目录

一、行列式

▪ 定义、性质、定理

1. 定义
2. 性质

1) 行列互换，其值不变

2) 某行为 0，其值为 0

3) 两行相同，其值为 0

4) 单行可拆，拆为两式

5) 两行互换，其值反号

6) 倍加性质

7) 倍乘性质

3. 展开定理

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
$$|A| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} M_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_{ij} \end{cases}$$

▪ 具体性 行列式的计算

1. 化“12+1”

1) 化主对角

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2) 化副对角

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3) 拉普拉斯展开

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |A||B|$$

4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

2.　加边

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.　递推法--高阶到低阶✩

1) 建立递推关系 $D_n \to D_{n-1}$； D_n, D_{n-1}元素分布要相同

2) 由低推到高

4.　数归法--低阶到高阶

1) 第一数学归纳法

$$F(D_n, D_{n-1})$$

$$\text{验证}n=1\text{成立}\rightarrow\text{设}n=k\text{成立}\rightarrow n=k+1\text{成立}$$

2) 第二数学归纳法

$$F(D_n, D_{n-1}, D_{n-2})$$

- **抽象性 行列式的计算**

1. 用行列式性质
2. 用矩阵性质

1) $|AB|=|A||B|$

2) $E=AA^{-1}$

3) $|A^*|=|A|^{n-1}, A^*=|A|A^{-1}, (kA)^*=k^{n-1}A^*$

3. 用相似理论

1) $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

2) $if\ A\sim B, |A|=|B|$

二、余子式和代数余子式的计算

$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$，横着变竖着写

$while\ n=2, (B^*)^*=B$，主对调副变号

- **用行列式**

$$k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} * & * & * \\ k_1 & \cdots & k_n \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

- **用矩阵**

$$|A^*=|A|A^{-1}$$

- **用特征值**

$$|A^*=|A|A^{-1}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3A^{-1}$$

$$A\ :\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$$
$$A^{-1}:\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}$$
$$A^*=\lambda_1^*=\lambda_2\lambda_3,\lambda_2^*=\lambda_1\lambda_3,\lambda_3^*=\lambda_1\lambda_2$$

- **求余子式问题** $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

三、矩阵运算

- **求** A^n

1. A 为方阵且 $r(A)=1$

$$A=\alpha\beta^T\Rightarrow r(A)=1$$
$$A^n=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\alpha\cdots\beta^T\alpha\beta^T\alpha\beta^T=k^{n-1}A,\ k=tr(A)$$

2. A^2,A^3，找规律

$$if\ A^2=kA,A^n=k^{n-1}A$$

$$if\ \ A^2 = kE, then \begin{cases} A^{2n} = k^n E \\ A^{2n+1} = k^n A \end{cases}$$

3. 分解，前提：可交换

$$A = B + C, BC = CB, then$$
$$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{2}B^{n-2}C^2 + \cdots + C^n$$

$$(1).if\ \ B = E, then\ \ A^n = E + nC + \frac{n(n-1)}{2}C^2 + C^n$$
$$(2).if\ \ BC = CB = 0, then\ \ A^n = B^n + C^n$$

4. 用初等矩阵求 $P_1^m A P_2^n$

左乘行右乘列

5. 用相似理论✩✩✩

$$if\ \ A \sim B, then\ P^{-1}AP = B \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1}$$

$$if\ \ A \sim \Lambda, then\ P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

- **求** A^*, A^{-1},初等矩阵

1. 伴随 A^*✩✩✩

1) 定义

2) 公式

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}, A^* = |A|A^{-1}, (kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A,\ \ |(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

3) 秩

$$r(A^*)=\begin{cases}n, r(A)=n\\1, r(A)=n-1\\0, r(A), n-1\end{cases}$$

2. 逆 A^{-1}

1) 定义

$$AB=E$$

2) 公式

$$(A^{-1})^{-1}=A$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$
$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}A$$

3) 求 A^{-1}

具体性

$$[A|E]\xrightarrow{\text{初等行变化}}[E|A^{-1}]$$

抽象性

创造 $AB=E$，则 $A=B^{-1}$

创造 $AB=C$，若 B,C，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

3. 分块矩阵

1) 加法

2) 数乘

3) 乘法

4) 幂乘

5) 逆

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}D^{-1}B^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}D^{-1}C^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$$

，D 左乘同行右乘同列，副对角互换

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}D^{-1}B^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}D^{-1}C^{-1} \end{pmatrix}$$

4. 初等矩阵

1) 定义

2) 化简

3) 求解

a. 直接求

b. 化方程组

c. 待定系数--二阶情况

d. 相似二次型 $P^{-1}AP = B$

4) 初等矩阵

a. 初等变化

数乘、倍乘、倍加

b. 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变化得到的矩阵
左行右列
可逆矩阵一定可以表示为初等矩相乘

- ## 矩阵方程

1. 定义

2. 化简

1) 消公因式

2) 提取公因式

3) 移项

4) 利用公式

a. 伴随

b. 因式分解

c. $()^{-1,T,*}$ 穿脱原则

d. $^{-1}$ ^{T} * 运算可交换

3. 求解✩✩✩

1) 若 A 可逆，$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

2) 若 A 不可逆，求解对应线性方程组 $A[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$

$$AX=B\text{有解} \Leftrightarrow r(A)=r([A\,|\,B])$$

3) 无法化为 $AX=B$，待定系数法

四、矩阵的秩

- ## 定义

最大不为 0 的子式阶数

$r(A_{n\times n}) \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}$

▪ 公式（15 个）☆☆☆

1. $0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$

2. $r(kA)=r(A)$

3. $r(A)=r(PAQ),P$、Q为可逆矩阵，乘可逆矩阵不改变矩阵的秩

$$r(AB)<r(A)\Rightarrow r(B)<n$$

4. $r(A_{m\times n}B_{n\times s})\le \min\{r(A),r(B)\}$

5. 设A,B为同型矩阵，则$r(A+B)\le r([A,B])\le r(A)+r(B)$

6. $r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix})=r(A)+r(B)$

7. $r(A)+r(B)\le r(\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix})\le r(A)+r(B)+r(C)$

8. $r(A_{m\times n}B_{n\times s})\ge r(A)+r(B)-n$

$$if \quad AB=O, then \quad r(A)+r(B)\le n$$

9. $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$

10. $r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A),n-1 \end{cases}$

11. $if \quad A^2=A, then \quad r(A)+r(A-E)=n$

12. $if \quad A^2=E, then \quad r(A+E)+r(A-E)=n$

13. $Ax=0,$基础解析所含向量个数$s=n-r(A)$

14. $if \quad A\sim\Lambda, then \quad n_i=n-r(\lambda_i E-A)$，其中$\lambda_i$为$n_i$重根

15. $if \quad A \sim \Lambda, then \quad n_i =$ 非零特征值的个数

▪ 考法

1. 用定义求

2. 用公式求

五、线性方程组

▪ 线性方程组

1. 齐次方程组

1) 性质

✧ ξ_1, ξ_2是解，$\xi_1+\xi_2$也是解

✧ ξ是解，$k\xi$也是解

2) 基础解系

✧ $\begin{array}{l} n\text{--自由度，} r(A)\text{--约束} \\ \text{基础解析向量的个数} s = n - r(A) \end{array}$

2. 非齐次方程组

1) 克拉默法则

✧ $x_i = \dfrac{D_i}{D}$

2) 几个问题的等价性

✧ $\begin{array}{l} \text{方程组有解} \\ \Leftrightarrow \text{向量} b \text{可可由} \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \text{线性表式} \\ \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \text{与} \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, b \text{等价} \\ \Leftrightarrow \text{系数矩阵与增广矩阵秩相等} \end{array}$

3) 非齐次线性方程组解的结构

✧ 非齐次解-非齐次解=齐次解

✧ 非齐次通解=非齐次特解+齐次通解

- **含参线性方程组✩✩✩**

1）化行阶梯（大概率不能化为阶梯）

✧ 注意只能用行变化，且用箭头符号→

2）“方形”方程组

✧ |A|≠0，代入讨论

✧ |A|=0，克拉默法则

3）

- **求解两个方程组的公共解和通解问题**

- **抽象型付出沉重**

六、向量组

七、特征值和特征向量

八、相似理论

九、二次型