Formale Spezifikation und Verifikation

Ulrich Schöpp

Sommersemester 2016

Was ist Spezifikation?

Beschreibung eines Teils des gewünschten Systemverhaltens.

- QuickSort berechnet sortierte Permutation.
- Iterator bietet alle Elemente der Menge in einer beliebigen Reihenfolge an.
- Haben zwei Objekte den gleichen hashcode(), so sind sie gleich bzgl. equals().
- Die vom Roboterarm beschriebene Trajektorie muss innerhalb der erlaubten Toleranz mit der im Programm vorgegebenen übereinstimmen. Die Grenzgeschwindigkeiten und -beschleunigungen dürfen nicht überschritten werden.
- Die Handy-Anwendung darf nicht mehr SMS verschicken als zuvor autorisiert.

Nicht: Zweck des Systems (“Ihre Software soll in der Buchhaltung 10% Personal einsparen.”)

Was ist Verifikation?

Nachweis, dass System eine gegebene Spezifikation erfüllt.

- Durch Tests (“unvollständig”)
- Durch informelle Argumentation
- Durch systematische Tests
- Durch rigorosen Beweis
- Durch automatisches Verifikationswerkzeug
- Durch formalisierten Beweis

Was heißt “formal”?

Mit Mitteln der Logik ausgedrückt.

- Bedeutung einer formalen Spezifikation ist exakt festgelegt (könnte aber möglicherweise das Gewünschte nicht erfassen)
- Eine formale Verifikation liefert die Gültigkeit der zugehörigen Spezifikation mit 100%-iger Sicherheit, allerdings nur für das zugrundegelegte formale Modell des Systems. (Extrembeispiele: Kurzschluss, Überlastung, Compilerfehler)
- Formale Spezifikation und Verifikation kann die Systementwicklung sinnvoll unterstützen, ist aber kein Allheilmittel.

Inhalt

I Aussagenlogik: Wdh. Syntax, Semantik, Reduktion auf SAT, SAT-Solver, Anwendung auf Modellierung, BDDs.

II Temporallogik und Model Checking: Temporallogik CTL, Syntax und Semantik, Model Checking Algorithmen, Temporallogik LTL und Büchi-Automaten, das Werkzeug SMV.

III Programmanalyse und Typsysteme: Operationelle Semantik, Datenflussanalyse, Typsysteme.

IV Programmlogik: Hoare-Logik, JML.

Organisatorisches, Literatur

Vorlesungs- und Klausurtermine, siehe Homepage der Veranstaltung.

Literatur

- Huth, Ryan: Logic in Computer Science.
- Clarke, Grumberg, Peled: Model checking.
- Nielson, Nielson, Hankin: Program analysis.
- Als Wdh. der Logik: Skripten von Till Tantau, Martin Lange, Martin Hofmann.

Das Folienskript sollte als Unterlage genügen; ersetzt aber nicht den Besuch der Vorlesung und Übungen.

Kapitel I

Aussagenlogik

Inhalt Kapitel I

- Überblick über die Vorlesung
- Motivation
- Syntax und Semantik der Aussagenlogik
- Grundbegriffe
  - Mengennotation und indizierte Variablen
- Normalformen
- SAT-Solver
- Anwendungen
  - Sudoku
  - Schaltkreisverifikation
  - Verifikation nebenläufiger Systeme
  - Peterson Algorithmus
- BDDs (binäre Entscheidungsdiagramme)
  - Grundlegende Definitionen
  - Logische Operationen auf BDDs
  - Implementierung von BDDs

Protokollchef

- Der Botschafter bittet Sie eine Einladungsliste für den Ball der Botschaft zusammenzustellen.
- Sie sollen Peru einladen oder Katar nicht einladen.
- Der Vizebotschafter möchte, dass Sie Katar, Rumänien, oder beide einladen.
- Aufgrund eines aktuellen Vorfalls können Sie nicht Rumänien und Peru zusammen einladen.

Wie stellen Sie die Einladungsliste zusammen?

Modellierung in Aussagenlogik

- Peru oder nicht Katar: $P \vee \neg K$
- Katar oder Rumänien: $K \vee R$
- Nicht Rumänien und Peru zusammen: $\neg(R \wedge P)$

Man muss die *aussagenlogischen Variablen* P, K, R so mit Wahrheitswerten *true*, *false* belegen, dass alle drei *Formeln* wahr werden. Ist das möglich, so ist die Formelmenge *erfüllbar*.

Die Formelmenge $\{P \vee \neg K, K \vee R, \neg(R \wedge P)\}$ ist erfüllbar.
Eine *erfüllende Belegung* ist $P = \mathit{true}, K = \mathit{true}, R = \mathit{false}$.
Alternative: $P = \mathit{false}, R = \mathit{true}, K = \mathit{false}$.

Syntax der Aussagenlogik

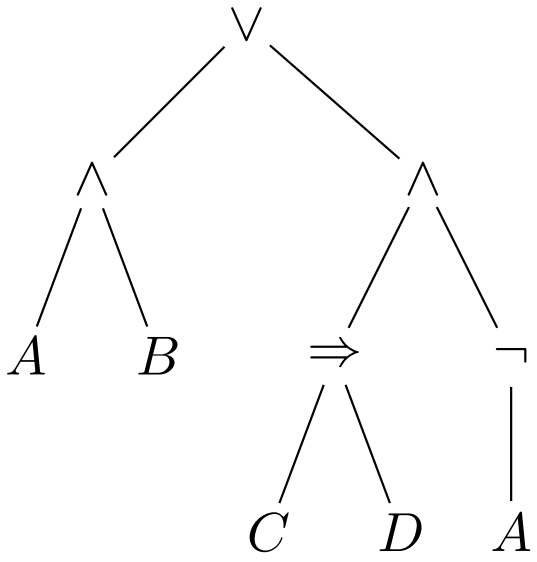
Sei eine Menge $\mathcal{A}$ von Aussagenvariablen $A, B, C, D \ldots$ gegeben.
Die *aussagenlogischen Formeln* über $\mathcal{A}$ sind durch folgende BNF Grammatik definiert.

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{F} & ::= & \mathcal{A} & \\
& | & \neg\mathcal{F} & \text{(Negation, Verneinung)} \\
& | & \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} & \text{(Konjunktion, logisches Und)} \\
& | & \mathcal{F} \vee \mathcal{F} & \text{(Disjunktion, logisches Oder)} \\
& | & \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} & \text{(Implikation, Wenn-Dann-Beziehung)} \\
& | & \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} & \text{(Äquivalenz, Genau–Dann-Wenn-Beziehung, “iff”)} \\
& | & \top & \text{Verum, wahre Formel} \\
& | & \bot & \text{Falsum, falsche Formel}
\end{array}
$$

Die Symbole $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ heißen Junktoren.

Syntaxbäume

Formal ist eine Formel ein Syntaxbaum:



Der Baum entspricht $(A \wedge B) \vee ((C \Rightarrow D) \wedge (\neg A))$.
Manche Klammern darf man weglassen, da nach Konvention $\neg$ am stärksten bindet und dann $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
Gleiche Junktoren werden von rechts geklammert, also $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ ist $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Semantik der Aussagenlogik

- Eine Formel der Form $\phi \wedge \psi$ ist wahr, wenn ϕ und ψ beide wahr sind. Ist entweder ϕ oder ψ falsch, so ist $\phi \wedge \psi$ falsch.
- Eine Formel der Form $\phi \vee \psi$ ist wahr, wenn ϕ wahr ist oder wenn ψ wahr ist. Nur wenn ϕ und ψ beide falsch sind, ist die Formel $\phi \vee \psi$ falsch.
- $\neg\phi$ ist wahr, wenn ϕ falsch ist. Ist ϕ wahr, so ist $\neg\phi$ falsch.
- $\phi \Rightarrow \psi$ ist wahr, wenn entweder ϕ falsch ist, oder aber ϕ wahr ist und ψ dann auch wahr ist. Nur wenn ϕ wahr ist und zugleich ψ falsch ist, ist $\phi \Rightarrow \psi$ falsch.
- Eine Formel der Form $\phi \Leftrightarrow \psi$ ist wahr, wenn ϕ und ψ denselben Wahrheitsgehalt haben, also entweder beide wahr, oder beide falsch sind.
- Die Formel $\top$ ist wahr, die Formel $\bot$ ist nicht wahr; beides unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Variablen.

Formale Semantik

Eine *Belegung* ist eine Funktion, die aussagenlogischen Variablen einen Wahrheitswert zuweist.
Einer Formel ϕ wird für jede Belegung η ein Wahrheitswert $[\![\phi]\!]\eta$ zugeordnet.

$$[\![A]\!]\eta = \eta(A) \qquad [\![\neg\phi]\!]\eta = ![\![\phi]\!]\eta$$
$$[\![\top]\!]\eta = \mathit{true} \qquad [\![\bot]\!]\eta = \mathit{false}$$
$$[\![\phi \wedge \psi]\!]\eta = [\![\phi]\!]\eta \,\&\, [\![\psi]\!]\eta \qquad [\![\phi \vee \psi]\!]\eta = [\![\phi]\!]\eta \;||\; [\![\psi]\!]\eta$$
$$[\![\phi \Rightarrow \psi]\!]\eta = ![\![\phi]\!]\eta \;||\; [\![\psi]\!]\eta \qquad [\![\phi \Leftrightarrow \psi]\!]\eta = ([\![\phi]\!]\eta = [\![\psi]\!]\eta)$$

wobei !, $\&$ und $||$ durch folgende Wahrheitstafeln gegeben sind.

$\&$	*false*	*true*
false	*false*	*false*
true	*false*	*true*

$\|\|$	*false*	*true*
false	*false*	*true*
true	*true*	*true*

!	
false	*true*
true	*false*

Allgemeingültigkeit

Definition

Eine Formel ϕ ist *allgemeingültig*, wenn sie unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Variablen stets wahr ist. Formal also, wenn für alle Belegungen η gilt $[\![\phi]\!]\eta = \mathit{true}$.

Beispiele für allgemeingültige Formeln

- $A \vee \neg A$
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $\neg\neg A \Rightarrow A$
- $A \wedge B \vee A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

Erfüllbare Formeln

Erfüllbarkeit

Eine Formel ϕ ist *erfüllbar* (satisfiable), wenn es eine Belegung ihrer Variablen gibt, die sie erfüllt (wahr macht). Formal heißt das, dass eine Belegung η existiert, derart, dass $[\![\phi]\!]\eta = \mathit{true}$.

Unerfüllbarkeit

Eine Formel ϕ ist *unerfüllbar* (unsatisfiable), wenn sie nicht erfüllbar ist.

Beispiele erfüllbarer Formeln

- A
- $A \wedge B$
- $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

Äquivalenz

Äquivalenz

Zwei Formeln ϕ und ψ sind *äquivalent*, wenn für alle Belegungen η gilt: $[\![\phi]\!]\eta = [\![\psi]\!]\eta$

Beispiele äquivalenter Formeln

- $\phi \vee \psi$ ist äquivalent zu $\psi \vee \phi$
- $\phi \Rightarrow \psi \Rightarrow \rho$ ist äquivalent zu $\neg(\phi \wedge \psi) \vee \rho$

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zwei Formeln ϕ und ψ sind *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn gilt: ϕ erfüllbar gdw. ψ erfüllbar.

Beispiele erfüllbarkeitsäquivalenter Formeln

- $A \vee B$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $\top$
- $\phi \vee \psi$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $(\neg A \vee \phi) \wedge (A \vee \psi)$

Zusammenhänge

Satz

- ϕ ist allgemeingültig, gdw. $\neg\phi$ unerfüllbar ist.
- ϕ ist allgemeingültig, gdw. ϕ äquivalent zu $\top$ ist.
- ϕ ist erfüllbar, gdw. ϕ erfüllbarkeitsäquivalent zu $\top$ ist.

Beweis der ersten Aussage (Rest Übung):
ϕ ist allgemeingültig
gdw. $[\![\phi]\!]\eta = \mathit{true}$ für jede Belegung η
gdw. $[\![\neg\phi]\!]\eta = \mathit{false}$ für jede Belegung η
gdw. Es gibt keine Belegung η mit $[\![\neg\phi]\!]\eta = \mathit{true}$
gdw. $\neg\phi$ ist unerfüllbar

Mengennotation

Abkürzung $\bigwedge_{i \in I} \phi_i = \bigwedge \{\phi_i \mid i \in I\} = \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_n}$, wenn $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$.

Analog $\bigvee_{i \in I} \phi_i$.

Leere Konjunktion: $\bigwedge \varnothing = \top$.

Leere Disjunktion: $\bigvee \varnothing = \bot$.

Beispiel Sudoku

Für alle $i, j \in \{0, \ldots, 8\}$ und $k \in \{1, \ldots, 9\}$ führen wir eine Variable x_{ijk} ein. Bedeutung von x_{ijk}: In Zeile i, Spalte j steht die Zahl k.

Folgende Formeln modellieren die Sudoku Spielregeln.

- $\bigwedge_i \bigwedge_j \bigvee_k x_{ijk}$ (alle Felder sind ausgefüllt).
- $\bigwedge_i \bigwedge_j \bigwedge_{k \neq k'} \neg(x_{ijk} \wedge x_{ijk'})$ (nur eine Zahl pro Feld).
- $\bigwedge_i \bigwedge_{j \neq j'} \bigwedge_k \neg(x_{ijk} \wedge x_{ij'k})$ (nicht dieselbe Zahl zweimal in einer Zeile)
- $\bigwedge_{i \neq i'} \bigwedge_j \bigwedge_k \neg(x_{ijk} \wedge x_{i'jk})$ (nicht dieselbe Zahl zweimal in einer Spalte)
- $\bigwedge_{z \in \{0,1,2\}} \bigwedge_{w \in \{0,1,2\}} \bigwedge_k \bigwedge_{u,u' \in \{0,1,2\}} \bigwedge_{v,v' \in \{0,1,2\}}$ *if* $u \neq u' \mid\mid v \neq v'$ *then* $\neg(x_{3z+u,3w+v,k} \wedge x_{3z+u',3w+v',k})$ *else* $\top$ (nicht dieselbe Zahl zweimal in einer 3x3 Box)

Lösung eines Sudoku

Gibt man zu den so formulierten Spielregeln die schon besetzten Felder dazu (per $\wedge$), so entsprechen die erfüllenden Belegungen gerade den Lösungen.
Beispiel: $\bigwedge_{(i,j,k)\in I} x_{ijk}$ wobei

$$
\begin{aligned}
I = \{ \quad & (0,0,6),(0,4,1),(0,5,7),(0,6,5),\\
& (1,1,8),(1,2,1),(1,3,2),(1,7,7),\\
& (2,5,5),\\
& (3,1,2),(3,2,9),(3,3,4),(3,8,1),\\
& (4,1,5),(4,2,4),(4,4,2),(4,7,3),\\
& (5,2,6),(5,4,7),(5,5,8),(5,7,5),(5,8,4),\\
& (6,5,9),(6,6,3),(6,8,7),\\
& (7,2,3),(7,3,8),(7,6,4),\\
& (8,2,5),(8,7,9) \}
\end{aligned}
$$

Aus der “Zeit” vom 22.10.2009 (“schwer”).

Literale und Maxterme

Literal

Ein *Literal* ist eine negierte oder nichtnegierte Variable. Ist ℓ ein Literal, so definiert man $\neg\ell$ durch $\neg(A) = \neg A$ und $\neg(\neg A) = A$.

Minterm, Und-Block

Eine Konjunktion (Ver-undung) von Literalen heißt *Minterm* oder *Und-Block*.

Maxterm, Klausel

Eine Disjunktion (Ver-oderung) von Literalen heißt *Maxterm* oder *Klausel* oder *Oder-Block*.

Konjunktive Normalform, Disjunktive Normalform

Konjunktive Normalform, KNF

Eine Konjunktion von Klauseln (Oder-Blöcken) heißt *Konjunktive Normalform* (KNF).

Disjunktive Normalform, DNF

Eine Disjunktion von Mintermen (Und-Blöcken) heißt *Disjunktive Normalform* (DNF).

Satz von der DNF

Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer DNF.

Beweis: Man führt je einen Minterm pro *true*-Zeile in der Wahrheitstafel ein.
Analoges gilt für die KNF (hier je ein Maxterm pro *false*-Zeile).

Berechnung einer erfüllbarkeitsäquivalenten KNF

Die zu einer Formel äquivalente KNF kann sehr groß sein, im schlimmsten Fall exponentiell.
Besteht man nur auf Erfüllbarkeitsäquivalenz, so geht es effizienter:

Satz

Zu jeder Formel ϕ kann in polynomieller Zeit eine KNF Γ linearer Größe (bezogen auf die Größe von ϕ) berechnet werden, für die gilt:

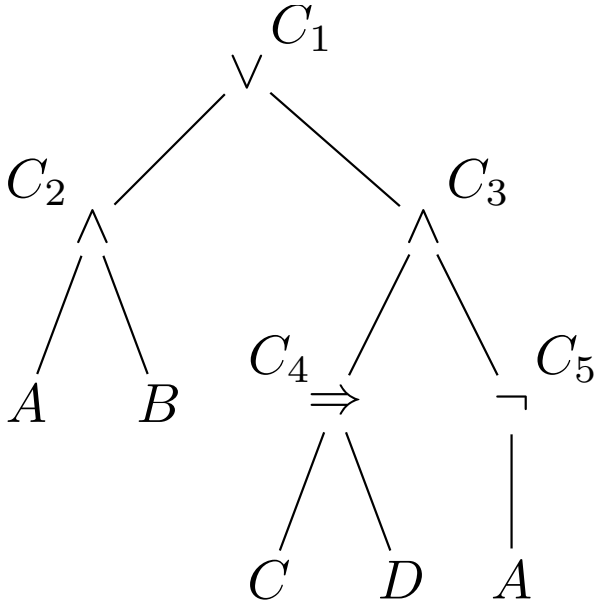
- Γ und ϕ sind erfüllbarkeitsäquivalent.
- Jede Belegung, die Γ erfüllt, erfüllt auch ϕ.

Man definiert rekursiv eine Funktion *KNF*, die zu jeder Formel ϕ eine Variable A und eine KNF Γ linearer Größe liefert, so dass jede erfüllende Belegung von Γ auch $A \Leftrightarrow \phi$ erfüllt.
Die gesuchte KNF ist dann $A \wedge \Gamma$.

Beweisidee

Idee: Führe für jeden inneren Knoten des Syntaxbaums eine neue Variable ein. Erzwinge die richtigen Werte durch eine Konjunktion von “kleinen” Formeln (mit je höchstens 3 Variablen).

Beispiel: $(A \wedge B) \vee ((C \Rightarrow D) \wedge (\neg A))$



Erfüllbarkeitsäquivalente Formel:

$$C_1 \wedge (C_1 \iff C_2 \vee C_3) \wedge (C_2 \iff A \wedge B) \wedge (C_3 \iff C_4 \wedge C_5)$$
$$\wedge (C_4 \iff C \Rightarrow D) \wedge (C_5 \iff \neg A)$$

Beweisidee

Bringe die Teilformeln $(C_1 \iff C_2 \vee C_3), \ldots$ in KNF.

Da jede Teilformel höchstens drei Variablen hat, erhält man je höchstens acht Klauseln. Die Größe ist insgesamt linear in der Größe des Syntaxbaums.

$$
\begin{aligned}
C_1 \; & \wedge (\neg C_1 \vee C_2 \vee C_3) \wedge (C_1 \vee \neg C_2) \wedge (C_1 \vee \neg C_3) \\
& \wedge (\neg C_2 \vee A) \wedge (\neg C_2 \vee B) \wedge (\neg C_2 \vee A \vee B) \\
& \wedge (\neg C_3 \vee C_4) \wedge (\neg C_3 \vee C_5) \wedge (\neg C_3 \vee C_5 \vee C_5) \\
& \wedge (\neg C_4 \vee \neg C \vee D) \wedge (C_4 \vee C) \wedge (C_4 \vee \neg D) \\
& \wedge (C_5 \vee A) \wedge (\neg C_5 \vee \neg A)
\end{aligned}
$$

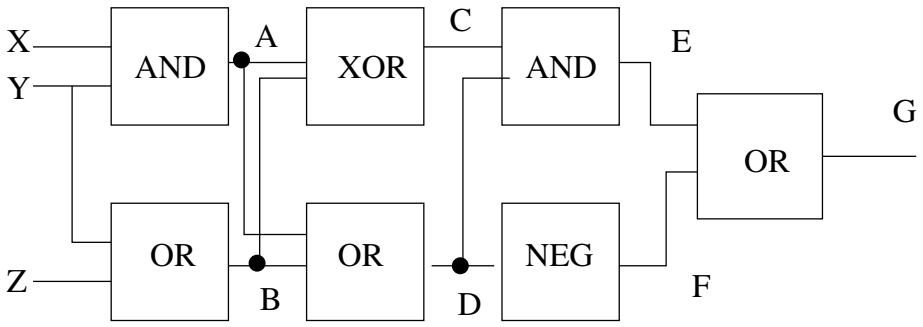
Definition der Funktion *KNF* (Tseitin Übersetzung)

- $\mathit{KNF}(A) = (A, \top)$ (leere KNF)
- $\mathit{KNF}(\neg\phi) = (C, \Gamma \wedge (C \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B))$ falls $\mathit{KNF}(\phi) = (B, \Gamma)$, wobei C eine frische Variable ist.
- $\mathit{KNF}(\phi_1 \vee \phi_2) =$ $(C, \Gamma_1 \wedge \Gamma_2 \wedge (\neg C \vee B_1 \vee B_2) \wedge (\neg B_1 \vee C) \wedge (\neg B_2 \vee C))$, falls $\mathit{KNF}(\phi_1) = (B_1, \Gamma_1)$ und $\mathit{KNF}(\phi_2) = (B_2, \Gamma_2)$, wobei C eine frische Variable ist.
- Rest als Übung.

NB: $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_m \vee B_1 \vee \cdots \vee B_n$ ist äquivalent zu $(\bigwedge_i A_i) \Rightarrow (\bigvee_j B_j)$.

NB: Es bietet sich an, mit dynamischer Programmierung dafür zu sorgen, dass identische Teilformeln nur einmal verarbeitet werden. Das ist insbesondere wichtig, wenn Teilformeln ge”shart” sind (Schaltkreise).

Beispiel Schaltkreise



$$
\begin{aligned}
&(A \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg A \vee X) \wedge (\neg A \vee Y) \wedge \\
&(\neg B \vee Y \vee Z) \wedge (B \vee \neg Y) \wedge (B \vee \neg Z) \wedge \\
&(\neg C \vee A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee A \vee \neg B) \wedge \\
&(\neg D \vee A \vee B) \wedge (D \vee \neg A) \wedge (D \vee \neg B) \wedge \\
&(E \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg E \vee C) \wedge (\neg E \vee D) \wedge \\
&(\neg F \vee \neg D) \wedge (F \vee D) \wedge \\
&(\neg G \vee E \vee F) \wedge (G \vee \neg E) \wedge (G \vee \neg F) \wedge \\
&G
\end{aligned}
$$

Das SAT-Problem

Das *SAT-Problem* besteht darin, für eine gegebene KNF zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist.

Das SAT-Problem ist bekanntlich NP vollständig. Dennoch lässt es sich in vielen Fällen mittlerer Größe ($< 10^6$ Variablen und Klauseln) praktisch lösen.

Dazu gibt es als *SAT-Solver* bezeichnete Programme, z.B. zChaff, Minisat, Picosat, ...

SAT-Solver geben nicht nur “erfüllbar” order “unerfüllbar” als Antwort. Bei erfüllbaren Formeln wird auch eine erfüllende Belegung als Zeuge ausgegeben.

SAT-Solver

SAT-Solver erwarten eine KNF als Eingabe.

- Mit der Tseitin-Übersetzung können wir für jede Formel ϕ eine nicht zu große KNF ausrechnen.
- Gibt der SAT-Solver eine erfüllende Belegung der KNF zurück, so macht diese auch ϕ wahr.

Das Äquivalenzproblem lässt sich ebenfalls auf SAT reduzieren:
Zwei Formeln ϕ und ψ sind äquivalent, genau dann wenn $\neg(\phi \Leftrightarrow \psi)$ unerfüllbar ist.

DIMACS-Format

SAT-Solver akzeptieren eine KNF in einem einfachen standardisierten Format (“DIMACS-Format”).

- Variablen werden durch Integer > 0 repräsentiert; negierte Variablen durch entsprechende negative Zahlen.
- Klauseln werden durch 0-terminierte Zeilen, die ihre Literale enthalten, repräsentiert.
- Außerdem ist in einem Header die Zahl der Variablen und Klauseln anzugeben.

Beispiel für $(\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee D \vee E)$:

```
c Kommentarzeile.
p cnf 5 2
-1 2 3 0
1 -2 4 5 0
```

Die Zuordnung von Variablen zu Zahlen muss man sich merken.
Hier $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5$.

DPLL-Algorithmus

Aktuelle SAT-Solver verwenden den *DPLL-Algorithmus* (Davis, Putnam, Logemann, Loveland).

Prinzip: “Vorrechnen” und wenn das nicht hilft, verzweigen.

Formal kann DPLL als rekursive Prozedur $\mathit{DPLL}(\eta, \Gamma)$ beschrieben werden, die zu gegebener Belegung η und KNF Γ entweder eine erfüllende Belegung für Γ liefert, die η erweitert, oder “UNSAT” liefert, wenn es keine solche gibt.

DPLL

$DPLL(\eta, \Gamma) =$

1. Vereinfache Γ und η mit *Unit Propagation* zu Γ' und η'.
2. Wenn η' alle Variablen in Γ' mit Werten belegt, dann gib η' als Ergebnis zurück.
3. Wähle andernfalls eine beliebige von η' noch nicht belegte Variable X aus und berechne rekursiv $DPLL(\eta'[X \mapsto \mathit{false}], \Gamma')$. Ist das Ergebnis eine Belegung, so wird sie zurückgegeben.
   Ist das Ergebnis UNSAT, dann probiere noch $DPLL(\eta'[X \mapsto \mathit{true}], \Gamma')$.
   Waren die rekursiven Aufrufe beide nicht erfolgreich, so wird UNSAT zurückgegeben.

N.B. $\eta[X \mapsto \mathit{true}]$ bezeichnet die Belegung, die X auf *true* setzt und alle anderen Variablen wie η belegt.

Unit Propagation

Funktionsweise der Unit Propagation:

1a. Vereinfache alle Klauseln in Γ gemäß η:
   - Entferne aus den Klauseln alle Literale, die durch η falsch gemacht werden.
   - Entferne alle Klauseln, die ein wahres Literal enthalten.

1b. Falls Γ die leere Klausel enthält, dann gib UNSAT zurück.

1c. Falls Γ die Einerklausel A enthält, so setze $\eta(A) = \mathit{true}$ und beginne wieder bei Schritt 1a.

1d. Falls Γ die Einerklausel $\neg A$ enthält, so setze $\eta(A) = \mathit{false}$ und beginne wieder bei Schritt 1a.

Beispiele für Unit Propagation

- $\Gamma = (A) \wedge (B \vee \neg C)$ und $\eta(A) = \mathit{false}$
  In $1a$ wird A aus der ersten Klausel entfernt. Es entsteht die leere Klausel, also wird in $1b$. UNSAT zurückgegeben.
- $\Gamma = (\neg A) \wedge (B \vee \neg C)$ und $\eta(A) = \mathit{false}$
  In $1a$ wird die ganze erste Klausel entfernt. Das Ergebnis der Unit Propagation ist $\Gamma' = (B \vee \neg C), \eta' = \eta$.
- $\Gamma = (\neg A \wedge B) \wedge \ldots$ und $\eta(A) = \mathit{false}$.
  In Schritt $1a$ wird $(\neg A \wedge B)$ zu (B).
  In Schritt $1c$ wirt $\eta(B) = \mathit{true}$ gesetzt.
  Die Unit Propagation wird dann neu begonnen.

Beispiel für DPLL

Ausführung von DPLL mit $\eta = [X \mapsto \mathit{false}, A \mapsto \mathit{false}]$ und

$$\begin{aligned}\Gamma = \quad & (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C \vee X) \wedge \\ & (A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg X) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee X)\end{aligned}$$

- Unit Propagation liefert $\eta' = \eta$ und

$$\Gamma' = \quad (B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C) \quad .$$

- Der Aufruf $\mathit{DPLL}(\eta[B \mapsto \mathit{false}], \Gamma')$ gibt UNSAT zurück.
- Der Aufruf $\mathit{DPLL}(\eta[B \mapsto \mathit{true}], \Gamma')$ liefert eine Belegung η'' mit $\eta''(X) = \mathit{false}$ und $\eta''(A) = \mathit{false}$ und $\eta''(B) = \mathit{true}$ und $\eta''(C) = \mathit{true}$, die als erfüllende Belegung zurückgegeben wird.

DPLL Algorithmus: Anmerkungen

- Vorsicht: Bei der Implementierung kann man Γ nicht als globale Variable speichern, da sonst der Aufruf $\mathit{DPLL}(\Gamma, \eta[X \mapsto \mathit{false}])$ das Γ modifiziert und es dann nicht mehr für den Aufruf $\mathit{DPLL}(\Gamma, \eta[X \mapsto \mathit{true}])$ zur Verfügung steht.
- Bei rekursiver Implementierung werden die Γs und ηs auf dem Stack abgelegt. In der Praxis implementiert man diesen Stack explizit und speichert auf diesem nur jeweils die Änderungen ab.

Optimierungen

- Anstatt explizit eine neue KNF Γ' zu erzeugen, merkt man sich nur für jede Klausel in Γ, welche Literale bereits gesetzt sind. Um Einerklauseln für neue Setzungen schnell zu finden, "beobachtet" jede Klausel die Variablen zweier ihrer unbesetzten Literale (*watched literals*). Wird eines von diesen gesetzt, so wird ein neues watched literal gesucht. Gibt es keines, so liegt eine Einerklausel vor ($\rightsquigarrow$ Unit Propagation).
- Bei einem Konflikt (UNSAT) wird ermittelt, welche Variablensetzungen für den Konflikt verantwortlich waren und als neue "gelernte" Klausel der KNF hinzugefügt. War z.B. $X = \mathit{true}, Y = \mathit{false}, Z = \mathit{false}$ verantwortlich, so "lernt" man $\neg X \vee Y \vee Z$.
  Man speichert hierzu bei jeder Setzung den entsprechenden Grund mit ab.

Beispiel

$$\begin{aligned}\Gamma = \quad & (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C \vee X) \wedge \\ & (A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg X) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee X)\end{aligned}$$

Im DPLL-Algorithmus wird erst $X = \mathit{false}$ und dann $A = \mathit{false}$ und dann $B = \mathit{false}$ gesetzt. Durch Unit Propagation erhalten wir aus den ersten beiden Klauseln einen Konflikt. Beteiligt waren nur die Setzungen $A = B = \mathit{false}$. Wir können daher die Klausel $A \vee B$ lernen. Sie hilft uns später bei $X = \mathit{true}$.

Anwendungen von SAT-Solvern

Auf der Vorlesungshomepage finden Sie Haskell- und Java-Programms, welche die Tseitin-Transformation, die Übersetzung ins DIMACS-Format und den Aufruf eines SAT-Solvers implementieren.
Das Haskell-Programm hat folgenden Datentyp für Formeln.

```
data Formula a = Var a
               | TT
               | FF
               | Neg (Formula a)
               | Or (Formula a) (Formula a)
               | And (Formula a) (Formula a)
               | Xor (Formula a) (Formula a)
               | Imp (Formula a) (Formula a)
               | Iff (Formula a) (Formula a)
               | BigOr [Formula a]
               | BigAnd [Formula a]
```

Tseitin-Übersetzung und Sat-Solver in Haskell

Das Modul `Tseitin` implementiert die Tseitin-Übersetzung und kann auch gleich einen Sat-Solver aufrufen.

```
data Solution a
  = Unsatisfiable
  | Satisfiable (Map a Bool)

satisfiable :: Ord a => Formula a -> IO (Solution a)
```

Beim Ausführung von `satisfiable phi` wird `phi` mit der Tseitin-Übersetzung in KNF umgewandelt und es wird Picosat aufgerufen. Bei Unerfüllbarkeit wird `Unsatisfiable` zurückgegeben, sonst `Satisfiable(eta)`, wobei `eta` eine erfüllende Belegung ist.

Beispiel

```
module Main where
import Formula
import Tseitin

phi :: Formula String
phi = And (Var "x") (Var "y")

main = do
  answer <- satisfiable phi
  case answer of
    Unsatisfiable ->
      putStr "phi ist nicht erfüllbar."
    Satisfiable eta ->
      putStr ("phi ist erfüllbar und zwar mit Belegung "
              ++ show eta)
```

Compilierung und Ausführung

Kompilieren und Ausführen:

```
$ ghc Main.hs
$ ./Main
```

Interaktiv:

```
$ ghci Tseitin.hs

*Tseitin> satisfiable (And (Var "x") (Var "y"))
Satisfiable (fromList [("x",True),("y",True)])

*Tseitin> satisfiable (And (Var "x") (Neg (Var "x")))
Unsatisfiable
```

Sudoku

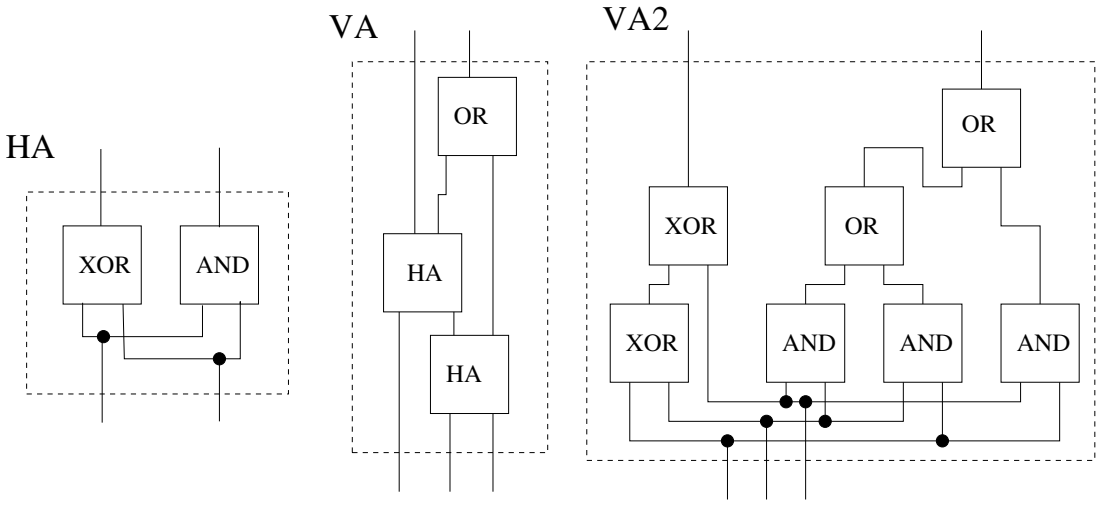
Die Sudoku-Formel kann in einem Programm erzeugt werden.

```
sudoku :: Formula (Int, Int, Int)
sudoku = BigAnd [ at_least, one_number_each_cell
                , row_cond, col_cond,
                , no_number_twice_in_square, givens ]
  where at_least =
          BigAnd [ BigOr [ Var (row, col, i) | i <- [1..9] ]
                 | row <- [0..8], col <- [0..8] ]
        one_number_each_cell =
          BigAnd [ (Neg (Var (row, col, i)))
                   `Or` (Neg (Var (row, col, j)))
                 | row <- [0..8], col <- [0..8],
                   i <- [1..9], j <- [1..9], i < j ]
        ...
```

Der Aufruf `satisfiable sudoku` liefert eine Lösung des Sudokus oder sagt, dass das Problem unlösbar ist.

Anwendung: Schaltkreisverifikation

Ein Schaltkreis ist ein DAG (gerichteter azyklischer Graph) dessen Knoten mit Junktoren beschriftet sind.



Um $\mathit{VA} = \mathit{VA2}$ zu zeigen, beginnen wir mit drei Variablen X, Y, C und bilden die Formel

$$\neg((\mathit{VA}(X,Y,C)_1 \Leftrightarrow \mathit{VA2}(X,Y,C)_1) \wedge (\mathit{VA}(X,Y,C)_2 \Leftrightarrow \mathit{VA2}(X,Y,C)_2))$$

wobei $\mathit{VA}(X,Y,C)_1$ den ersten Ausgang von $\mathit{VA}(X,Y,C)$ bezeichnet, etc.

Übersetzung in KNF

Tseitin-Transformation: KNF mit 37 Variablen, 58 Klauseln (UNSAT)

Ersetzt man das untere XOR von VA2 durch ein OR, so wird die entsprechende KNF erfüllbar. zChaff findet:
$X = Y = \mathit{true}, C = \mathit{false}$

Gleichheit von Addierern

Halbaddierer:

```
ha x y = (x `Xor` y, x `And` y)
```

Volladdierer:

```
va x y c =
  let (yc, d) = ha y c
      (s, e) = ha x yc
      cr = e `Or` d
  in (s, cr)
```

Volladdierer (zweite Variante):

```
va2 x y c =
  let s = (x `Xor` y) `Xor` c
      cr = ((c `And` y) `Or` (y `And` x)) `Or` (c `And` x)
  in (s, cr)
```

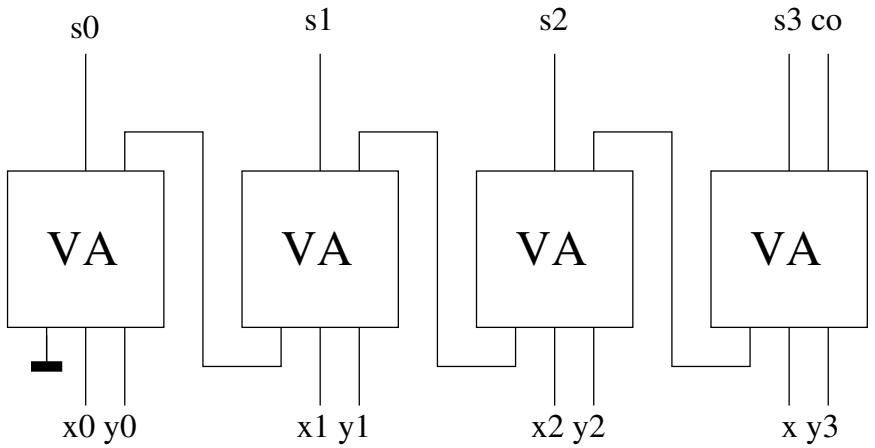
Gleichheit von Addierern

```
equiv =
  let (s1, c1) = va (Var "x") (Var "y") (Var "c")
      (s2, c2) = va2 (Var "x") (Var "y") (Var "c")
  in (s1 `Iff` s2) `And` (c1 `Iff` c2)

main = do
  answer <- satisfiable (Neg equiv)
  case answer of
    Unsatisfiable ->
      putStr "equiv ist allgemeingültig."
    Satisfiable eta ->
      putStr ("equiv wird falsch durch die Belegung "
              ++ show eta)
```

Ripple-Addierer

Um Binärzahlen zu addieren, kann man Volladdierer hintereinanderschalten (Ripple-Adder):



Die Durchlaufzeit ist hier proportional zur Zahl n der addierten Bits (schlecht bei $n = 64$).
Grund: Der Übertrag muss durch alle n Volladdierer laufen (“ripple”).

Carry-Lookahead Addierer

Günstiger ist es, den Übertrag c_i am i-ten Volladdierer als logische Funktion der Eingaben direkt zu berechnen.

carry, gen und prop

$$
\begin{array}{lcl}
c_i & = & \textit{if } i{=}0 \textit{ then } \bot \textit{ else } \textit{gen}_{0(i-1)} \\
\textit{gen}_{ij} & = & \textit{if } i{=}j \textit{ then } x_i \wedge y_i \textit{ else } \textit{gen}_{kj} \vee (\textit{gen}_{i(k-1)} \wedge \textit{prop}_{kj}) \\
\textit{prop}_{ij} & = & \textit{if } i{=}j \textit{ then } x_i \vee y_i \textit{ else } \textit{prop}_{i(k-1)} \wedge \textit{prop}_{kj}
\end{array}
$$

wobei $k = \lfloor (j - i + 1)/2 \rfloor + i$ der "Mittelpunkt" von i und j ist.

Idee: $\textit{gen}_{ij}$ — Am Ende des Blocks $i \ldots j$ entsteht ein Übertrag.
$\textit{prop}_{ij}$ — Der Block $i \ldots j$ propagiert einen einlaufenden Übertrag.
Da sich das Intervall jeweils halbiert, ist die Rekursionstiefe und damit die Tiefe der entstehenden Schaltkreise $O(\log(n))$.

Implementierung in Haskell (1)

Den Ripple-Addierer implementiert man so:

```
rippleadd 0 = ([], FF)
rippleadd i =
  let (sumbits, c) = rippleadd (i - 1)
      (sum, c') = va (x (i - 1)) (y (i - 1)) c
  in (sum:sumbits, c')
```

Es gilt insbesondere:
`rippleadd size`$= (co, [s_{size-1}, \ldots, s_0])$.

Implementierung in Haskell (2)

Die gen- und prop-Schaltkreise als Formeln:

```
carry 0 = false
carry i = gen 0 (i - 1)

gen i j =
  if i == j then
    (x i) `And` (y i)
  else
    (gen k j) `Or` ((gen i (k-1)) `And` (prop k j))
    where k = (j + 1 - i) `div` 2 + i

prop i j =
  if i == j then
    (x i) `Or` (y i)
  else
    (prop k j) `And` (prop i (k-1))
    where k = (j + 1 - i) `div` 2 + i
```

Implementierung in Haskell (3)

Lookahead-Addierer:

```
lookaheadadd 0 = ([], FF)
lookaheadadd i =
    let (ss, _) = lookaheadadd (i - 1)
        (s, d) = va2 (x (i - 1)) (y (i - 1)) (carry (i - 1))
    in (s:ss, d)
```

Implementierung in Haskell (4)

Äquivalenz der Addierer:

```
equals size =
  let (sumbits1, carryout1) = rippleadd size
      (sumbits2, carryout2) = lookaheadadd size
  in (carryout1 `Iff` carryout2) `And`
     (AndL [s1 `Iff` s2 | (s1, s2) <- zip sumbits1 sumbits2])
```

Der Aufruf

```
satisfiable (Neg (equals 64))
```

prüft nun, ob die beiden 64-Bit-Addierwerke für *alle* Eingaben die gleichen Ergebnisse liefern: Die Formel `(Neg (equals 64))` ist unerfüllbar gdw. `(equals 64)` allgemeingültig ist.

Verifikation nebenläufiger Systeme

Wir wollen Eigenschaften von nebenläufigen Systemen überprüfen.

Beispiel:

Wechselseitiger Ausschluss (Mutual Exclusion)

- P Prozesse arbeiten nebenläufig.
- Die Prozesse teilen sich eine Resource.
- Es dürfen nicht zwei Prozesse gleichzeitig auf die Resource zugreifen.

Verschieden Lösungen:

- Semaphoren
- Synchronisierung durch gemeinsame Variablen (z.B. Peterson Algorithmus)

Modellierung nebenläufiger Systeme

Modellierung als Zustandsübergangssystem:

- Eine Menge Z, die Menge aller möglichen Systemzustände.
- Eine Menge $I \subseteq Z$ von möglichen Anfangszuständen.
- Eine Relation $\mapsto \subseteq Z \times Z$. Die Aussage $z \mapsto z'$ drückt aus, dass $z' \in Z$ ein möglicher Nachfolgezustand von $z \in Z$ ist.
- Eine Menge $V \subseteq Z$ von verbotenen bzw. unerwünschten Zuständen.

Frage: Kann das System einen verbotenen Zustand erreichen?

$$I \ni z_0 \mapsto z_1 \mapsto \ldots \mapsto z_n \in V$$

Beispiel: Mutual Exclusion mit Semaphor

Es gibt k Prozesse mit Pseudocode

```
sleep: goto wait;
wait:  if (sem == free) { sem = occ; goto work }
work:  sem = free; goto sleep
```

sowie einen Semaphor mit zwei möglichen Zuständen *free* und *occ*.

Modellierung:

$$Z = \{(p_1, \ldots, p_k, s) \mid p_i \in \{\mathit{sleep}, \mathit{wait}, \mathit{work}\}, s \in \{\mathit{free}, \mathit{occ}\}\}$$

$$I = \{(\mathit{sleep}, \ldots, \mathit{sleep}, \mathit{free})\}$$

$$V = \{(p_1, \ldots, p_k, s) \in Z \mid p_i = \mathit{work}, p_j = \mathit{work}, i \neq j\}$$

Zu jedem Zeitpunkt macht *genau ein* Prozess und möglicherweise der Semaphor eine Aktion. Möglich sind:

- $(\ldots, \mathit{sleep}, \ldots, s) \mapsto (\ldots, \mathit{wait}, \ldots, s)$
- $(\ldots, \mathit{wait}, \ldots, \mathit{free}) \mapsto (\ldots, \mathit{work}, \ldots, \mathit{occ})$
- $(\ldots, \mathit{work}, \ldots, s) \mapsto (\ldots, \mathit{sleep}, \ldots, \mathit{free})$

Kodierung in Aussagenlogik

Man kann SAT-Solver dazu verwenden, um zu zeigen, dass ein System nach n Schritten keinen verbotenen Zustand erreicht:

Definiere dazu eine Formel, die genau dann erfüllbar ist, wenn es einen Pfad der Form $I \ni z_0 \mapsto z_1 \mapsto \ldots \mapsto z_t \in V$ für $t \leqslant n$ gibt.

Wähle eine frische Variable q_{zt} für alle $z \in Z$ und $0 \leqslant t \leqslant n$.
(Intention: q_{zt} sagt, dass z der t-te Zustand in einem schlechten Pfad ist.)

Klauseln:

- Für alle t ist genau ein q_{zt} wahr (vgl. Sudoku).
- $\bigvee_{z \in I} q_{z0}$
- $\bigwedge_{t=0}^{n-1} \bigvee_{z \mapsto z'} (q_{zt} \wedge q_{z'(t+1)})$
- $\bigvee_{t=0}^{n} \bigvee_{z \in V} q_{zt}$ (verbotener Zustand erreichbar)

Kodierung in Aussagenlogik

Ist die Zustandsmenge durch Tupel gegeben, d.h. $z = (z_1, \ldots, z_\ell)$, so kann man auch Variablen $q_{1z_1t}, \ldots, q_{\ell z_\ell t}$ statt q_{zt} einführen.

Bei vier Komponenten à 10 Möglichkeiten benötigt man dann $10 + 10 + 10 + 10$ Variablen statt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Die Intention von q_{iz_it} ist: Der t-te Zustand in einem schlechten Pfad hat z_i als i-te Komponente.

Die Aussage q_{zt} kann man durch $q_{1z_1t} \wedge \cdots \wedge q_{\ell z_\ell t}$ ausdrücken.

Semaphor-Beispiel mit Aussagenlogik

Variablen:

Für $0 < p \leqslant k$ und $z \in \{\mathit{sleep}, \mathit{wait}, \mathit{work}\}$ und $t \leqslant n$ je eine Variable q_{pzt}. Außerdem für $w \in \{\mathit{free}, \mathit{occ}\}$ und $t \leqslant n$ je eine Variable s_{wt}.

Klauseln:

- Für $t < n, 0 < p \leqslant k$, genau ein q_{pzt} und genau ein s_{wt} gesetzt.
- $\bigwedge_p q_{p\,\mathit{sleep}\,0} \wedge s_{\mathit{free}\,0}$
- $\bigvee_t \bigvee_{p_1 \neq p_2} q_{p_1 \mathit{work}\,t} \wedge q_{p_2 \mathit{work}\,t}$
- $$\bigwedge_{t<n} \bigvee_p \Big(\bigwedge_{p_1 \neq p} \bigwedge_z q_{p_1 z t} \Leftrightarrow q_{p_1 z (t+1)} \Big) \wedge \bigvee_{(z,w,z',w') \in R} q_{pzt} \wedge q_{pz'(t+1)} \wedge s_{wt} \wedge s_{w'(t+1)}$$

Hier ist $R = \{(\mathit{sleep}, w, \mathit{wait}, w) \mid w \in \{\mathit{free}, \mathit{occ}\}\} \cup \{(\mathit{wait}, \mathit{free}, \mathit{work}, \mathit{occ})\} \cup \{(\mathit{work}, w, \mathit{sleep}, \mathit{free}) \mid w \in \{\mathit{free}, \mathit{occ}\}\}$.

Peterson Algorithmus

Semaphor erfordert atomares Abprüfen und Setzen.
Ohne solche Unterstützung funktioniert der Peterson Algorithmus.

Zwei Prozesse 0,1. Jeder hat ein Flag $flag[i]$ und es gibt eine Variable *turn* : $\{0, 1\}$, die angibt, wer dran ist.

Möchte ein Prozess den kritischen Bereich betreten, so signalisiert er das durch Setzen seines Flags.

Sodann setzt er *turn* auf den jeweils anderen Prozess und wartet dann ("busy wait"), bis er an der Reihe ist oder das Flag des anderen nicht gesetzt ist.

```
p:   0 flag[p] := 1; goto 1
     1 turn := other(p); goto 2
     2 if flag[other(p)] goto 3 else goto 4
     3 if turn = p goto 4 else goto 2
     4 (* kritischer Bereich hier *); flag[p] := 0; goto 0
```

Peterson Algorithmus

- Variablen $line_{p,i,t}$ für alle $p \in \{0,1\}, i \in \{0,1,2,3,4\}, t < n$.
  Zum Zeitpunkt t ist Prozess Nummer p in Zeile i.
- Variablen $flag_{f,p,t}$ für alle $p, f \in \{0,1\}, t < n$.
  Zum Zeitpunkt t hat $flag[p]$ den Wert f.
- Variablen $turn_{p,t}$ für alle $p \in \{0,1\}, t < n$.
  Zum Zeitpunkt t hat turn den Wert p.

Die Klauseln erzwingen, dass die Variablen die gewünschte Bedeutung haben, sowie dass zwei Prozesse den kritischen Bereich irgendwann gleichzeitig betreten (erfüllbar gdw. System inkorrekt).

- `sanity`: Zu jeder Zeit ist jeder Prozess in genau einer Zeile, und die Variablen *flag* und *turn* haben genau einen Wert.
- `initial`: Anfangszustand des Systems
- `transitions`: Aufzählung aller möglichen Zustandsübergänge von Zeit t zu $t+1$, für alle $t < n$.
- `undesired`: Ungewünschter Systemzustand