【調和振動子】（振動の量子化）

- 調和振動子のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

- エルミートの微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}u(z)-2z\frac{d}{dz}u(z)+2\varepsilon u(z)=0 \qquad \left(\xi=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},\quad z=\frac{x}{\xi},\quad \varepsilon=\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)$$

これを多項式に展開して解く $\Rightarrow$ エネルギーの量子化
エネルギー固有値

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$\Rightarrow$ エルミート多項式の性質

- 調和振動子の波動関数

$$\begin{aligned}\psi(x)&=u(x)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\\ \psi(z)&=u(z)e^{\frac{1}{2}z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n=0\quad&:\quad E=\frac{1}{2}\hbar\omega\quad \psi_0(z)=C_0e^{-\frac{1}{2}x^2}\\ n=1\quad&:\quad E=\frac{3}{2}\hbar\omega\quad \psi_1(z)=C_1ze^{-\frac{1}{2}x^2}\\ n=2\quad&:\quad E=\frac{5}{2}\hbar\omega\quad \psi_2(z)=C_2\left(-2z^2+1\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}\\ \cdots\end{aligned}$$

規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$ より係数を決定。

$$\text{例）}\qquad \psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\xi\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

波動関数 $\to$ ポテンシャルとの対応、偶関数と奇関数
期待値（存在範囲）、古典力学での単振動との対応

- 零点振動
  最低のエネルギーが 0 ではない有限の値を持つ。

- 波動関数の直交性
  エネルギー固有値の異なる波動関数は直交性を持つ。
  $(E_n \to \psi_n(x),\ E_m \to \psi_m(x),\ E_n \neq E_m)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)dx = \delta_{nm}$$