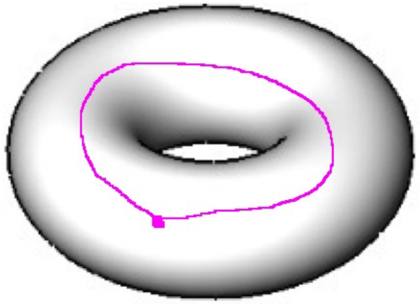
[解答] C, I, J, W, Z 等はすべて同相である．ある 2 つが同相でないことを示すには，成分数の不変性と制限同相定理を用いる．例えば，X と Y は同相でない．なぜなら，X はある 1 点をとり除いて成分数が 4 の図形にできるが，Y からどの 1 点を除いても，成分数は 3 以下である．結局，次のように 9 個の同相類に分類できる．

{A, R}, {B}, {C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z},

{D, O}, {E, F, T, Y}, {X}, {H, K}, {P}, {Q} □

同相でない理由が不十分である。そこで、各クラスからの代表A, B, C, D, E, X, H, P, Q がすべて互いに同相でないことを言う。
Aはある2点を除くと成分数が3だが、他にそのような文字はない。
Bはある2点を除いても連結だが、他の文字はみな、2点を除けば非連結となる。よってBはどれとも同相ではない。
Cは自分自身と交わっていないので他のどれとも同相ではない。
Dは円と同相で、他はみな円と同相ではない。
Xはある1点を除くと成分数が4だが、他にそのような文字はない。
そこで、残った4文字 E, H, P, Qだけで互いに同相でないことを言えばよい。
まず、Hはある2点を除くと成分数が4だが、E, P, Qにはその性質がない。
よって、残った3文字 E, P, Qだけで互いに同相でないことを言えばよい。
Pはある1点を除いても連結だが、Eはそうではない。また、Qはある1点を除くと成分数が3だが、Pにはそのような1点はない。従ってPとQは同相ではない。
故に残った2文字 E と Q が同相でないことを言えばよいが、連結成分だけの議論は面倒そうである。このケースは、「同相ならループ（単純閉曲線）はループに写る」という事実を使うのが手っ取り早い。（最初からこの事実を使えば、まずは、{A, B, P, Q}と残り全部に分けてから考えればよいわけである。）

定理1、定理2、問1を使うことで、トーラスと球面が同相でないことが分かる。
証）f :「トーラス」$\longrightarrow$「球面」が同相写像とする。まず定理1より、ℓ をトーラス上の単純閉曲線とすれば、$f(\ell)$ は球面上の単純閉曲線である。特に ℓ として、図のような単純閉曲線を取れば、
「トーラス $-$ ℓ」は連結である。



よって定理2により、「球面 $-$ $f(\ell)$」と「トーラス $-$ ℓ」は同相であり、問1により「球面 $-$ $f(\ell)$」は連結である。ところが、球面から球面上の単純閉曲線を除けば、2つの領域に分かれる。即ち連結ではなくなる。これは矛盾である。よってトーラスと球面は同相ではない。□

定理3　$f : X \longrightarrow Y$ を同相写像とし、C, C' を共に X 内の曲線とする。このとき、「C と C' が交わっている $\Leftrightarrow$ $f(C)$ と $f(C')$ が交わっている」が成り立つ。

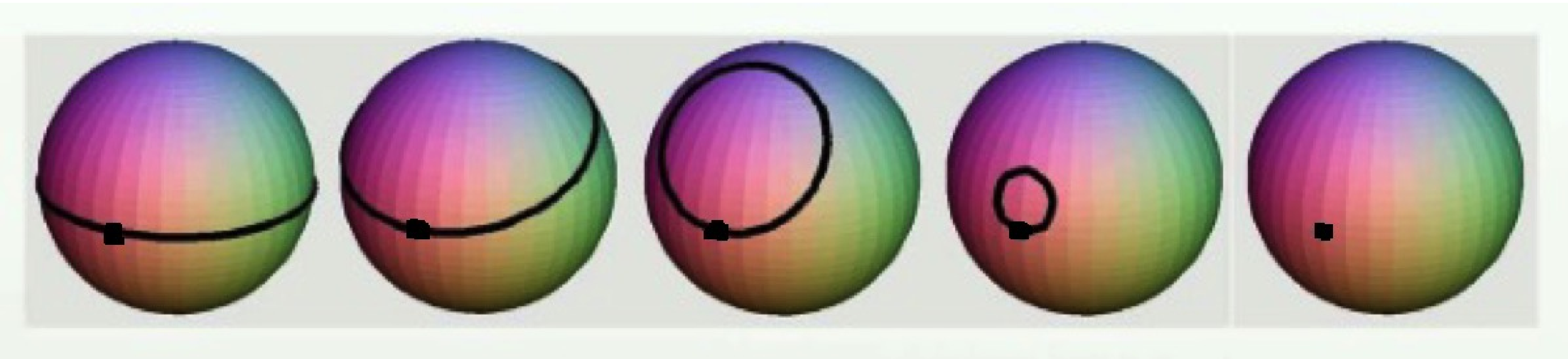
この定理を使っても、「トーラス $\not\cong$ 球面」が言える。

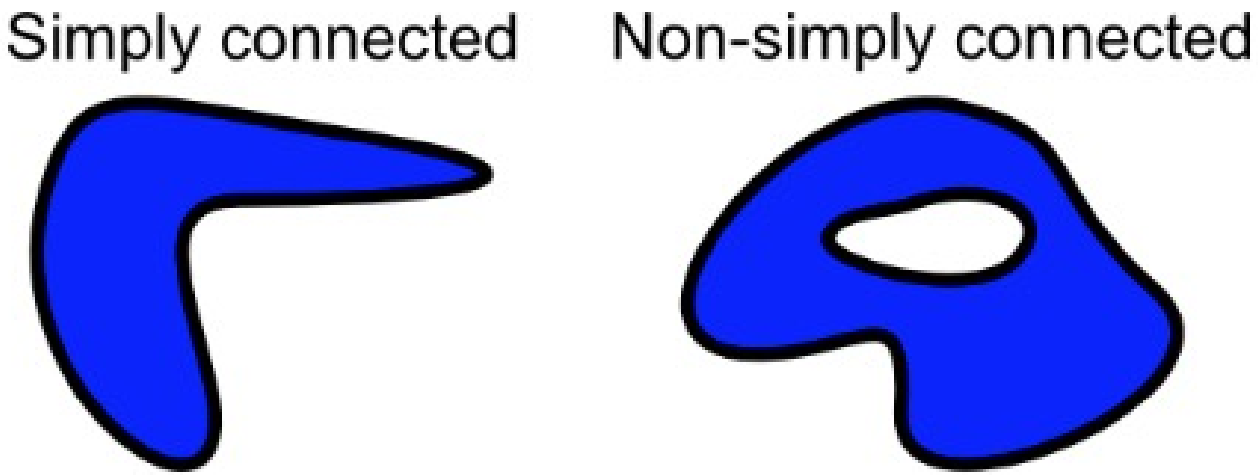
実際、もしトーラスと球面が同相なら、定理3より球面に K_5 が描けることになり矛盾。よってトーラスと球面は同相ではない。

1　単連結性

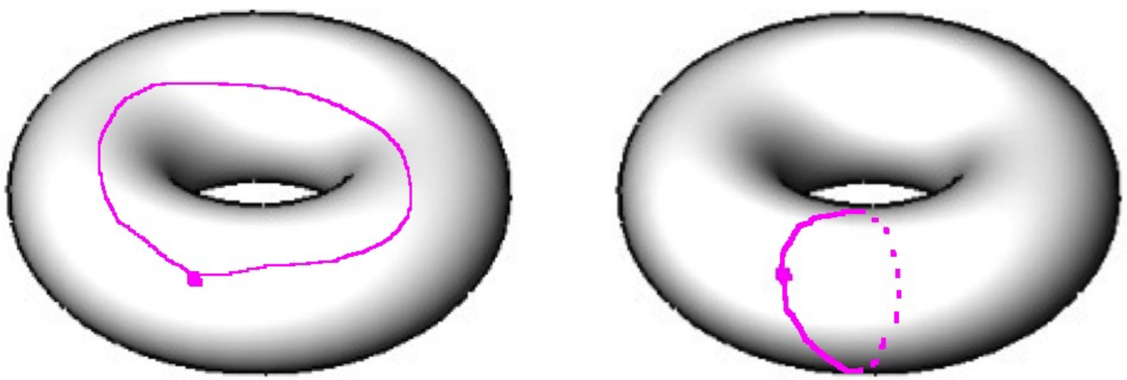
連結図形 X 内の任意のループを連続的に X 内で 1 点に収縮できるとき、X は単連結（simply connected）であると言う。視覚的に言えば、単連結な図形とは、穴のない連結図形のことである。

例えば球面は単連結である。





トーラスは単連結ではない。



問.　中身の詰まったトーラス（solid torus）は単連結か？

解）図１の輪は１点に収縮できるが、図２の輪は出来ない。よってsolid torusは単連結ではない。

図１

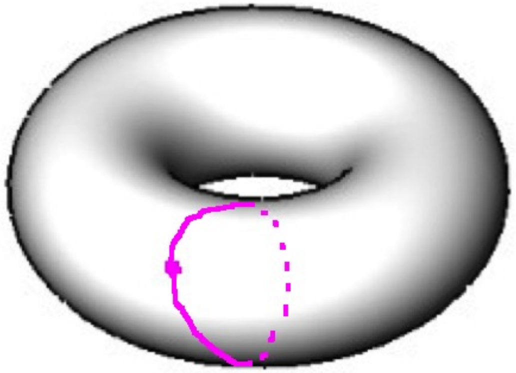
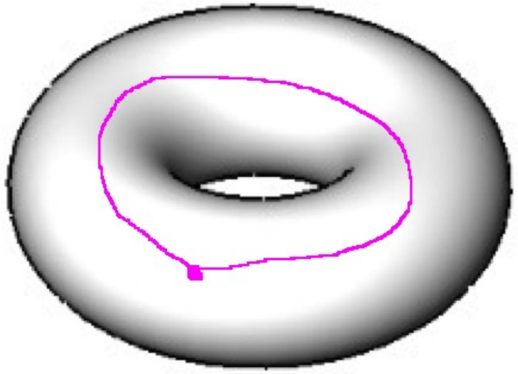


図２



定理4　図形XはYは同相とする。このとき、「Xが単連結$\Leftrightarrow$ Yが単連結」が成り立つ。

この定理を使っても、「トーラス $\not\cong$ 球面」が言える。実際、球面は単連結だが、トーラスはそうでないからである。

問1.　円柱から２つの底面を除いた図形は、円の内部と同相か？

問2.　平面$\mathbb{R}^2$と$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$は同相か？

問3.　$\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$は単連結か？

問4.　「図形XとYがどちらも単連結ならXとYは同相である」と言ってよいか？

問1．円柱から２つの底面を除いた図形は単連結ではないが、円の内部は単連結である。故に同相ではない。

問2．平面 $\mathbb{R}^2$ は単連結だが、$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ は単連結ではない。故に同相ではない。

問3．$\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$ は単連結である。

問4．No!

$X = \mathbb{R}^2$ と $Y = \mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$ がどちらも単連結だが、X と Y は同相ではない。何故なら、X から１点を除くと単連結ではないが、Y から１点を除いても依然単連結だから。

2　開集合と閉集合

$\mathbb{R}^n$ の2点 x と y に対して、$|x-y|$ は $\mathbb{R}^n$ における x と y の距離を表す。正確には、$x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$（座標表示）に対して、

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

と定義する。これは $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ での通常の距離の自然な拡張であり、この距離を使うことで、$\mathbb{R}^n$ においてもユークリッド幾何学と同じような性質がたくさん導ける。
そこで、現代数学では、$\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間と呼ぶことが多い。

部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の任意の点 x に対して、

$$B^n(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

（この集合を、x の n 次元 ε-開球と言う）が X に含まれるような正数 ε が存在するとき、X を $\mathbb{R}^n$ の開集合と言う。特に、ε-開球も開集合である。

1 次元開球は開区間のことであり、2 次元開球は円の内部のことである。円の内部は、開円板（open disk）と言うこともある。

大雑把な言い方をすると、X が開集合であるとは、X の（境界があれば）境界を含まない集合のことである。

また、$X \subset \mathbb{R}^n$ に対して、X の補集合 $\mathbb{R}^n - X$ が開集合とのき、X を $\mathbb{R}^n$ の閉集合と言う。

大雑把な言い方をすると、X が閉集合であるとは、X の（境界があれば）境界を含む集合のことである。

例．円の内部（開円板）は$\mathbb{R}^2$の開集合であり、円の外部も開集合である。

円の内部と境界を合わせた図形は$\mathbb{R}^2$の閉集合である。これを 閉円板（closed disk）と言うこともある。

円の外部と境界を合わせた図形は閉集合である！

問1.　数直線上の区間 $[0,1]$, $(0,1]$, $(0,1)$ のうち、$\mathbb{R}$ の開集合はどれか？　閉集合はどれか？
また、$\mathbb{R}^2$ の開集合、閉集合はどれか?

問2.　平面上の円の内部は $\mathbb{R}^3$ の開集合か？

問3.　球面は $\mathbb{R}^3$ の閉集合か？　$\mathbb{R}^4$ では？

問4.　トーラスは $\mathbb{R}^3$ の閉集合か？　$\mathbb{R}^4$ では？

解）問1．$\mathbb{R}$の開集合は$(0,1)$，閉集合は$[0,1]$.
どれも$\mathbb{R}^2$の開集合ではないが、$[0,1]$は$\mathbb{R}^2$の閉集合である。

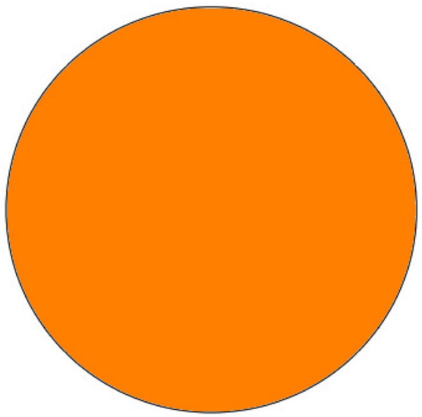
問2．平面上の円の内部は$\mathbb{R}^3$の開集合ではない。

問3．球面は$\mathbb{R}^n$（$n \geq 3$）の閉集合である。

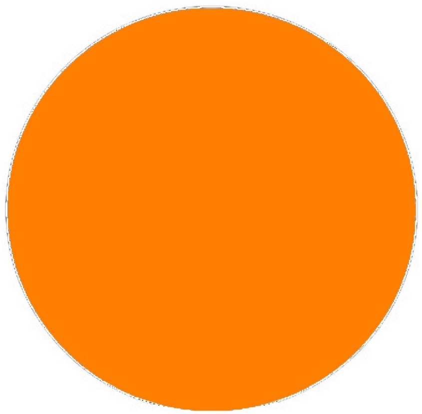
問4．トーラスは$\mathbb{R}^n$（$n \geq 3$）の閉集合である。

（注）空集合も開集合としておくといろいろと便利である。
従って、$\mathbb{R}^n$ 自身は $\mathbb{R}^n$ の開集合でもあり、閉集合でもある。
ただ、境界があるような部分集合については、開集合と閉集合は同相でない。例えば、開区間 $(0,1)$、閉区間 $[0,1]$、半開閉区間 $(0,1]$ などはどれも同相ではない。
また、開円板と閉円板は同相でない。

閉円板（境界を含む）　　　開円板（境界を含まない）



$\not\cong$



$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が有界な閉集合であるとき、X をコンパクト集合、または X はコンパクトであると言う。

例　開区間 $(0,1)$、閉区間 $[0,1]$、半開閉区間 $(0,1]$ はどれも有界だが、この中でコンパクトなものは $[0,1]$ だけである。
開円板 B^2 は有界だが、コンパクトではない。閉円板 $\bar{B}^2$ はコンパクトである。
n 次元開球 B^n（open ball）は有界だが、コンパクトではない。n 次元閉球 $\bar{B}^n$（closed ball）はコンパクトである。

定理 1　　X と Y が同相で、X がコンパクトなら Y もコンパクトである。

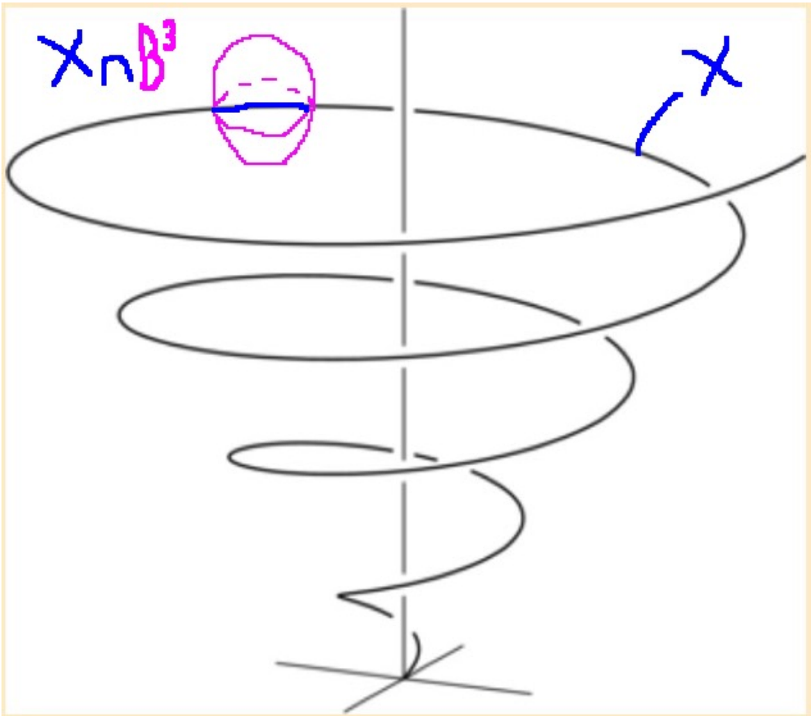
3　位相多様体

図形 $X \subset \mathbb{R}^n$ の各点 x の近傍、即ち、十分小さな正数 ε に対して $X \cap B^n(x, \varepsilon)$（これを x の近傍と言う）が、$\mathbb{R}^r$ と同相のとき（$\mathbb{R}^r \cong B^r(0, \varepsilon)$ だから $\mathbb{R}^r$ の代わりに、r 次元 ε-開球に同相と言ってもよい)、X を r 次元位相多様体または単に（r 次元）多様体と言う。

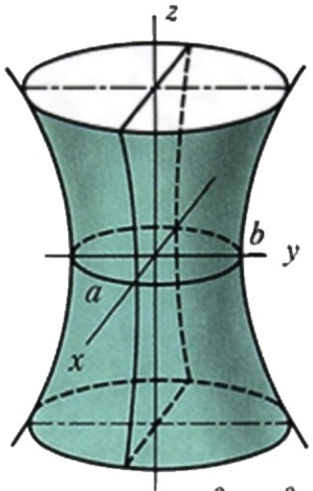
コンパクトな多様体を閉多様体と言う。

大雑把に言えば、r 次元多様体とは、各点の近傍が、r 次元 ε-開球になっているような図形のことである。

[1 次元多様体]

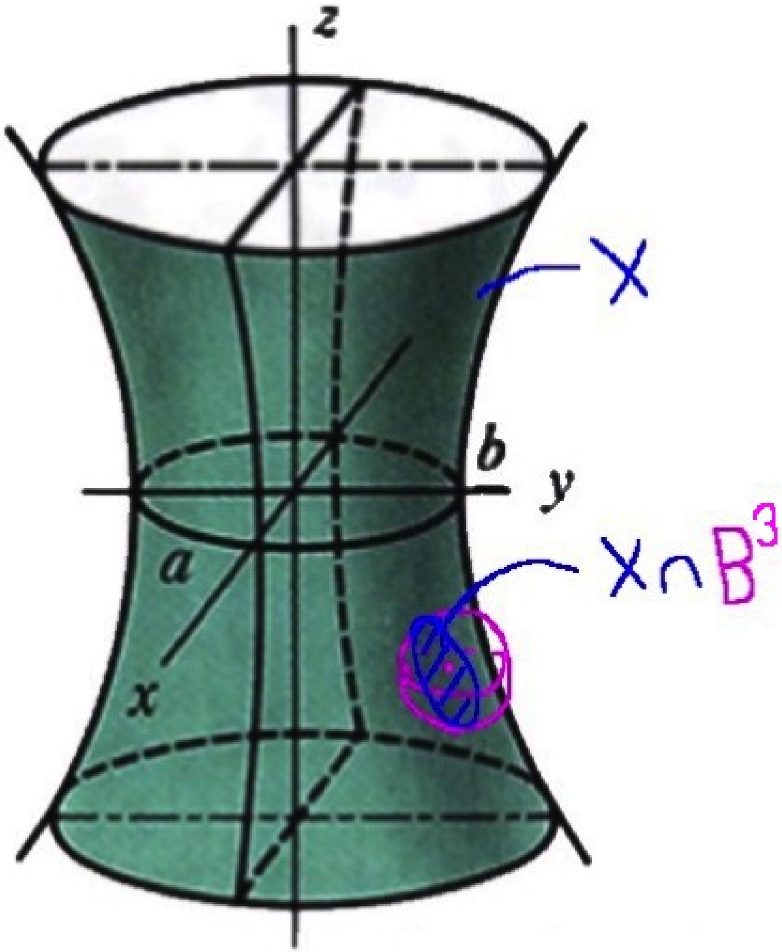


[2次元多様体]



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

一葉双曲面



5-1 「多様体」とはどういうものか？

この章では、どんな場所の周りもn次元ユークリッド空間とトポロジー的に同じような形の空間、すなわち**n次元多様体**と呼ばれる空間について述べます。

n次元多様体は、各点の周りが局所的にn次元単位開球体（3-6参照）と同相な図形です。この項では、$n=2$の場合の多様体について説明します。ざっくりいうと2次元多様体は、すごく複雑な空間もありますが、局所的に見ると「端のない円板（開円板）」と見なせるものです（図5-1-1）。

たとえば、トーラスは2次元多様体です。このような曲面が「世界」で、その中にあなたがいるとします。あなたは曲面の上に立っているのではなく、曲面に閉じ込められた厚みのない存在です。このとき、あなたは自分の世界をどのように認識することができるのでしょうか？

あなたの周りは**端のない円板と同相**です。それは、**周囲の世界が平面と同じ**、ということです。ちょうど我々が地球上で感じているように、あなたは自分が「どこまでも真っすぐに広がる平面にいるのだ」と思うでしょう（図5-1-2）。

とはいえ、あなたは曲面に閉じ込められているのです。地球上にいるのとはだいぶ違います。あなたの周りは実は平らではなくて、曲がっているかもしれません。しかし、何か別の情報がなければ「曲がっている」かどうかはわからないでしょう。3次元の存在である我々は2次元多様体をその外から見ることができるので、その全体像を捉えることができますが、曲面上にいる2次元人には、残念ながらそれはできません。

図5-1-1

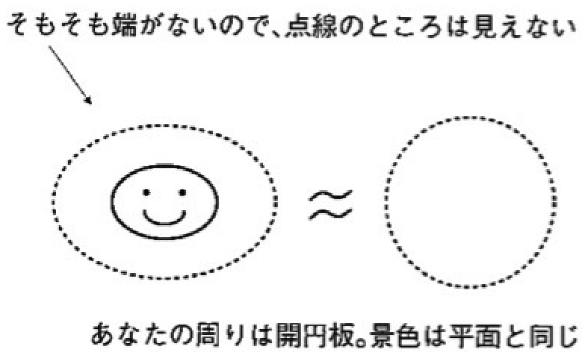
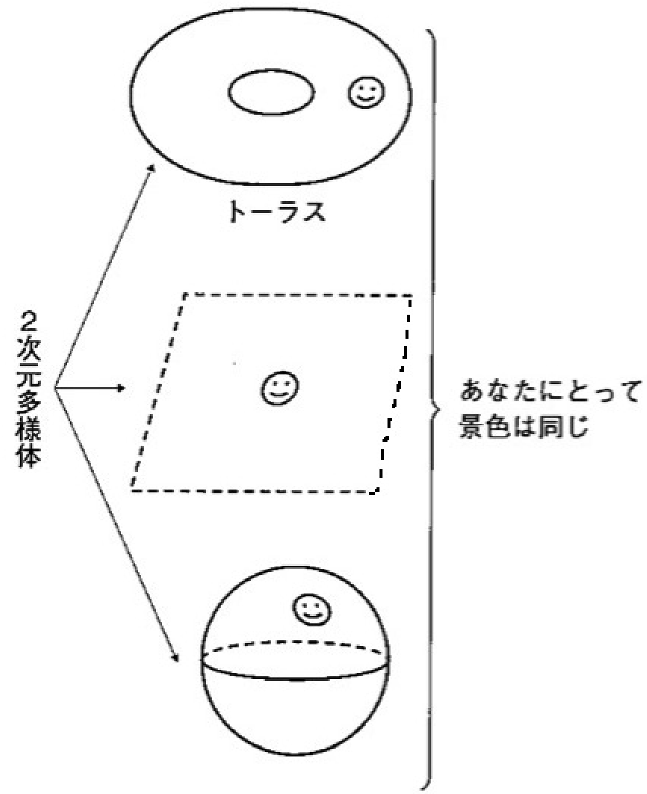


図5-1-2



5-4 「開多様体」と「閉多様体」の違い

多様体の簡単な例は、ユークリッド空間や開球体です(図5-4-1)。また、円環面やメビウスの帯で端のない図形も2次元多様体です。

さらに例を挙げると、1次元球面、(2次元)球面、トーラス、n人乗りの浮き輪などがあります。それぞれ、1次元多様体、2次元多様体、2次元多様体、2次元多様体です。また、3次元以上の多様体はイメージしづらいですが、n次元球面はn次元多様体です。

ここで、ともに2次元多様体である**2次元開球体**(端のない円板)と**2次元球面**は、少しようすが異なることに気がつくでしょうか？前者も後者も閉じ込められたあなたにとっては行き止まりのない世界です。真っすぐだと思う方向に歩いても、行き止まりはありません。しかし、あなたにとって前者は無限に広がる世界です。ただ、多様体を外から見たとき、ユークリッド空間は本当に無限に広がっていますが、開球体は有限な空間であることに注意しましょう。

(境界を持たない)多様体がそこに住む住人にとって無限に広がる図形のとき、**開多様体**(かいたようたい)といい(図5-4-1)、無限には広がらない図形のとき、**閉多様体**といいます(図5-4-2)。したがって、最初の例のユークリッド空間、開球体、端のない円環面、端のないメビウスの帯は開多様体です。そして、1次元球面、(2次元)球面、トーラス、2人乗りの浮き輪、3人乗りの浮き輪、…、n人乗りの浮き輪、n次元球面は閉多様体です。

なお、**開**とか**閉**という言葉は、境界を持つ多様体には使われません。

図5-4-1

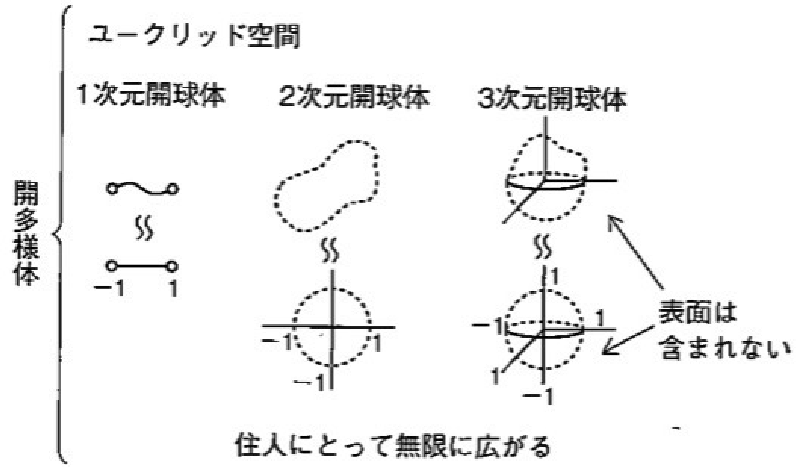
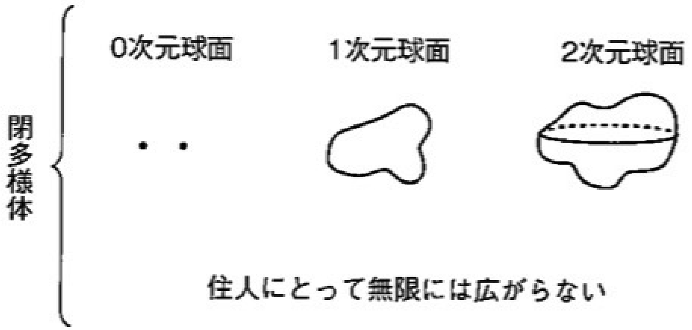


図5-4-2



「ざっくりわかるトポロジー」より
サイエンス社　名倉真紀　他

多様体の分類は非常に難解である。そんな中で、$r=1$なら易しく、$r=2$では、コンパクトを仮定すれば綺麗に分類できる。
$r=3$では、コンパクトを仮定しても難しく、今も盛んに研究されている。
最近解かれた ポワンカレ予想とは、「単連結なコンパクト3次元多様体は3次元球面に同相である」というもので、1904年、フランスの数学者アンリ・ポアンカレによって提出された。その後、約100年間解かれなかったが、2002年、ロシアの数学者、ペレルマンによって解決をみた。

[参考]　2002年から2003年にかけて、当時ステクロフ数学研究所に勤務していたロシア人数学者グリゴリー・ペレルマンはポアンカレ予想を証明したと主張し、2002年11月11日に論文をプレプリント投稿サイトとして有名なarXivにて公表した。そのなかで彼はリチャード・ストレイト・ハミルトンが創始したリッチフローの理論に「手術」と呼ぶ新たな手法を付け加えて拡張し、サーストンの幾何化予想を解決して、それに付随してポアンカレ予想を解決したと宣言した。サーストンの幾何化予想とは、任意の素な3次元多様体はいくつかの非圧縮トーラスにより、幾何構造をもつピース(閉領域)に分解されるというものである。さらに、幾何構造をもつ3次元多様体のモデルは8つあるというものである。また、サーストンの幾何化予想は、任意の素な3次元多様体は、いくつかのグラフ多様体と双曲多様体を非圧縮トーラスにより張り合わせて得られると言い換えることもできる。ペレルマンは、特異点が発生する3次元多様体に対して、3次元手術つきリッチフロー(Ricci flow with surgery) を適用することによって幾何化予想を解決した。手術とは、有限時間で生成する特異点の直前でシリンダー状の部分の切り口 S^2 に沿って球面状のキャップをかぶせてそこに標準解と呼ばれるものを貼ることである。ペレルマンは、この手術を特異点が生成する時空の点に限りなく近づける極限をとることにより、3次元リッチフローが有限時間での特異点を超えて標準的に延長することを証明した。それ以来ペレルマン論文に対する検証が複数の数学者チームによって試みられた。原論文が理論的に難解でありかつ細部を省略していたため検証作業は難航したが、2006年5– 7月にかけて3つの数学者チームによる報告論文が出揃った。これらのチームはどれもペレルマン論文は基本的に正しく致命的誤りはなかったこと、また細部のギャップについてもペレルマンの手法によって修正可能であったという結論で一致した。これらのことから、現在では少なくともポアンカレ予想についてはペレルマンにより解決されたと考えられている。ペレルマンは解法の説明を求められて多くの数学者達の前で壇上に立った。しかし、ほとんどの数学者がトポロジーを使ってポアンカレ予想を解こうとしており、聴講した数学者たちもほとんどがトポロジー

の専門家であったため、微分幾何学を使ったペレルマンの解説を聞いた時、「まず、ポアンカレ予想を解かれたことに落胆し、それがトポロジーではなく（トポロジーの研究者にとっては古い数学と思われていた）微分幾何学を使って解かれたことに落胆し、そして、その解説がまったく理解できないことに落胆した」という。なお、ペレルマンの証明には熱量・エントロピーなどの物理的な用語が登場する。2006年8月22日、スペインのマドリードで催された国際数学者会議の開会式においてペレルマンに対しフィールズ賞が授与された。しかしペレルマンはこれに出席せず、受賞を辞退した。2006年12月22日、アメリカの科学誌「サイエンス」で科学的成果の年間トップ10が発表され、その第1位に「ポアンカレ予想の解決」が選ばれた。

＜賞金100万ドル＞　アメリカにあるクレイ数学研究所 (CMI) はポアンカレ予想をミレニアム懸賞問題の一つに指定し、証明した者に100万ドル（約1億円）の賞金を与えると発表している。ここでペレルマンが本賞を受賞するのかどうかが一部の関心を呼んでいた。彼は賞金を受け取る条件である「査読つき専門雑誌への掲載」をしておらず、コーネル大学（サーストンが在籍していた）の運営している科学系論文投稿サイトarXivに投稿したのみであり、また彼の証明はあくまでも要領を発表したに過ぎないという説もあった。2010年3月18日、クレイ数学研究所はペレルマンへのミレニアム賞授賞を発表した。これに関してペレルマンは以前、同賞を「受けるかどうかは、授賞を伝えられてから考える」と述べていたが、結局授賞式には出席しなかった。研究所の所長は「選択を尊重する」と声明を発表し、賞金と賞品は保管されるという。2010年7月1日、ペレルマンは賞金の受け取りを最終的に断ったと報じられた。断った理由は複数あり、数学界の決定には不公平があることに対する異議や、ポアンカレ予想の解決に貢献したリチャード・S・ハミルトンに対する評価が十分ではないことなどを挙げている。さらに、このことについて本人は「理由はいろいろある」と答えた。（Wikipediaより）

（注）通常、多様体はより抽象的に定義される。まず一般の位相空間（topological space）を定義し、ハウスドルフ空間（Hausdorff space）を定義して初めて一般の多様体が定義できる。本講義では、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の中に多様体が入っているとしているので、特別な多様体を考えていることになる。しかしながら、一般の多様体は、必ずユークリッド空間に埋め込めるという定理（ホィットニーの可微分多様体の埋め込み定理を位相多様体に一般化した定理が存在する）が証明されているので、最初から、多様体がユークリッド空間の中に入っているとしても一般性を失わない。特にこれから考察する、２次元多様体は、必ず４次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ に埋め込めることが証明されている。

[目標]

1次元連結多様体（局所的にどこも開区間$(0,1)$と同相）別名、曲線、は、直線または円に同相である。（コンパクト1次元多様体は円だけである。）

2次元連結多様体（局所的にどこも円の内部と同相）別名、曲面、はどうか？

平面、球面、トーラスはみな、2次元多様体である。（平面はコンパクトでない。）他に？

本講義の最終目標は、コンパクト2次元連結多様体、別名、閉曲面、を分類することである。

4　セル分割グラフ

今後、コンパクト2次元連結多様体を単に閉曲面と呼ぶこととする。
閉曲面 X 上の連結グラフ G（辺の交差がないグラフ）において、$X-G$ の各連結成分（各面）がみな、円の内部と同相であるとき、G をセル分割グラフと言う。(円の内部と同相な図形を セルと呼ぶことがあるのでこの言い方になった。)

確認：本講義でグラフと言えば有限グラフのことなのでセルの個数も有限個である。

問1.　球面から次の球面上の図形を除いた図形は、円の内部と同相か？

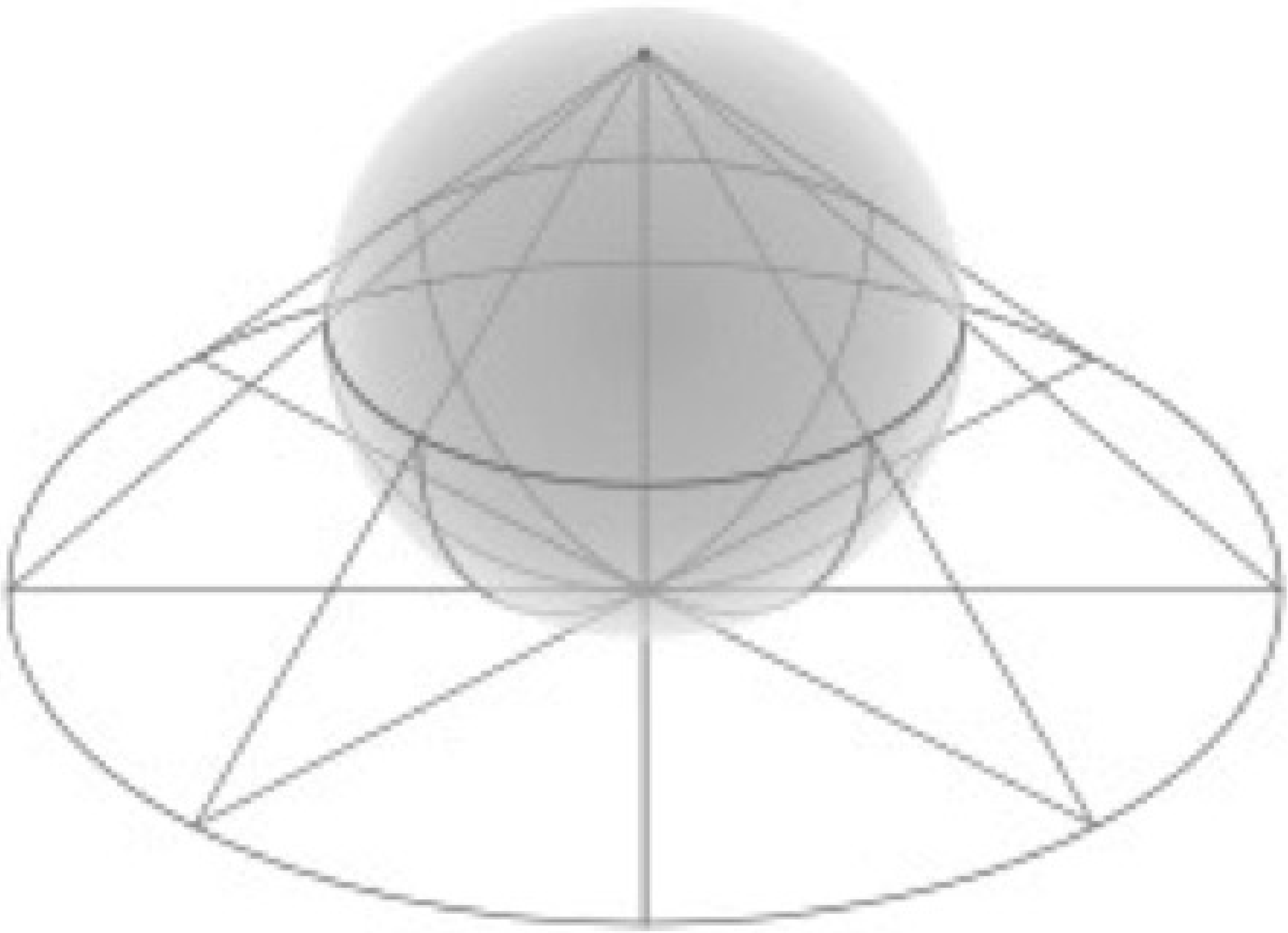
(a) １つの線分

(b) 交わらない２つの線分

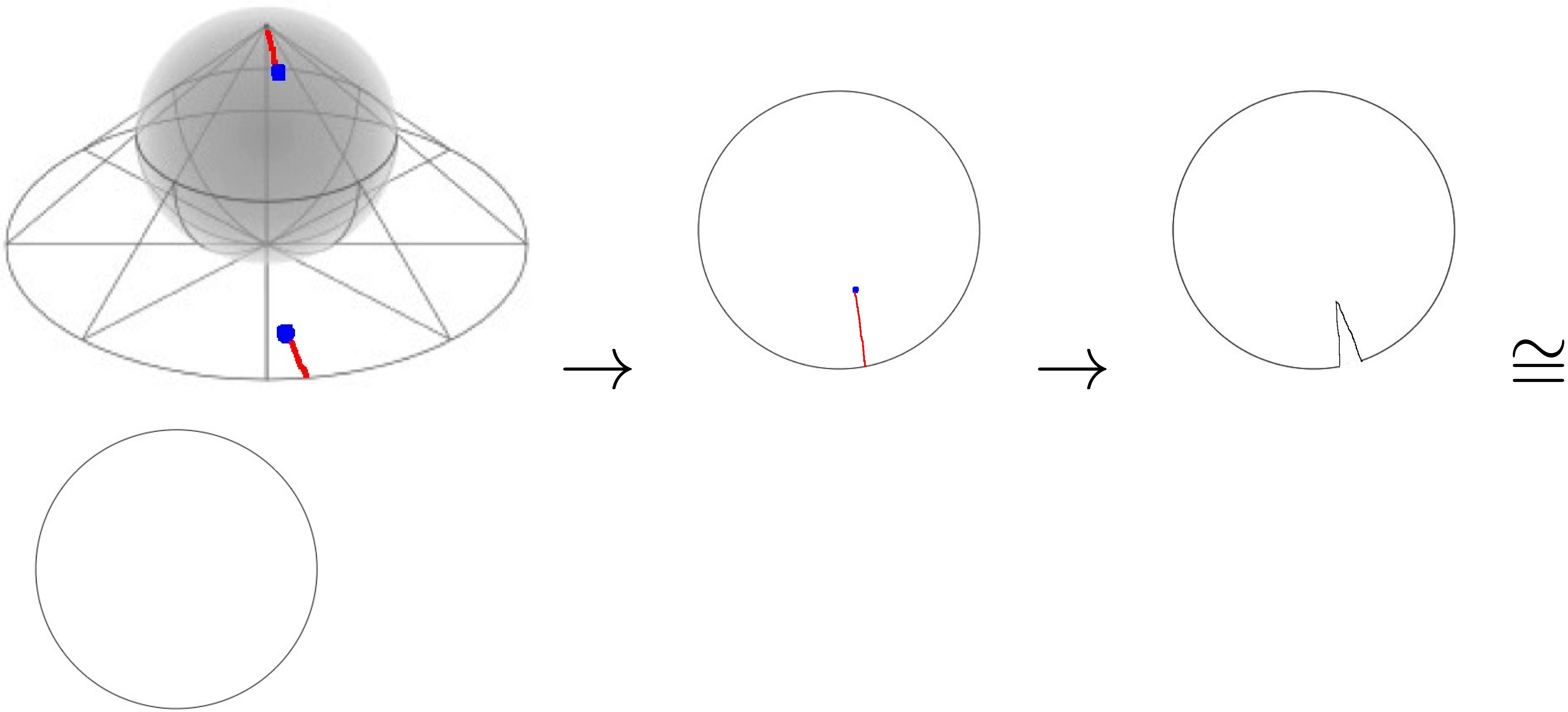
(c) 交わる２つの線分

（注）球面上の線分とは、直線ではなく曲線のことだが、誤解のない場合は単に線分と言うこともある。また、線分と言えば、閉曲線ではなく、有限な線のことである。

Recall　球面から1点（北極点）を除くと平面全体と同相である。下図は、stereographic projection と呼ばれている。

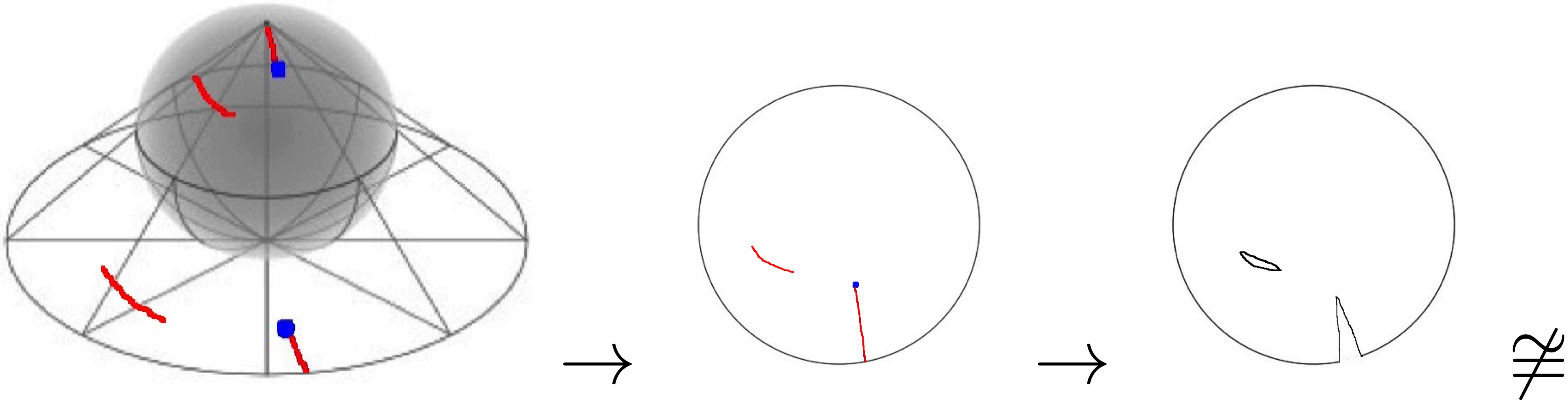


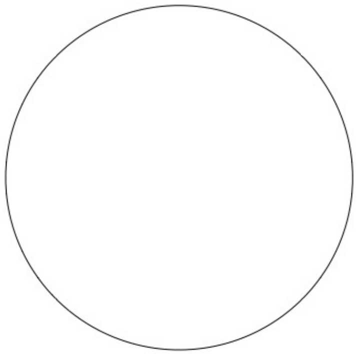
(a)　球面から１点（北極点）を除き、さらにその穴を広げれば、円の内部と同相になる。



（注）穴を広げたり、切れ目を広げたりしても同相だが、穴を埋めたりしては駄目！

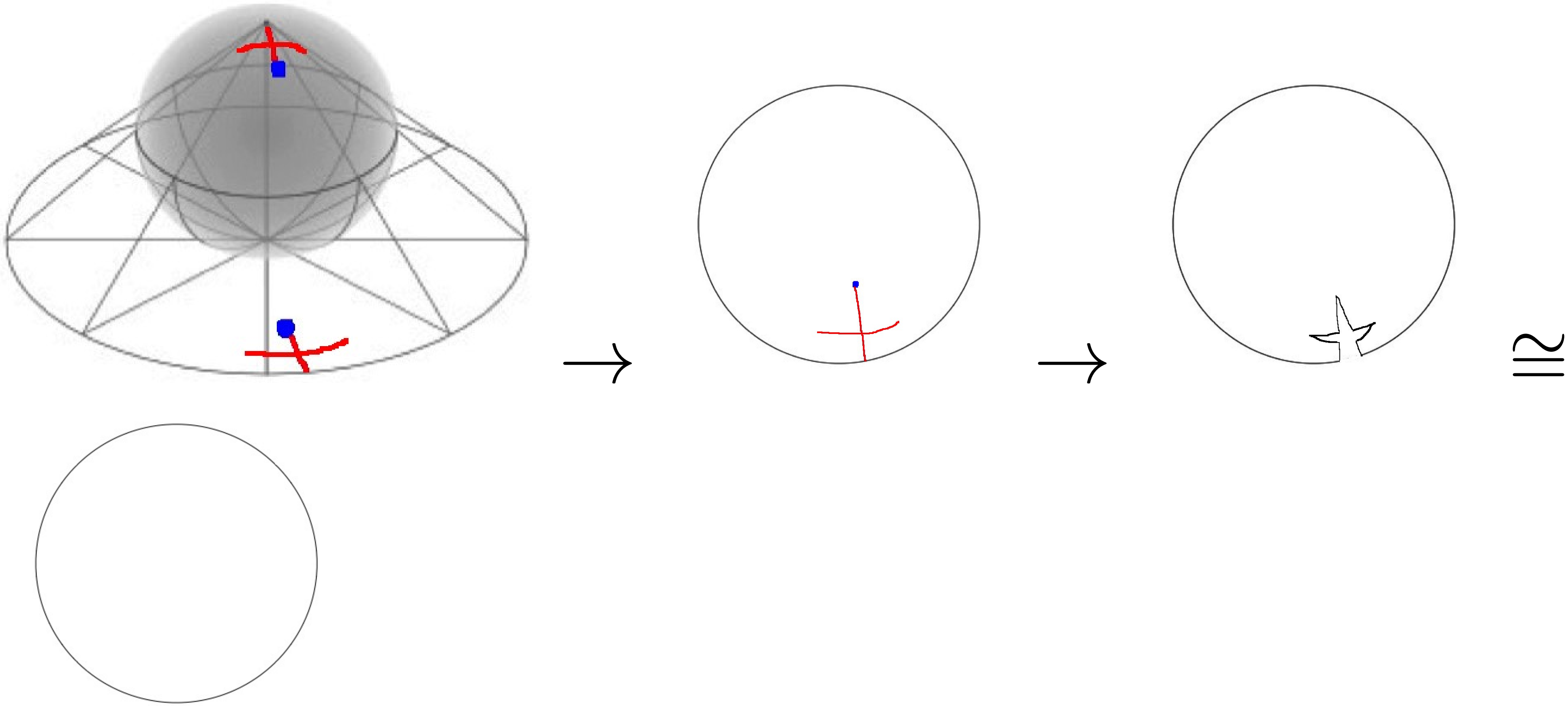
(b)



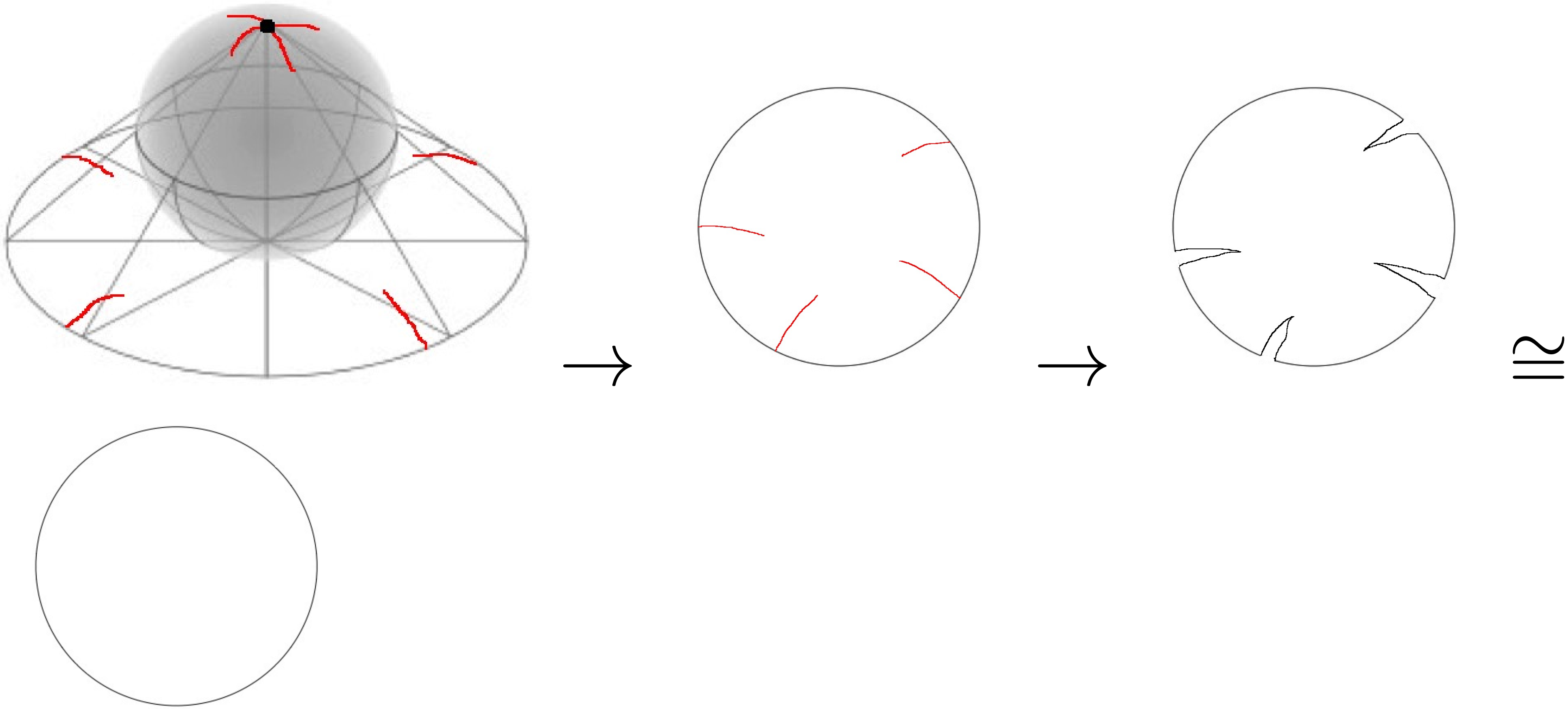


同相ではない！

(c)



(c)′

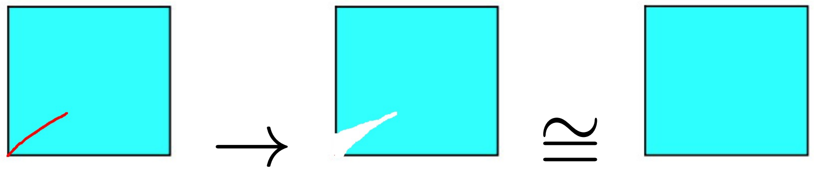


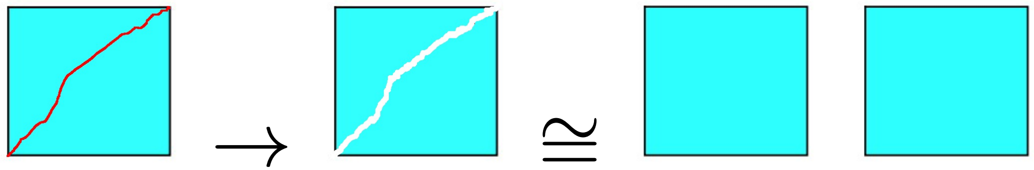
定理１　球面上のどんな連結グラフもセル分割グラフである。

証明）連結グラフは、復元定理により、部分グラフから、ペンダントの追加とバイパス辺の追加を繰り返すことで復元できる。セル分割グラフに、ペンダントを追加すると、１つのセルに切れ目ができるが、その切れ目を広げても同相なので、依然セルである。バイパス辺を追加すると、１つのセルが２つに別れ、セルが２つになるだけである。従って、ペンダントの追加とバイパス辺の追加を繰り返してもセル分割グラフである。
さて、球面上の１点はセル分割グラフであるから、どんな連結グラフもセル分割グラフとなる。□

定理１の証明はそのまま閉曲面にも使える。

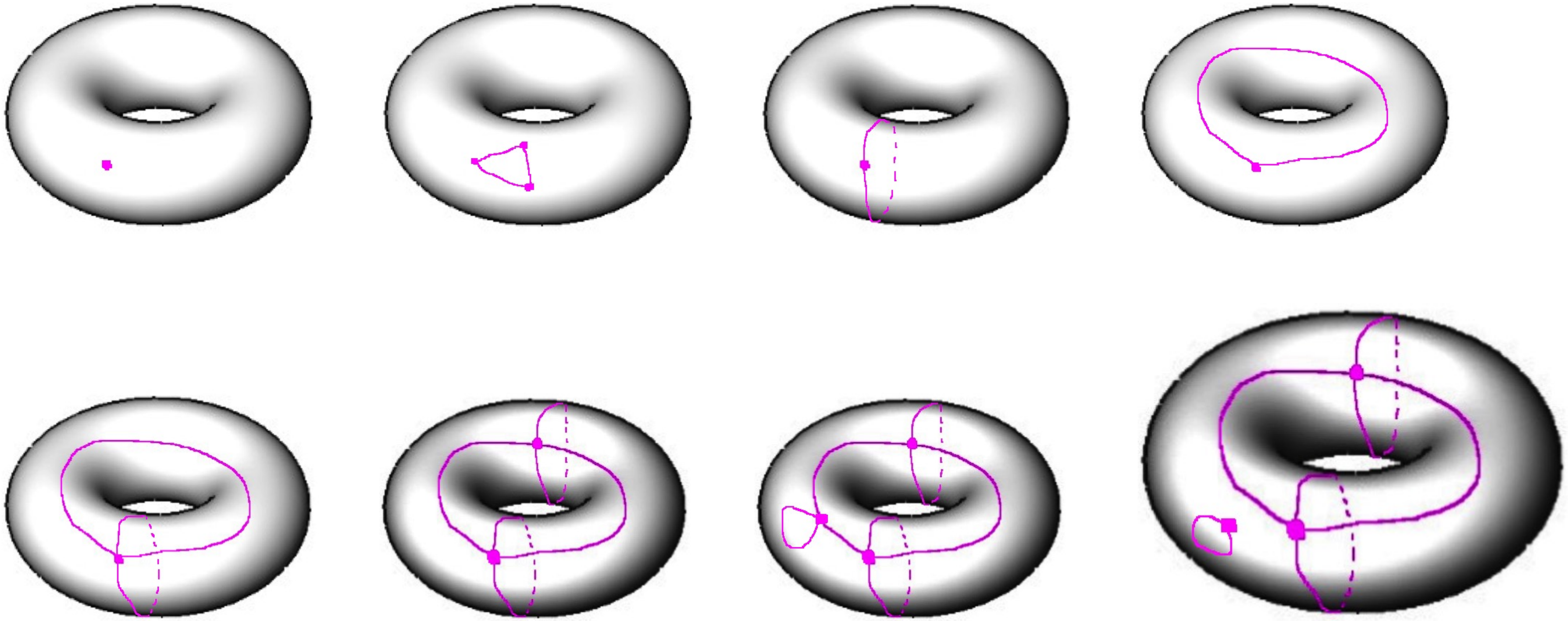
定理２　閉曲面上のセル分割グラフに、ペンダントの追加とバイパス辺の追加を繰り返しても依然セル分割グラフである。

証明）セル分割グラフに、ペンダントを追加すると、１つのセルに切れ目ができるが、その切れ目を広げても同相なので、依然セルである。

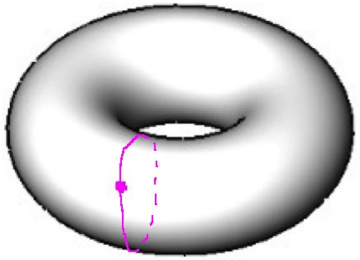
バイパス辺を追加すると、１つのセルが２つに別れ、セルが２つになるだけである。

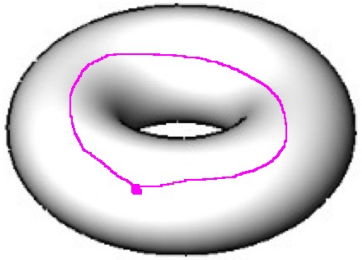
従って、セル分割グラフにペンダントの追加とバイパス辺の追加を繰り返してもセル分割グラフである。□

問2.　トーラスのセル分割グラフはどれか？



また、前にも考察したが、もう一度、オイラー標数を思い出し、それぞれのオイラー標数を求めよ。

（ヒント）  の面は円柱から両底面を除いた図形だから、セルではない。

では  は？