Τεχνικές Βελτιστοποίησης

<u>1η Εργασία</u>

Ονοματεπώνυμο: Παναγιώτης Λεκός
ΑΕΜ: 10347
Email: panaleko@ece.auth.gr

Στην παρούσα αναφορά παρουσιάζεται η μελέτη τεσσάρων μεθόδων ελαχιστοποίησης με τη χρήση του MATLAB. Οι μέθοδοι αυτοί είναι οι: Μέθοδος της Διχοτόμου, Μέθοδος του Χρυσού τομέα, Μέθοδος Fibonacci και Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου. Αυτό που μελετάται είναι η μεταβολή του αριθμού των υπολογισμών της συνάρτησης που ελαχιστοποιείται και η εξέλιξη των διαστημάτων αναζήτησης, όταν μεταβάλονται παράμετροι των μεθόδων όπως το ε και το l.

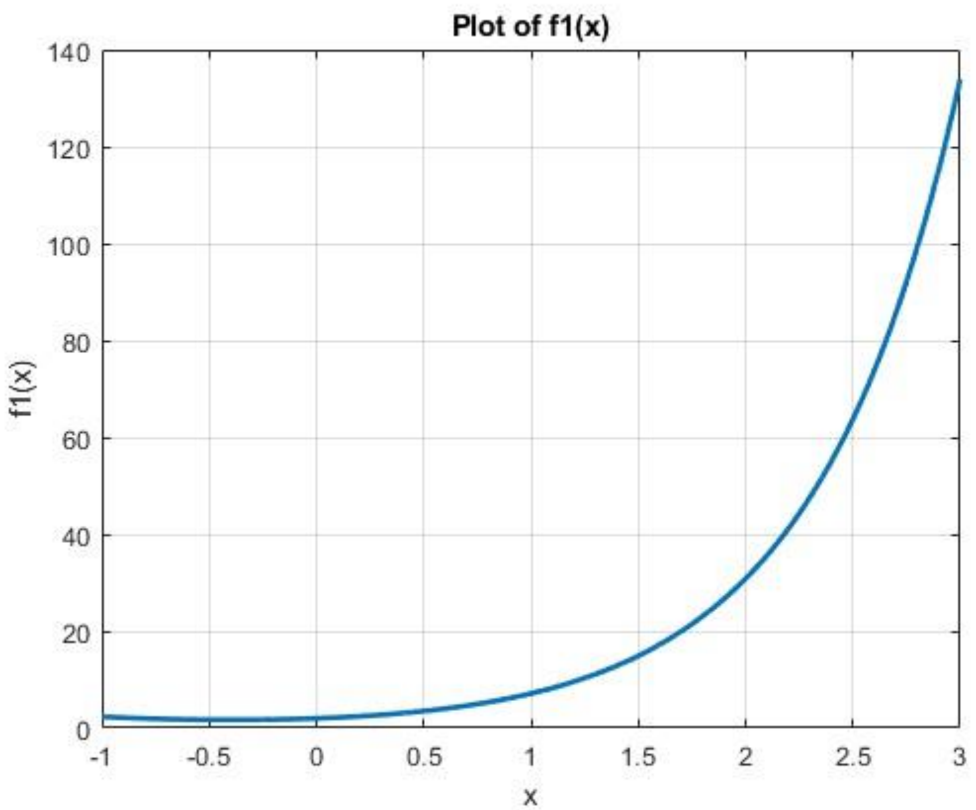
Για την μελέτη αυτή χρησιμοποιούνται οι τρεις συναρτήσεις:

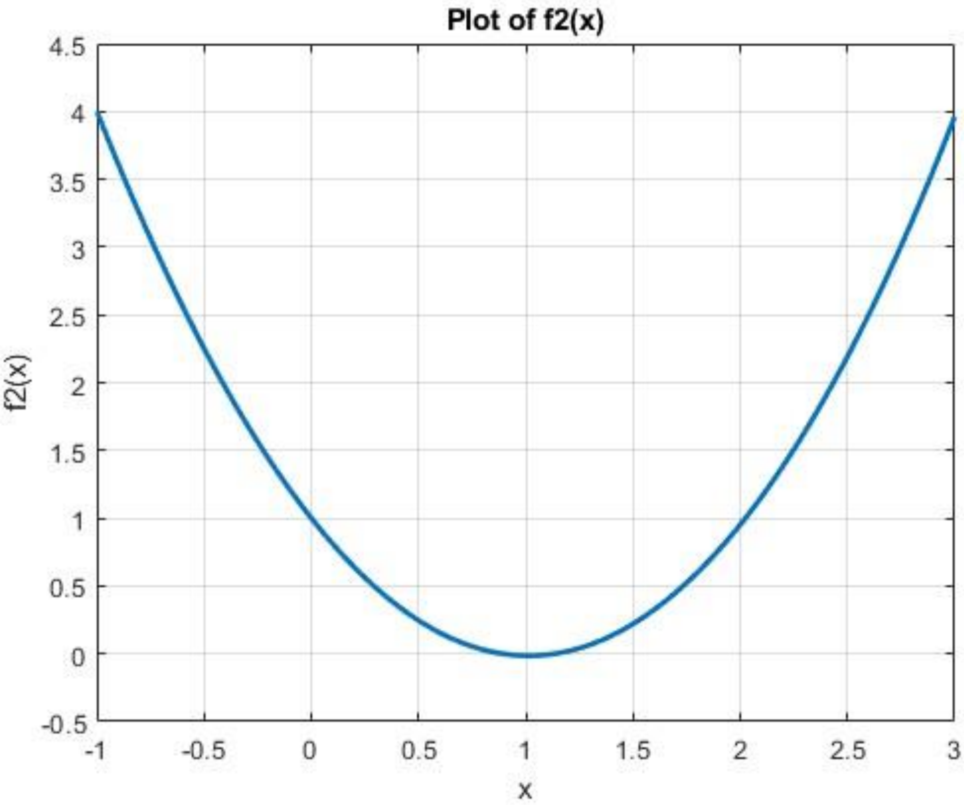
$$f1\,(x) = 5^x + ((2 - \cos(x))^2$$

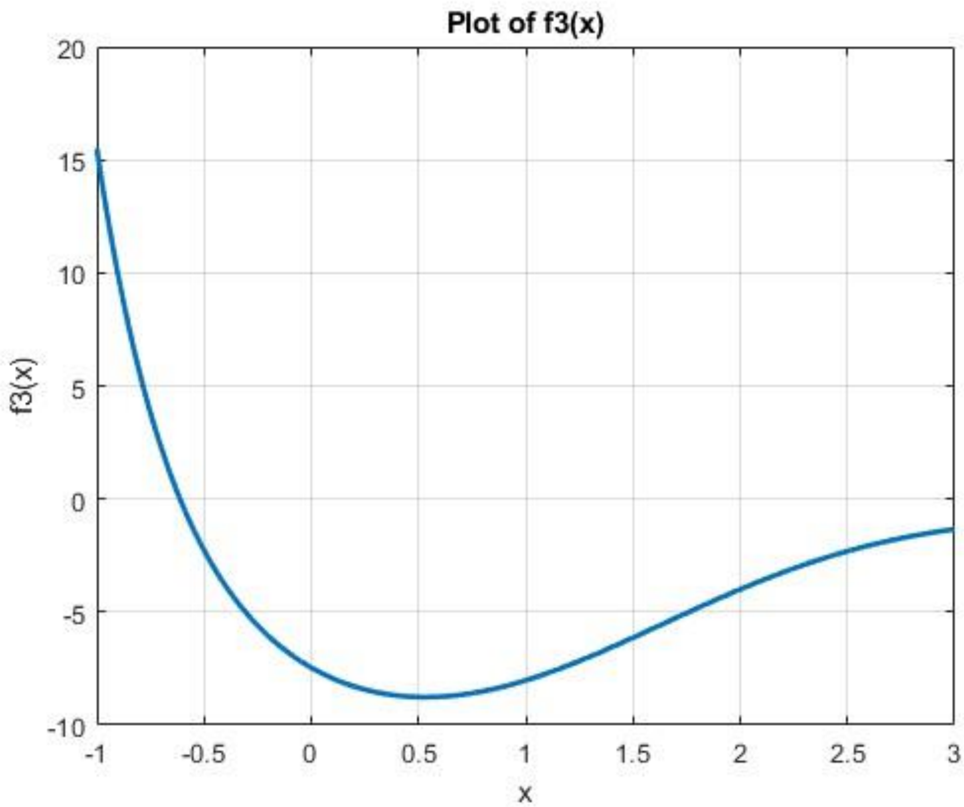
$$f2\,(x) = (x-1)^2 + e^{x-5} * \sin(x+3)$$

$$f3(x) = e^{-3x} - (\sin(x-2) - 2)^2$$

οι οποίες έχουν υλοποιηθεί στα αρχεία *f1.m*, *f2.m*, *f3.m*. Για την οπτικοποίηση του προβλήματος παρακάτω φαίνονται οι γραφικές τους παραστάσεις, όπως δημιουργήθηκαν στο αρχείο *plots.m*, στο διάστημα [-1,3] στο οποίο θα μελετηθούν.







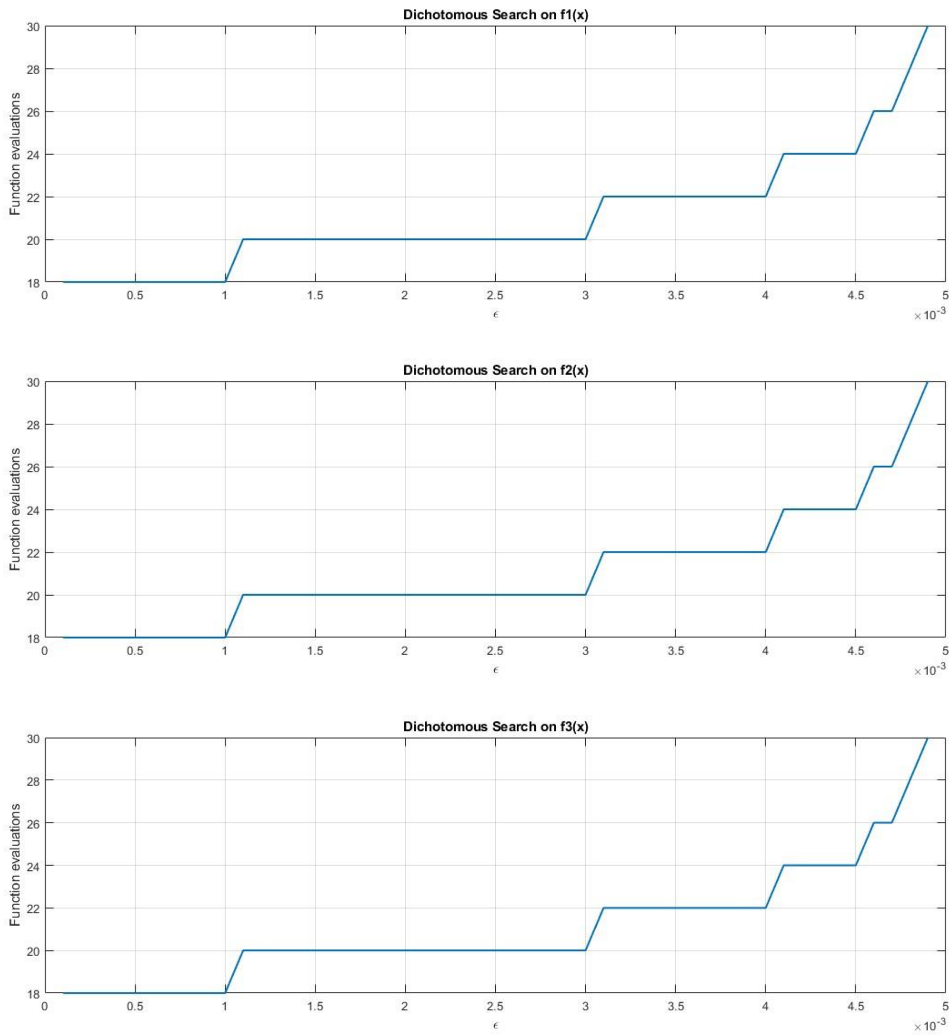
Οι τέσσερεις αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης έχουν υλοποιηθεί στα αρχεία *dichotomous_search.m, golden_section_search.m, fibonacci_search.m* και *bisection_der.m*

Θέμα 1

Μέθοδος της διχοτόμου

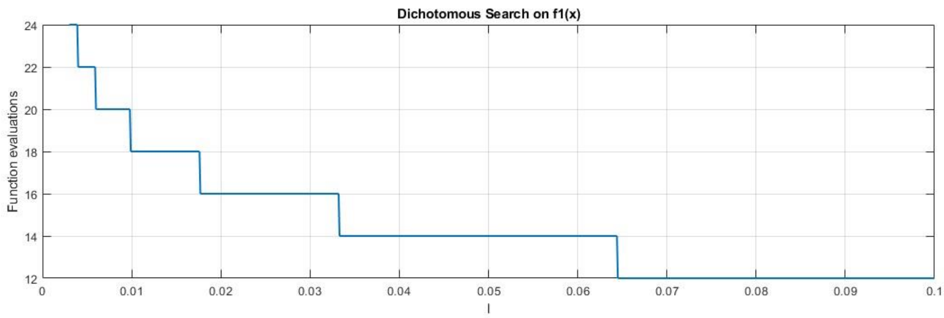
Σε αυτήν την μέθοδο ξεκινώντας από ένα αρχικό διάστημα [$α_1$, $β_1$], συγκρίνονται οι τιμές της f σε δύο συμμετρικά σημεία x_1, x_2, αριστερά και δεξιά σε απόσταση ε από το μέσο του διαστήματος. Από αυτήν την σύγκριση αυτή σύμφωνα με το *θεώρημα 5.1.1* αποφασίζεται αν το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι το [$α_1$, x_2] ή το [x_1, $β_1$]. Επαναλαμβάνεται αυτή η διαδικασία στα νέα διαστήματα εως ότου το διάστημα να γίνει μικρότερο ή ίσο από το ορισμένο τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης l. Σε αυτήν την μέθοδο ο υπολογισμός της συνάρτησης f γίνεται δύο φορές σε κάθε επανάληψη.

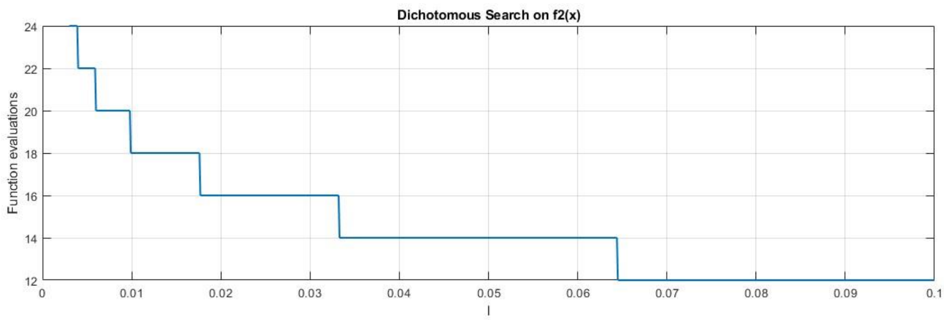
Α) Για την εκτέλεση της μεθόδου της διχοτόμου χρειάζεται να οριστεί η συνάρτηση f, το αρχικό διάστημα [$α_1$, $β_1$], το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης l και το ε. Κρατώντας σταθερό το l = 0.01 το ε παίρνει τιμές από 0.0001 εως 0.0049. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται πώς η μεταβολή του ε επηρεάζει τον αριθμό υπολογισμών της f για καθε μία από τις f_1 , f_2 , f_3 , όπως παράχθηκαν από το αρχείο *Thema_1_a.m* .

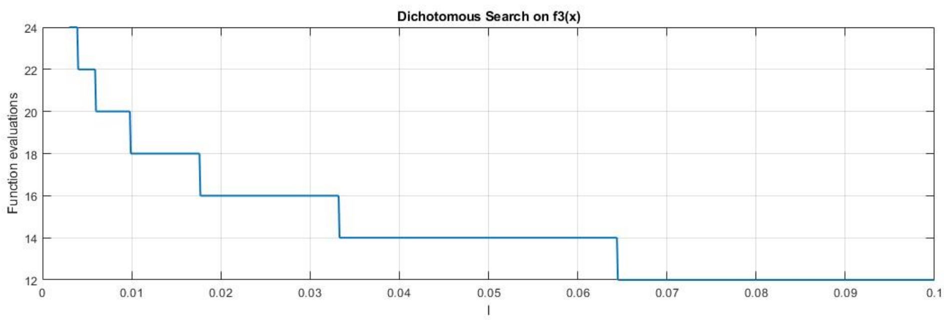


Όπως είναι αναμενώμενο παρατηρέιται ότι με την αύξηση του ε, αυξάνεται και ο αριθμό των υπολογισμών. Αυτό συμβαίνει διότι για μεγάλα ε ο ρυθμός που μικραίνει το διάστημα αναζήτησης είναι πιο αργός, οπότε χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις του αλγορίθμου, οπότε και οι υπολογισμοί της f θα είναι περισσότεροι. Επίσης όσο η τιμή του ε πλησιάζει την τιμή $\frac{l}{2}$ οι υπολογισμοί αυξάνονται με μεγαλύτερο ρυθμό. Μία άλλη σημαντική παρατήρηση είναι πως τα διαγράμματα είναι ίδια για τις τρεις διαφορετικές συναρτήσεις, δηλαδή ο αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου δεν εξαρτάται από την συνάρτηση η οποία ελαχιστοποιείται, αλλά από το αρχικό διάστημα, το l και το ε.

Β) Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα του αριθμού υπολογισμών της συνάρτησης ως προς το l κρατώντας σταθερό ε = 0.001 (*Thema_1_b.m*).

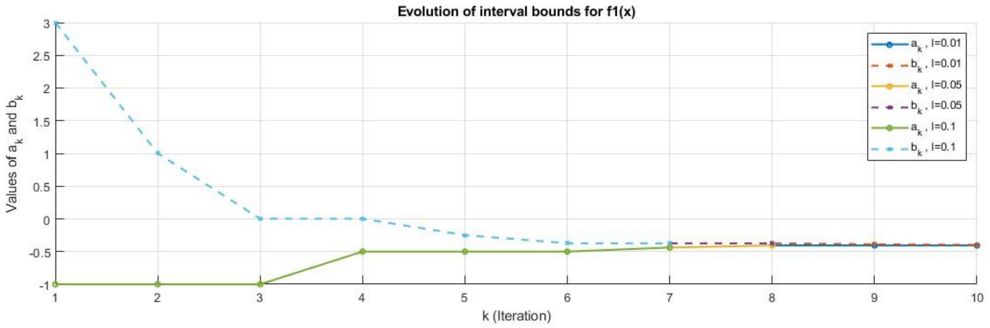


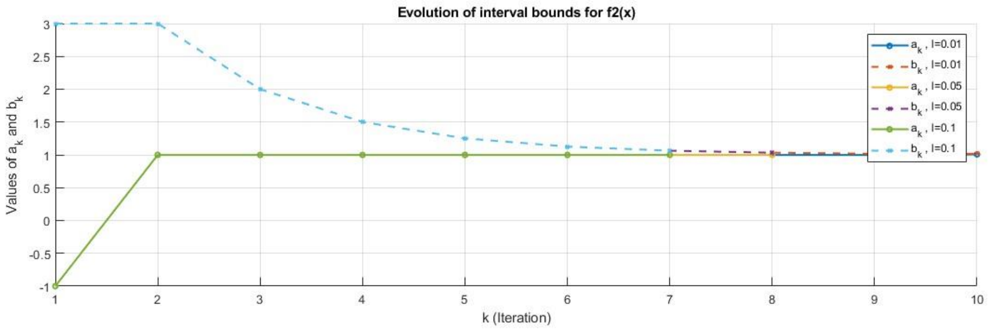


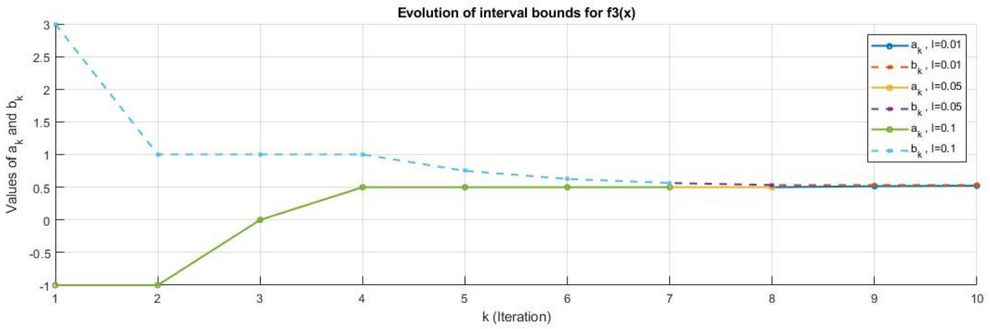


Όπως είναι αναμενώμενο, όσο μεγαλώνει το τελικό εύρος αναζήτησης l, δηλαδή μειώνεται η ακρίβεια της λύσης, τόσο λιγότεροι υπολογισμοί, δηλαδή επαναλήψεις του αλγορίθμου, χρειάζονται. Επίσης φαίνεται κι εδώ πως ο αριθμός υπολογισμών/επαναλήψεων είναι ανεξάρτητος της συνάρτησης προς ελαχιστοποίηση.

Γ) Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν πώς εξελίσσεται το διάστημα αναζήτησης $[\alpha_\kappa , \beta_\kappa]$ με το πέρασμα των επαναλήψεων του αλγορίθμου για τρεις διαφορετικές τιμές του l (*Thema_1_c.m*)







Είναι ξεκάθαρο πως με το πέρασμα των επαναλήψεων το διάστημα συγκλίνει στην τιμή όπου η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Για τα μικρότερα l γίνονται περισσότερες επαναλήψεις και τα α_κ , β_κ συγκλίνουν όλο και περισσότερο.

Πλεονεκτήματα μεθόδου: Είναι απλή στη υλοποίηση , δεν απαιτητεί υπολογισμό παραγώγων

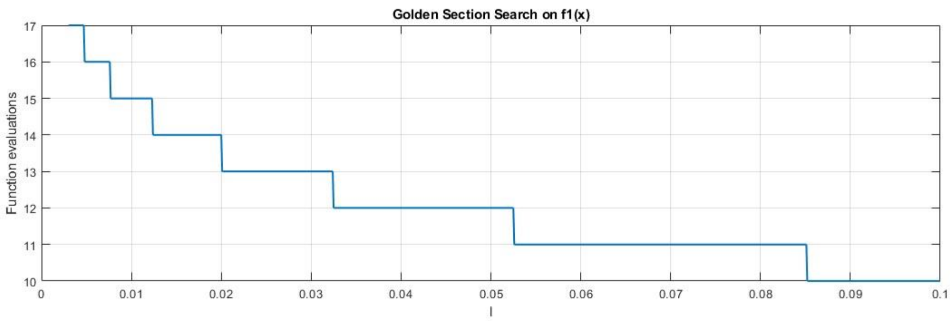
Μειονεκτήματα μεθόδου: Οι δύο υπολογισμοί της f ανά επανάληψη είναι υπολογιστικά ακριβοί.

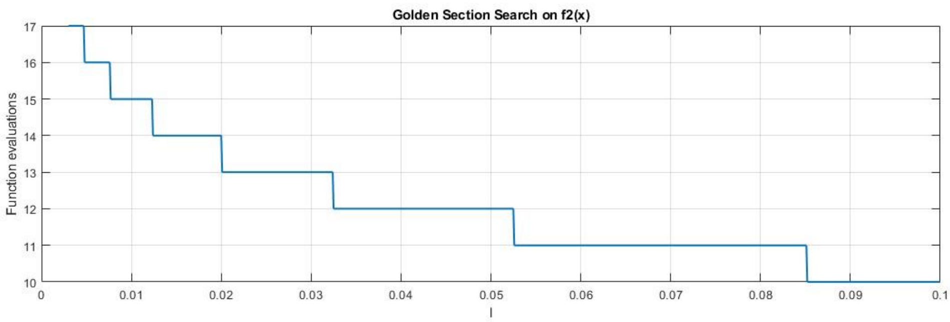
Θεμα 2

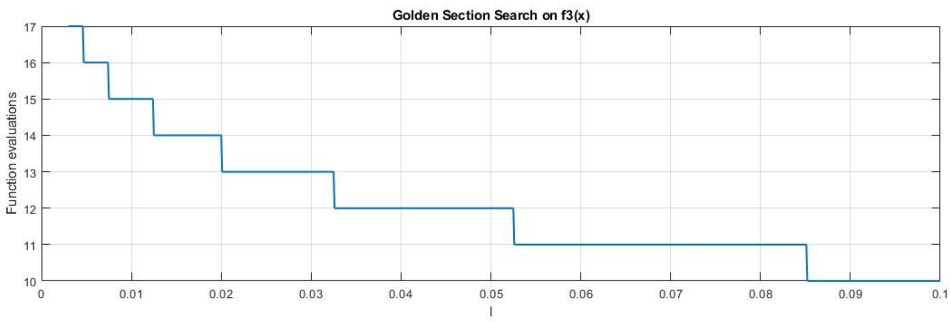
Μέθοδος του Χρυσού τομέα

Ξεκινώντας από ένα αρχικό διάστημα [α_1 , β_1], συγκρίνονται οι τιμές της f σε δύο σημεία x_1, x_2 τα οποία τοποθετούνται στο εσωτερικό του διαστήματος σε αποστάσεις που καθορίζονται από τον λόγο της χρυσής τομής ($\gamma = 0.618$). Από την σύγκριση αυτή αποφασίζεται αν το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι το [α_1 , x_2] ή το [x_1, β_1]. Επαναλαμβάνεται αυτή η διαδικασία στα νέα διαστήματα έως ότου το διάστημα να γίνει μικρότερο ή ίσο από το ορισμένο τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Με εξαίρεση τον υπολογισμό των πρώτων δύο τιμών τις f, σε κάθε άλλη επανάληψη η f υπολογίζεται μία φορά.

A) Για την εκτέλεση της μεθόδου του χρυσού τομέα χρειάζεται να οριστεί η συνάρτηση f, το αρχικό διάστημα [α_1 , β_1] και το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης l. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται πώς η μεταβολή του l επηρεάζει τον αριθμό υπολογισμών της f για καθε μία από τις f_1 , f_2 , f_3 (*Thema_2_a.m)* .

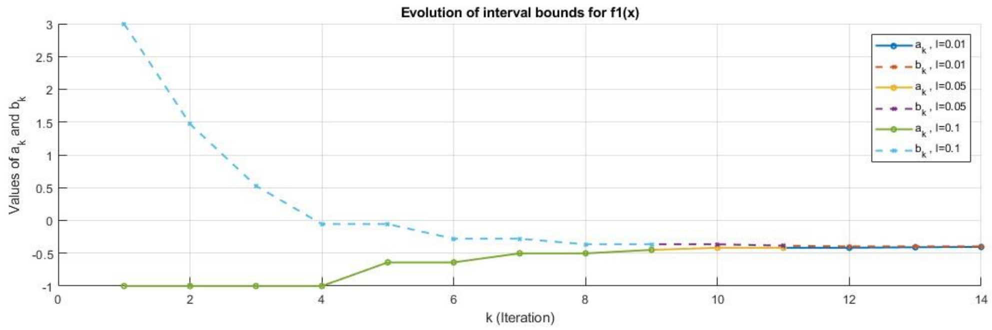


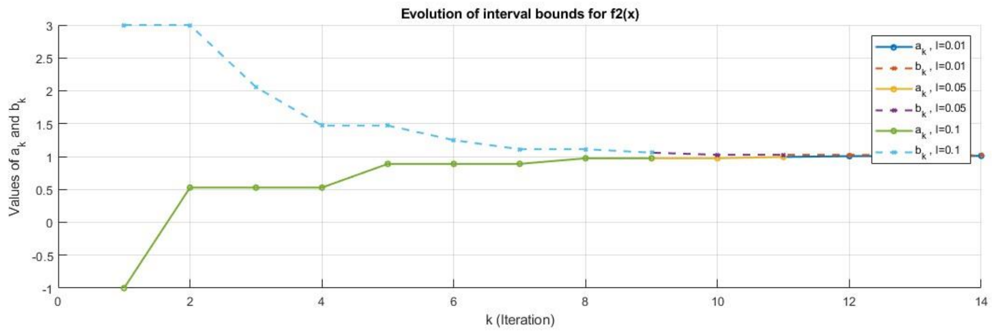


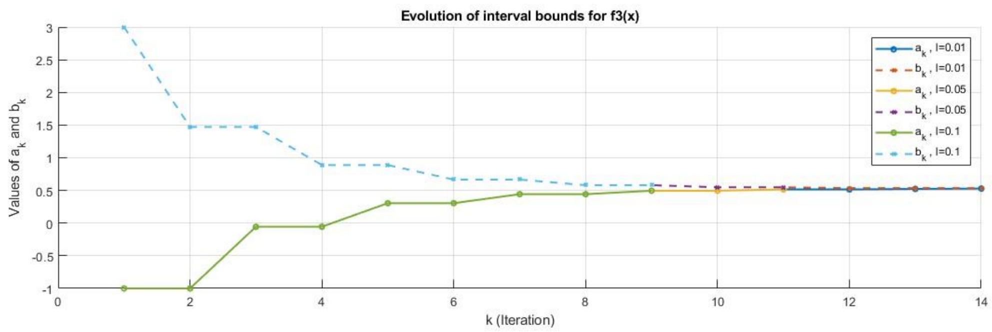


Παρατηρείται πάλι πως ο αριθμός υπολογισμών/επαναλήψεων είναι ανεξάρτητος της συνάρτησης f, και όσο μικρότερο είναι τόσο μεγαλύτερος είναι ο απαιτούμενος αριθμός υπολογισμών της f. Ωστόσο παρατηρώ πώς για ίδιες τιμές του l η μέθοδος του χρυσού τομέα χρειάζεται λιγότερους υπολογισμούς από τη μέθοδο της διχοτόμου. Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτή τη μέθοδο χρειάζεται ένας υπολογισμός της συνάρτησης αντί για δύο. Αυτό την κάνει πιο αποδοτική παρόλο που ο ρυθμός μείωσης του διαστήματος ανα επανάληψη είναι ελαφρώς μικρότερος, 0.618 αντί 0.5 που είναι στην προηγούμενη μέθοδο.

B) Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν πώς εξελίσσεται το διάστημα αναζήτησης [α_κ , β_κ] με το πέρασμα των επαναλήψεων του αλγορίθμου για τρεις διαφορετικές τιμές του l (*Thema_2_b.m*)







Ο τρόπος με τον οποίο συγκλίνει το διάστημα φαίνεται παρόμοιος με τον προηγούμενο. Η ρυθμός μείωσης του σε αυτήν την περίπτωση είναι ελαφρώς μικρότερος από της προηγούμενης μεθόδου, για αυτό κιόλας χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις για να επιτευχθεί το ίδιο l, όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Όμως αυτές οι επαναλήψεις είναι λιγότερο υπολογιστικά κοστοβόρες.

Πλεονεκτήματα Μεθόδου: Είναι υπολογιστικά αποδοτική (ένας υπολογισμός της συνάρτησης ανά επανάληψη), δεν απαιτή χρήση παραγώγων

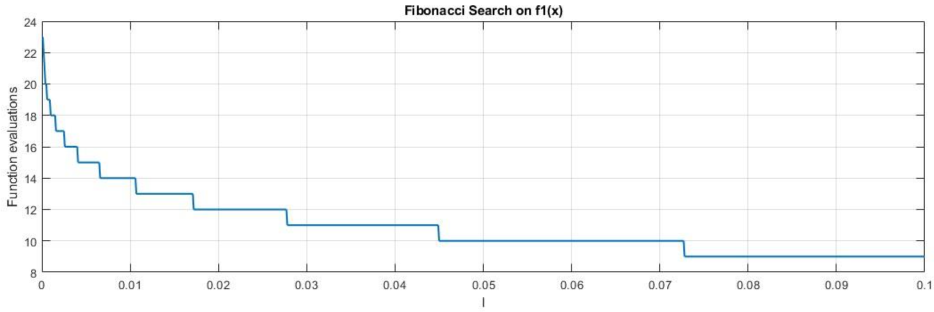
Μειονεκτήματα Μεθόδου: O ρυθμός σύγκλισης του διαστήματος αναζήτησης είναι μικρότερος (0.618) απ’ ότι στη μέθοδο της διχοτόμου (0.5).

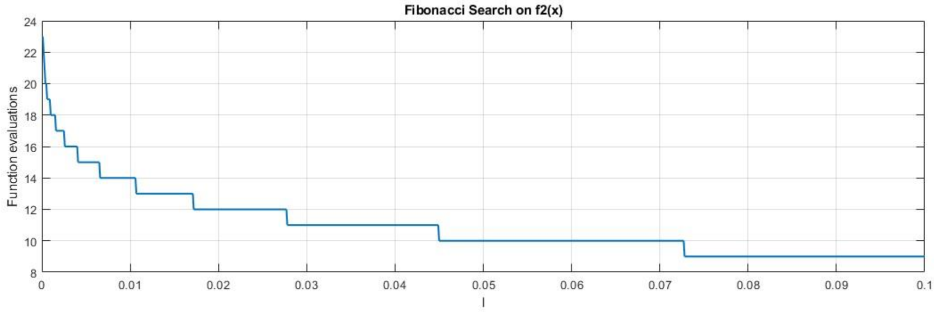
Θέμα 3

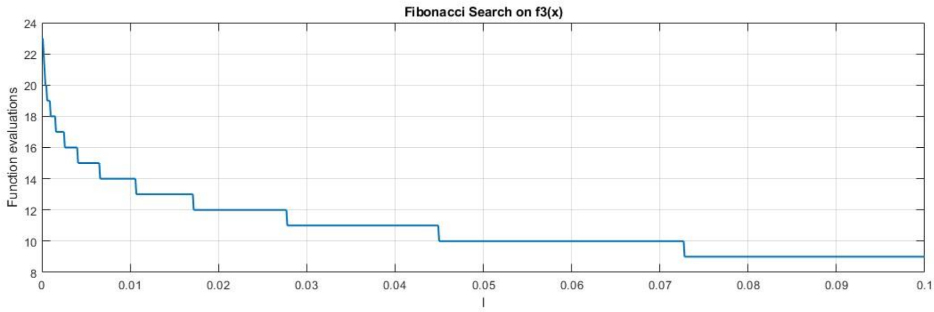
Μέθοδος Fibonacci

Σε αυτή τη μέθοδο υπολογίζεται στην αρχή ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων n, ο οποίος εξαρτάται από το τελικό εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Ξεκινώντας από ένα αρχικό διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$, συγκρίνονται οι τιμές της f σε δύο σημεία x_1, x_2, η θέση των οποίων καθορίζεται σε κάθε επανάληψη από τον λόγο δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci. Από τη σύγκριση αυτή, παρόμοια με τις προηγούμενες μεθόδους αποφασίζεται αν το νέο διάστημα αναζήτησης θα είναι το $[\alpha_1, x_2]$ ή το $[x_1, \beta_1]$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων. Όπως και στην μέθοδο του χρυσού τομέα με εξαίρεση τον υπολογισμό των πρώτων δύο τιμών τις f, σε κάθε άλλη επανάληψη η f υπολογίζεται μία φορά.

Α)Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται πώς η μεταβολή του l επηρεάζει τον αριθμό υπολογισμών της f για καθε μία από τις f_1 , f_2 , f_3 (*Thema_3_a.m)*

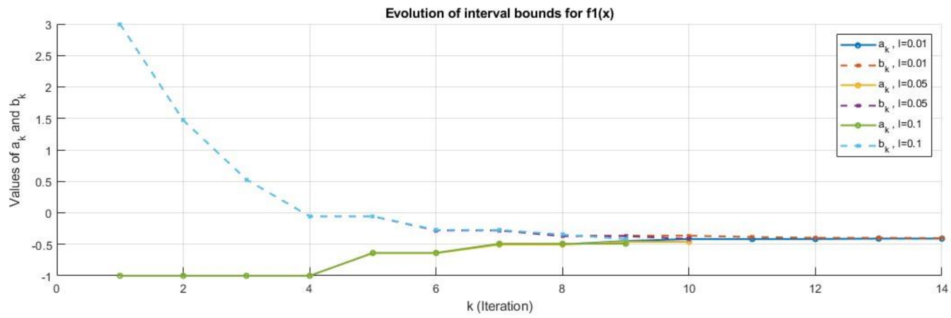


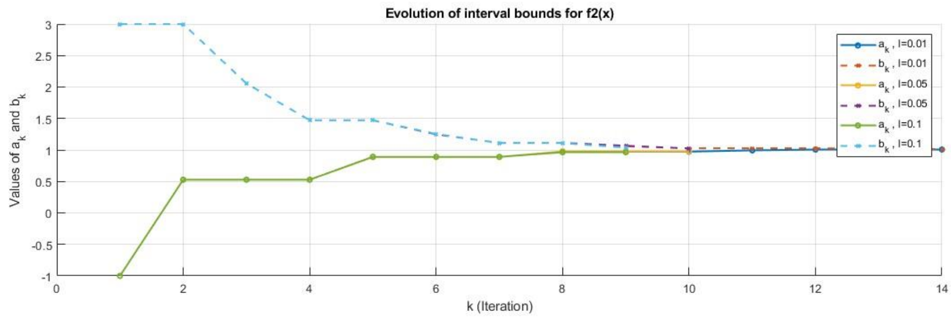


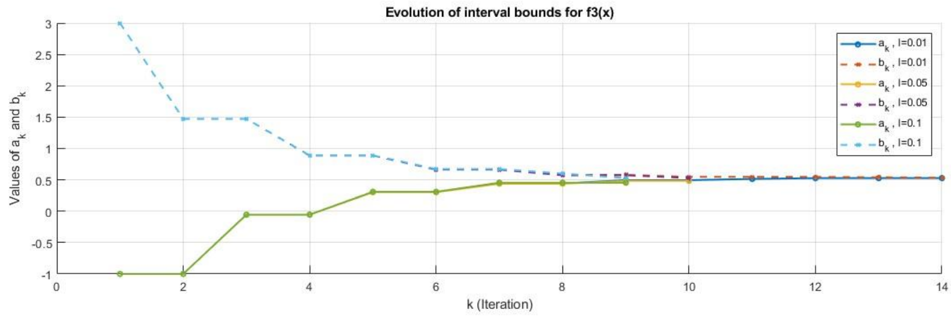


Προφανώς πάλι το μικρότερο l απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς, και πάλι αυτός ο υπολογισμός δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση. Παρατηρώ ότι για ίδια l χρειάζονται λιγότεροι υπολογισμοί και από τις δύο παραπάνω μεθόδους. Αυτό συμβαίνει διότι η μέθοδος είναι και υπολογιστικά αποδοτική (ένας υπολογισμός f ανά επανάληψη), αλλά και λόγω του μεταβαλλόμενου ρυθμού σύγλισης του διαστήματος αναζήτησης σύμφωνα με την ακολουθία Fibonacci.

B) Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν πώς εξελίσσεται το διάστημα αναζήτησης $[\alpha_\kappa , \beta_\kappa]$ με το πέρασμα των επαναλήψεων του αλγορίθμου για τρεις διαφορετικές τιμές του l (*Thema_3_b.m*)







Πλεονεκτήματα μεθόδου: Έχει καλύτερη αποδοτικότητα από τις προηγούμενες μεθόδους, δεν χρειάζεται υπολογισμός παραγώγων

Μειονεκτήματα μαθόδου: Ο αριθμός των επαναλήψεων είναι προκαθορισμένος,

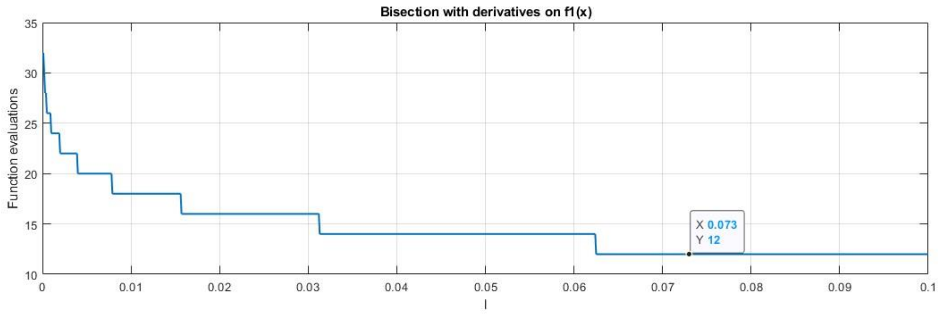
Θέμα 4

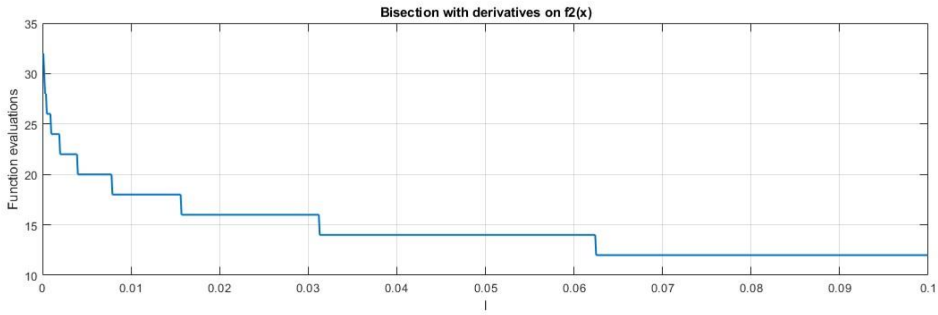
Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

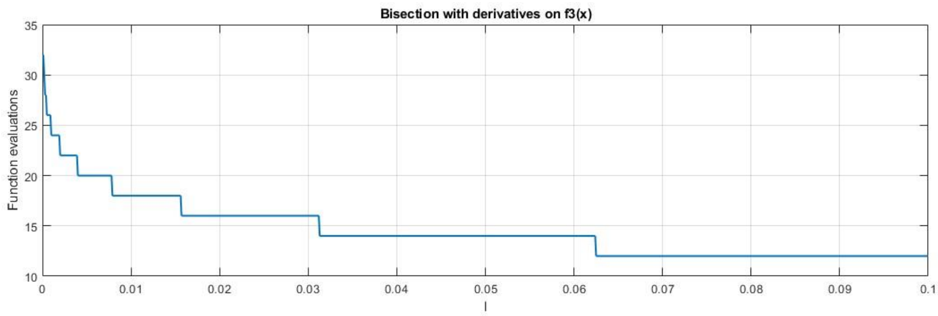
Αυτή είναι η μόνη μεθοδος που μελετάται σε αυτήν την εργασία όπου χρησιμοποιεί παραγώγους. Ξεκινώντας από ένα αρχικό διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ υπολογίζεται η παράγωγος της f στο μέσο του, x_k. Εάν είναι μηδέν τότε αυτό είναι το ελάχιστο σημείο, εάν είναι θετική το νέο διάστημα αναζήτησης είναι το $[\alpha_1, x_k]$ και άν είναι αρνητική $[x_k, \beta_1]$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το διάστημα να έιναι μικρότερο ή ίσο του ορισμένου l.

Σημείωση: Για την εφαρμογή του αλγόριθμου σε MATLAB, ο υπολογισμός της παραγώγου της f μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ό πρώτος είναι να υπολογιστεί από πριν ο γενικός τύπος της παραγώγου για κάθε συνάρτηση f_1 , f_2 , f_3 , ώστε σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου να υπάρχει ένας υπολογισμός συνάρτησης. Ο δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί ο τύπος $f'(x) = \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $(h \to 0)$. Αυτός ο τρόπος είναι υπολογιστικά πιο κοστοβόρος, αλλά μας απαλλάσει από το να υπολογίζουμε εκ των προτέρων τον τύπο της παραγώγου για κάθε διαφορετική συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Στην υλοποίηση αυτής της εργασίας στο MATLAB επιλέχθηκε ο δεύτερος τρόπος.

Α) Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται πώς η μεταβολή του l επηρεάζει τον αριθμό υπολογισμών της f για καθε μία από τις f_1 , f_2 , f_3 (*Thema_4_a.m)*

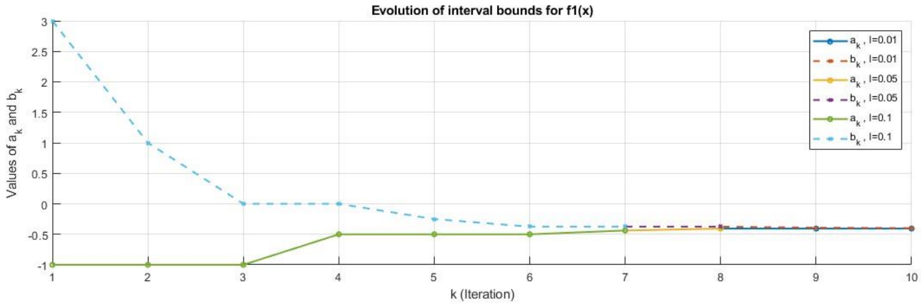


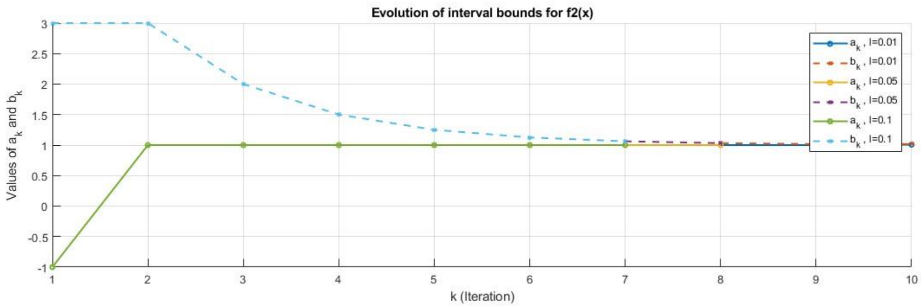


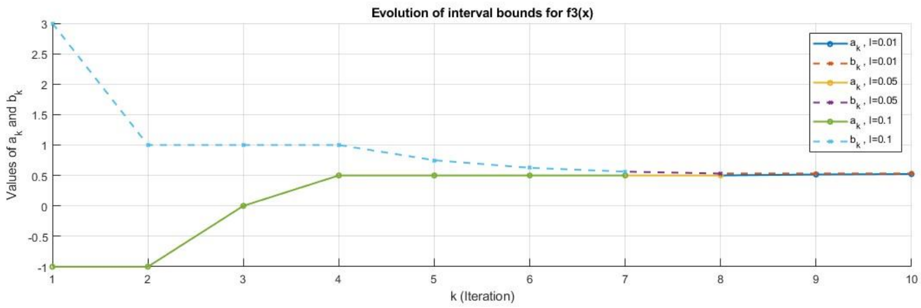


Όπως και προηγουμένως, ο αριθμός υπολογισμών είναι ανεξάρτητος της συνάρτησης, και επίσης μικρό l συνεπάγεται με περισσότερους υπολογισμούς. Αυτός ο τρόπος υλοποίησης του αλγορίθμου φαίνεται να είναι υπολογιστικά πιο ακριβός από του προηγούμενος (περισσότεροι υπολογισμοί για ίδια l). Εάν είχε υλοποιηθεί με τον άλλον τρόπο ο αριθμός των υπολογισμών θα ήταν ακριβώς μισός, και εύκολα παρατηρείται ότι τότε οι υπολογισμοί θα ήταν λιγότεροι απ' ότι είναι στις παραπάνω μεθόδους.

B) Τα παρακάτω διαγράμματα δείχνουν πώς εξελίσσεται το διάστημα αναζήτησης [α_κ , β_κ] με το πέρασμα των επαναλήψεων του αλγορίθμου για τρεις διαφορετικές τιμές του l (*Thema_4_b.m*)







Μια ένδιαφέρουσα παρατήρηση εδώ, είναι πως η μορφή των καμπυλών είναι ακριβώς ίδια με αυτή στο Θέμα 1. Αυτό συμβαίνει διότι αυτές οι δύο μέθοδοι έχουν τον ίδιο ρυθμό σύγκλισης, 0.5.

Πλεονεκτήματα μεθόδου: γρήγορη ταχύτητα σύγκλισης 0.5 , εάν η παράγωγος υπολογιστεί αναλυτικά τότε χρειάζεται μόνο ένας υπολογισμός της σε κάθε επανάληψη, απλη μέθοδος στην υλοποίηση.

Μειονεκτήματα: Απαιτήται η χρήση παραγώγου, εάν δεν υπολογιστεί αναλυτικά το κόστος υπολογισμού είναι διπλάσιο σε κάθε επανάληψη.