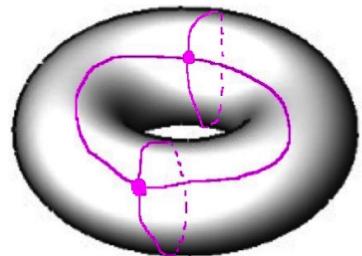


(円環領域) のようにできるのでセルではない。

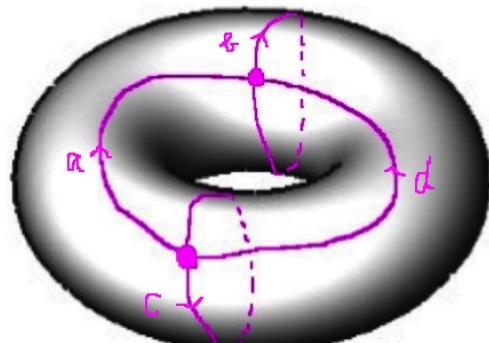
5 設計図と展開図

閉曲面上のセル分割グラフの各セルは多辺形（平面上の多角形の辺が曲がっていてもよいとしたもの）の内部と同相である。但し、2辺形やループ（1辺形）も多辺形の仲間とする。閉曲面 M 上のセル分割グラフのすべてセルを多辺形で表し、同一視される辺に向きとラベルを入れたものを、**そのセル分割グラフの設計図**（多辺形が1つの場合は**展開図**）と言う。設計図の辺を同一視することで繋げて行けば、1つの多辺形ができる。この多辺形を M の**展開図**と言う。（展開図の辺の数は偶数であることに注意しよう！）

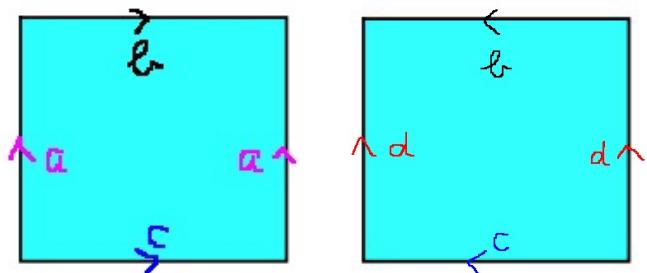
例1.



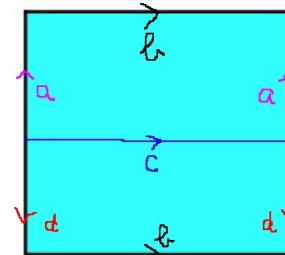
の設計図を描くには、まず各辺にラベル（アルファベット）と自分の好きな向きを入れる。



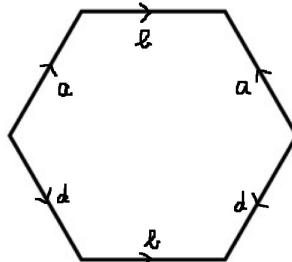
これにより設計図は2枚の多角形



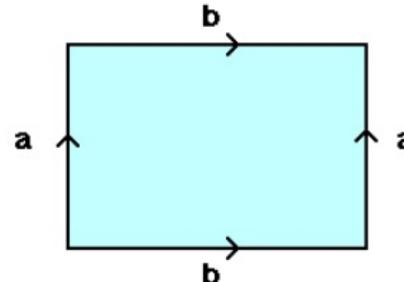
からなることが分かる。



展開図は、例えば c を同一視して、



やすく 6 角形に変えて
 が展開図である。ところで、
 d の向きを共に変えてもできる閉曲面は同じである。さらに、
 ad を 1 つの辺 a と思ってから同一視しても同じ閉曲面ができる。
 (このような操作を辺の統合という。) 従って上の展開図

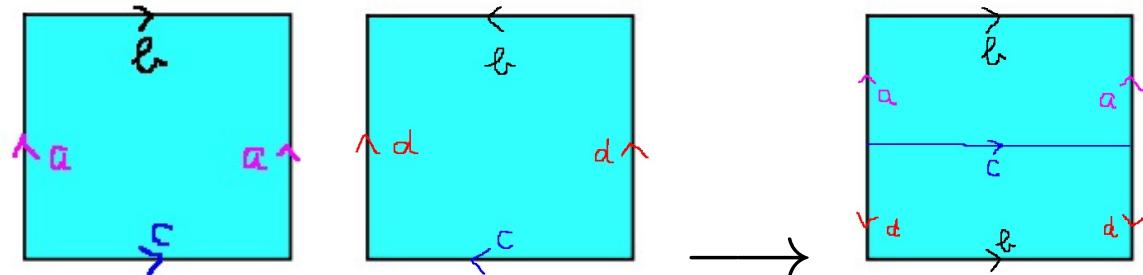


をトーラスの標準的な展開図
 上がる閉曲面は同じである。

に変えても、出来

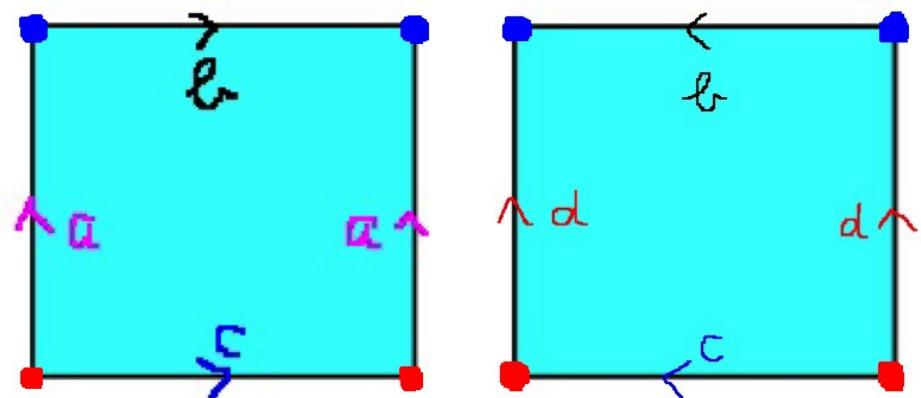
[向きについて①]

設計図の1つの辺の向きが、例えば時計回りならば、その辺を含む多辺形を平面上で回転させても時計回りである。

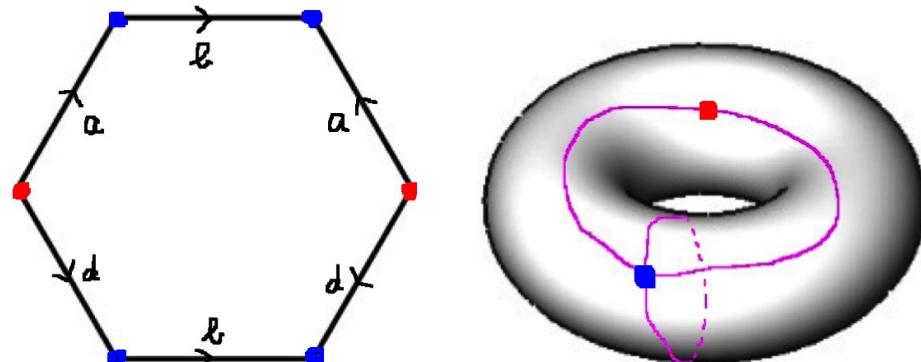


左のbは反時計回りの向きだから、180度回転しても反時計回りの向きである。

(注) 例1の設計図において、下図のように、赤の頂点は1つに、青の頂点も1つになる。見取り図から頂点の数が2であると分かっているが、設計図だけからも実際の頂点の数が分かる。そこで、設計図を組み立てたときの頂点数を、設計図の結節点数と呼ぶことにする。従って、この設計図の結節点数は2である。

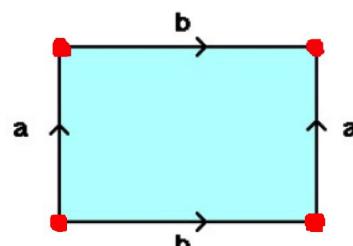


例1の6角形の展開図を閉曲面に戻したときの頂点数も2なので、この展開図の結節点数も2である。



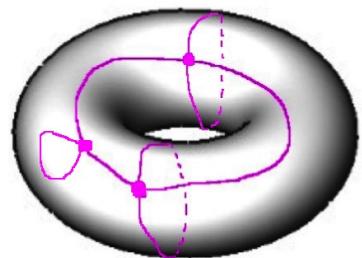
この展開図を閉曲面に戻すと、
もはや元のセル分割グラフではない！

トーラスの標準的な展開図
である。

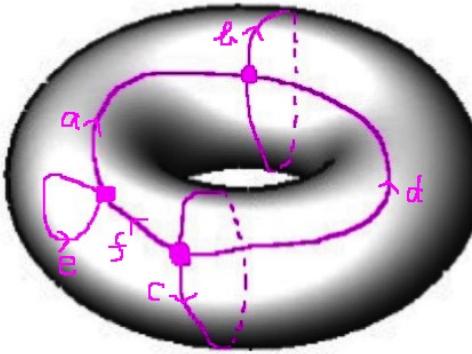


の結節点数は1で

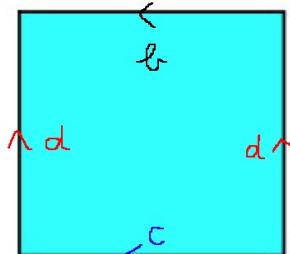
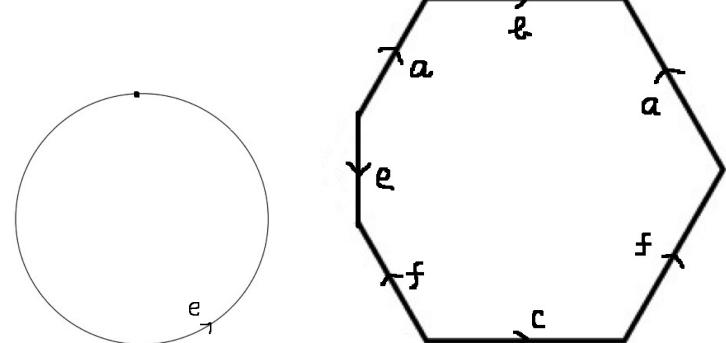
例2.



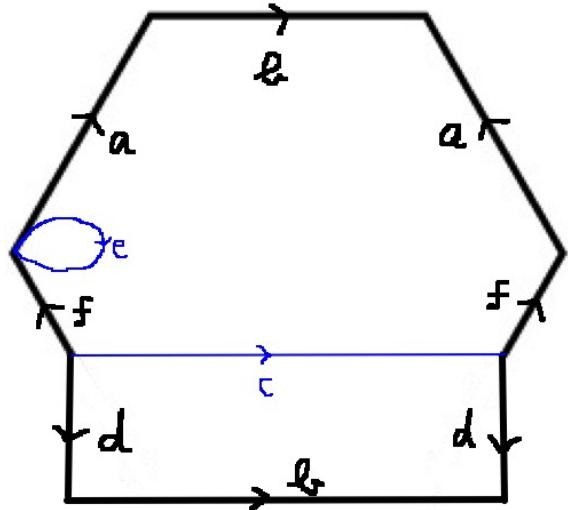
は、
入れれば、



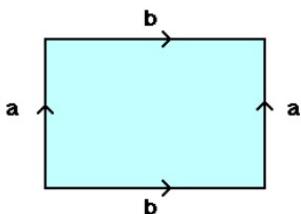
のようにラベルと向きを



であり、展開図は、 c と e を同一視して（1辺形の e は裏返してはめ込む）、

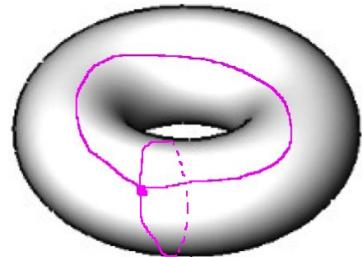


となるから、青線を無視したものが展開図となる。例1と同様に、 afd を1つの辺と考えても出来上がる閉曲面は同じだから、この辺を a と思えば、これもトーラ

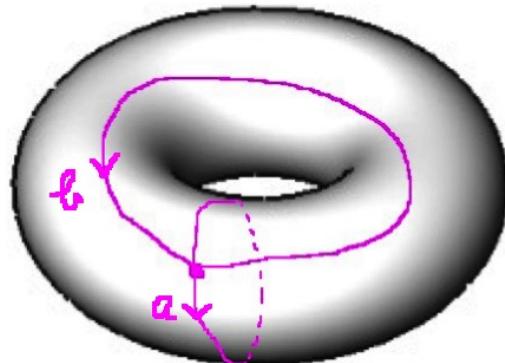


スの標準的展開図と同じである。

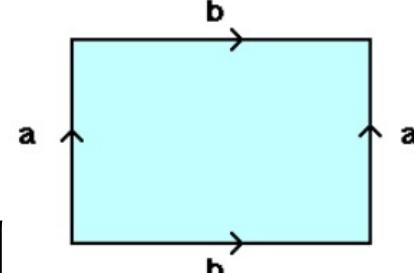
例3.



にラベルと向きを入れて



とすれば、いきなりトーラスの標

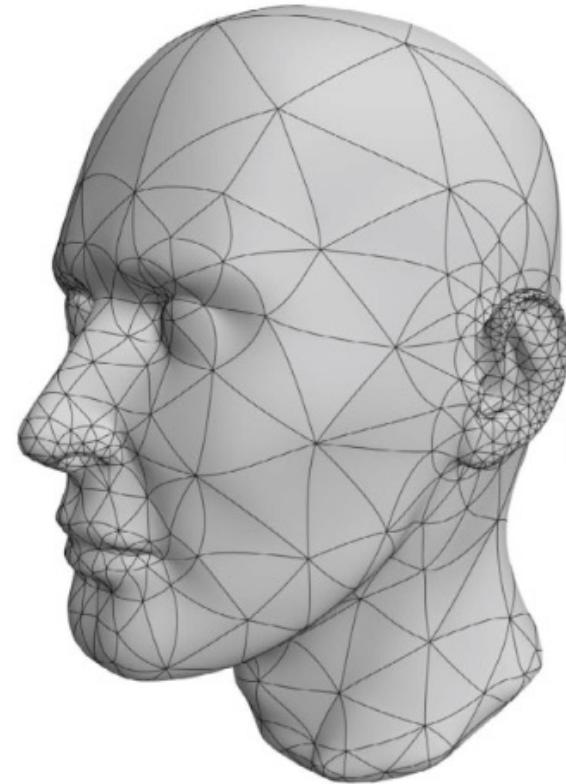
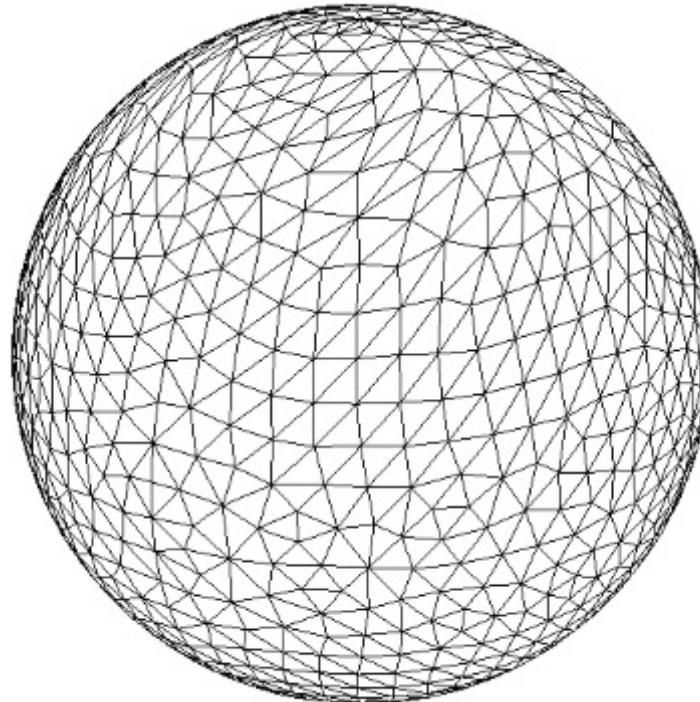


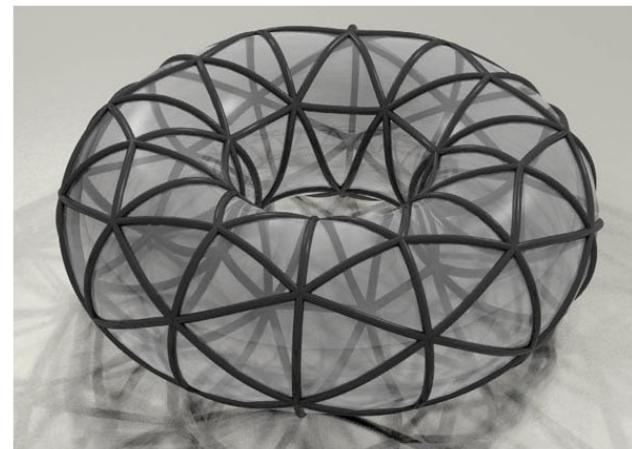
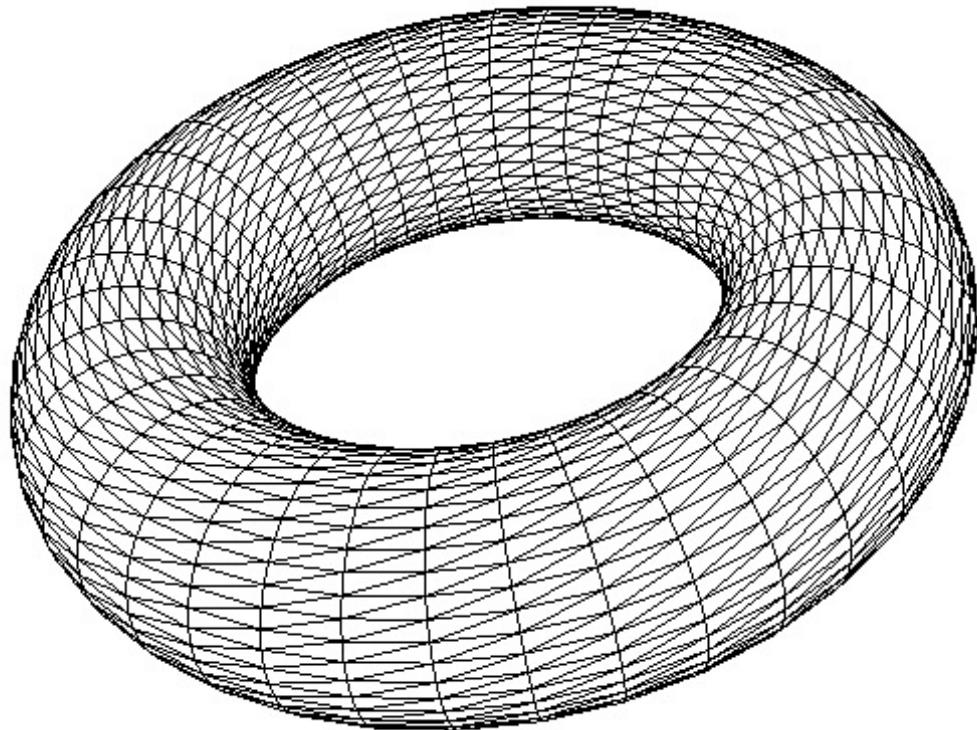
を得る。

準的な展開図

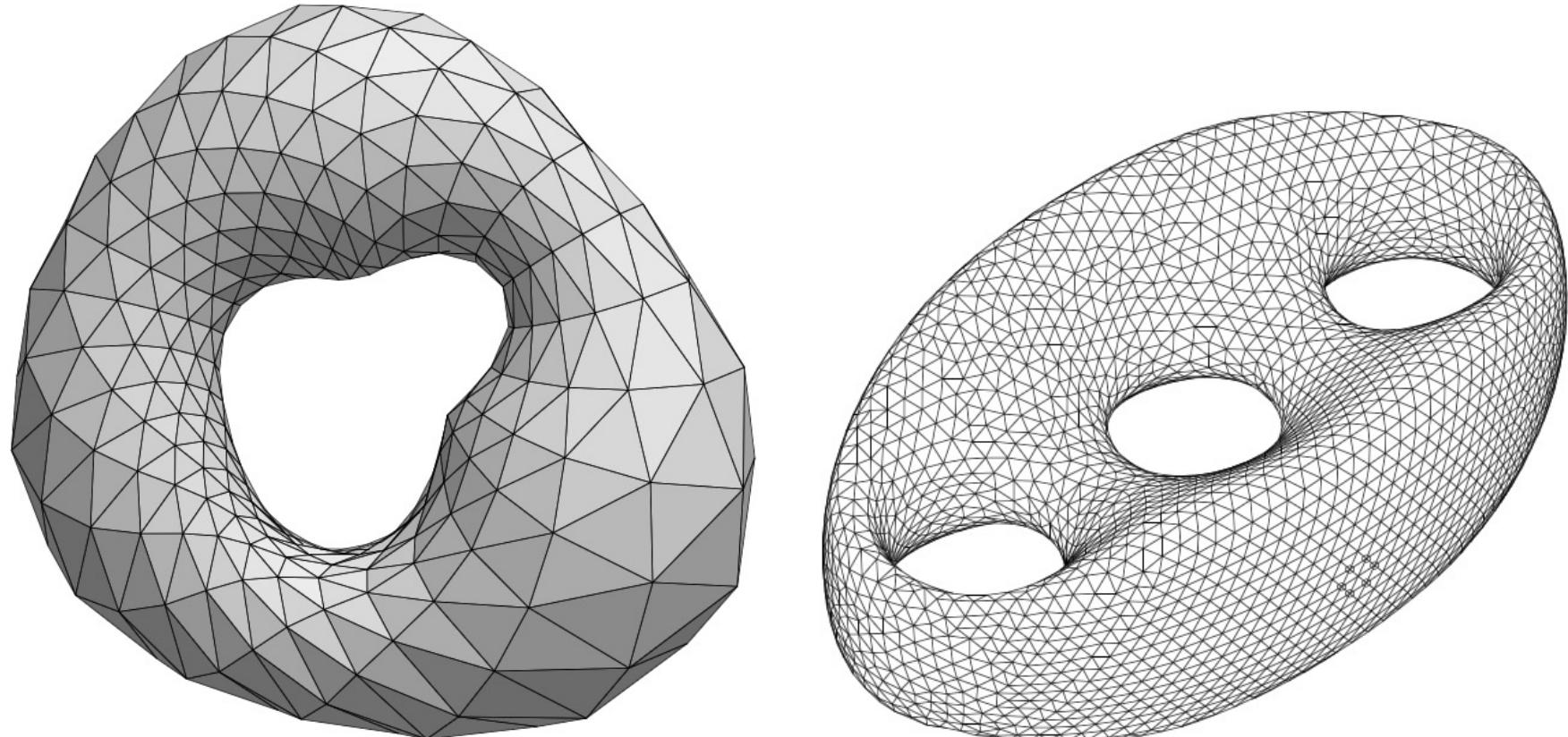
6 3角形分割

古くから、閉曲面には図のような3角形分割（すべての面が3辺形の有限連結グラフ）が描けることは、証明なしで使われていた。これを初めて厳密に証明したのは、Tibor Radó（1925年）と言われている。





Triangulated Torus



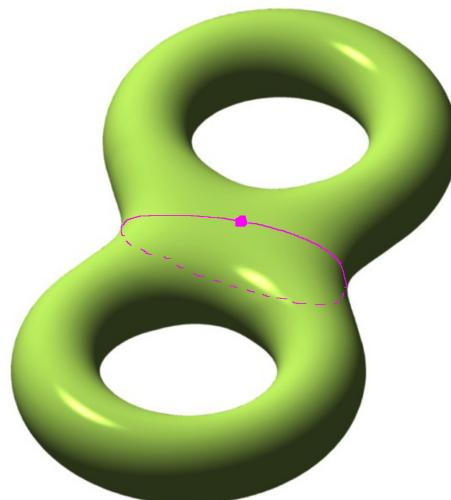
3角形分割はセル分割グラフの特別なものである。従って、
どんな閉曲面にもセル分割グラフが存在し、有限個の多辺形
からなる設計図および展開図が作れる！

7 ダブルトーラス

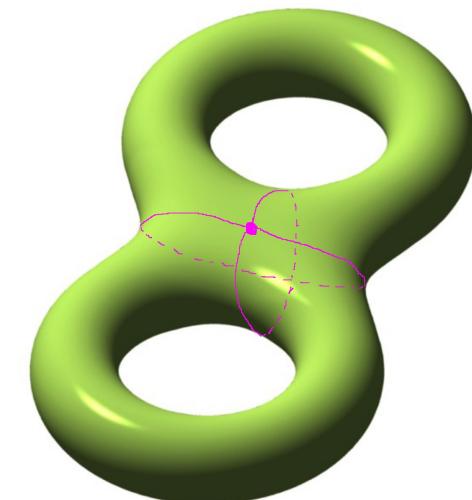
図のような閉曲面（ダブルトーラスと言う）にセル分割グラフを描き、オイラー標数を求めよ。また、そのグラフの設計図および展開図を描け。



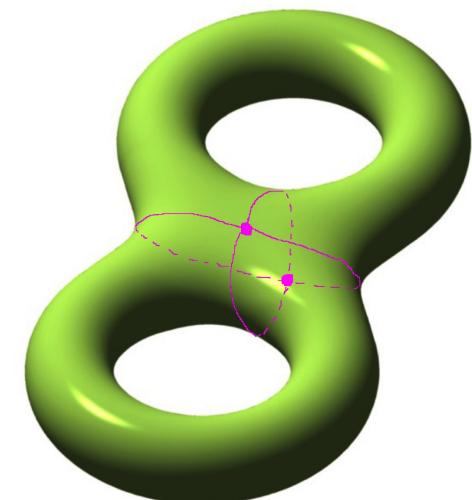
問. 次のグラフはダブルトーラス上のセル分割グラフか?
セル分割グラフなら、設計図および展開図を描き、オイラー標数も求めよ。



(1)



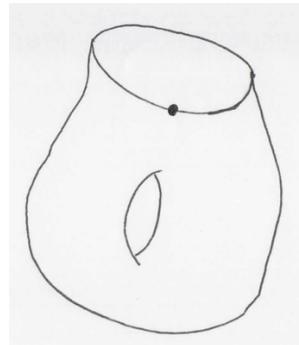
(2)



(3)

(1), (3) はダブルトーラス上の連結グラフだが、セル分割グラフではない。(2) は辺が交差しているので、ダブルトーラス上の連結グラフですらない。

(1)

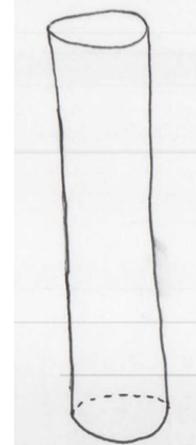


は単連結ではないからセルではない。

(3)

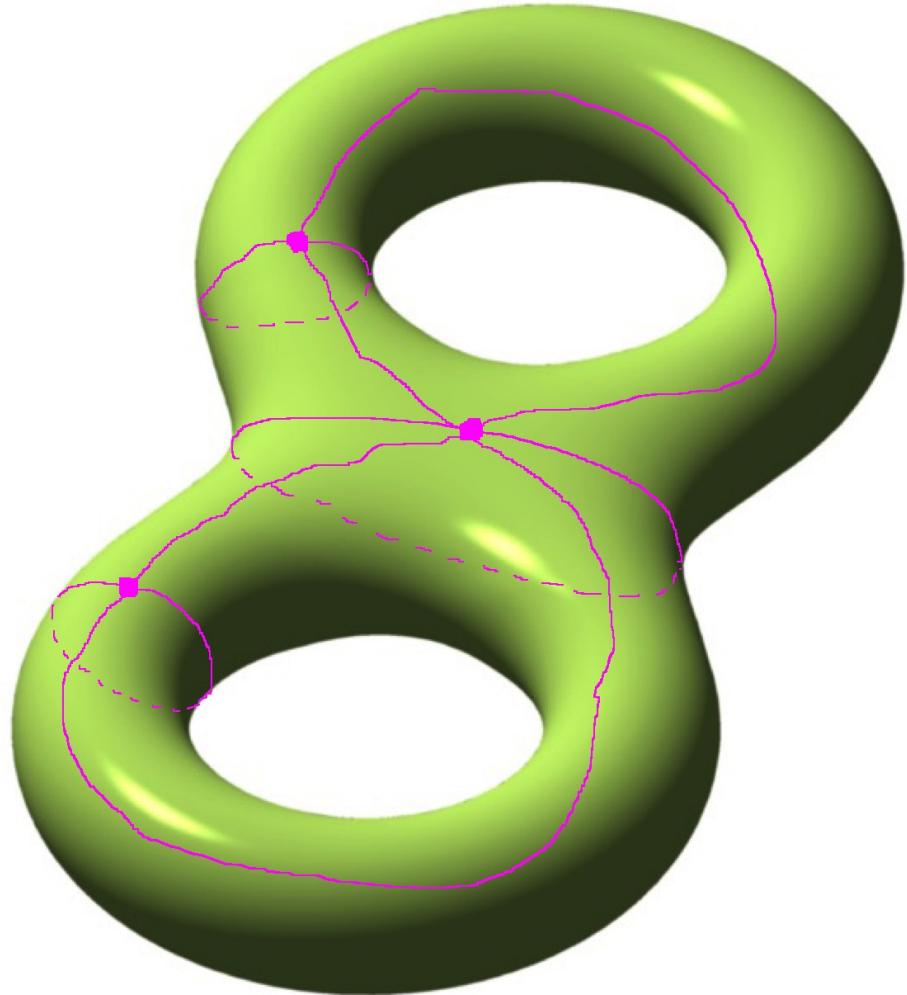


\cong



は単連結ではないからセルではない。

例1. 次のグラフはダブルトーラス上のセル分割グラフか？



セル分割グラフなら、図のようにラベルと向きを入れることで、設計図を描き、オイラー標数も求めよ。また、ダブルトーラスの展開図を描け。

