$$

Luego, para calcular el lado que falta "a" tenemos:

$$\cos 30° = \frac{a}{15} \to a = 15.\cos 30° \to a = 15.\frac{\sqrt{3}}{2} \to a = \frac{15}{2}\sqrt{3} \approx 12.99.$$

Es importante destacar que hemos utilizado la tabla trigonométrica en el desarrollo del ejercicio. Por otra parte, se debe simplificar o racionalizar los radicales cuando lo amerite y luego se efectuará la operación final con la calculadora.

Consideremos la siguiente situación:

Solución:

Para resolver este problema se debe utilizar una razón trigonométrica que vincule al cateto opuesto(h) al ángulo de 25° con el cateto adyacente; en ese orden de ideas la razón trigonométrica que cumple con los requerimientos es la $tg\ 25°$, por lo tanto:

$$tg\ 25° = \frac{h}{10m} \to h = 10m.tg\ 25° = 4.66m,$$

La altura de la palmera es 4.66 m.

Fíjese que la solución al problema anterior es totalmente sencilla siempre y cuando se tenga claro cuál razón trigonométrica se debe utilizar, además se utiliza directamente la calculadora para el resultado por que el ángulo que indica el problema no está en nuestra tabla trigonométrica.

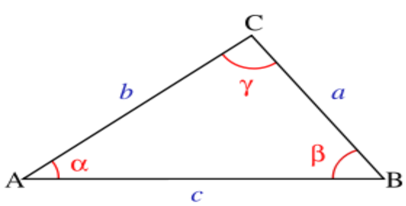
LEY DEL SENO Y DEL COSENO

El descubrimiento de la ley de senos dio gran paso a grandes descubrimientos de la geometría plana, y con ello la solución a muchos problemas que implicaban el cálculo de longitudes y ángulos. Una de las cosas que debemos saber acerca de la ley de senos, es que es aplicable a triángulos **oblicuángulos**, es decir aquellos triángulos los cuales no tienen ningún ángulo recto o de 90°.

También debemos considerar dos puntos importantes, para poder utilizar dicha ley, y consiste en aplicarla solo cuando nos encontramos bajo los siguientes dos casos:

- Cuando los datos conocidos son **dos lados y el ángulo opuesto** a uno de ellos.
- Cuando se tenga **dos ángulos y cualquier lado**.

Consideremos el siguiente triangulo:



Tenemos entonces:

“En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales”

Lo cual, en fórmula matemática se escribe como:

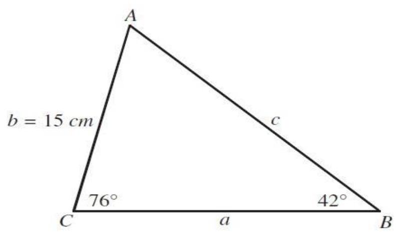
$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen B} = \frac{c}{sen C}$$

También podemos emplear la misma fórmula, pero recíproca, es decir:

$$\frac{sen A}{a} = \frac{sen B}{b} = \frac{sen C}{c}$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

En el triángulo ABC, b = 15 cm, <B = 42°, y <C = 76°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.



Si observamos, podemos ver que nuestro triángulo tiene dos ángulos y un solo lado, por lo cual podemos aplicar la ley de senos, sin embargo, podemos realizar un análisis sencillo para hallar el otro ángulo desconocido, tomando en cuenta que; la **suma de los ángulos interiores** de cualquier triángulo deben sumar 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Colocando, los datos que tenemos en nuestro triángulo.

$$\angle A + 42^\circ + 76^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A + 118^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

Por lo que el ángulo en A, es de 62 grados.

$$\angle A = 62^\circ$$

Ahora tenemos que encontrar el valor de las longitudes de a y c, para ello recurriremos a la fórmula:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Si observamos, nos interesa encontrar el valor del lado a y c, y ya tenemos a nuestra disposición cuanto equivalen los ángulos opuestos a esos lados, por lo cual, se puede tomar la igualdad que desee.

Supongamos que necesita encontrar el lado **"a"** entonces, hacemos:

$$\frac{a}{sen62°} = \frac{b}{sen42°}$$

Por lo que, sustituyendo procedemos a despejar.

$$a = \frac{b \cdot sen62°}{sen42°} = 19.79cm$$

Listo…! hemos encontrado el valor del lado a.

Ahora encontremos el lado restante **"c"**.

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{19.79cm}{sen62°} = \frac{c}{sen76°}$$

despejando a "c"

$$c = \frac{(19.79cm)(sen76°)}{sen62°}$$

realizando la operación:

$$c = \frac{(19.79cm)(sen76°)}{sen62°} = 21.75cm$$

por lo que el lado restante "c" mide 21.75 cm.

Problema resuelto.

Una de las leyes también importantes en la trigonometría y geometría, necesaria para poder comprender las reglas que implica todo triángulo oblicuángulo (obtusángulo y acutángulo),es la **Ley del Coseno**, también conocida como una generalización del teorema de Pitágoras.

Dado un triángulo ABC cualquiera, siendo α, β, γ, los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$

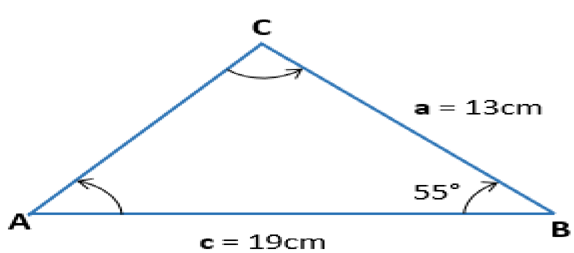
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Hay que tener en cuenta que la relación que nos proporciona ésta ley, puede ser para diversas variables, no casarse con la idea de que los lados tienen que ser ABC, (a, b, c), sino que también pueden tener otras literales. Es por ello muy importante tener en cuenta lo siguiente:

Para encontrar un lado, basta con elevar al cuadrado las variables de los otros dos lados, menos el doble producto de ambas variables, por el coseno del ángulo que es opuesto al lado que deseamos encontrar.

Veamos los siguientes ejemplos:

1) En el siguiente triángulo ABC, a = 13 cm, c = 19cm, <B = 55° , Resuelva el triángulo



Solución:

Para poder resolver el siguiente ejercicio, asumimos que el lado que deseamos encontrar **es el lado b**, puesto que el ángulo opuesto es B, entonces nuestra fórmula queda:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

De esto resulta

$$b^2 = 13^2 + 19^2 - 2(13)(19) \cdot \cos(55°)$$

$$b^2 = 169 + 361 - 494(0.5735)$$

Por lo que:

$$b^2 = 246.6532 \rightarrow b = \sqrt{246.6532}$$

$$b = 15.7052cm$$

Ahora tenemos los tres lados de nuestro triángulo, pero nos hace falta conocer los ángulos, para ello, consideramos un ángulo que desee calcular que bien puede ser el ángulo A o el ángulo C.

En este caso, elegiremos el ángulo A, por lo que la ecuación quedará:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Sin embargo, los valores de los lados a, b y c son conocidos, entonces se procede a despejar el coseno de A:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos A$$

Despejando aún más…

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos A$$

Invirtiendo la ecuación

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Listo, ahora es momento de sustituir nuestros valores:

$$\cos A = \frac{13^2 - 15.7052^2 - 19^2}{-2(15.7052)(19)} = 0.7350$$

Ahora aplicando coseno inverso.

$$A = \cos^{-1}(0.7350) = 42.69°$$

Por lo que el ángulo A, es de 42.69 grados.

Es importante indicar que, para que aparezca $cos^{-1}(0.7350)$ en su calculadora científica convencional debe presionar la tecla " SHIFT", después presiona la tecla de "cos" y coloca entre paréntesis la cantidad (en este caso 0.7350). De manera análoga se procede con las demás funciones trigonométricas.

Siguiendo con el desarrollo de nuestro ejercicio; mediante la suma de ángulos internos en un triángulo, aplicamos la propiedad para encontrar el ángulo que falta:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

$$42.69° + 55° + \angle C = 180°$$

Despejando <C :

$$\angle C = 180° - 42.69° + 55° = 82.31°$$

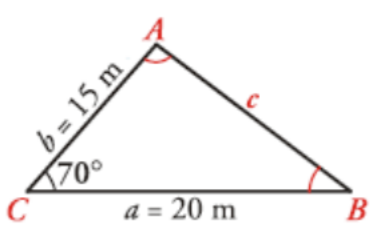
Por lo que nuestro ejercicio está resuelto. Tenemos el triángulo completo

Veamos ahora la solución de un problema que se resuelve aplicando la Ley del Coseno.

Dos de los lados, a y b, de una finca de forma triangular miden 20 m y 15 m, respectivamente. El ángulo comprendido entre estos dos lados es de 70°. Si deseáramos vallar la finca, ¿cuántos metros de valla necesitaríamos? Realice un dibujo de la situación.

Solución:

Tenemos la siguiente ilustración de la situación:



Aplicamos la ley del coseno para calcular el lado "c":

$$c^2 = (20m)^2 + (15m)^2 - 2.(20m).(15m).\cos(70°).$$

$$\rightarrow c^2 = 400m^2 + 225m^2 - 600m^2.(0.3420) \rightarrow c^2 = 625m^2 - 205.21m^2.$$

$$\rightarrow c = \sqrt{419.79m^2} = 20.49\ m.$$

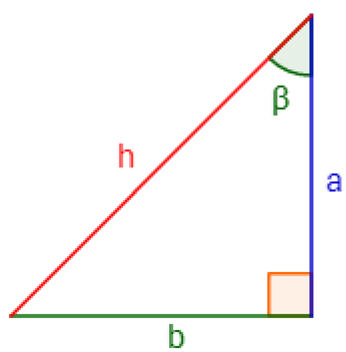
Luego necesitamos: 15m+20m+20.49m=55.49m para cercar la finca.

Cabe destacar que también hay múltiples aplicaciones utilizando la ley del seno y se resuelven bajo operaciones parecidas a las explicadas en esta guía.

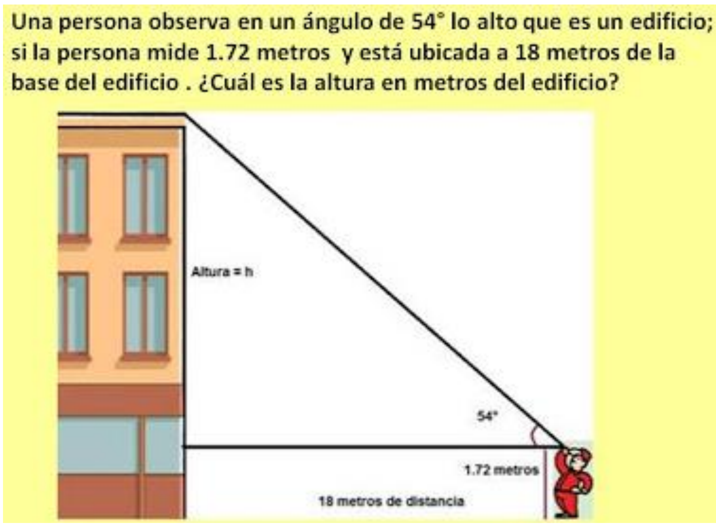
Actividades de Evaluación

<u>Pongamos en práctica lo aprendido.</u>

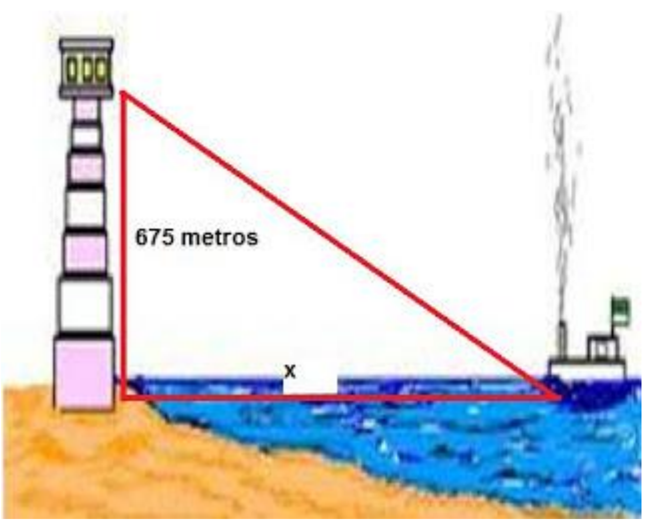
1) Considere el triángulo de la siguiente figura con $a = 12$ y $\beta = \frac{\pi}{4}$. Determine las medidas que faltan del triángulo.



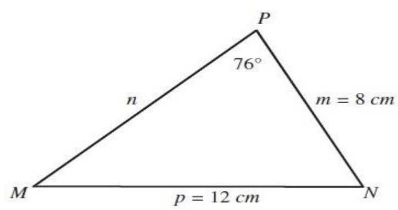
2) Dibuje un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A. Si la hipotenusa es igual a $5\sqrt{2}$ y el ángulo α que está ubicado en el vértice C es igual a 60°. Encuentre las medidas que faltan.
3) Resuelva los siguientes problemas:

a) 

b) Un faro está ubicado sobre la playa. El faro tiene una altura de 675 metros. Desde lo alto del faro y en un ángulo de depresión de 76° se divisa una embarcación. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra la embarcación?

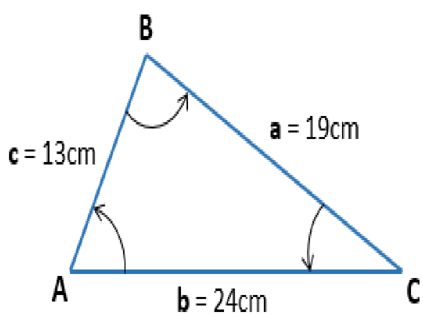


4) Determine las medidas que faltan en el siguiente triangulo:

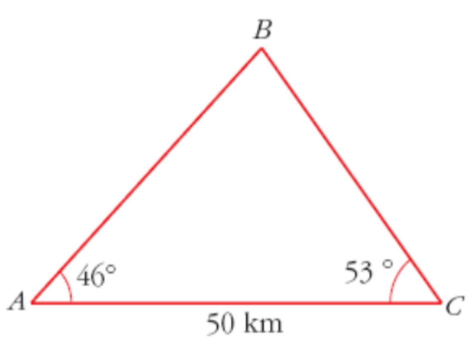


5) En el triángulo ABC, AB= 15 cm, <B = 42°, y <C = 76°. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes. Dibuje el triángulo.

6) Calcula los elementos que faltan de un triángulo oblicuángulo si se sabe que a = 19 cm, b = 24 cm y c = 13 cm.



7) Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos $< BAC = 46°$ y $< BCA = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



8) En un entrenamiento de futbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?. Realice un dibujo de la situación.

Aspectos a Evaluar.

i) Realización de por lo menos 5 ejercicios planteados en la guía .(3pts)

ii) Evaluación presencial referida al tema de estudio (17 pts)

Orientaciones Generales

Puedes **COMPLEMENTAR** la información de la guía utilizando:
Matemática de 4to año (Colección Bicentenario)
Matemática de 4to año (Santillana, cualquier edición)
www.wikipedia.org.