軌道角運動量

- 昇降演算子（角運動量）
  - ✓ 交換関係

<<角運動量演算子について>>

$$\boldsymbol{L}^2 = L_x^2 + L_x^2 + L_x^2 \qquad L_\pm = L_x \pm iL_y$$ ：昇降演算子（+が昇, −が降）

  - ✓ 角運動量

$$\boldsymbol{L} = \left(L_x, L_y, L_z\right)$$

これらは互いに交換しない

Ex>

$$[L_x, L_y]\varphi = \left(L_x L_y - L_y L_x\right)\varphi$$

$$= -\hbar^2 \left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\varphi$$

$$= y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - yx\frac{\partial^2}{\partial z^2} + zx\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \left(zy\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + x\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)$$

$$= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \qquad \therefore\ [L_x, L_y]\varphi = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = -\hbar^2\frac{L_z}{i\hbar}\varphi = i\hbar L_z\varphi$$

$\therefore\ [L_x, L_y] = \left(L_x L_y - L_y L_x\right) = i\hbar L_z$ 同様に $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$, $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

軌道角運動量

- これらの演算子を用いて, 次の関係が成立する

$$[\boldsymbol{L}^2, L_x] = [\boldsymbol{L}^2, L_y] = [\boldsymbol{L}^2, L_z] = 0$$

Report②：交換関係の証明

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar\, L_\pm$$

$$\boldsymbol{L}^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z = L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$

- 同時固有状態ついて

=定理=　A, B, Cという演算子が次の交換関係を満たしている. $[A, B] = C$

ある状態φが, Aに対してもBに対しても固有関数である場合, つまり....

$$A\varphi = a\varphi \qquad B\varphi = b\varphi$$

（a, b は固有値：定数）

であるとき, $C\varphi = 0$ でなければならない.

$$[A, B]\varphi = (AB - BA)\varphi = A(B\varphi) - B(A\varphi)$$

$$Ab\varphi - Ba\varphi = b(A\varphi) - a(B\varphi) = ba\varphi - ab\varphi = c\varphi$$

$$\therefore \quad ba\varphi - ab\varphi = c\varphi = 0 \qquad c\varphi = 0$$

$[A, B] = 0$ の場合, AとBは共通の固有関数をもつ.　（同時固有状態）

Quad Erat Demonstrandum

状態の決定

- 状態の決定

$[\boldsymbol{L}^2, L_z] = 0$ ：より$\boldsymbol{L}^2$とL_zに対する固有状態が存在する. (同時固有状態)

➡ $\boldsymbol{L}^2$とL_zの固有値がλ, mであり, その固有関数を$\varphi(\lambda, m)$とする.

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}^2\varphi(\lambda, m) = \lambda\varphi(\lambda, m) \\ L_z\varphi(\lambda, m) = m\varphi(\lambda, m) \end{cases}$$

I) $\boldsymbol{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$より $\boldsymbol{L}^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{L} - L_z^2)\varphi(\lambda, m) = (L_x^2 + L_y^2)\varphi(\lambda, m)$$

☞ $$(\lambda - m^2)\varphi(\lambda, m) = (L_x^2 + L_y^2)\varphi(\lambda, m)$$

両辺に$\varphi^*(\lambda, m)$を掛けて全空間で積分すると..

$$(\lambda - m^2)\int \varphi^*(\lambda, m)\varphi(\lambda, m)d\boldsymbol{r} = \int \underline{\varphi^*(\lambda, m)\,(L_x^2 + L_y^2)\varphi(\lambda, m)}\,d\boldsymbol{r}$$

ここで.. $\int \varphi^* L_x^2 \varphi d\boldsymbol{r} = \int \varphi^* L_x L_x \varphi d\boldsymbol{r} = \int (L_x\varphi)^\dagger (L_x\varphi) d\boldsymbol{r} \geq 0$

$\therefore$ $\lambda \geq m^2$ 　 λが決まっているとき, mの値には上限がある.

状態の決定

エルミート演算子

$$\int f^*(Og)dx = \int (O^\dagger f)^* g dx$$

$O = O^\dagger$ ： Oはエルミート演算子

II) $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$ より $L_z L_\pm - L_\pm L_z = \pm\hbar L_\pm$

$L_z L_+ = L_+ L_z + \hbar L_+$ 　右から$\varphi(\lambda, m)$を掛けて..

$$L_z\{L_+\varphi(\lambda, m)\} = L_+ \underline{L_z\varphi(\lambda, m)} + \hbar L_+ \varphi(\lambda, m)$$

$m\varphi(\lambda, m)$

$$\therefore \quad L_z\{L_+\varphi(\lambda, m)\} = (m + \hbar)\{L_+ \varphi(\lambda, m)\}$$

この結果から,$L_+\varphi(\lambda, m)$という関数は$m + \hbar$という固有値をもつL_zの固有関数であることを意味する.

つまり,　$L_+\varphi(\lambda, m) \propto \varphi(\lambda, m + \hbar)$

状態の決定

エルミート共役

行と列を入れ替えて（置換）複素共役をとる操作

行列：$A = (a_{ij})$に対して$A^\dagger = (a_{ji}^*)$

II) $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar\, L_\pm$ より $L_z L_\pm - L_\pm L_z = \pm\hbar\, L_\pm$

$L_z L_+ = L_+ L_z + \hbar\, L_+$ 　右から$\varphi(\lambda,m)$を掛けて..

$$L_z\{L_+\varphi(\lambda,m)\} = L_+\underline{L_z\varphi(\lambda,m)} + \hbar\, L_+\,\varphi(\lambda,m)$$

$$m\varphi(\lambda,m)$$

$$\therefore\quad L_z\{L_+\varphi(\lambda,m)\} = (m+\hbar)\{L_+\,\varphi(\lambda,m)\}$$

この結果から,$L_+\varphi(\lambda,m)$という関数は$m+\hbar$という固有値をもつL_zの固有関数であることを意味する.

つまり,　$L_+\varphi(\lambda,m) \propto \varphi(\lambda,m+\hbar)$

状態の決定

エルミート演算子

$$\int f^*(Og)dx = \int (O^\dagger f)^* g dx$$

$O = O^\dagger$ ： Oはエルミート演算子

II) $[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$ より $L_z L_\pm - L_\pm L_z = \pm\hbar L_\pm$

同様に,

$L_z L_- = L_- L_z - \hbar L_-$ 右から$\varphi(\lambda, m)$を掛けて..

$$L_z\{L_-\varphi(\lambda, m)\} = L_-\underline{L_z\varphi(\lambda, m)} - \hbar L_- \varphi(\lambda, m)$$

$$\to m\varphi(\lambda, m)$$

$$\therefore \quad L_z\{L_-\varphi(\lambda, m)\} = (m - \hbar)\{L_- \varphi(\lambda, m)\}$$

この結果から,$L_-\varphi(\lambda, m)$という関数は$m - \hbar$という固有値をもつL_zの固有関数であることを意味する.

つまり, $L_-\varphi(\lambda, m) \propto \varphi(\lambda, m - \hbar)$

状態の決定

$\lambda \geq m^2$　　λが決まっているとき, mの値には上限がある.

III)　mには最大値m_{max}があるので(II)の条件より

$$L_+\varphi(\lambda, m_{max}) = 0$$

同様にmには最大値m_{min}もあるので(II)の条件より

$$L_-\varphi(\lambda, m_{min}) = 0$$

また, 最大値と最小値はmを$\hbar$ずつ変える昇降演算子を使って結びついている.

☞　$\underline{m_{max} - m_{min} = \hbar(2l)}$　　($2l$は０以上の整数)

$m_{max} = |m_{min}|$　　$m_{max} = m$ とすると

$m_{max} - m_{min} = m - (-m) = 2m$

$L_+\varphi(\lambda, m_{max}) = 0$　左からL_-を掛けて..

$\underline{L_-L_+}\varphi(\lambda, m_{max}) = 0$　　$\therefore\ (\boldsymbol{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z)\,\varphi(\lambda, m_{max}) = 0$

$L_-L_+ = \boldsymbol{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z$

$$\boxed{(\lambda - m_{max}^2 - \hbar m_{max})\,\varphi(\lambda, m_{max}) = 0}$$

状態の決定

$\lambda \geq m^2$　　λが決まっているとき, mの値には上限がある.

III)　mには最大値m_{max}があるので(II)の条件より

$$L_+\varphi(\lambda, m_{max}) = 0$$

同様にmには最大値m_{min}もあるので(II)の条件より

$$L_-\varphi(\lambda, m_{min}) = 0$$

また, 最大値と最小値はmを$\hbar$ずつ変える昇降演算子を使って結びついている.

☞　$\underline{m_{max} - m_{min} = \hbar(2l)}$　　($2l$は０以上の整数)

$m_{max} = |m_{min}|$　　$m_{max} = m$ とすると

$$m_{max} - m_{min} = m - (-m) = 2m$$

同様に,

$L_-\varphi(\lambda, m_{min}) = 0$　　左からL_+を掛けて..

$\underline{L_+L_-}\varphi(\lambda, m_{min}) = 0$　　$\therefore\ (\boldsymbol{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z)\,\varphi(\lambda, m_{min}) = 0$

$L_+L_- = \boldsymbol{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z$

$$\boxed{\left(\lambda - m_{min}^2 + \hbar m_{min}\right)\varphi(\lambda, m_{min}) = 0}$$

状態の決定

以上より,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda - m_{max}^2 - \hbar m_{max} &= 0 \\ \lambda - m_{min}^2 + \hbar m_{min} &= 0 \end{aligned}}$$

辺々を引いてλを消去すると..

$$(m_{max} + m_{min})(m_{max} - m_{min} - \hbar) = 0$$

ここで.. $m_{max} - m_{min} = \hbar(2l)$ より

$$m_{max} = -m_{min} \Rightarrow \begin{cases} m_{max} = \hbar l \\ m_{min} = -\hbar l \end{cases}$$

よって
$$\left.\begin{aligned} \lambda &= m_{max}^2 + \hbar m_{max} \\ &= m_{min}^2 - \hbar m_{min} \end{aligned}\right\} = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\therefore \quad \boxed{\lambda = \hbar^2 l(l+1)\ , \quad m = \hbar l, \hbar(l-1), \cdots - \hbar(l-1), -\hbar l}$$