2020 年 10 月 12 日

位相幾何学入門

岩手大学 教育学部 数学科

吉井　洋二

参考文献

[1]　絵ときトポロジー・曲面のかたち
前原 潤・桑田 孝泰　　共立出版

[2]　読むトポロジー
瀬山 士郎　　角川ソフィア文庫

[幾何学]

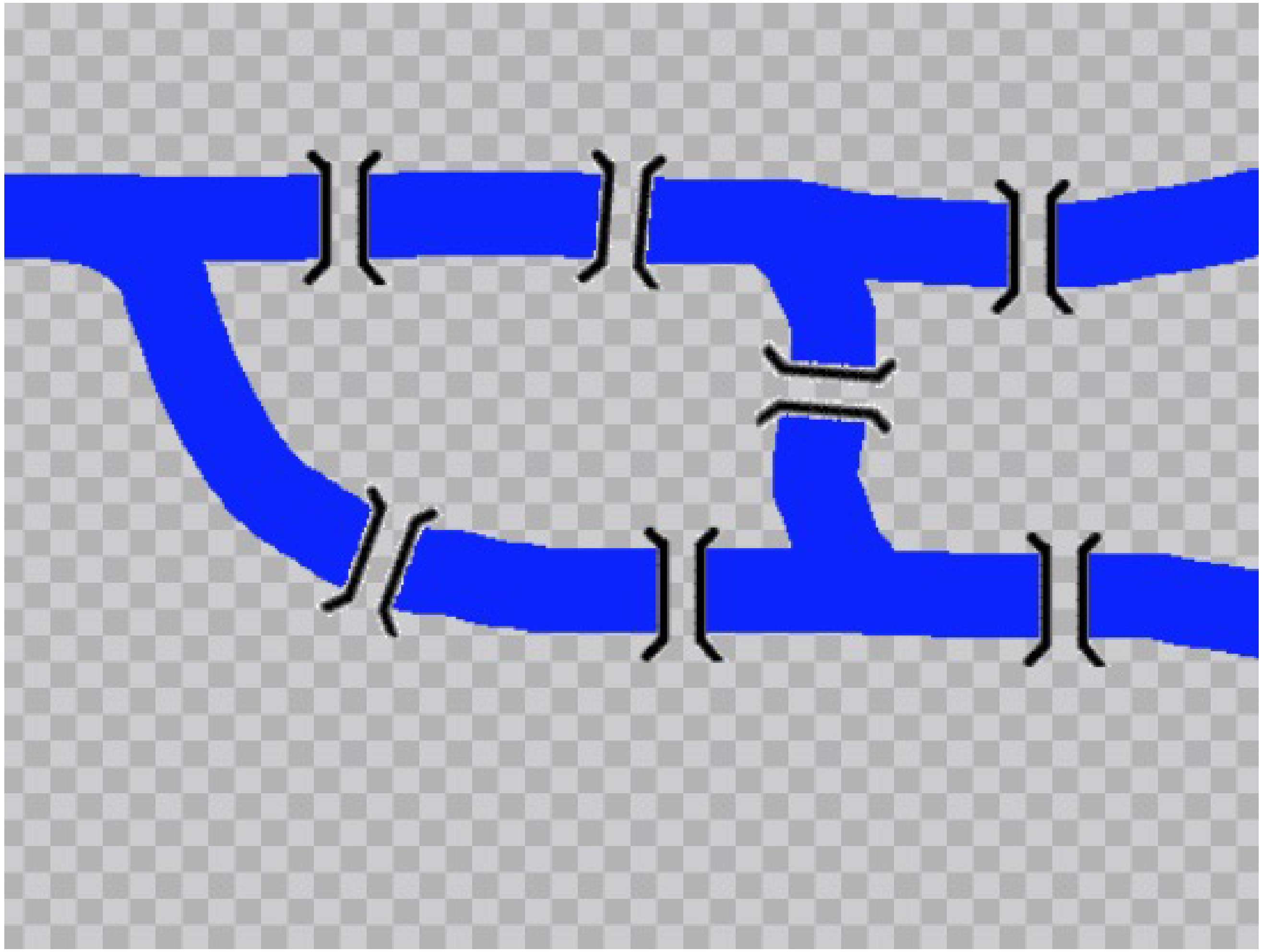
・初等幾何学（ユークリッド幾何学）

・微分幾何学
（曲線、曲面、可微分多様体、リー群など）

・位相幾何学
（グラフ理論、曲面の分類、位相多様体、結び目理論、組みひも理論など）

・グラフ理論
（ハミルトン経路、ネットワーク理論、符号理論など）

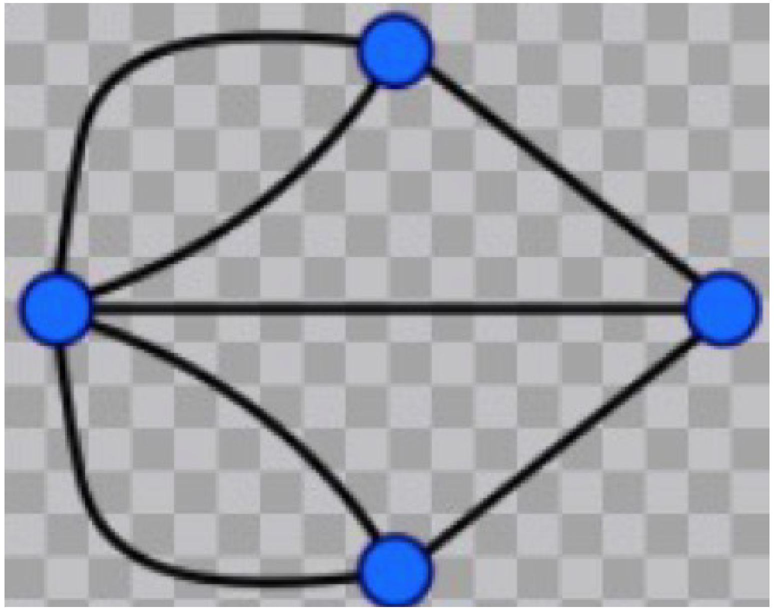
1　ケーニヒスベルクの問題

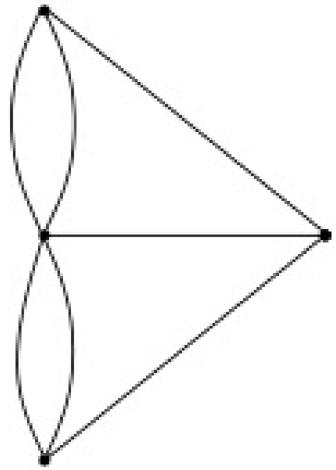


18 世紀の初め頃にプロイセン王国の東部、東プロイセンの首都であるケーニヒスベルク（現ロシア連邦カリーニングラード）という大きな町があった。この町の中央には、プレーゲル川という大きな川が流れており、七つの橋が架けられていた。あるとき町の人が、次のように言った。「このプレーゲル川に架かっている 7 つの橋を 2 度通らずに、全て渡って、元の所に帰ってくることができるか。ただし、どこから出発してもよい」。

町の人が言ったことは可能だろうか。

1736 年、レオンハルト・オイラーは、この問題を以下のグラフに置き換えて考えた。





このグラフが一筆書き可能であれば、ケーニヒスベルクの橋を全て 1 度ずつ通って戻ってくるルートが存在することになる。

　オイラーは、このグラフが一筆書きできないことを証明し、ケーニヒスベルクの問題を否定的に解決した。

　一筆書きとは、すべての辺を１回だけ通る道のことであり、オイラー道とも呼ばれる。

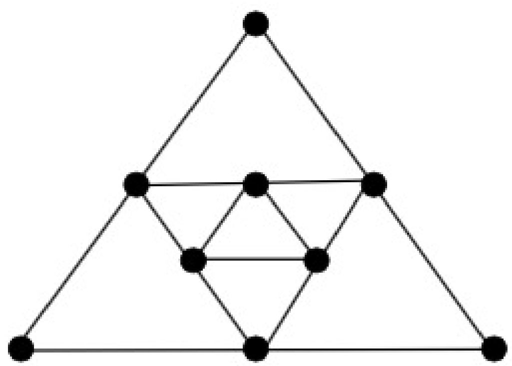
　オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783) はスイス人の数学者で, 物理学や数学の幅広い分野で多くの業績を残した。

$e^{\pi i} = -1$ や $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
などはオイラーの定理である。

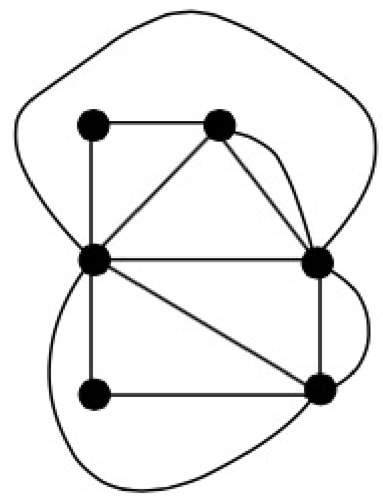
2　一筆書き

問.　次のグラフは一筆書き可能か？

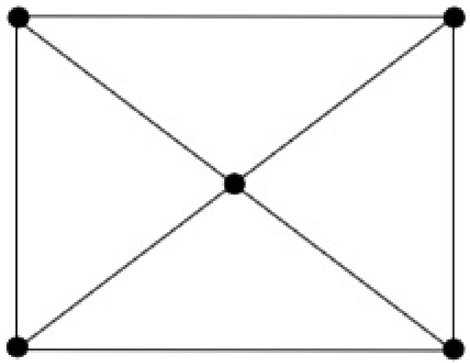
(1)



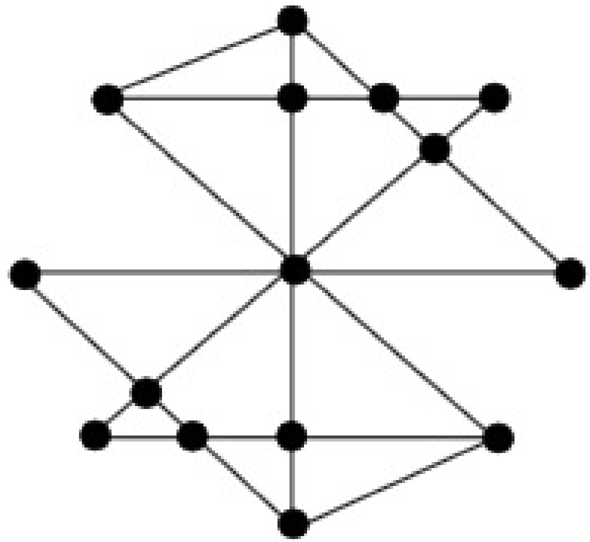
(2)



(3)



(4)



[一筆書き可能かどうかの判定法]

ある連結グラフが一筆書き可能な場合の必要十分条件は、以下の条件のいずれか一方が成り立つことである。

(i) すべての頂点の次数（頂点につながっている辺の数）が偶数（閉路）

(ii) 次数が奇数である頂点が 2 個で、残りの頂点の次数は全て偶数（閉路でない路）

次数が偶数である頂点を偶点、奇数である頂点を奇点と言う。

条件が必要であることは以下の通り。

(i) 閉路をもつには、始点以外の頂点はすべて入って出る必要があるのから偶点でなければならない。始点に関しても、また入ったら出てもよいが、最後は入って終わるわけだから始点も偶点でなければならない。

(ii) 閉路でない路があれば、最後は始点に戻らないわけだから、始点は奇点でなければならない。終点も最後は入って終わるから奇点でなければならない。始点と終点以外の頂点は、入ったら出るわけだから偶点でなければならない。

条件が十分であることの証明は、次に説明する一筆書きを見つける手順から従う。

[一筆書きの解法]

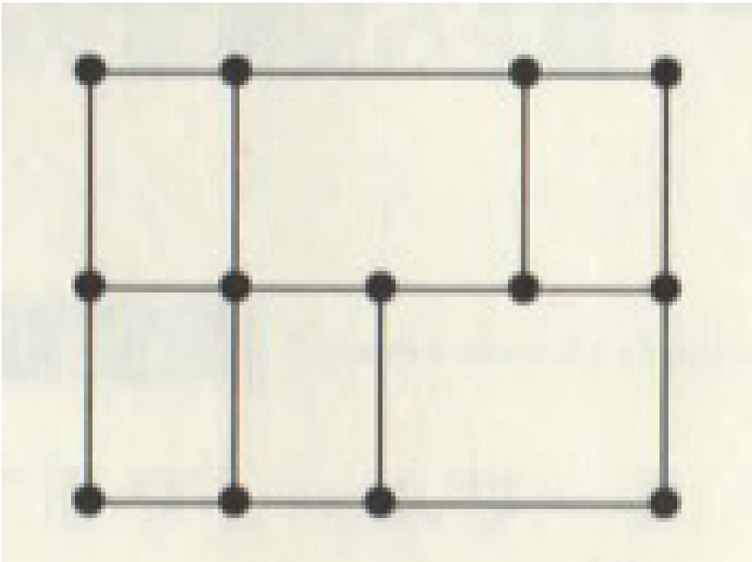
(i) すべての頂点の次数が偶数の場合

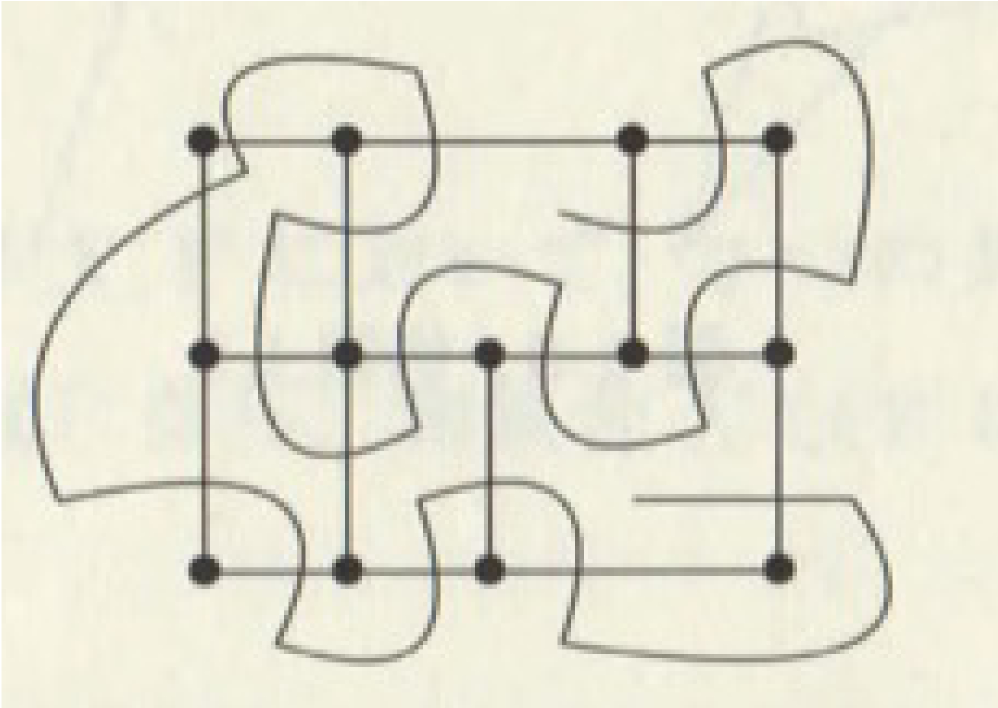
　どの頂点から出発しても（これを始点と呼ぶ）、始点に戻り、まだ出る辺があればまた出発し、また始点に戻る順路を考える。もしまだ通っていない辺があれば、先ほどの順路から、まだ通っていない辺の頂点を選び（この頂点から出るまだ通っていない辺の数は偶数である）、そこから寄り道をしてその頂点に戻ってくる順路を付け足したものに修正する。この修正を繰り返せば、最終的にすべての辺を通る閉路ができる。

(ii) 次数が奇数の頂点が 2 個で、残りの頂点の次数は全て偶数の場合

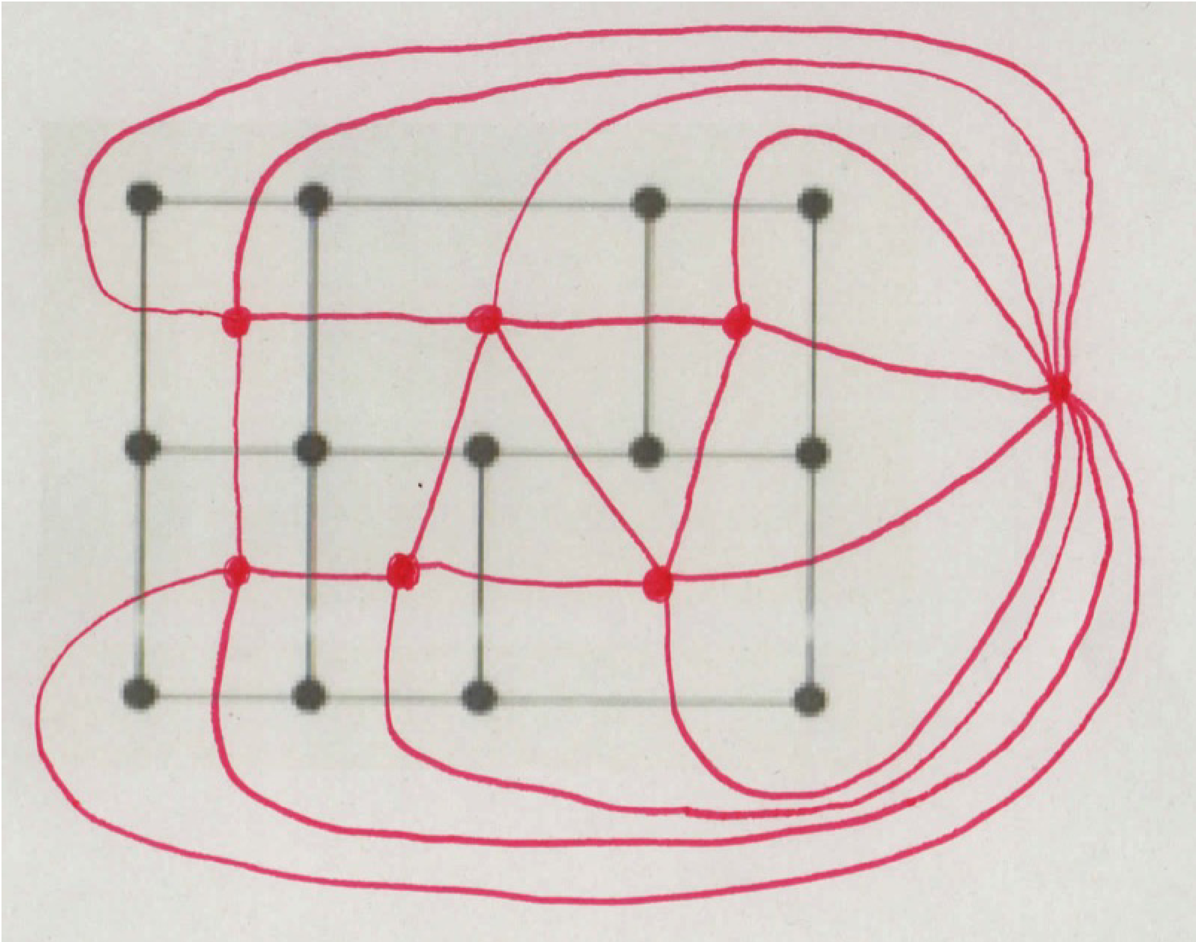
どちらかの奇点から出発し、もう一方の奇点へ抜ける順路を考える。もしまだ通っていない辺があれば、先ほどの順路から、まだ通っていない辺の頂点を選び（この頂点から出るまだ通っていない辺の数は偶数である）、そこから寄り道をしてその頂点に戻ってくる順路を付け足したものに修正する。この修正を繰り返せばよい。

問. 次の図に、各線分をちょうど一回ずつ横切るような一本の曲線を描き入れよ。





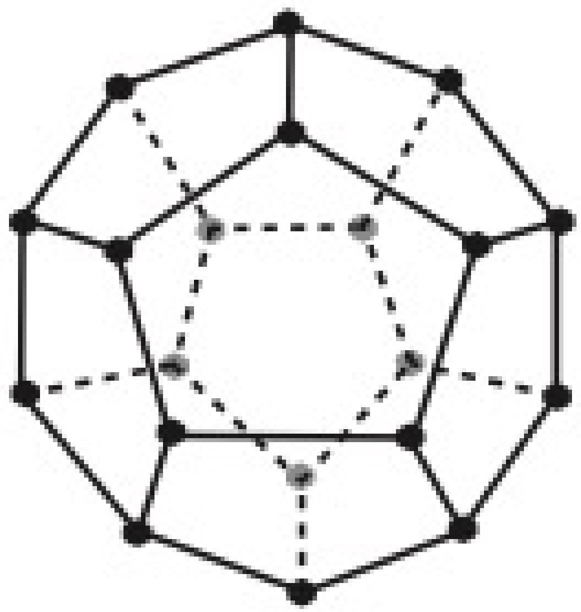
　部屋および外領域を点、壁があるところと線で結べば、次のグラフの一筆書きの問題となる。

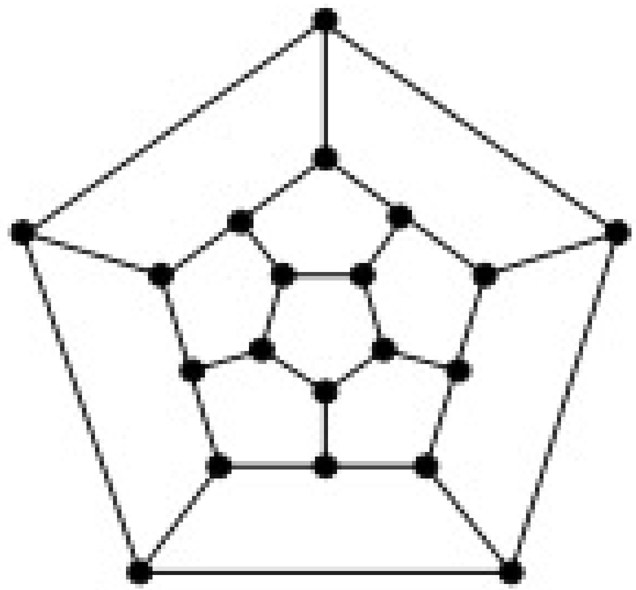


3　ハミルトン閉路

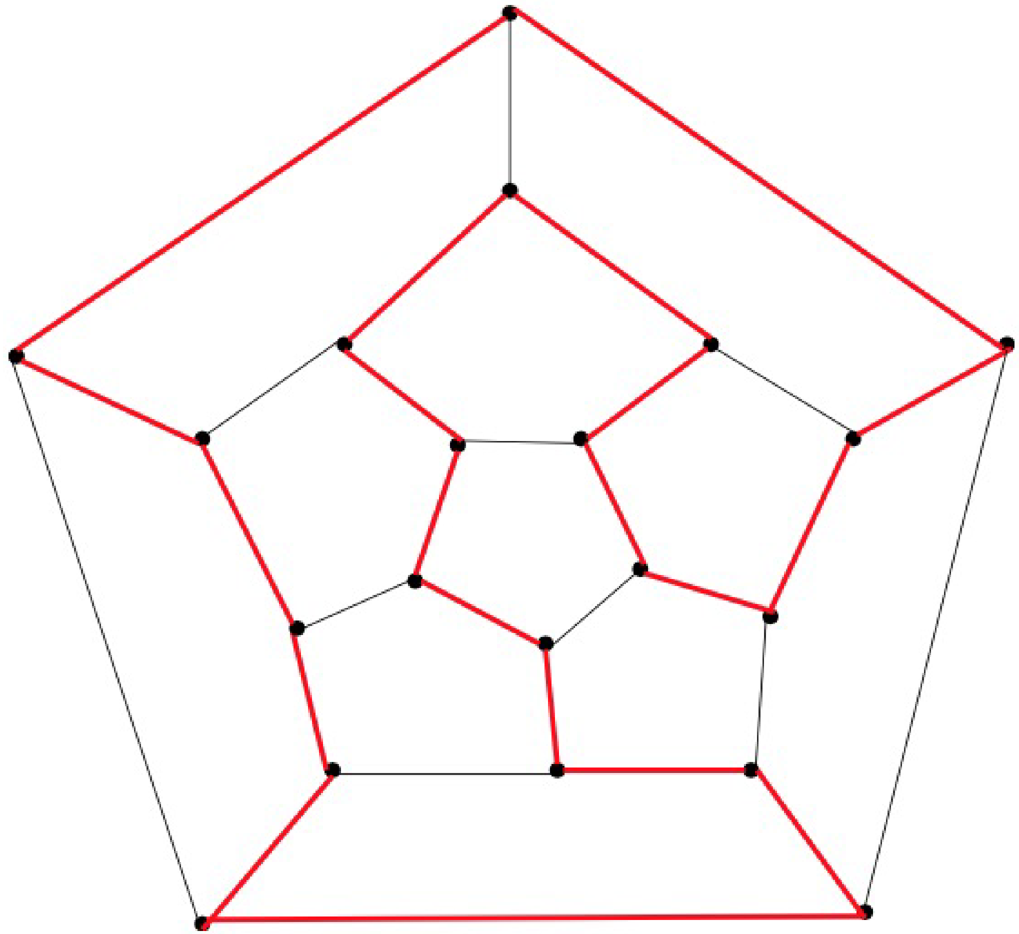
　すべての頂点をちょうど 1 回ずつ通る閉路をハミルトン閉路と言う。

　有名な例　「正 12 面体の各頂点を 1 回ずつ通って元に戻る道を見つけよ」（各 20 頂点を世界の有名な都市と思い、世界一周旅行のルートなどとして遊ばれた。）

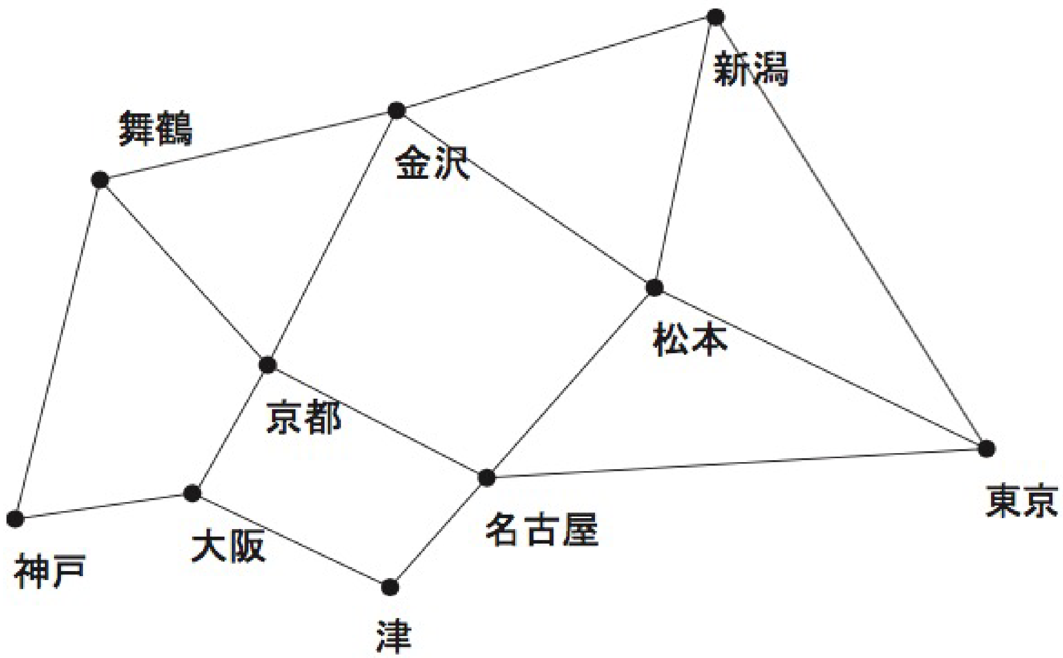




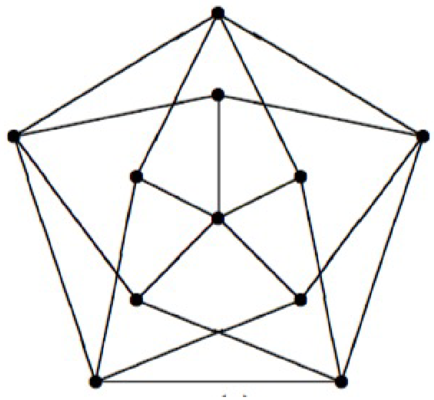
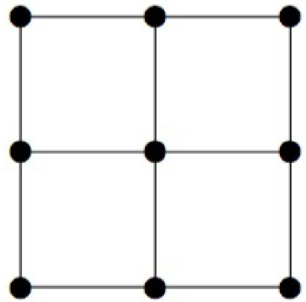
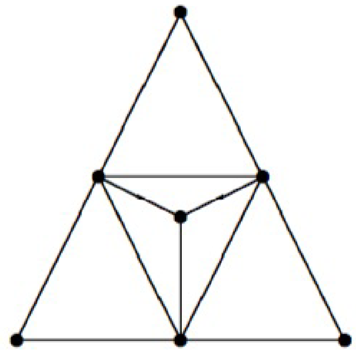
いろいろなハミルトン閉路があり、簡単である。例えば、



問 1.　ハミルトン閉路を見つけよ。



問 2.　ハミルトン閉路はあるか？

(1)  (2)  (3) 

但し (1) は、頂点 ● 以外では交わっていないものとする。

次のページの答を見る前に、このページをプリントして、赤線でハミルトン閉路を書いてみよう！　何回で成功するかな。