補足１　波動方程式の考え方

波長 λ、角振動数 ω の正弦波は、一般に

$$\psi(x,t) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right) \tag{1}$$

と表される。

一方で、自由粒子を考えたとき、ドブロイの関係式から

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \qquad E = \hbar\omega \tag{2}$$

が成り立つ。これらを用いて波動関数を運動量とエネルギーで表すと

$$\psi(x,t) = \sin\frac{1}{\hbar}(px - Et) \tag{3}$$

となる。

ところで、一般的な波動方程式（例えば、弦の中を伝わる波動が従う方程式など）は、

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0 \tag{4}$$

である。ここで、この式 (4) に式 (3) を代入して整理すると、

$$\frac{E^2}{v^2} = p^2 \tag{5}$$

という関係式が得られる。一方で、自由粒子の特徴的な関係として、

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{6}$$

があるが、式 (5) と式 (6) を見比べると、E と p の次数が合っていない。

そこで、波動性と粒子性とを併せ持つとして（p について 2 次、E について 1 次を与える）

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0 \tag{7}$$

を考え、さらに、（正弦波ではもはやこの式を満たさないので）

$$\psi(x,t) = \cos\frac{1}{\hbar}(px - Et) + A\sin\frac{1}{\hbar}(px - Et) \tag{8}$$

という関数を考える。式 (8) を式 (7) に代入して整理すると、α、A が定まり、結局

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{9}$$

という方程式が得られる。これは、自由粒子の波動方程式である。