

Übungen zur Vorlesung Formale Spezifikation und Verifikation

Blatt 10

Aufgabe 10-1 In dieser Aufgabe betrachten wir das polymorphe Typsystem.

Gegeben sei ein Term e , für den das Typurteil $\emptyset \vdash e : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ herleitbar ist.

Geben Sie eine Herleitung für folgendes Typurteil im polymorphen Typsystem an.

$$\emptyset \vdash \text{let } i = e \text{ in } i \text{ (fn } x \Rightarrow x + 1) \text{ } 0 : \text{int}$$

Aufgabe 10-2 Welche der folgenden Typurteile sind im Typsystem mit Annotationen für die Kontrollflussanalyse korrekt?

- a) $\vdash \text{recfun}_1 f x \Rightarrow x \text{ (fun}_2 y \Rightarrow f x y) : ((\alpha \xrightarrow{\{1\}} \alpha) \xrightarrow{\{3\}} (\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha)) \xrightarrow{\{1\}} (\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha)$
- b) $\vdash \text{recfun}_1 f x \Rightarrow x \text{ (fun}_2 y \Rightarrow f x y) : ((\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha) \xrightarrow{\{3\}} (\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha)) \xrightarrow{\{1\}} (\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha)$
- c) $\vdash \text{recfun}_1 f x \Rightarrow x \text{ (fun}_2 y \Rightarrow f x y) : ((\alpha \xrightarrow{\{2\}} \alpha) \xrightarrow{\{5\}} (\alpha \xrightarrow{\{3\}} \alpha)) \xrightarrow{\{1\}} (\alpha \xrightarrow{\{3\}} \alpha)$
- d) $\vdash \text{recfun}_1 f x \Rightarrow x \text{ (fun}_2 y \Rightarrow f x y) : ((\alpha \xrightarrow{\{1,2\}} \alpha) \xrightarrow{\{1,5\}} (\alpha \xrightarrow{\{3\}} \alpha)) \xrightarrow{\{1\}} (\alpha \xrightarrow{\{1,3\}} \alpha)$

Als Hilfestellung ist eine Herleitung im einfachen Typsystem in Abbildung 1 bereits gegeben.

Aufgabe 10-3 Schreiben Sie in der funktionalen Sprache mit Referenzen ein Programm e vom Typ $\text{bool} \rightarrow \text{int}$ und folgendem Verhalten: Bei Anwendung von e auf **true**, sollen nacheinander die Fakultätszahlen zurückgegeben werden. Der erste Aufruf von e auf **true** soll also 1 liefern, der zweite 2, der dritte 6, usw. Bei der Anwendung von e auf **false** soll die Folge auf den Anfang zurückgesetzt werden, d.h. die folgenden Aufrufe von e auf **true** beginnen dann wieder bei 1.

Aufgabe 10-4 Geben Sie jeweils konkrete τ und φ an, so dass die folgenden Urteile im Typsystem mit Referenzen herleitbar sind.

- a) $r : \text{int} \text{ ref}_\Pi \vdash \text{fun } x \rightarrow (r := x) : \tau \ \& \ \varphi$
- b) $\emptyset \vdash \text{let } x = \text{ref}_1 0 \text{ in fun } f \rightarrow (f (x := !x + 1)) : \tau \ \& \ \varphi$

Abgabe: Sie können Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 6.7., um 16:00 Uhr über UniWorX abgeben.

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Gamma \vdash x : (\alpha \rightarrow \alpha)} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash f : ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash x : (\alpha \rightarrow \alpha)}}{\text{(VAR)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash x : (\alpha \rightarrow \alpha)} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(VAR)}}}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash f x : \alpha}}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash x : (\alpha \rightarrow \alpha)} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(VAR)}} \quad \frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash y : \alpha}}{\text{(VAR)}}}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Gamma \vdash x : (\alpha \rightarrow \alpha)} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(APP)}} \quad \frac{\frac{\text{(VAR)} \quad \overline{\Delta \vdash f x : \alpha}}{\text{(APP)}} \quad \frac{\text{(FUN)} \quad \overline{\Gamma \vdash \text{fun}_Y y \rightarrow f x y : (\alpha \rightarrow \alpha)}}{\text{(FUN)}}}{\text{(REC FUN)}} \quad \frac{\frac{\text{(REC FUN)} \quad \overline{\Gamma \vdash x (\text{fun}_Y y \rightarrow f x y) : (\alpha \rightarrow \alpha)}}{\text{(REC FUN)}} \quad \frac{\text{(REC FUN)} \quad \overline{\emptyset \vdash \text{recfun}_X f x \rightarrow x (\text{fun}_Y y \rightarrow f x y) : ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))} \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)}{\text{(REC FUN)}}
\end{array}$$

Hierbei werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma & := & [x \mapsto ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)), f \mapsto ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)] \\
\Delta & := & [x \mapsto ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)), f \mapsto ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha), y \mapsto \alpha]
\end{array}$$

Abbildung 1: Herleitung für Aufgabe 10-4