

**Aufgabe 9-4.**

$\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y) :$

$$(\text{RECFUN}) \frac{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x \text{ (fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}{\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \text{ (fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(APP)} \frac{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x : \quad [f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y :}{\text{(RECFUN)} \frac{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}{\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(\text{VAR}) \frac{}{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x : \alpha_1} \quad [f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash \mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y : \\
(\text{APP}) \frac{}{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x (\mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y) :} \\
(\text{RECFUN}) \frac{}{\vdash \mathbf{recfun} \ f \ x \rightarrow x (\mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y) :}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1, y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x \ y :}{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash \mathbf{fun} \ y \ -> f \ x \ y :} \\
\text{(APP)} \frac{}{[f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1] \vdash x \ (\mathbf{fun} \ y \ -> f \ x \ y) :} \\
\text{(RECFUN)} \frac{}{\vdash \mathbf{recfun} \ f \ x \ -> x \ (\mathbf{fun} \ y \ -> f \ x \ y) :}
\end{array}$$

Abkürzung:  $\Gamma = [f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), x \mapsto \alpha_1]$

$$\begin{array}{c}
 \text{(APP)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x: \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y:}{\Gamma \vdash x \text{ fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma \vdash x: \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x \ y:}{\Gamma \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma \vdash x \text{ fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
 \text{(RECFUN)} \frac{\Gamma \vdash x \text{ fun } y \rightarrow f \ x \ y:}{\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \text{ fun } y \rightarrow f \ x \ y:}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(APP)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f: \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash x:}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x:} \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y: \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x: \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y:}{\Gamma \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma \vdash x: \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x \ y:}{\Gamma \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash x: \alpha_1 \quad \Gamma \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y:}{\Gamma \vdash x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y):} \\
\text{(RECFUN)} \frac{\Gamma \vdash x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y):}{\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha_1} \\
\text{(APP)} \frac{\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash x :}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x :} \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y :}{\Gamma \vdash \text{fun } y \rightarrow f x y :} \\
\text{(FN)} \frac{\Gamma \vdash x (\text{fun } y \rightarrow f x y) :}{\Gamma \vdash \text{recfun } f x \rightarrow x (\text{fun } y \rightarrow f x y) :} \\
\text{(RECFUN)} \frac{}{\Gamma \vdash \text{recfun } f x \rightarrow x (\text{fun } y \rightarrow f x y) :}
\end{array}$$



$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \alpha_1} \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x :} \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y :} \\
\text{(RECFUN)} \frac{}{\vdash \mathbf{recfun} \ f \ x \rightarrow x \ (\mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y) :}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \alpha_1} \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \alpha_2} \quad \Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y :} \\
\text{(RECFUN)} \frac{}{\vdash \mathbf{recfun} \ f \ x \rightarrow x \ (\mathbf{fun} \ y \rightarrow f \ x \ y) :}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(APP)} \frac{\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \alpha_3}}{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \alpha_2} \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(FN)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x y :}{\Gamma \vdash \mathbf{fun} y \rightarrow f x y :} \\
\text{(RECFUN)} \frac{\Gamma \vdash x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) :}{\vdash \mathbf{recfun} f x \rightarrow x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) :}
\end{array}$$

Substitution:  $[\alpha_2 \mapsto (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)]$

Abkürzung:

$\Gamma_1 = [f \mapsto (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)), x \mapsto \alpha_1]$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f: \alpha_1 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x: \alpha_3 \rightarrow \alpha_4}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash x: \alpha_1} \\
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash y: \alpha_3}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1 \vdash x: \alpha_1} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma_1 \vdash x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y):}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(FN)} \frac{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f \ x \ y: \alpha_4}{\Gamma_1 \vdash \text{fun } y \rightarrow f \ x \ y:} \\
 \text{(RECFUN)} \frac{\Gamma_1 \vdash x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y):}{\vdash \text{recfun } f \ x \rightarrow x \ (\text{fun } y \rightarrow f \ x \ y) :}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1 \vdash x : \alpha_1} \quad \text{(APP)} \frac{\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : \alpha_1 \rightarrow (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \alpha_1}}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \alpha_3 \rightarrow \alpha_4} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \alpha_3} \\
\text{(FN)} \frac{\Gamma_1[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x y : \alpha_4}{\Gamma_1 \vdash \mathbf{fun} y \rightarrow f x y : \alpha_3 \rightarrow \alpha_4} \\
\text{(RECFUN)} \frac{\Gamma_1 \vdash x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) :}{\vdash \mathbf{recfun} f x \rightarrow x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) :}
\end{array}$$

Substitution:  $[\alpha_1 \mapsto (\tau \rightarrow \alpha_5)]$

Abkürzungen:

$\Gamma_2 := [f \mapsto ((\tau \rightarrow \alpha_5) \rightarrow \tau), x \mapsto (\tau \rightarrow \alpha_5)],$

$\tau := (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_2[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : ((\tau \rightarrow \alpha_5) \rightarrow \tau)} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_2[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \tau \rightarrow \alpha_5} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma_2[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \tau}
 \end{array}
 \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_2[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \alpha_3} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma_2 \vdash x : \tau \rightarrow \alpha_5} \quad \text{(FN)} \frac{\Gamma_2[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x y : \alpha_4}{\Gamma_2 \vdash \mathbf{fun} y \rightarrow f x y : \tau} \\
 \text{(RECFUN)} \frac{\Gamma_2 \vdash x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) : \alpha_5}{\vdash \mathbf{recfun} f x \rightarrow x (\mathbf{fun} y \rightarrow f x y) :}
 \end{array}$$

Substitution:  $[\alpha_5 \mapsto \tau]$

Abkürzung:

$\Gamma_3 := [f \mapsto ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau), x \mapsto (\tau \rightarrow \tau)]$

$\tau := (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)$

$$\begin{array}{c}
 \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau)} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \tau \rightarrow \tau} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \alpha_3} \\
 \text{(APP)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \tau} \\
 \text{(FN)} \frac{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x y : \alpha_4}{\Gamma_3 \vdash \text{fun } y \rightarrow f x y : \tau} \\
 \text{(APP)} \frac{\Gamma_3 \vdash x : \tau \rightarrow \tau}{\Gamma_3 \vdash x (\text{fun } y \rightarrow f x y) : \tau} \\
 \text{(RECFUN)} \frac{\Gamma_3 \vdash x (\text{fun } y \rightarrow f x y) : \tau}{\vdash \text{recfun } f x \rightarrow x (\text{fun } y \rightarrow f x y) : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau}
 \end{array}$$

Folgendes ist also die endgültige vollständige Herleitung. Darin sind  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$  beliebige Typvariablen. Die in der Herleitung vorkommenden Typen  $\tau$  und der Kontext  $\Gamma_3$  sind durch  $\tau := (\alpha_3 \rightarrow \alpha_4)$  und  $\Gamma_3 := [f \mapsto ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau), x \mapsto (\tau \rightarrow \tau)]$  definiert.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f : ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau)} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash x : \tau \rightarrow \tau} \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x : \tau} \quad \text{(VAR)} \frac{}{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash y : \alpha_3}
\end{array} \\
\text{(APP)} \frac{}{\Gamma_3 \vdash x : \tau \rightarrow \tau} \quad \text{(FN)} \frac{\Gamma_3[y \mapsto \alpha_3] \vdash f x y : \alpha_4}{\Gamma_3 \vdash \text{fun } y \rightarrow f x y : \tau} \\
\text{(RECFUN)} \frac{\Gamma_3 \vdash x (\text{fun } y \rightarrow f x y) : \tau}{\vdash \text{recfun } f x \rightarrow x (\text{fun } y \rightarrow f x y) : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau}
\end{array}$$

Beachten Sie, dass in einer Herleitung stets alle benutzten Typen und Kontexte konkret zu definieren sind. Man kann nicht  $\tau$ ,  $\tau_1$ ,  $\dots$  oder  $\Gamma$  verwenden, ohne diese konkret zu definieren.