

## 電子 固有の角運動量であるスピンというものがある

軌道角運動量  $L = r \times p$

スピン角運動量  $s$

角運動量の議論と同様に

$s^2$  の固有値  $s(s + 1)\hbar^2$

$s_z : -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$   $(2s + 1)$  個

電子がスピンという内部自由度を持つ

← 原子のスペクトルの多重線の観測

例) Na の D 線  $\cdots 5890 \text{ \AA}$  → 詳しく見ると 2 本 ( $\Delta\lambda = 6.04 \text{ \AA}$ )

電子は自転していて、それにともなう磁気モーメントを持つ

スピン角運動量というのを定義すると、数学的にエネルギー準位が二つに分かれる。

$$2s + 1 = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

電子はスピンが  $+\frac{\hbar}{2}$  と  $-\frac{\hbar}{2}$  の状態がある。

  
固有値  $(m\hbar)$

$$m_s = \pm \frac{1}{2} \cdots \text{スピン磁気量子数}$$

Naの2本のD線

軌道運動の磁気モーメントとスピンによる磁気モーメントの相互作用による

2つの磁気モーメントの向きの相対的な関係によって違いが生じる

ちなみに…

全角運動量  $\mathbf{j} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$

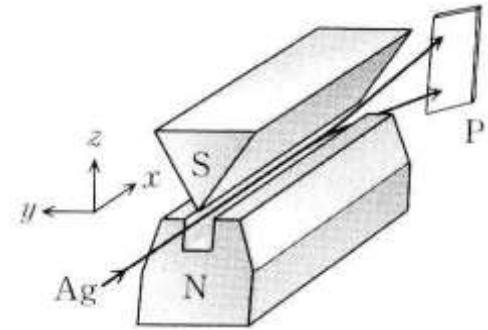
## シュテルン-ゲルラッハの実験

蒸発させた銀原子で細いビームをつくり、不均一な磁場を通り抜けさせてガラス板にあたるような実験を行った。

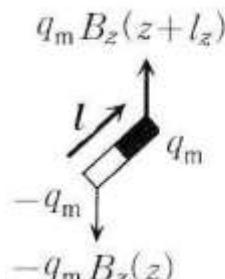
不均一な磁場中で磁気モーメント $\mu$ が受ける力

$$F = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \leftarrow \text{磁気モーメントの} z \text{成分に比例}$$

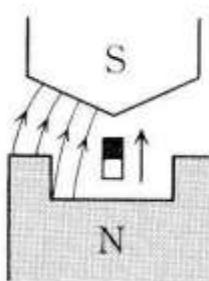
実験では、ガラス板に2本のビームに分裂して衝突している様子が観測された。



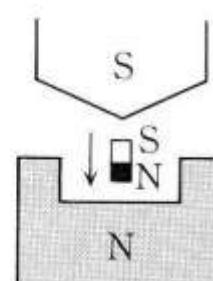
# 不均一な磁場中で磁気モーメント $\mu$ が受ける力



(a)



(b)



(c)

$$(a) F = q_m B_z(x, y, z + l_z) - q_m B_z(x, y, z) \approx q_m l_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(b) 上向きの力

(c) 下向きの力

ビームが2本に分裂

⇒ 電子のスピンの $z$ 成分がとることのできる値は2つだけ。

銀電子の磁気モーメントは1個の価電子のスピン角運動量による  
固有磁気モーメント

電子のスピンが $1/2$ で、上向きと下向きがある。

# スピン軌道相互作用

スピン運動 → 磁気モーメントを持つ

$$\mu_s = -\frac{e}{m} s \quad (\text{MKSA単位系})$$



Z方向を量子化軸にとる(Z方向の成分の固有状態を考える)

$$\mu_{sz} \text{の固有値} = \mp \frac{e\hbar}{2m} \quad (s \text{の} z \text{成分の固有値} \pm \frac{\hbar}{2})$$

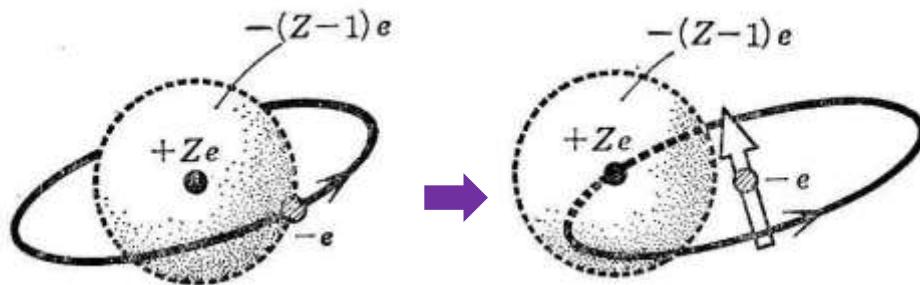
$$\beta_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.24 \times 10^{-24} \left[ \frac{\text{Jm}^2}{\text{wb}} \right]$$

ボーア磁子 (Bohr magneton)

$$s^2 = s(s+1)\hbar^2 \text{ で } s = \frac{1}{2} \text{ より、}$$

$$\mu_s = -\frac{2}{\hbar} \beta_B s$$

## 軌道運動



+Zeという原子核  
+  
その周りの電子

+Zeの原子核とそれを  
取り囲む-(Z-1)eの電子群  
+  
1個の電子



電子は円電流の中心

電子の軌道角運動量  $l$  の向きに磁場

$$B_{eff} \propto l$$

そこに磁気モーメント  $\mu_s$  がある。

このとき、エネルギーは

$$-\mu_s \cdot B_{eff}$$

で表される。

$\mu_s$  は  $s$  に比例して逆向き(反平行)

$B$  は  $l$  に比例して平行

⇒ エネルギー

$$\zeta(l \cdot s) \quad (\zeta: \text{比例定数})$$

$l$  と  $s$  は反対方向の方がエネルギーが低い

→  $l$  と  $s$  を反対方向にしようとする力がはたらく

スピン軌道相互作用

縮退した状態のエネルギー準位がわかる

軌道運動の1つの状態を観測すると、それに対応した  
スピン状態が(複数)現れる。

## (参考)

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx$  は  $\langle \psi_n | \psi_m \rangle$  と表記することもある。

$\langle \psi_n |$  (ブラ) … 波動関数  $\psi_n$  で与えられる量子状態

$|\psi_m \rangle$  (ケット) … 波動関数  $\psi_m$  で与えられる量子状態

$\langle \psi_n | \psi_m \rangle$

実験装置で準備された  $|\psi_m \rangle$  という状態にある系で、体系のとることのできる状態を検出する実験を行うとき  $\langle \psi_n |$  という状態が検出される確率振幅。

確率は  $|\langle \psi_n | \psi_m \rangle|^2$  で与えられる。

## スピンの状態(固有状態)

$\left| \frac{1}{2} \right\rangle$  上向きスピン  $|\uparrow\rangle$

$\left| -\frac{1}{2} \right\rangle$  下向きスピン  $|\downarrow\rangle$

## ラーモアの歳差運動

スピンは磁場  $H$  と相互作用をする

この相互作用を表すハミルトニアンをゼーマン (Zeeman) 相互作用という

$$\hat{H} = -g\mu_B \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{H} \quad \text{磁場 } H \text{ と ハミルトニアン } H \text{ が違うものであることに注意}$$

$\hat{S}$ : スピン演算子 (角運動量演算子  $\hat{L}$  に対応するもの)

$\mu_B$ : ボーア磁子

$g$ :  $g$  因子 (定数)

磁場の方向を  $z$  軸にとると、 $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  より、

$$\hat{H} = -g\mu_B H \hat{S}_z$$

ここで、 $\left| \frac{1}{2} \right\rangle$ 、 $\left| -\frac{1}{2} \right\rangle$  は  $S_z$  の固有状態であることより、これらは  $\hat{H}$  に対する固有状態でもある。

$$\hat{H} \left| \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} g\mu_B H \left| \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hat{H} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} g\mu_B H \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

このとき、エネルギーは

$$E_1 = -\frac{1}{2}g\mu_B H$$

$$E_2 = \frac{1}{2}g\mu_B H$$

磁場中では上向きスピンと下向きスピンのエネルギーが異なる。

(上向きスピンの方がエネルギーが低い)

⇒ ゼーマン分裂

$z$ 軸から角度 $\theta$ 傾いたスピンの状態

$$|\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \sin\frac{\theta}{2} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

時刻  $t$  での状態

$$\left| \frac{1}{2}, t \right\rangle = e^{-i\frac{E_1}{2\hbar}t} \left| \frac{1}{2} \right\rangle = e^{i\frac{g\mu_B H}{2\hbar}t} \left| \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| -\frac{1}{2}, t \right\rangle = e^{-\frac{E_2}{2\hbar}t} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle = e^{-\frac{g\mu_B H}{2\hbar}t} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\theta, t\rangle = \hat{H} |\theta, t\rangle$$

これらを踏まえて、傾いたスピンの運動を考える。

時刻  $t = 0$  で

$$|\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \sin\frac{\theta}{2} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

時刻  $t$  では、

$$|\theta, t\rangle = \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{g\mu_B H}{2\hbar}t} \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{g\mu_B H}{2\hbar}t} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{\varphi(t)}{2}} \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{\varphi(t)}{2}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \left( \varphi(t) = \frac{g\mu_B H t}{\hbar} \text{ とおいた} \right)$$

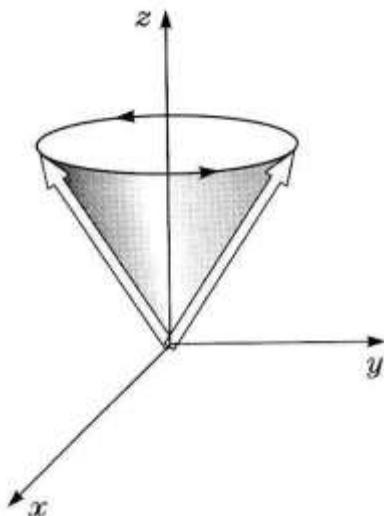
演算子  $\widehat{S_x}$ 、 $\widehat{S_y}$ 、 $\widehat{S_z}$  の期待値は、

$$\overline{S_x} = \langle \theta, t | \widehat{S_x} | \theta, t \rangle = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \varphi(t)$$

$$\overline{S_y} = \langle \theta, t | \widehat{S_y} | \theta, t \rangle = \frac{1}{2} \sin \theta \sin \varphi(t)$$

$$\overline{S_z} = \langle \theta, t | \widehat{S_z} | \theta, t \rangle = \frac{1}{2} \cos \theta$$

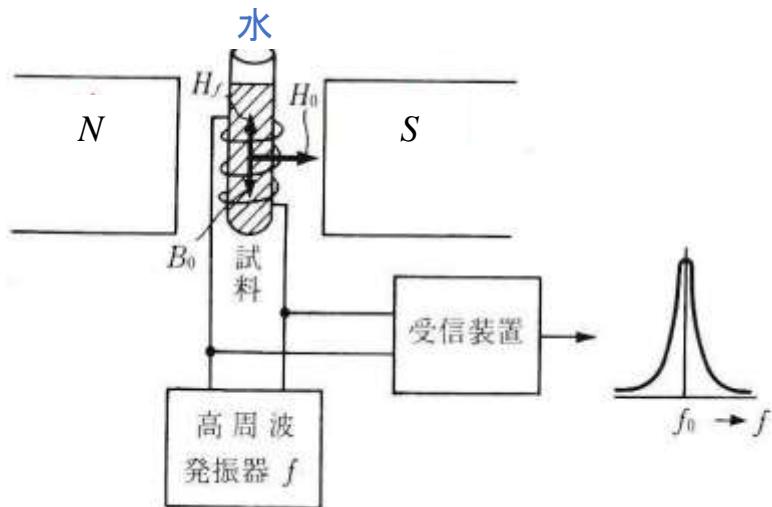
これを図示すると、



核磁気共鳴(NMR)は  
この原理を応用

ラーモア(Lamor)歳差運動

# 核磁気共鳴 (Nuclear Magnetic Resonance: NMR) (プロトン磁力計)



陽子が $H_0$ 軸の周りに歳差運動(ジャイロ運動)

⇒  $H_0$ と垂直な方向に磁場を周期変化させる。

⇒ この周期と $H_f$ の周期を一致させ共振を起こす。

$$\text{共振周波数 } f_0 = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$$

$\gamma$ : ジャイロ磁気比(原子核の種類によって決まる)

- ・  $B_0(H_0)$ を求めることができる。(高精度磁場測定法)
- ・ 既知の $B_0$ から  $\gamma$ を求めることができる → 分析、医用診断

# 参考文献

- 小形正男 「量子力学」 裳華房
- 菅野允 「改訂 電磁気計測」 コロナ社