2.3 水粒子の速度成分と軌跡　Water particle velocity

2.3.1 速度ポテンシャルの解

もう一度確認事項として，解くべきシステムを整理すると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

z= -h で $w=\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$

z= 0 で $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+g\eta=0\end{array}\right\}\quad or \quad g\dfrac{\partial\phi}{\partial z}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$

であり，変数分離による解は

$$\eta(t,x)=a\cos k(x-ct)=a\cos(kx-\sigma t)\quad (2.3.1)$$

$$\sigma^2=gk\tanh kh \quad \text{または} \quad c^2=\frac{g}{k}\tanh kh \quad (2.3.2)$$

という制約条件のもとで

ϕ は $\phi=\dfrac{ag}{\sigma}\dfrac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\sigma t)$　　または　$\phi=\dfrac{a\sigma}{k}\dfrac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin(kx-\sigma t)$

を得ることが出来る．以下は，この解を下に，波動の性質を議論する．

2.3.2 流速

流速は，複素速度ポテンシャルを空間微分することにより得られるので，例えば，x 方向の流速 u は以下のようにして求まる．

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=a\sigma\frac{\cosh(h+z)}{\sinh kh}\cos(kx-\sigma t)$$

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial z}=a\sigma\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\sin(kx-\sigma t)\quad \mathbf{(2.3.3)}$$

2.3.3 流速分布の性質

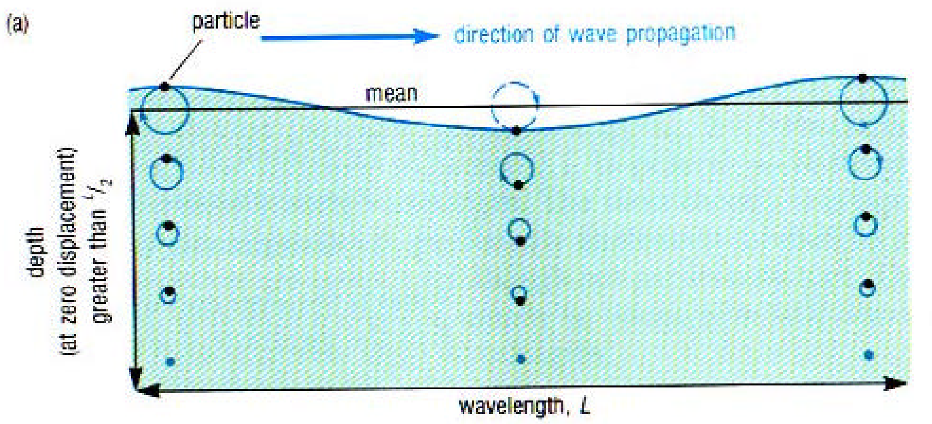
(2.3.3)式に基づいて，流速の分布を調べる．

ｔ＝０のとき

x	0		0.5π		π		1.5π		2π
η	max	＋	0	－	min	－	0	＋	max
u	max	＋	0	－	min	－	0	＋	max
w	0	＋	max	＋	0	－	min	－	0
	0 at z=-h (bottom)								

ηとuは同符号

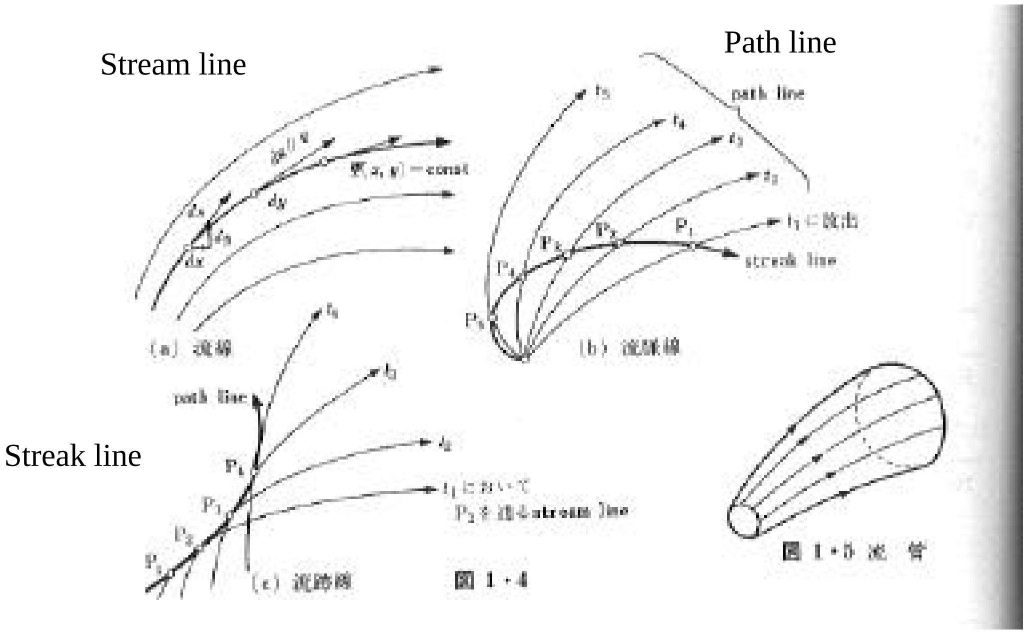
これは，流線（stream line）であり，水の粒子がある瞬間に図のような方向に動　いている．次の瞬間にはこのパターンが少し右にずれた運動をする．このパターンがｘの正の方向へ伝播する．



図―2.3.1 波動運動中の流速の動き

2.3.4 流れの記述

流体力学では，流線(stream line)　　：流速ベクトルを連ねた線
流脈線（path line)　　：水粒子の運動の軌
流跡線(streak line)　　：煙突の煙



図―2.3.2 流線，流脈線，流跡線

Euler 的見方と Lagrange 的見方

Euler 的見方：空間座標系を固定し，流体の運動を場所と時間の関数として表す．

u＝u（x，y，z，t）　　x，y，z，t ：独立変数
v＝v（x，y，z，t）　　流速分布，流線はこの方法が便利
w＝w（x，y，z，t）

Lagrange 的見方：一つ一つの水粒子の位置で表現する．初期位置と時間だけの関数

X＝X（X_O, Y_O, Z_O, t）　　X_O, Y_O, Z_O:水粒子を区別する記号
Y＝Y（X_O, Y_O, Z_O, t）　　例えば，t＝0での水粒子の位置
Z＝X（X_O, Y_O, Z_O, t）　　X_O, Y_O, Z_O, t :独立変数,
　　X，Y，Z:従属変数

軌跡は，Lagrange 的な方法で表す．

2.3.5 水粒子の軌跡

波がある時の水粒子の軌跡は？　　⇒⇒　　楕円軌道になる
　平均的位置（楕円の中心）（x，z）にある水の粒子の位置を

$$X(\bar{x},\bar{z},t)=\bar{x}+\delta(\bar{x},\bar{z},t) \quad Z(\bar{x},\bar{z},t)=\bar{z}+\gamma(\bar{x},\bar{z},t)$$

と書くと

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}&=\frac{d\delta}{dt}=u\ \ (x=X(t)\ \ ,z=Z(t)\ \ ,t)\\ \frac{dZ}{dt}&=\frac{d\gamma}{dt}=w\ \ (x=X(t)\ \ ,z=Z(t)\ \ ,t)\end{aligned} \qquad (2.3.4)$$

水粒子は，x,z のまわりで運動しているのだから，
$$u(\bar{x}+\delta(\bar{x},\bar{z},t),\bar{z}+\gamma(\bar{x},\bar{z},t),t)=u(\bar{x},\bar{z},t)$$
$$w(\bar{x}+\delta(\bar{x},\bar{z},t),\bar{z}+\gamma(\bar{x},\bar{z},t),t)=w(\bar{x},\bar{z},t)$$

と近似してもよい．よって，

$$\frac{d\delta}{dt}=u(\bar{x},\bar{z},t),\quad \frac{d\gamma}{dt}=w(\bar{x},\bar{z},t) \quad (2.3.5)$$

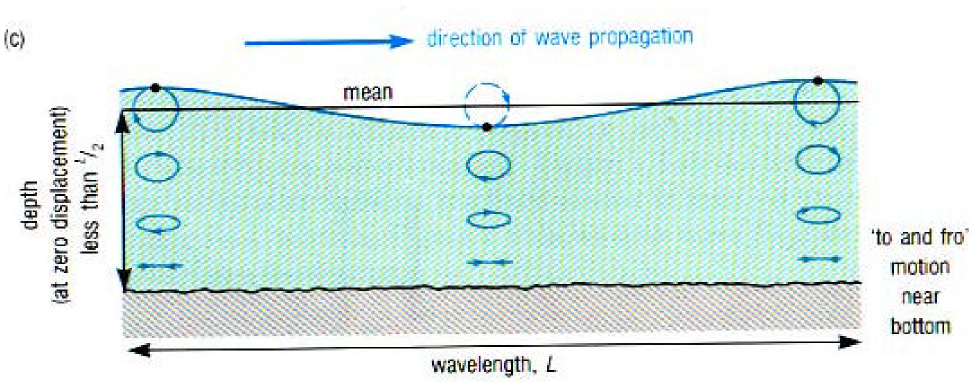
これを積分すると，

$$\delta=x-\bar{x}=-a\frac{\cosh k(h+\bar{z})}{\sinh kh}\sin(k\bar{x}-\sigma t)$$
$$\gamma=z-\bar{z}=a\frac{\sinh k(h+\bar{z})}{\sinh kh}\sin(k\bar{x}-\sigma t) \quad (2.3.6)$$

これは，楕円軌道を表す．

$$\boxed{\frac{\delta^2}{\left[a\frac{\cos(h+\bar{z})}{\sinh kh}\right]^2}+\frac{\gamma^2}{\left[a\frac{\cos(h+\bar{z})}{\sinh kh}\right]^2}=1 \quad (2.3.7)}$$

水面（ｚ＝０）では，振幅ａを短径とする横に長い楕円．
底面（ｚ＝－ｈ）では，水平運動（短径０のつぶれた楕円）．



図―2.3.3 深さによる水粒子速度の変化

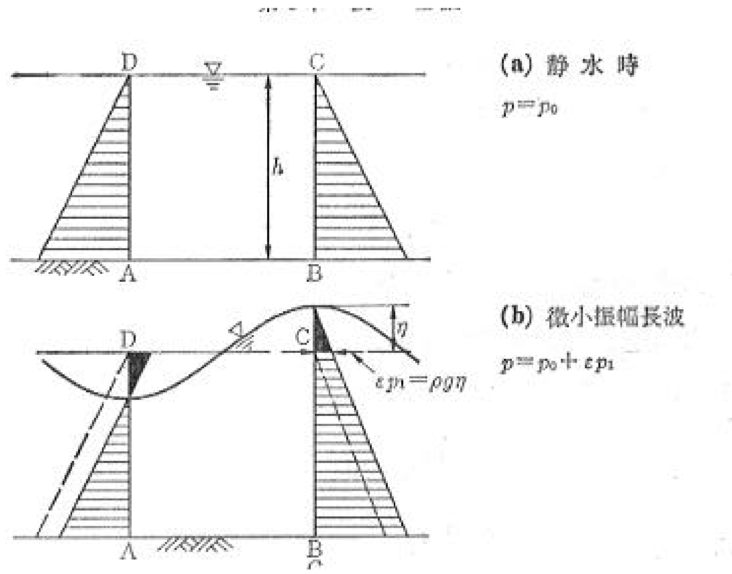
2.3.6 圧力変動

圧力変動は，ベルヌーイの式で非線形部を無視して

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{\partial\phi}{\partial t}-gz=\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}g\eta-gz \qquad (2.3.8)$$

で与えられる．右辺第一項は，波運動による圧力変化であり，第２項は静水圧である．波

運動による圧力変化は深くなれば小さくなるので，水面の変動に伴う圧力の変動は次第になくなることを示す．従って，深い場所に潜水しているダイバーは，風波の圧力を感じない．



図―2.3.4 微少振幅長波運動による水圧の変化
表面波の場合には，これに波運動の圧力が加わる．

2.4 重複波 Standing wave / Superposed wave

2.4.1反射と重複

進行波 $\eta = a\cos k(x-ct)$
後退波 $\eta = a\cos k(x+ct)$

2.4.2 表面波の重複（数学的記述）

今までは $\eta = a\cos k(x-ct)$の形の進行波(Progressive wave) 別の形の周期的な解を探してみる．偏微分方程式の標準的解法 ⇒ 変数分離法

$$\phi \propto X \cdot Z \cdot \sin\sigma t \qquad (2.4.1)$$

とおく．X＝X（x） xだけの関数， Z＝Z（z） zだけの関数とすると，Laplaceの式より

$$\frac{d^2X}{dx^2}Z + X\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (2.4.2)$$

これに対して，それぞれの変数に分離すると

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{\frac{d^2Z}{dz^2}}{Z} = constant = -k^2 \qquad (2.4.3)$$

別々に書くと

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

$$X = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \qquad (2.4.4)$$

$$Z = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

進行波のときと同じように水面での条件を考慮すると,

$$Z \quad \cosh k(h+z) \qquad (2.4.5)$$

ϕは

$$\phi = C \cosh k(h+z) \cos kx \quad \sin \sigma t \quad or \quad \sin kx \qquad (2.4.6)$$

結局，$\eta = 2a \ \cos kx \ \cos \sigma t$　という水面形を考えると

$$\boxed{\phi = -2a \frac{\sigma}{k} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos kx \ \sin \sigma t \qquad (2.4.7)}$$

かつ　$\sigma^2 = gk \tanh kh$　進行波と同じで，これは,

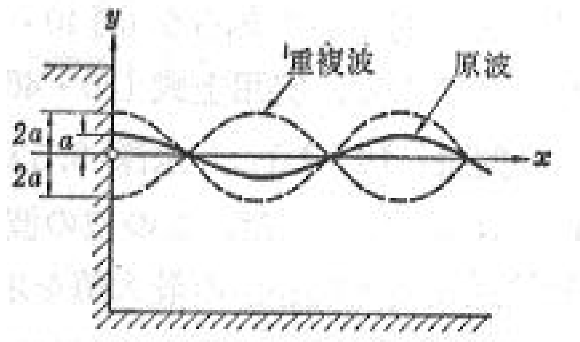
$$\eta = 2a \cos kx \cos \sigma t$$
$$= a \cos k(x - ct) + a \cos k(x + ct) \qquad (2.4.8)$$

で，進行波の重ね合わせ表すことができることから当然の結果である.

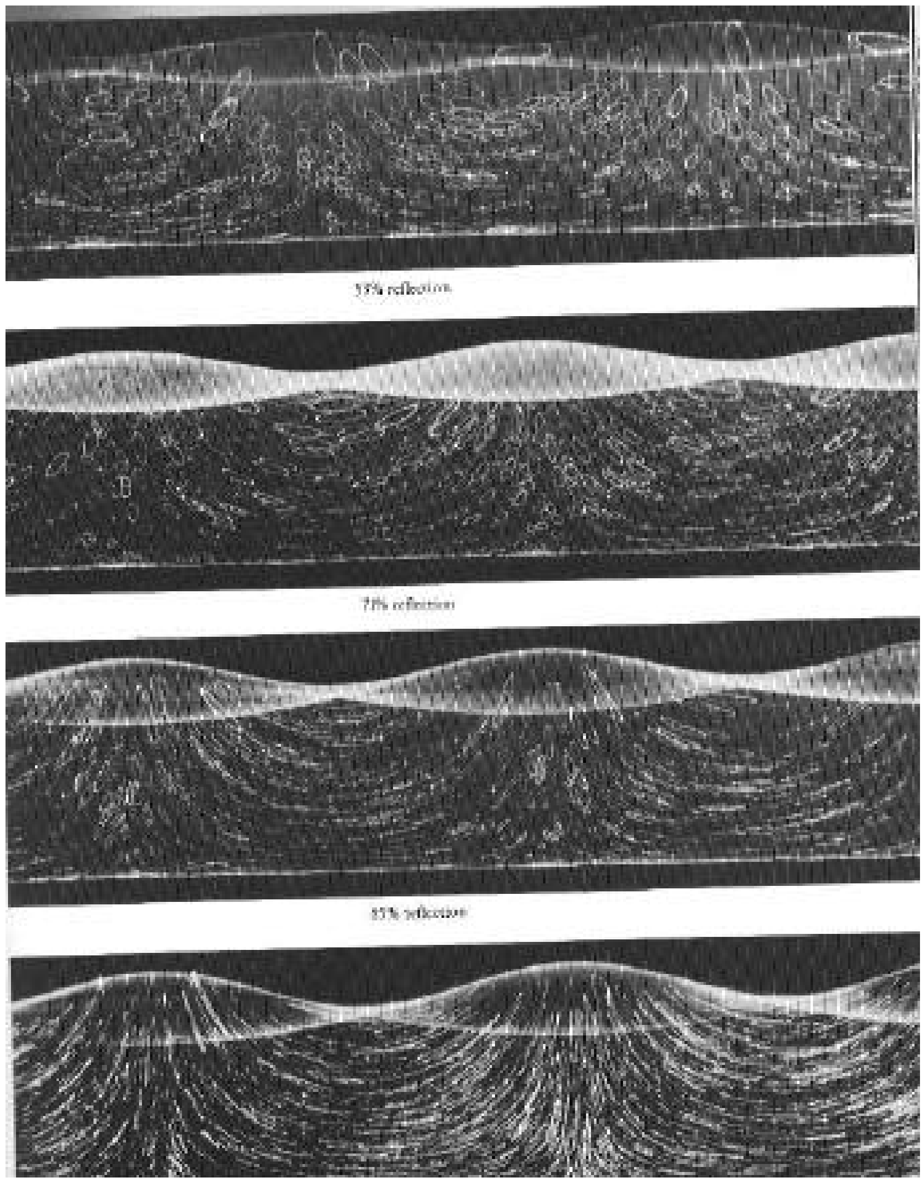
水面には,

上下運動する部分（腹：loop),

上下に動かない部分（節：node）　　　が互い違いに現れる.



図―2.4.1 重複波の形成（腹と節が固定場所に発生する）



図―2.4.2 部分重複波から完全重複波へ

2.5 波動エネルギー　Wave energy

2.5.1 波のエネルギーとはなにか？

　波の運動にともなう　"運動エネルギー Kinetic Energy" と "位置（ポテンシャル）エネルギー Potential Energy "

１波長あたりでは

［ポテンシャル・エネルギー］

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=L}\int_{z=-h}^{z=\eta}\rho g(z-z_0)dzdx}_{\text{波がある時の位置エネルギー}} - \underbrace{\int_{x=0}^{x=L}\int_{z=-h}^{z=0} pg(z-z_0)dzdx}_{\text{波がないときの位置エネルギー}} \qquad (2.5.1)$$

(2.3.1)式を代入すると,

$$\int_{x=0}^{x=L}\int_{z=0}^{z=\eta}\rho gzdzdx = \int_{x=0}^{x=L}\rho g\frac{1}{2}\eta^2 dx = \rho g\frac{1}{2}\frac{a^2}{2}L = \frac{\rho g}{16}H^2L \qquad (2.5.2)$$

図のＡの部分の水をＢに持ち上げる仕事量と同じ.

［運動エネルギー］
(2.3.1)式を代入すると,

$$\frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=L}\int_{z=-h}^{z=0}\rho g[u^2+w^2]dzdx = \frac{\rho g}{16}H^2L \qquad (2.5.3)$$

これも　$\frac{\rho g}{16}H^2L$　になる.

水面の単位面積あたりでは，これらをＬでわり，結局,

$$\boxed{E_{TOTAL} = E_k + E_P = \frac{1}{8}\rho gH^2 \qquad (2.5.4)}$$

が得られる．これが波動エネルギーになる.

2.5.2 エネルギーの伝達速度

ある断面を通過するエネルギーの流れ（energy flux ）

［ エネルギー密度 × エネルギー伝達速度 ］

＝ その断面に働く仕事率（power）

［ 力 × 速度 ］

$$W = \int_{z=-h}^{z=0} pudz = \int_{z=-h}^{z=0} \rho \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dz \qquad (2.5.5)$$

一周期平均をとると

$$\boxed{\overline{W} = \frac{1}{2}\rho g c n a^2 = E_{TOTAL} c_G \qquad (2.5.6)}$$

・ L，T もｃ$_G$で伝わる.

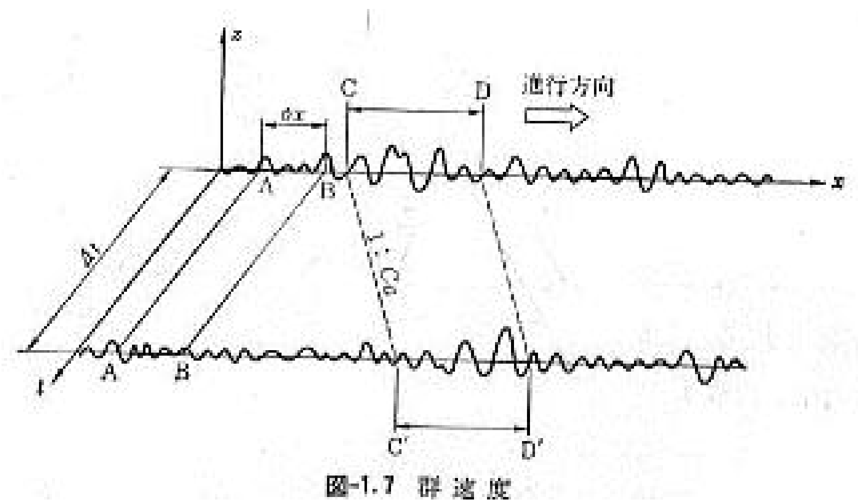


図-1.7 群速度

図—2.4.3 波群の伝播