Aufgabe 10-2. Wir versuchen für noch unbekannte Mengen $\Pi_1, \ldots, \Pi_5$ eine Herleitung für

$$\varnothing \vdash \texttt{recfun}_1\ f\ x \Rightarrow x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)$$

zu konstruieren.

Wende zunächst die Regel ($\textsc{recfun}$) an:

$$\text{(Fun)}\ \dfrac{\Gamma \vdash x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\varnothing \vdash \texttt{recfun}_1\ f\ x \Rightarrow x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Diese ist anwendbar falls $1 \in \Pi_4$. In der Regel steht Γ für

$$[x \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)), f \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)].$$

Mache nun weiter mit der Regel ($\textsc{app}$) und dann links mit $\textsc{var}$:

$$\text{(FUN)}\ \dfrac{\text{(APP)}\ \dfrac{\text{(VAR)}\ \dfrac{\Gamma(x) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha))}{\Gamma \vdash x \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)} \qquad \Gamma \vdash \texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}{\Gamma \vdash x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}}{\varnothing \vdash \texttt{recfun}_1\ f\ x \Rightarrow x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Die Regel ($\textsc{app}$) ist anwendbar falls $\Pi_3 = \Pi_5$.

Wende nun rechts die Regel ($\textsc{fn}$) an. Diese ist anwendbar falls $2 \in \Pi_1$. Wir erhalten

$$\text{(RECFUN)}\ \dfrac{\text{(APP)}\ \dfrac{\text{(VAR)}\ \dfrac{}{\Gamma \vdash x \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)} \qquad \text{(Fn)}\ \dfrac{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y \colon \alpha}{\Gamma \vdash \texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}}{\Gamma \vdash x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}}{\varnothing \vdash \texttt{recfun}_1\ f\ x \Rightarrow x\ (\texttt{fun}_2\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Das noch offene Urteil $\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y \colon \alpha$ ist nun ohne weitere Einschränkung herleitbar. Eine Herleitung dafür ist:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)} \quad \dfrac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash x\colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)}}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\colon \alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha} \quad \dfrac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash y\colon \alpha}$$

$$\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y\colon \alpha$$

Die Wahl der Regeln war jeweils durch den Term eindeutig bestimmt. Wir haben also gezeigt, dass sich eine Herleitung angeben lässt genau dann wenn die Bedingungen $1 \in \Pi_4$, $\Pi_3 = \Pi_5$ und $2 \in \Pi_1$ erfüllt sind. Das ist gerade in b) und c) der Fall.