S0319007 上野智也 統計物理学課題 20201104

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ を証明する

(証明)

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx$ とおく

$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx\right)$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x^2+y^2)} dx\, dy$

ここで $x = r\cos\theta$, $r = \sin\theta$ と変数変換すると

$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda r^2} r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r\, e^{-\lambda r^2} dr$

$= 2\pi \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda r^2} \right]_0^{\infty}$

$= \frac{\pi}{\lambda}$

$\therefore\ I = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ 図

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{\frac{3}{2}}}$ の証明

(証明)

$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx$ とする

$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial e^{-\lambda x^2}}{\partial \lambda} dx$

$= -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = -\frac{dI(\lambda)}{d\lambda}$

ここで $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ より

$-\frac{d}{d\lambda}\left(\pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$

したがって

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{\frac{3}{2}}}$ 図

$f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z = A \exp\left\{-\beta \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right\} dv_x dv_y dv_z$

上式は

$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp\left(-\beta \frac{m}{2} v_x^2\right) \exp\left(-\beta \frac{m}{2} v_y^2\right) \exp\left(-\beta \frac{m}{2} v_z^2\right)$

v_x, v_y, v_z に対する分布は c を定数とし、

$f(\xi) = c \exp\left(-\beta \frac{m}{2} \xi^2\right)$ $(\xi = v_x, v_y, v_z)$ となる

$\iiint f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$

$= A\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta \frac{m}{2} \xi^2\right) d\xi\right\}^3 = 1$

ここで、ガウス積分の公式から

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta \frac{m}{2} \xi^2\right) d\xi = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}$ となるため

$\iiint f(v_x, v_y, v_z)\, dv_x dv_y dv_z$

$= A\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

$\therefore\ \underline{A = \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{2}{3}}}$ //

$$\iiint \frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\,f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = \frac{E}{N}$$

$f(v_x, v_y, v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z = A\exp\{-\beta\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$ より

$$\frac{A}{2}m\iiint (v_x^2+v_y^2+v_z^2)\exp\{-\beta\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\}\,dv_x\,dv_y\,dv_z = \frac{E}{N}$$

ここで $\frac{m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-\beta\frac{m}{2}v_x^2)\,dv_x = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}$ （∵ガウス積分より）

v_y、v_zについても同様なので

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2\beta}A\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2\beta}$$

$$\beta = \frac{3N}{2E}$$

1分子のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ で 速度の2乗平均を $\bar{v}^2$ とすると

$$\frac{E}{N} = \frac{m}{2}\bar{v}^2 = \frac{3}{2\beta}$$

$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}k_BT$ より

$$\beta = \frac{1}{k_BT}$$