

# 基于多目标规划的多波束测线布设模型

张泽宇<sup>1</sup>, 葛晨欣<sup>1</sup>, 靳琪<sup>1</sup>, 李小平<sup>1</sup>

(1. 电子科技大学 数学科学学院, 四川 成都 611731)

**【摘要】**本文针对某海域的多波束测线布设问题建立了海域地形与测线布设方案的关系模型。测线覆盖宽度与重叠率为衡量测线布设方案优劣的重要指标, 利用解析几何方法建立二维及三维海域覆盖宽度与重叠率的计算模型, 得到衡量测线布设方案的基本方法。同时该文将测线布设方案与最优化问题结合起来, 分别针对矩形坡面海域及某一待测真实海域建立了多目标规划模型, 设计相应算法对模型进行求解, 得到矩形坡面海域的最优测线布设方案以及某待测真实海域的一种较为可行的布设方法, 对现实多波束测线布设问题具有借鉴意义。

**关键词** 多波束测深; 空间解析几何; 多目标规划; 鲁棒性检验

**中图分类号** TS941.2

**文献标志码** A

**doi:**

## Multi-beam Line Layout Model Based on Multi-objective Programming

ZHANG Zeyu<sup>1</sup>, GE Chenxin<sup>1</sup>, JIN Qi<sup>1</sup>, Li Xiaoping<sup>1</sup>

(1. School of Mathematical science, University of Electronic Science and Technology of China, Cheng du 611731, China)

**Abstract** In this paper, the relationship model between the topography of the sea area and the layout scheme of the multi-beam survey line is established. The coverage width and overlap ratio of survey line are important indexes to measure the quality of survey line layout scheme. The calculation model of 2D and 3D sea area coverage width and overlap ratio is established by analytical geometry method, and the basic method of measuring survey line layout scheme is obtained. At the same time, this paper combines the survey line layout scheme with the optimization problem, establishes a multi-objective programming model for the rectangular slope sea area and a real sea area to be measured respectively, designs the corresponding algorithm to solve the model, and obtains the optimal survey line layout scheme for the rectangular slope sea area and a feasible layout method for a real sea area to be measured. It is of reference significance to the practical multi-beam line layout problem.

**Key words** Multi-beam sounding; Spatial analytic geometry; Multi-objective programming; Robustness test

多波束测深系统能够在与航迹垂直的平面内一次发出多个独立的波束, 再由换能器接收由海底返回的声波, 从而实现海底地形的测量。测量准确度及布设成本与测线覆盖宽度和相邻两条测线的重叠率密切相关。为保证测量效果, 重叠率应位于 10%-20%之间。考虑不同海域地形下测线覆盖宽度及重叠率的定义, 建立多波束测线布设及优化模型。

为此, 本文首先做了如下几条基本假设:

- 1) 测线为一条直线且同一区域不同测线之间相互平行;
- 2) 待测海域在较小的坐标范围内变化较为平缓, 可以用平滑函数进行拟合和处理;

3) 测量仪器的测量误差可以忽略不计, 附件中给出的单波束测深数据准确可靠, 反映了真实海底地形;

4) 测线与海域边界之间不存在障碍物, 可以直接穿越边界进行测量。

本文的量化分析及模型结果基于 2023 年全国大学生数学建模竞赛 B 题所提供的海域数据。

### 1 二维坡面几何关系模型

对于坡面截面的几何关系模型<sup>[3]</sup>, 以海域中心点投影为原点, 选取水平向右为 x 正方向, 竖直方向为 y 轴方向建立平面直角坐标系如图所示。测线覆盖宽度即为测线与海底两交点之间的距离。

收稿日期: 202x-xx-xx; 修回日期: 202x-xx-xx

作者简介: 张泽宇(2002.09-), 男, 本科生, 数据科学与大数据技术专业; 葛晨欣(2004.06-), 女, 本科生, 信息与计算科学专业; 靳琪(2002.08-), 女, 本科生, 数据科学与大数据技术专业; 李小平(1984.12-), 男, 副教授。

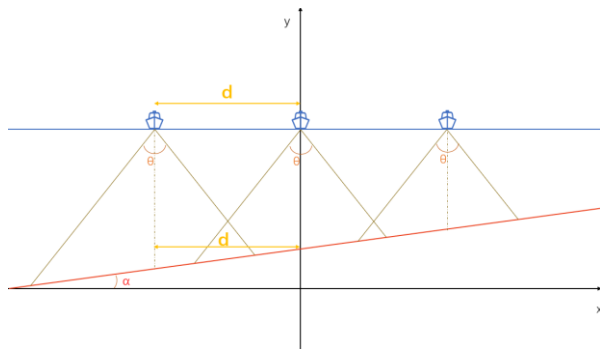


图1 二维坡面几何关系示意图

设定原点处测线位置为中心测线,则此时的海水深度为 $D_0 = 70\text{m}$ 。由于这部分的待求测线为等距平行分布,故在 $x$ 轴方向上对不同测线进行编号处理,中心测线的编号为0,由此向正负方向推进,分别编号为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 以及 $\{-1, -2, \dots, -n\}$ 。

在图1中黄色参考线下方构建的直角三角形中,由三角函数的关系可得

$$h_i = id \tan \alpha \quad (1)$$

其中 $h_i$ 为某一条测线处海水深度与中心水深的差值, $i = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ 。

结合两条测线的竖直方向所构建的矩形可得中心测线两侧的海水深度为

$$D_i = D_0 - h_i = D_0 - id \tan \alpha \quad (2)$$

当海水深度已知时,考虑某一测线的覆盖宽度为 $W_i$ ,以中心测线为界划分为 $W_{il}$ 、 $W_{ir}$ ,在左三角形中,由正弦定理可知

$$\frac{D_i}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2}-\alpha)} = \frac{W_{il}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (3)$$

于是第 $i$ 条测线左半部分的覆盖宽度为

$$W_{il} = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}+\alpha)} \quad (4)$$

同理可得第 $i$ 条测线右半部分的覆盖宽度为

$$W_{ir} = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}-\alpha)} \quad (5)$$

于是得到编号为 $i$ 的测线的覆盖宽度为

$$W_i = W_{il} + W_{ir} = \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}+\alpha)} + \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}-\alpha)} \quad (6)$$

在此基础上考虑某条测线的前向重叠率,当测线相互平行且海底地形平坦时,重叠率的定义为该条测线与前一条测线的重叠宽度与该条测线的覆盖宽度之比。

针对坡面地形,相应的重叠宽度与覆盖宽度都应转化为沿坡面方向的距离。即此时编号为 $i$ 的测线的前向重叠率为

$$\eta_i = \frac{c_i}{W_i} \quad (7)$$

其中 $c_i$ 表示编号 $i$ 的测线与其前一条测线的重叠宽度,可由坐标轴上的相应投影长度结合坡度求出。由此便可计算出所有测线的前向重叠率。

二维坡面几何模型覆盖宽度及相邻测线重叠率的具体计算结果如表1所示。

表1 二维坡面覆盖宽度及重叠率计算结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	315.8133	297.628	279.442	261.256	243.07	224.8845	206.6987	188.513	170.327
与前一条测线的重叠率/%	—	35.6954	31.5106	26.7431	21.2622	14.8949	7.4072	-1.5252	-12.365

## 2 三维海域覆盖宽度模型

为了适应三维海域复杂地形的探测需求,需要建立矩形海域坡面中某一点处覆盖宽度的数学描述,为建立矩形坡面海域的测线布设优化模型做准备。

选取矩形待测海域中心点对应的海底处为原点,以海底坡面的法向量在原点所在水平面上的投影方

向为 $x$ 轴,选取此水平面与坡面的交线为 $y$ 轴,竖直方向为 $z$ 轴建立坐标系如图2所示。

证明:设坡面的法向量为 $\vec{n}$ ,考虑法向量位于 $xoz$ 平面内,则选取此深度水平面与坡面的交线 $l$ , $l$ 垂直于 $\vec{n}$ ,且 $l$ 垂直于 $z$ 轴,即 $l$ 垂直于 $xoz$ 平面,且与 $xoz$ 面交于原点 $o$ ,故可建立三维坐标系。

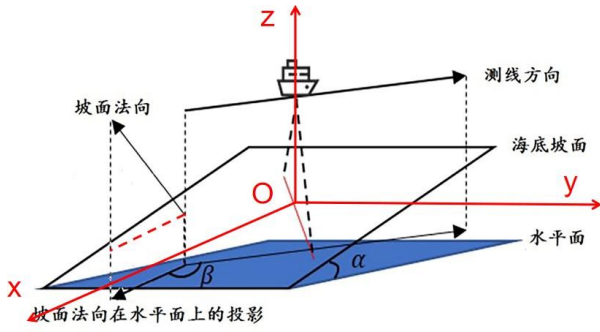


图 2 三维矩形海域坐标示意图

根据已构建的坐标系可知,坡面法向量位于 $xoz$ 平面内,由其在 $x$ 轴和 $z$ 轴的投影可得,此坡面的法向量为 $\vec{n} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ ,且坡面经过原点 $(0,0,0)$ ,联立可求得坡面所在平面的一般方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = 0 \quad (8)$$

测线方向为海平面上测量船的航行方向,它与坡面法向在 $xoy$ 平面上的投影所成角为 $\beta$ ,即测线方向向量在 $xoy$ 平面的投影与 $x$ 轴所成角为 $\beta$ ,于是可得测线方向向量为 $\vec{l} = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$ 。

船距海域中心点的距离为 $d_c$ ,且沿测线方向行进,又已知海域中心点处的海水深度为 $120m$ ,于是测量船的坐标可表示为

$$(x_0, y_0, z_0) = (d_c \cos \beta, d_c \sin \beta, 120)$$

测量船发出的波束最大张角为 $120^\circ$ ,分别设此时左右两侧声波边界的直线为 $l_1$ 、 $l_2$ 。由直线与测线方向垂直且与 $z$ 轴的夹角为 $60^\circ$ 可得两直线的方向向量为

$$\vec{l}_1 = (-\sin \beta, \cos \beta, -\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\vec{l}_2 = (\sin \beta, -\cos \beta, -\frac{\sqrt{3}}{3})$$

可得两直线的点向式方程分别为

$$l_1: \frac{x-d_c \cos \beta}{-\sin \beta} = \frac{y-d_c \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{z-120}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (9)$$

$$l_2: \frac{x-d_c \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{y-d_c \sin \beta}{-\cos \beta} = \frac{z-120}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (10)$$

于是两直线的参数方程为

$$l_1: \begin{cases} x = d_c \cos \beta - \sin \beta t_1 \\ y = d_c \sin \beta + \cos \beta t_1 \\ z = 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_1 \end{cases} \quad (11)$$

$$l_2: \begin{cases} x = d_c \cos \beta + \sin \beta t_2 \\ y = d_c \sin \beta - \cos \beta t_2 \\ z = 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_2 \end{cases} \quad (12)$$

其中 $t_1, t_2$ 为待求参数。

将两直线的参数方程分别代入平面方程可求得

$$t_1 = \frac{d_c \sin \alpha \cos \beta + 120 \cos \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta}$$

$$t_2 = \frac{d_c \sin \alpha \cos \beta + 120 \cos \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta}$$

代回直线方程可解得两直线与平面的交点为

$$(d_c \cos \beta - \sin \beta t_1, d_c \sin \beta + \cos \beta t_1, 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_1)$$

$$(d_c \cos \beta + \sin \beta t_2, d_c \sin \beta - \cos \beta t_2, 120 - \frac{\sqrt{3}}{3} t_2)$$

覆盖宽度可表示为两交点之间的距离,由空间坐标距离公式可得

$$W = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(\sin^2 \beta + \frac{1}{3})(t_1 - t_2)^2 + \cos^2 \beta (t_1 + t_2)^2} \quad (13)$$

结合问题二给出的参数及所建立的数学模型,

编写 MATLAB 程序求得结果如下表所示:

表 2 三维矩形坡面海域不同测线覆盖宽度的计算结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/ $^\circ$	0	415.6921938	466.091055	516.4899161	566.8887772	617.2876384	667.6864995	718.0853607	768.4842218
	45	416.1915233	451.871707	487.5518915	523.2320756	558.9122597	594.5924439	630.272628	665.9528121
	90	416.6918699	416.69187	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699
	135	416.1915233	380.511339	344.8311551	309.150971	273.4707869	237.7906028	202.1104187	166.4302346
	180	415.6921938	365.293333	314.8944715	264.4956104	214.0967492	163.6978881	113.299027	62.90016582
	225	416.1915233	380.511339	344.8311551	309.150971	273.4707869	237.7906028	202.1104187	166.4302346
	270	416.6918699	416.69187	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699	416.6918699
	315	416.1915233	451.871707	487.5518915	523.2320756	558.9122597	594.5924439	630.272628	665.9528121

### 3 矩形海域测线布设优化模型

考虑某一坡面矩形海域的测线布设问题,在坡度、海水深度以及多波束换能器的开角已知的情况下,该测点的覆盖宽度仅与测线方向有关。

#### 3.1 多目标优化模型建立

考虑在给定待测区域、海水深度、坡度及换能器张角的情况下,寻求最优测线方向,以重叠率为约束条件,以最小化测量长度并且能够覆盖整个待测区域为目标,建立相应多目标规划模型<sup>[4]</sup>。

由假设可知,本文考虑测线为相互平行的直线族<sup>[5]</sup>,设 $x_i$ 为第 $i$ 条测线的布设长度,则测量长度可表示为 $x_{sum} = \sum_1^n x_i$ 。

其中每条测线长度均由沿此测线方向布设的平行测线族与矩形海域边界的交点确定,考虑三维矩形海域模型所建立的空间直角坐标系,当 $\beta$ 未定时,测线方向向量为 $\vec{l} = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$ 。

假定测线在区域边界的某一起始点 $(x_i, y_i, 110)$ ,可得到直线的参数方程为

$$l = \begin{cases} x = x_i + \cos \beta t \\ y = y_i + \sin \beta t \\ z = 110 \end{cases} \quad (14)$$

通过求解此类直线与矩形海域边界直线的交点,联立初始点即可求得此条测线的测量长度 $x_i$ 。设定集合 $S$ 为该矩形海域坡面区域, $S_d$ 为沿布设测线扫描的覆盖区域。

于是目标函数为:

$$\begin{cases} \min x_{sum} \\ S \subset S_d \end{cases} \quad (15)$$

考虑两条平行测线的重叠率时,相邻两条测线的重叠率应为两条测线重叠区域的面积除以后向测线覆盖区域的面积,在具体的分析过程中也可以通过积分求解相应面积。

相应约束条件为:

$$10\% \leq \eta \leq 20\% \quad (16)$$

其中 $\eta$ 为相邻两条测线的重叠率。

结合目标函数与约束条件即可得到最终的多目标规划模型。

#### 3.2 最优测线方向讨论

由三维矩形海域覆盖宽度的模型可知,此时在该点处进行多声波探测的覆盖宽度仅与坡度 $\alpha$ 、测线方向与坡面法向所成角 $\beta$ 及海水深度 $D$ 有关,即海域内任一点处多声波测线的覆盖宽度都可以表示为:

$$W = F(\alpha, \beta, D) \quad (17)$$

当深度 $D$ 一定时,利用 MATLAB 绘制坡面中心点处测线的覆盖宽度随 $\beta$ 的变化情况如下图所示:

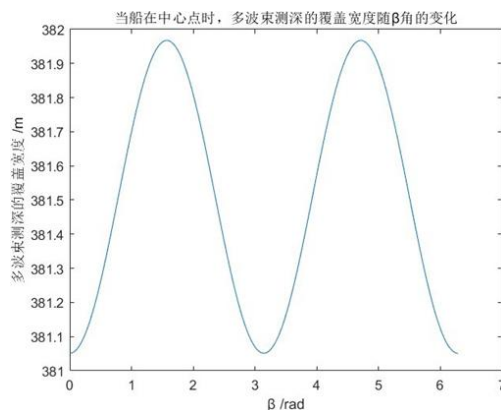


图 3 覆盖宽度随 $\beta$ 函数变化关系

可得当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时,该条测线的覆盖宽度最大。此

时测线沿坡面等深线方向分布。

以最大化单条测线覆盖条带面积为目标,对坡面上的每一点考虑下一位置的最优解,都为相应等深线方向,即为最优测线方向。

#### 3.3 模型求解

考虑沿等深线方向以10%的最小前向重叠率进行测线布设,可得矩形坡面海域最优测线布设方案为沿南北方向的34条平行测线序列。

以下为其中一组测线布设方案的部分数据。

该测线布设方案以矩形海域西边界为起点,从距西边界最近的一条测线开始编号,起始编号为1,求得的测线布设位置及间距如下:

表 3 测线布设位置及深度(部分)

编号	1	2	3	4	5	6	7
测线处海水深度 /m	197.6044	182.0369	167.6959	154.4846	142.3141	131.1025	120.7741
测线距西边界距离 /m	358.5218	953.0205	1500.684	2005.202	2469.973	2898.129	3292.555



同时利用 MATLAB 绘图可得此矩形坡面测线布设的俯视示意图为:

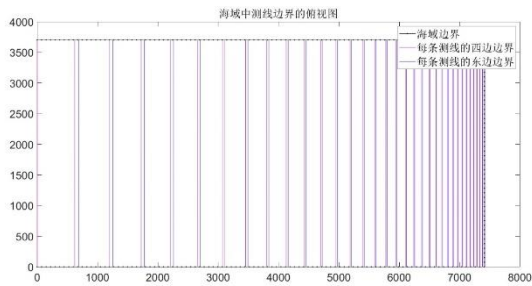


图 4 矩形海域测线布设边界俯视图

## 4 真实海域测线布设优化模型

### 4.1 待测海域地形分析

根据附件中单波束测线的数据对海底地形进行处理, 假设待测海域在较小的坐标范围内坡度变化较为平缓, 进行拟合处理不会产生太大误差, 得到海底地形示意图如下:

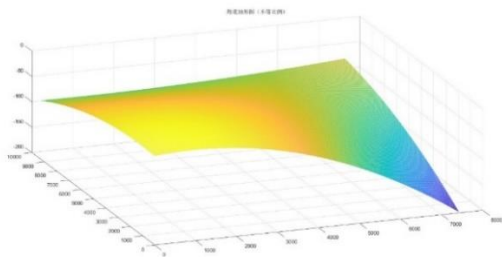


图 5 海底地形图 (不等比例呈现)

### 4.2 测线布设优化模型建立

设  $S_p$  为已布设测线条带所覆盖的待测海域内的区域,  $S$  为此块待测区域,  $d_{sum}$  为所设计测线的总长度,  $\eta$  为相邻条带之间的重叠率。仿照上文的多目标优化模型, 仍然考虑建立使得所布测线覆盖  $S$  的区域最大、测线总长度  $x_{sum}$  最短, 同时满足相邻条带之间的重叠率在 20% 以下的多目标优化模型。

考虑目标函数为:

$$\begin{cases} \min x_{sum} \\ \max S_p \cap S \end{cases} \quad (18)$$

约束条件为:

$$0 \leq \eta \leq 20\% \quad (19)$$

可得待测海域地形条件下的多目标规划模型。

### 4.3 测线布设的一种优化方案设计

#### 4.3.1 真实海域测线布设迭代算法设计

考虑所布设测线平行于区域边界, 以便进行相关指标的计算。此时海底地形存在高低起伏变化, 测线所形成的覆盖宽度会随测点的海水深度而变化。

设计迭代求解测线布设位置的算法步骤如下:

**Step1:** 由附件数据及拟合结果确定每一点处的深度以及待测区域边界值等指标;

**Step2:** 设定初始迭代位置及条件, 以区域西边界中点作为初始位置, 迭代的起始条件为第一条测线的西边边界刚好穿过区域西边界的中点位置;

**Step3:** 考虑在待测海域范围内遍历搜索所有可能的测线位置, 根据测线处海水深度可确定其覆盖边界位置, 与 Step2 判定条件比对可确定初始测线的位置;

**Step4:** 考虑下一迭代条件, 以此条测线东边界近似对称位置作为下一迭代的初始位置, 迭代的判定条件为所搜索的下一条测线的西边边界刚好穿过该条测线东边界上对应位置;

**Step5:** 根据完全覆盖要求设定终止条件, 在未达到终止条件时逐步迭代搜索下一条测线位置。

最终得到所有测线的布设位置, 如下图所示:

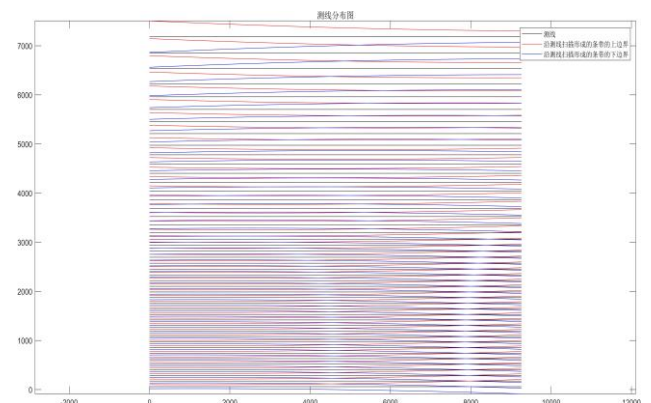


图 6 测线覆盖条带分布图

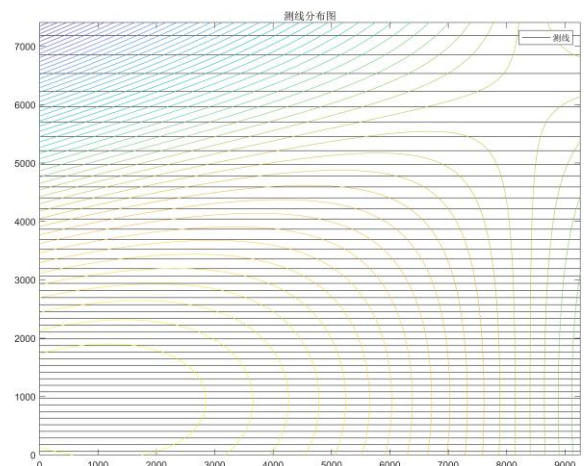


图 7 测线布设图

### 4.3.2 待测指标讨论及运算结果

#### 1) 测线总长度

考虑测线为平行与区域边界的直线, 测线总长度仅由边界宽度及测线布设条数决定。

#### 2) 漏测海区面积

考虑两条测线的边界交线, 前一条测线的下边界与后一条测线的上边界交叉形成的较浅区域认为是相邻两条测线的漏测区域。

在数值计算的过程中, 将每一块漏测区域进行近似分块处理, 累加得到漏测海区总面积。

#### 3) 重叠区域

考虑两条测线的边界交线, 前一条测线的上边界与后一条测线的下边界交叉形成的较深区域即为相邻两条测线的重叠区域。

#### 4) 重叠率

在某一深度点处考虑相邻两条测线的重叠宽度与自身覆盖宽度之比。由于此时测线并非完全等深布设, 某一点处的重叠率并不能代表此条测线的重叠率, 需分别计算并统计重叠率大于 20% 的部分。

在以上测线布设的基础上, 根据不同指标的求解方式, 利用一定的数值计算近似方法求得相应指标的结果为:

**测线的总长度:** 230 海里;

**漏测海区占总待测海域面积的百分比:**  
0.068596582914388, 约为 6.85%

**重叠率超过 20% 部分的总长度:**  
1.471599200000027e+05 米

## 5 模型检验

### 5.1 数据的可靠性检验

本文假设待测真实海域地势在坐标范围变化较小的情况下走势较为平缓, 如果海底地势变化较为陡峭时, 需要对数据的偏差或集中程度进行检验。

### 5.2 假设的合理性检验

本文的假设适用于所建立的模型, 若不考虑测线为一组平行直线, 模型建立便会失去初始要求, 从而使得问题过于复杂, 无法进行有效的简化。

### 5.3 鲁棒性检验

本文多目标优化模型的建立以完全覆盖待测海域和最短测量长度为目标, 此时测点处的水深变化

梯度对于模型的鲁棒性至关重要。考虑选取此时海底梯度进行分析, 将它的值在一定百分比内调整, 比较测线布设优化模型中最优的测线方向及间距。

当梯度变化较大而对最优测线方向与测线间距影响较小时, 可以得出测线布设参数对于海底地势梯度不敏感, 模型具有可适用性; 反之则需要考虑合适的地形范围, 模型不具有普适性。

## 6 结束语

本文基于空间解析几何分析与多目标规划原理建立了矩形坡面海域与真实海域的多波束测线布设模型, 探究了测线覆盖宽度及重叠率的数学表示, 并设计算法对模型进行求解与可视化呈现。

在矩形坡面海域内, 最优测线布设方案为沿区域等深线方向平行布设。对于真实海域, 本文设计了一种较为有效的算法进行测线布设间距的确定, 给出了一种可行的测线布设方案。

在之后的研究中, 可进一步对测线方向进行讨论搜索, 并进一步沿等深线走向对海域地形进行分块或网格化处理, 以实现更优的测量效果。

## 参考文献

- [1] 赵建虎, 现代海洋测绘[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007.
- [2] 张旭, 叶小心, 洪德玫. 多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究[J]. 中国水运·航道科技, 2017(1): 4. DOI: CNKI: SUN: SYHD. 0. 2017-01-019.
- [3] 王茂枚, 周广宇, 陈楠, 等. 基于高分辨率的多波束测量方案研究[J]. 水利水电技术(中英文), 2021(052-S02).
- [4] 成芳等. 多波束测量测线布设优化方法研究[J]. 海洋技术学报, 2016, 35(2): 5.
- [5] 马鸣, 古楠, 董佳伟, 尹勇, 韩冰, 彭周华. 基于电子海图的无人艇集群区域覆盖路径规划[J/OL]. 中国舰船研究. <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.03202>
- [6] 中国地质调查局. (2016). 中国地质调查局地质调查技术标准: 海洋多波束测量规程. 北京: 地质出版社.
- [7] 肖波, 李善斌, 管廷波, 张宇鹏. 关于多波束测绘系统在现代海洋测绘中的应用研究[J]. 中文科技期刊数据库(全文版)工程技术, 2022(3): 4.