3.5 到達時間定理と総子孫数

定理 3.13 （総子孫数の法則）

iid の子孫 $Z_1 = X$ を持つ分枝過程に対し,

$$P(T=n) = \frac{1}{n}\,P(X_1+\cdots+X_n = n-1) \tag{3.5.1}$$

が成り立つ.

上記で $(X_i)_{i\geqq 1}$ は X の iid コピー[22] である.

(3.5.1) 右辺は，分枝過程とは無関係に，$\mathbb{N}_0$ の値をとる iid の $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ の和が $n-1$ となる確率という事に注意.

定理 3.13 の証明は，より一般的な，以下の定理 3.14 を示す事で代える．それは

$$P(T_1+\cdots+T_k = n) = \frac{k}{n}\,P(X_1+\cdots+X_n = n-k) \tag{3.5.2}$$

が成り立つ事を述べている．ただし $T_1, \cdots, T_k$ は k 個の独立 r. v. で，T と同分布を持つ．別の言い方をすると，$T_1+\cdots+T_k$ は k 個の個体からスタートする分枝過程（つまり $Z_0 = k$）の総子孫数と思う事ができる.

(3.5.2) で特に $k=1$ とすると (3.5.1) になる．その定理 3.14 の証明は分枝過程の RW 表現と，RW の到達時間定理に基づいている．P_k を 初期値 k でスタートする RW の確率分布とする．$(Y_i)_{i\geqq 1}$ を RW の各ステップで iid とし，$S_n = k + Y_1 + \cdots + Y_n$ を初期値 k の RW の n ステップ後の位置とする．あと，

$$H_0 = \inf\{n \,|\, S_n = 0\} \tag{3.5.3}$$

とおく.

定理 3.14 （到達時間定理）

各ステップ $(Y_i)_{i\geqq 1}$ が iid の整数値で,

$$P(Y_i \geqq -1) = 1 \tag{3.5.4}$$

を満たす RW $(S_n)_{n\geqq 1}$ に対し,

$$P_k(H_0 = n) = \frac{k}{n}\,P_k(S_n = 0) \tag{3.5.5}$$

が成り立つ.

定理 3.14 は，$\{S_n = 0\}$ に条件付けたら RW S_n が時刻 n で最初に原点 0 に到達する確率が k/n

[22] $(X_i)_{i\geqq 1}$ は iid で $X_i \sim X$ という事.

になるという点で，しかもそれが各ステップの分布が具体的に与えられなくとも分かるという点で，注目すべきものである：

$$\frac{k}{n} = \frac{P_k(H_0 = n)}{P_k(S_n = 0)} = P_k(H_0 = n \,|\, S_n = 0). \tag{3.5.5$'$}$$

(3.5.2) は，k 個体でスタートしステップが $Y_i = X_i - 1$ の RW の原点到達時間 H_0 に対し $T_1 + \cdots + T_k \sim H_0$ である事から分かる：RW が k 個体でスタートする場合の H_0 は，1 個体でスタートする場合の $H_{0,i}$ の和 $H_{0,1} + \cdots + H_{0,k}$ と同分布である．$(H_{0,i})_{i=1}^k$ は $(T_i)_{i=1}^k$ と同分布であるから，$H_{0,1} + \cdots + H_{0,k}$ と $T_1 + \cdots + T_k$ は同分布を持つ事になる．従って，(3.5.2) は (3.5.5) から次により得られる．

$$\frac{k}{n} P_k(S_n = 0) = P_k(H_0 = n) = P(H_{0,1} + \cdots + H_{0,k} = n)$$

$$= P(T_1 + \cdots + T_k = n),$$

然るに，最初の k 個体 のうち l 番目の個体からスタートする RW を $S_i^{(l)}$ とおくと，

$$\{S_n = 0,\ \ n = T_1 + \cdots + T_k\} \Longleftrightarrow \{S_{T_i}^{(l)} = T_i - 1,\ \ l = 1, \cdots, k\}$$

であるから

$$P_k(S_n = 0) = P\big(\, S_{T_1}^{(1)} - (T_1 - 1) + \cdots + S_{T_k}^{(k)} - (T_k - 1) = 0\big)$$

$$= P\big(\, S_{T_1}^{(1)} \cdots + S_{T_k}^{(k)} = T_1 + \cdots + T_k - k\big)$$

$$= P(X_1 + \cdots + X_n = n - k).$$

$k = 1$ としたものは (3.5.1) である．

定理 3.14 の証明　(3.5.5) を n に関する帰納法により示す．

▷ $n = 1$:　$n = 1$ については，最初の k 個体がいずれも子を生まず，その系は 1 世代で絶滅したという事であり，$S_1 = k + Y_1 + \cdots + Y_n \big|_{n=1} = k + Y_1 = 0$ である．

$k = 0$ では (3.5.5) は両辺が 0 として成り立っている．$k = 1$ では $S_1 = 1 + Y_1 = 0$ つまり (3.5.5) が $P(H_0 = 1) = P(S_1 = 0) = P(Y_1 = -1)$ として成り立っている．$k > 1$ では (3.5.4) より $S_1 = k + Y_1 = 0$ が満たされず，やはり (3.3.5) は両辺が 0 として成り立っている．これにより，帰納法の初期条件が確認された．

▷ 一般の $n \geqq 2$:　$n \geqq 2$ に対し，(3.3.5) で n を $n - 1$ としたものが成り立つと仮定し（帰納法の仮定），そこから n でも成り立つ事を示す．まず $k = 0$ の時 (3.5.5) の両辺はいずれも 0 となるから $k \geqq 1$ と仮定する．RW の第 1 ステップに条件付けると (3.5.5) 左辺は

$$P_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{\infty} P_k(H_0 = n \,|\, Y_1 = s)\, P(Y_1 = s) \tag{3.5.6}$$

となる．RW の Markov 性と帰納法の仮定から

$$n\text{ ステップの間に値が } k \longrightarrow \underbrace{k+s \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0}_{(n-1)\text{ ステップ}} \text{へ推移する確率}$$

$$= (n-1)\text{ ステップの間に値が } k+s \text{ から } 0 \text{ へ推移する確率},$$

つまり

$$P_k(H_0 = n \,|\, Y_1 = s) = P_{k+s}(H_0 = n-1) = \frac{k+s}{n-1}\, P_{k+s}(S_{n-1} = 0) \tag{3.5.7}$$

が成り立つ（$k \geqq 1,\, s \geqq -1$ より $k+s \geq 0$ に注意）． 従って

$$P_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1}\, P_{k+s}(S_{n-1} = 0)\, P(Y_1 = s) \tag{3.5.8}$$

となる．これを $P_{k+s}(S_{n-1} = 0) = P_k(S_n = 0 \,|\, Y_1 = s)$ により書き直すと

$$\begin{aligned} P_k(H_0 = n) &= \sum_{s=-1}^{\infty} \frac{k+s}{n-1}\, P_k(S_n = 0 \,|\, Y_1 = s)\, P(Y_1 = s), \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} (k+s) P_k(S_n = 0, Y_1 = s) \\ &= \frac{P_k(S_n = 0)}{n-1} \sum_{s=-1}^{\infty} (k+s) P_k(Y_1 = s \,|\, S_n = 0) \\ &= \frac{P_k(S_n = 0)}{n-1} \Big(k + \mathbb{E}_k[\, Y_1 \,|\, S_n = 0 \,] \Big). \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

$\mathbb{E}[\, Y_i \,|\, S_n = 0 \,]$ は i に依存しないから

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\, Y_1 \,|\, S_n = 0 \,] &= \frac{1}{n}\, \mathbb{E}_k\Big[\, \sum_{i=1}^{n} Y_i \,|\, S_n = 0 \Big] \\ &= \frac{1}{n}\, \mathbb{E}_k\big[\, S_n - k \,\big|\, S_n = 0 \,\big] = -\frac{k}{n}. \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

故に

$$P_k(H_0 = n) = \frac{P_k(S_n = 0)}{n-1} \Big(k - \frac{k}{n} \Big) = \frac{k}{n}\, P_k(S_n = 0) \tag{3.5.11}$$

を得て，帰納法による証明が終わる． ∎

3.6 Poisson 分枝過程の性質

本節では，特に子孫分布が Poisson 分布の Poisson 分枝過程について考える．Poisson 分枝過程の分布を P^*_λ と記す．また，T^* を総子孫数とし，X^* を 1 個体の生む子孫数を表す Poisson r. v. とする： $p_k = P(X^* = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$. 平均 λ の Poisson r. v. に対し，子孫分布の p. g. f. は

$$G^*_\lambda(s) = \mathbb{E}^*_\lambda\big[\, s^{X^*} \,\big] = \sum_{i=0}^{\infty} s^i\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \tag{3.6.1}$$

である．従って，絶滅確率 $\eta = \eta_\lambda$ の満たす式 (3.1.4) は

$$\eta_\lambda = e^{\lambda(\eta_\lambda - 1)} \tag{3.6.2}$$

となる．定理 3.1 より，$\lambda \leqq 1$ に対しては，この方程式は 一意解 $\eta_\lambda = 1$ を持ち，それは確率 1 での絶滅に対応する．$\lambda > 1$ に対しては，２つの解があり，そのうち小さい方は $\eta_\lambda \in (0, 1)$ を満たす．

絶滅に条件付ければ，Poisson 分枝過程 Z^*_n ($Z^*_1 \overset{d}{=} X^*$) は次で与えられる子孫分布 $\big(p'_k\big)_{k\geqq 0}$ を持つ：

$$\begin{aligned}
p'_k &= P(Z^*_1 = k \,|\, \text{絶滅}) = \frac{P(Z^*_1 = k, \text{絶滅})}{P(\text{絶滅})} = \frac{P(\text{絶滅} \,|\, Z^*_1 = k) P(Z^*_1 = k)}{P(\text{絶滅})} \\
&= \frac{P(k\ \text{本の分枝過程が絶滅する}) P(Z^*_1 = k)}{P(\text{絶滅})} \\
&= \frac{\eta_\lambda^k\, p_k}{\eta_\lambda} = \eta_\lambda^{k-1} p_k = \eta_\lambda^{k-1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} = \frac{(\lambda\eta_\lambda)^k\, e^{-\lambda}}{k!\, \eta_\lambda} = \frac{(\lambda\eta_\lambda)^k\, e^{-\lambda}}{k!\, e^{\lambda(\eta_\lambda - 1)}} \\
&= e^{-\lambda\eta_\lambda}\, \frac{(\lambda\eta_\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

この子孫分布 $\big(p'_k\big)_{k\geqq 0}$ もまた Poisson 分布になっている事に注意．ただし，平均は

$$\mu_\lambda = \eta_\lambda\, \lambda \tag{3.6.4}$$

になっている．そうすると，再度 (3.6.2) より

$$\mu_\lambda\, e^{-\mu_\lambda} = \lambda\eta_\lambda\, e^{-\lambda\eta_\lambda} = \lambda\, e^{-\lambda} \tag{3.6.5}$$

となる．この事は次の，共役対の定義を motivate する．正数 μ, λ ($\mu < 1 < \lambda$) が

$$\mu\, e^{-\mu} = \lambda\, e^{-\lambda} \tag{3.6.6}$$

を満たす時， **共役対** と呼ぶ．そうすると，(3.6.5) の λ と $\mu_\lambda = \lambda\eta_\lambda$ は共役対である．λ が与えられた時，(3.6.6) を μ を求める方程式 $xe^{-x} = \lambda\eta_\lambda$ と思うと，x の関数 x^{-x} は最初増加してそのあと減少する事，最大値 e^{-1} を $x = 1$ でとる事から，$\lambda > 1$ では $\lambda e^{-\lambda} \in (0, e^{-1})$ で，２つの解がある：１つは興味の対象となる解 $x = \mu_\lambda < 1$ で，もう 1 つは trivial な解 $x = \lambda > 1$ である．従って定理 3.7 は，Poisson 子孫分布に対しては次のように述べ直す事ができる：

定理 3.15 （Poisson 双対性原理）

μ, λ ($\mu < 1 < \lambda$) を共役対とする．平均 λ の Poisson 分枝過程を絶滅に条件づけたものは，平均 μ の Poisson 分枝過程と同じ分布を持つ．

Poisson 分枝過程の総子孫数について，さらに述べる：

定理 3.16 （Poisson 分枝過程の総子孫数）

iid の子孫 $X^* \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ を持つ Poisson 分枝過程に対し，

$$P^*_\lambda(T^* = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1}}{n!}\, e^{-\lambda n}, \qquad n \geqq 1 \tag{3.6.7}$$

である．

定理 3.17 は省略.

次に，Poisson 分枝過程の総子孫数 T^* の確率分布の漸近値を調べる：

定理 3.18 （Poisson 分枝過程の総子孫数の分布の漸近値）

iid の子孫 $X^* \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ を持つ Poisson 分枝過程に対し，総子孫数 T^* の分布の漸近値は次を満たす：

$$P^*_\lambda(T^* = n) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi n^3}}\, e^{-I_\lambda n}\big[\, 1 + O(n^{-1}\,)\big], \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{3.6.20}$$

ただし

$$I_\lambda = \lambda - 1 - \log \lambda. \tag{3.6.21}$$

特に $\lambda = 1$ の時

$$P^*_1(T^* = n) = (2\pi)^{-1/2} n^{-3/2}\big[\, 1 + O(n^{-1})\big]. \tag{3.6.22}$$

臨界点である $\lambda = 1$ の場合 (3.6.22) では (3.6.20) の指数関数的減少がなくなり，べき乗 $n^{-3/2}$ のオーダーでしか減衰しなくなる．これは相転移現象でいう **臨界減速** の 1 種であると考えられる．

<u>証明</u>　定理 3.16 で $P^*_\lambda(T^* = n)$ と $P^*_1(T^* = n)$ を比べると

$$P^*_\lambda(T^* = n) = \lambda^{n-1}\, e^{-(\lambda-1)n} \cdot P^*_1(T^* = n) = \frac{1}{\lambda}\, e^{-I_\lambda n} \cdot P^*_1(T^* = n) \tag{3.6.23}$$

であるから (3.6.20) は (3.6.22) から従う．再度 定理 3.16 を用いて

$$P_1^*(T^* = n) = \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n} \tag{3.6.24}$$

である．Stirling の公式により

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n \big[1 + O(n^{-1}) \big] \tag{3.6.25}$$

である．(3.6.25) を (3.6.24) に代入すれば (3.6.22) を得る[23]． ∎

次の系は，4 章の Erdös-Rényi ランダムグラフの挙動を調べる際に使う．

系 3.19 （生存確率の微分可能性）

平均 λ の Poisson 子孫分布を持つ分枝過程の絶滅確率を η_λ とし，生存確率を $\zeta_\lambda = 1 - \eta_\lambda$ とする．その時，全ての $\lambda > 1$ に対し

$$\frac{d\zeta_\lambda}{d\lambda} = \frac{\zeta_\lambda (1 - \zeta_\lambda)}{1 - \mu_\lambda} \quad \in (0, \infty), \tag{3.6.26}$$

ただし μ_λ は (3.6.6) で定まる共役対．また，

$$\zeta_\lambda = 2(\lambda - 1)\big(1 + o(1)\big) \qquad (\lambda \searrow 1) \tag{3.6.27}$$

である．

証明　同値なステートメント $\dfrac{d\eta_\lambda}{d\lambda} = -\dfrac{\eta_\lambda(1-\eta_\lambda)}{1-\mu_\lambda}$ について証明する．(3.6.2) より，η_λ は $\eta_\lambda = e^{\lambda(\eta_\lambda - 1)}$ を満たす．ただし，優臨界性 $\lambda > 1$ から $\eta_\lambda < 1$ である．いま，$\dfrac{\log \eta_\lambda}{\eta_\lambda - 1} = \lambda$ に鑑み，次の関数 $f : (0,1) \to (1, \infty)$ を考える：

$$f(x) = \frac{\log x}{x - 1}. \tag{3.6.28}$$

この f は $(0,1)$ で狭義単調減少であって $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1$ である事はすぐ分かる．従って，f は $(0,1)$ から $(1,\infty)$ への全単射であり連続微分可能である．故に，f の逆関数もまた λ に関し $(1,\infty)$ で微分可能であって，$f(\eta_\lambda) = \lambda$ はつまり $f^{-1}(\lambda) = \eta_\lambda$ $(\lambda > 1)$ を意味する．即ち $\lambda \mapsto \eta_\lambda$ も $\lambda \in (1, \infty)$ に関し連続微分可能である．

さらに，$\log \eta_\lambda = \lambda(\eta_\lambda - 1)$ の両辺を λ で微分すると

$$\frac{\frac{d\eta_\lambda}{d\lambda}}{\eta_\lambda} = (\eta_\lambda - 1) + \lambda \frac{d\eta_\lambda}{d\lambda}. \tag{3.6.29}$$

[23]

$$\frac{1}{1 + O(n^{-1})} = \frac{1 + O(n^{-1}) - O(n^{-1})}{1 + O(n^{-1})} \equiv 1 + \frac{O(n^{-1})}{1 + O(n^{-1})} = 1 + O(n^{-1})$$

である事に注意．

これを変形して

$$\frac{d\eta_\lambda}{d\lambda} = -\frac{\eta_\lambda(1-\eta_\lambda)}{1-\lambda\eta_\lambda}, \tag{3.6.30}$$

ここに (3.6.4) を用いると (3.6.26) を得る．

(3.6.27) の証明には，(3.6.2) から

$$\zeta_\lambda = 1 - e^{-\lambda\zeta_\lambda} \tag{3.6.31}$$

に注意する．$\lambda \searrow 1$ の時 $\zeta_\lambda \searrow 0$ である．$e^{-\lambda x}$ の $x=0$ の周りでの Taylor 展開を用いると

$$\zeta_\lambda = 1 - \Big[\,1 - \lambda\zeta_\lambda + \frac{1}{2}(\lambda\zeta_\lambda)^2 + o(\zeta_\lambda^2)\,\Big] = \lambda\zeta_\lambda - \frac{1}{2}(\lambda\zeta_\lambda)^2 + o(\zeta_\lambda^2) \tag{3.6.32}$$

となる．$\zeta_\lambda > 0$ で除して整理すると

$$\frac{1}{2}\zeta_\lambda = \lambda - 1 + o(\lambda-1) = (\lambda-1)\Big(1 + \frac{o(\lambda-1)}{\lambda-1}\Big) \tag{3.6.33}$$

で，(3.6.27) を得て証明が終わる． ■

3.7 二項分枝過程と Poisson 分枝過程

以下の定理では，Poisson 分枝過程をパラメータ $(n, \lambda/n)$ の二項分枝過程と関係付ける．パラメータ (n, p) の二項分枝過程の確率分布を $P_{n,p}$ と記す．

定理 3.20 （Poisson 分枝過程と二項分枝過程）

子孫分布が Binom(n, p) の二項分枝過程および 子孫分布が Pois(λ), $\lambda = np$ の Poisson 分枝過程に対し

$$P_{n,p}(T \geqq k) = P^*_\lambda(T^* \geqq k) + e_n(k), \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{3.7.1}$$

が成り立つ．ただし，T, T^* はそれぞれの分枝過程の総子孫数であり，

$$|e_n(k)| \leqq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} P^*_\lambda(T^* \geqq s). \tag{3.7.2}$$

特に，$|e_n(k)| \leqq k\lambda^2/n$ である．

証明　　カップリングを用いて証明する．それぞれの子孫を X_i ~Binom$(n, \lambda/n)$, X^*_i ~Pois(λ) とおき，定理 2.10 に基づき

$$P(X_i \neq X^*_i) \leqq \frac{\lambda^2}{n} \tag{3.7.3}$$

とする．さらにベクトル $(X_i, X^*_i)_{i\geqq 1}$ は iid とし，P はこのベクトルの同時確率分布を表すとする．

まず次に注意する：

$$P_{n,p}(T \geqq k) = P(T \geqq k, T^* \geqq k) + P(T \geqq k, T^* < k), \tag{3.7.4}$$

および

$$P^*_\lambda(T^* \geqq k) = P(T \geqq k, T^* \geqq k) + P(T^* \geqq k, T < k). \tag{3.7.5}$$

これらの差をとって

$$\Big| P_{n,p}(T \geqq k) - P^*_\lambda(T^* \geqq k) \Big| \leqq \max\Big\{P(T \geqq k, T^* < k),\ P(T^* \geqq k, T < k)\Big\}. \tag{3.7.6}$$

ここで，事象 $\{T \geqq k\}$ は $X_1, \cdots, X_{k-1}$ の値のみに依存する事に注意する[24]．同様に，事象 $\{T^* \geqq k\}$ は $X^*_1, \cdots, X^*_{k-1}$ の値のみに依存する．

さて，事象 $\{T \geqq k$ かつ $T^* < k\}$ あるいは $\{T < k$ かつ $T^* \geqq k\}$ においては，$X_s \neq X^*_s$ となる $s < k$ が存在する．そこで，(3.7.6) 右辺の確率を，最初に $X_s \neq X^*_s$ となる $s(< k)$ で仕分けすると

$$P(T \geqq k, T^* < k) \leqq \sum_{s=1}^{k-1} P(X_i = X^*_i, \forall i \leqq s-1,\ X_s \neq X^*_s,\ T \geqq k) \tag{3.7.7}$$

[24] $\{T \geqq k\}^c = \{T \leqq k-1\}$ であり，$\{T = i\} \Longrightarrow \{X_1 + \cdots + X_i = i-1\}$, $i = 1, \ldots, k-1$ である．

のように書ける[25]．この右辺の事象については

$$\{X_i = X_i^*, \forall i \leqq s-1,\ T \geqq k\} \subset \{X_1^* + \cdots + X_i^* \geqq i, \forall i \leqq s-1\} = \{T^* \geqq s\}$$

であり，上述のように $\{T^* \geqq s\}$ は $X_1^*, \cdots, X_{s-1}^*$ の値のみに依存するから，$\{X_s \neq X_s^*\}$ とは独立である．従って，

$$\begin{aligned} P(T \geqq k, T^* < k) &\leqq \sum_{s=1}^{k-1} P(T^* \geqq s,\ X_s \neq X_s^*) \\ &= \sum_{s=1}^{k-1} P(T^* \geqq s) P(X_s \neq X_s^*) \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

である．定理 2.10 により

$$P(X_s \neq X_s^*) \leqq \frac{\lambda^2}{n} \tag{3.7.9}$$

であるから (3.7.8) は

$$P(T \geqq k, T^* < k) \leqq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} P(T^* \geqq s) \tag{3.7.10}$$

となる．同様にして

$$P(T^* \geqq k, T < k) \leqq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} P(T^* \geqq s) \tag{3.7.11}$$

も得られる．これは (3.7.6) で

$$\left| P_{n,p}(T \geqq k) - P_\lambda^*(T^* \geqq k) \right| \leqq \frac{\lambda^2}{n} \sum_{s=1}^{k-1} P(T^* \geqq s) \tag{3.7.12}$$

を意味する． ∎

[25]不等号は $\{T \geqq k, T^* < k\} \subset \{T \geqq k,$ いずれかの時点で $X_s \neq X_s^*$となる $\}$ による．