岩大院試　重要事項まとめ

2022 年 6 月 4 日

第 I 部

微分方程式

1　定数係数の非同次二階線形微分方程式の代入法

非同次方程式の解法の一つに代入法がある。
以下の (1) 式が定数係数の非同次二階線形微分方程式である (p, q は定数)。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = r(x) \tag{1}$$

非同次項 $r(x)$ の形によって代入する関数の形が変わるため以下にまとめる。

1.1　$r(x) = Ax^n$(A は定数) の場合

$Y(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_{n-1}x + a_n$ として (1) 式に代入して係数 $a_j(j = 0, 1, ..., n)$ を決める。

1.2　$r(x) = A\cos x + B\sin x$ の場合

$Y(x) = a\cos x + b\sin x$ として (1) 式に代入して係数 a, b を決める。

1.3　$r(x) = A\mathrm{e}^{kx}$(ただし同次方程式が $k^2 + pk + q \neq 0$) の場合

$Y(x) = a\mathrm{e}^{kx}$として係数を求める。

1.4　$r(x) = A\mathrm{e}^{kx}$(ただし同次方程式が $k^2 + pk + q = 0$) の場合

$Y(x) = ax\mathrm{e}^{kx}$として係数を求める。同次方程式が 0 ということは $Y(x) = A\mathrm{e}^{kx}$ が特殊解に含まれているということなので、$Y(x)$ に x を掛ける。
このように代入法で 0 が出てきてしまったら x を掛ければよい。

2 同次二階線形微分方程式

(1) 式で $r(x)=0$ としたものが、定数係数の同次二階線形微分方程式である。$y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ として (??) に代入すると、以下の式 (同次方程式) が得られる。

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2}$$

(2) 式をとくと λ_1 と λ_2 が得られる。

2.1 $\lambda_1\neq\lambda_2$ の場合

一般解は $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ となる。

2.2 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ の場合

一般解は $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ となる。

3 完全微分方程式

3.1 全微分

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y \tag{3}$$

が全微分である。ただし、$u=u(x,y)$。

3.2 完全微分方程式

完全微分方程式であるための必要十分条件

微分方程式

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{4}$$

が完全微分方程式であるための必要十分条件は、

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} \tag{5}$$

である。(4) 式を満たさないときは (5) 式に積分因子 $\mu(x,y)$ をかけて、(5) 式を満たさせる方法もある。

全微分の問題が出た場合は上の性質 ((3) 式または (5) 式を用いて解く。

例題

次の微分方程式

$$-y\sin x\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y=0 \tag{6}$$

の一般解を求めよ。(岩手大学 2021 年 2 期)

■全微分を用いた解法

(6) 式を全微分を用いて表すと、

$$\mathrm{d}(y\cos x){=}0$$

上式の両辺を積分して、

$$y\cos x=C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が一般解である。□

■完全微分方程式の解法

(6) 式は完全微分方程式である。したがって、求める一般解を $F(x,y)$ とすると、完全微分方程式は以下のように表される。

$$\mathrm{d}F(x,y)=\mathrm{d}F(x,y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}F(x,y)\mathrm{d}y=0$$

(6) 式から

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=-y\sin x \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=\cos x$$

となることが分かる。両辺を積分すると、

$$F(x,y)=y\cos x+C(y)=y\cos x+C(y)$$

となることが分かる ($C(x),C(y)$ はそれぞれ x と y の任意関数)。

しかし、等号が成り立つには、$C(x)=C(y)=C$ となる必要があり、求める一般解は、

$$y\cos x=C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。□

あとがき

岩手大学数物コースの院試に出る科目のまとめを作りました。間違えがあったらすみません。

参考文献

[1] 矢嶋信男著　「常微分方程式」　岩波書店
2019 年時点での微分方程式の講義の指定教科書。院試の問題に章末問題からの引用が見受けられる。

[2] 和達三樹著　「物理のための数学」　岩波書店
2020 年時点での物理数学演習 1 の講義の指定教科書。微分方程式の代入法が載っていないが、全微分を用いた解法が載っている。

[3] 上野健爾著　「応用数学」　森北出版株式会社
2020 年時点での複素解析の講義の指定教科書。上の二冊に比べて新しく、分かりやすい。