Computação Gráfica

André Brandão

Aula 04

Matrizes de transformação

Sumário

- Transformações 2D
  - Escala
  - Cisalhamento
  - Rotação
  - Reflexão
- Transformações 3D
- Translação

Sumário

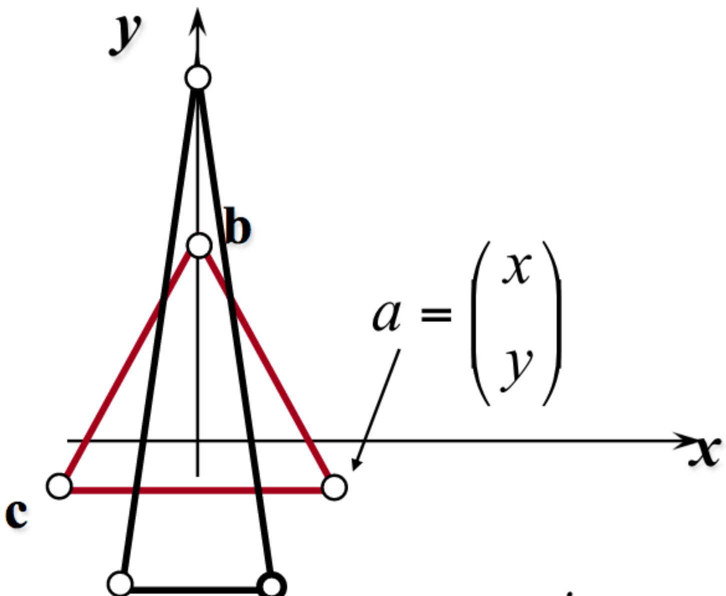
- Transformações 2D
  - Escala
  - Cisalhamento
  - Rotação
  - Reflexão
- Transformações 3D
- Translação

Escala

$$Scale(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_x^{-1} & 0 \\ 0 & s_y^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{pmatrix}$$

Escala



$a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

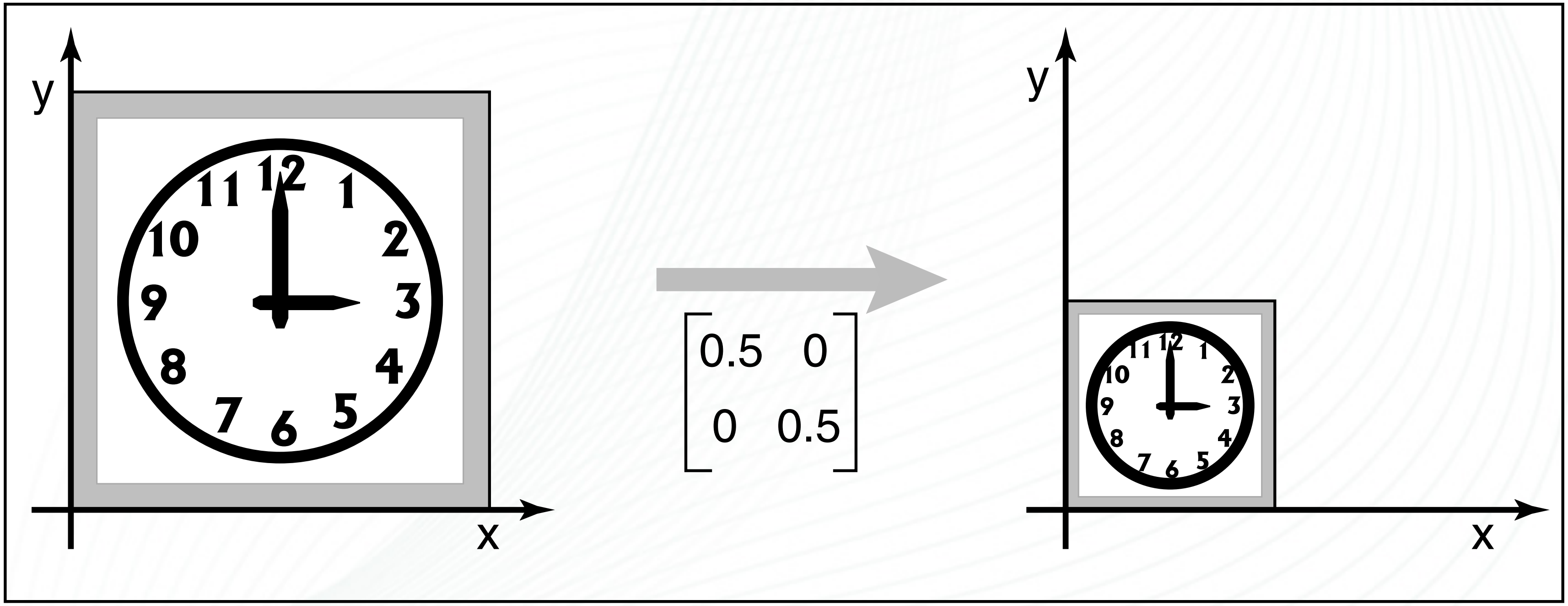
$a = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Redução $(0 < s_x < 1)$,
Aumento $(s_y > 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

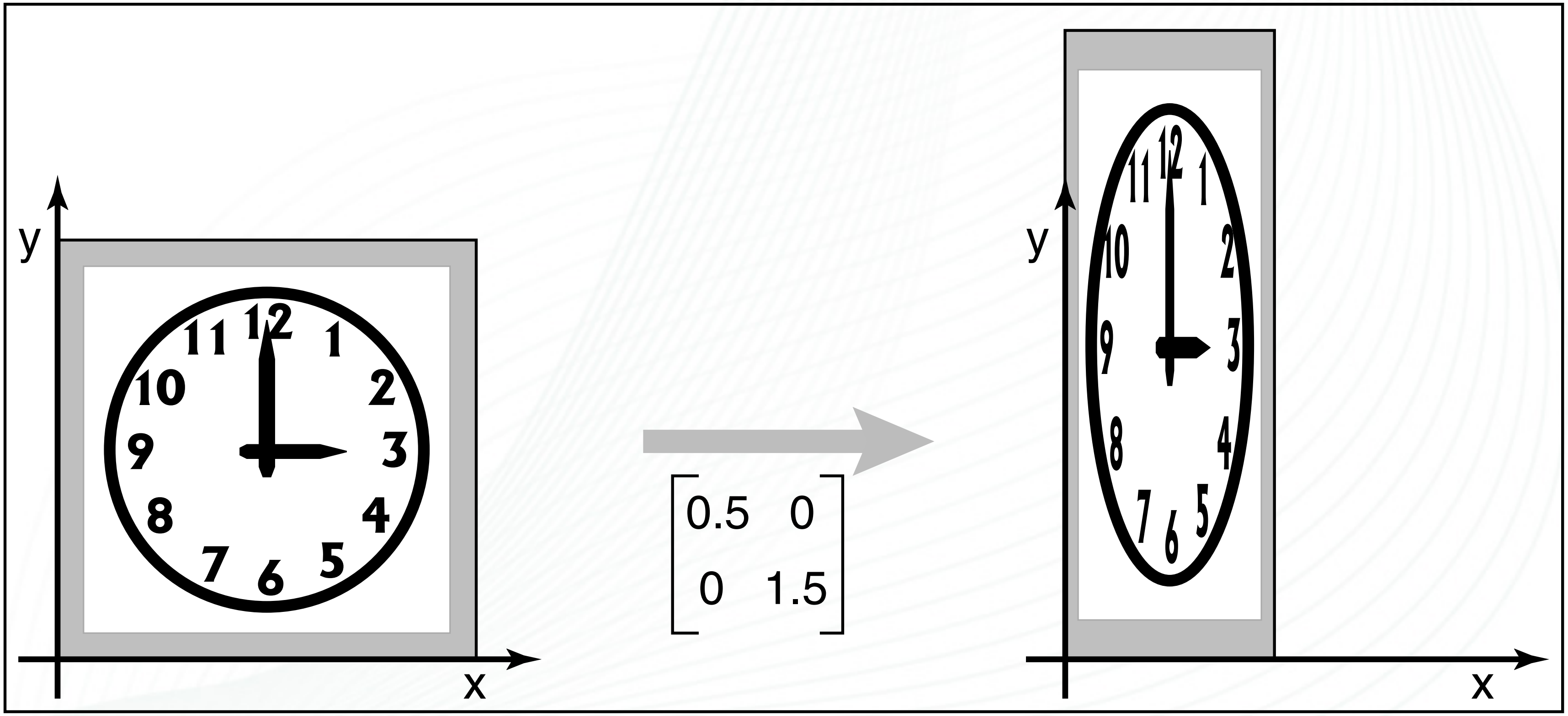
http://www2.ic.uff.br/~anselmo/cursos/CGI/slidesGrad/CG_aula5(transformacoesnoplano).pdf

Escala



$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Escala



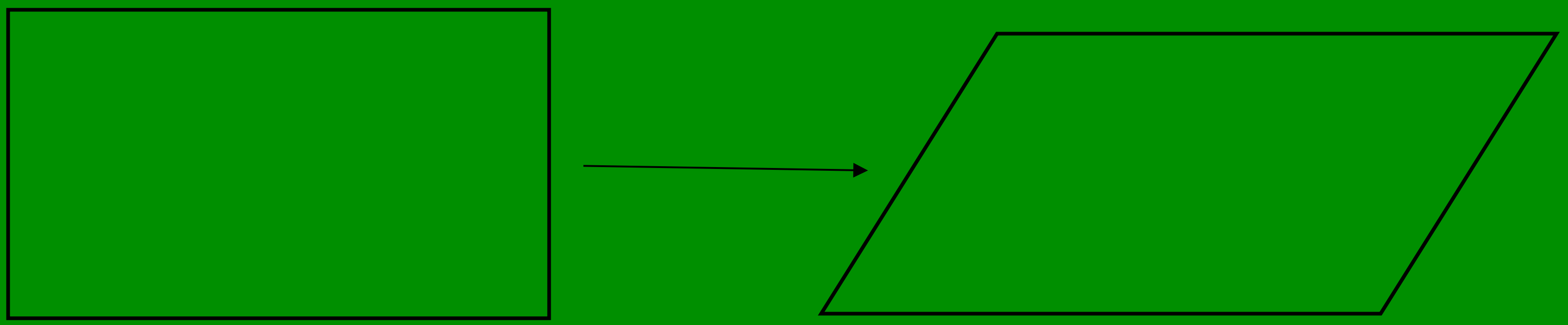
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Sumário

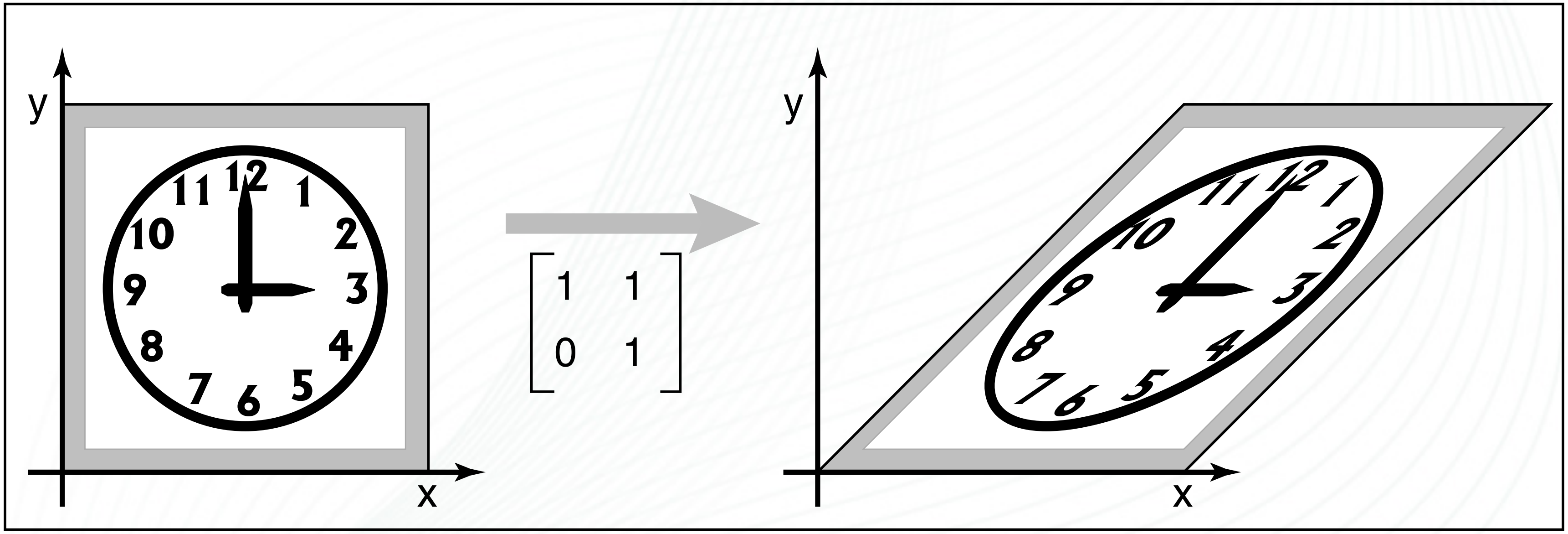
- Transformações 2D
  - ~~Escala~~
  - Cisalhamento
  - Rotação
  - Reflexão
- Transformações 3D
- Translação

Cisalhamento (*Shear*)

$$Shear = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamento (*Shear*)

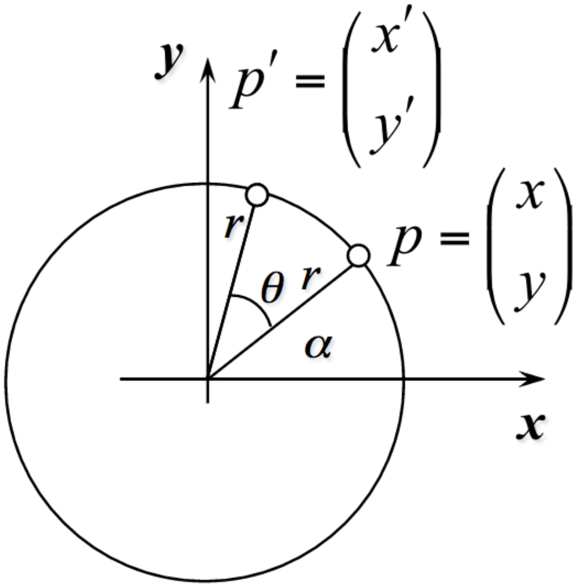


UFABC

Sumário

- Transformações 2D
  - ~~Escala~~
  - ~~Cisalhamento~~
  - Rotação
  - Reflexão
- Transformações 3D
- Translação

Rotação



$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

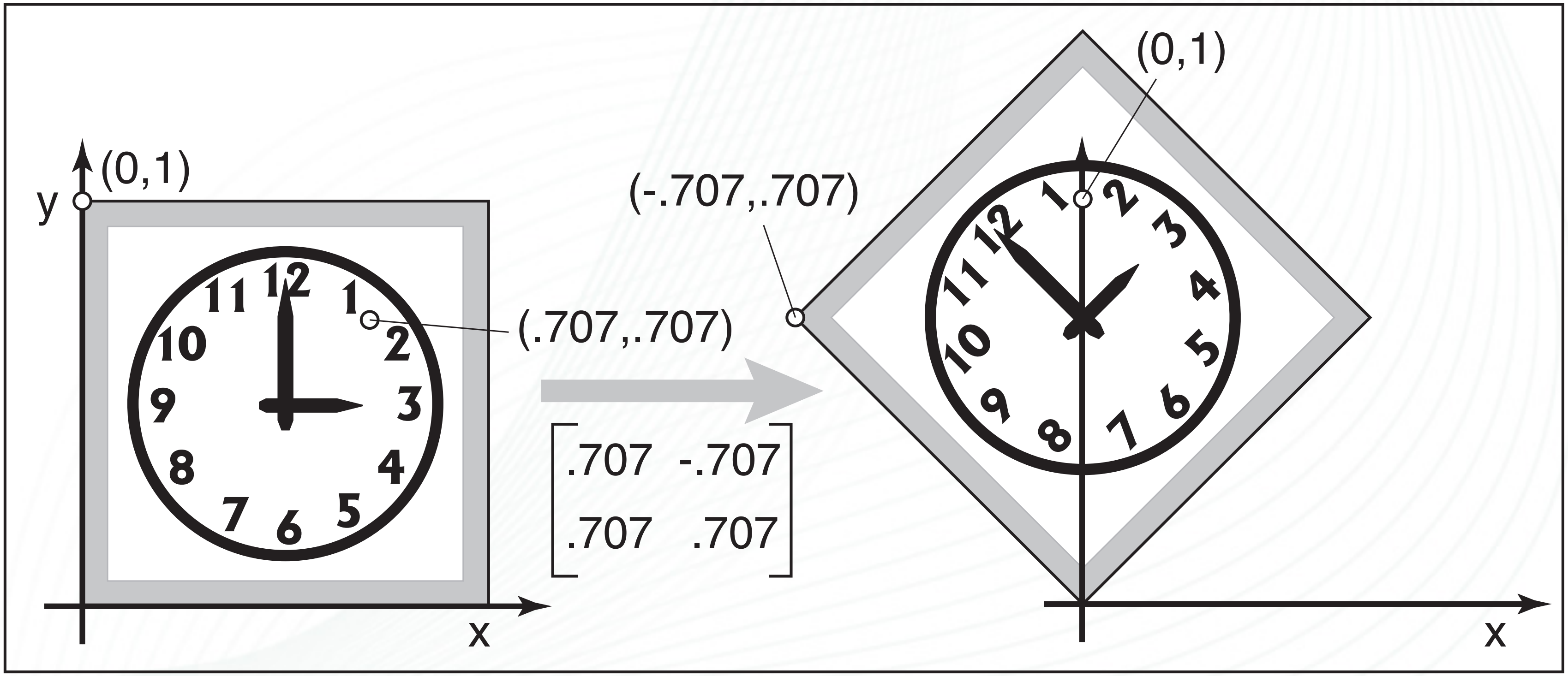
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

http://www2.ic.uff.br/~anselmo/cursos/CGI/slidesGrad/CG_aula5(transformacoesnoplano).pdf

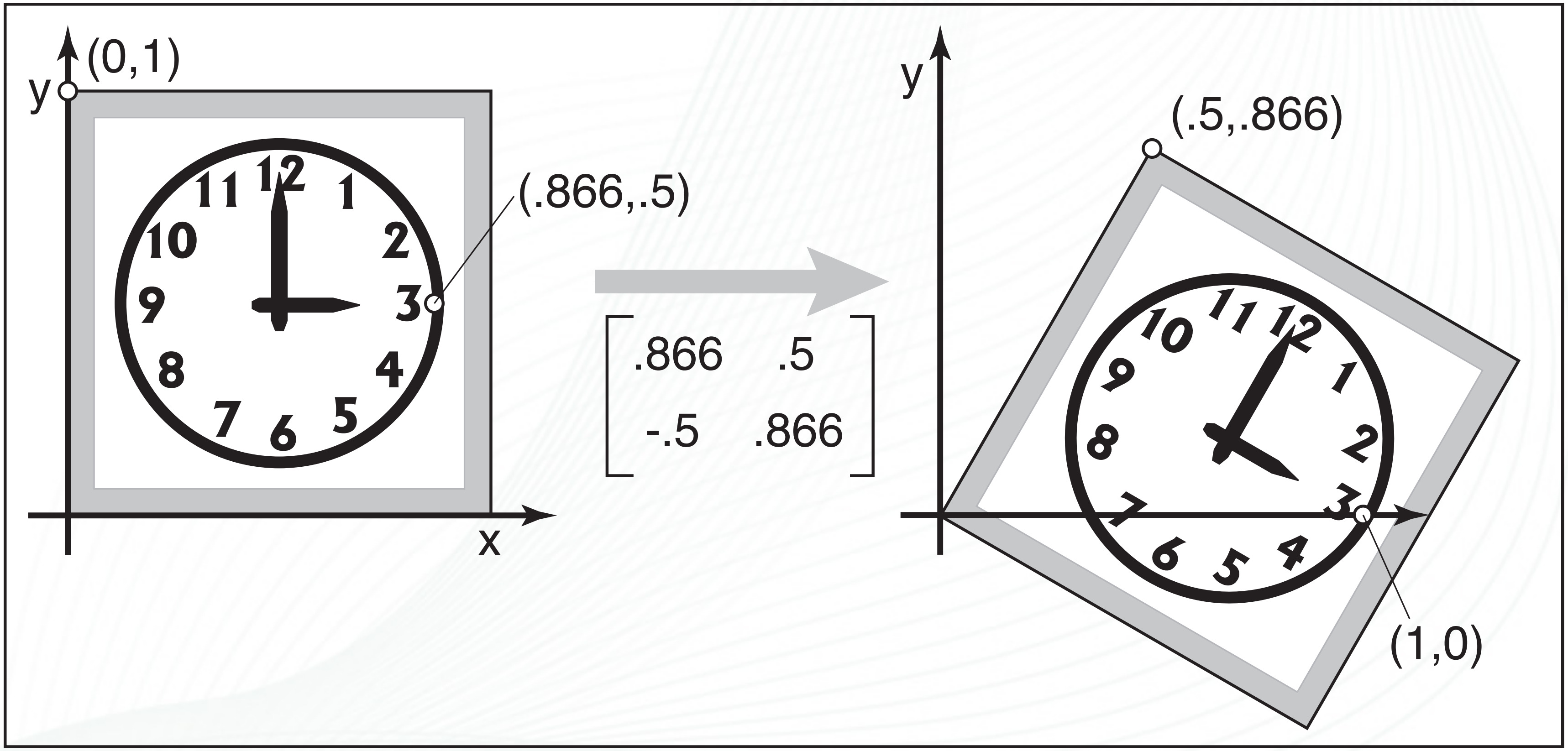
Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo: Rotação de π/4



Exemplo: rotação de -30º

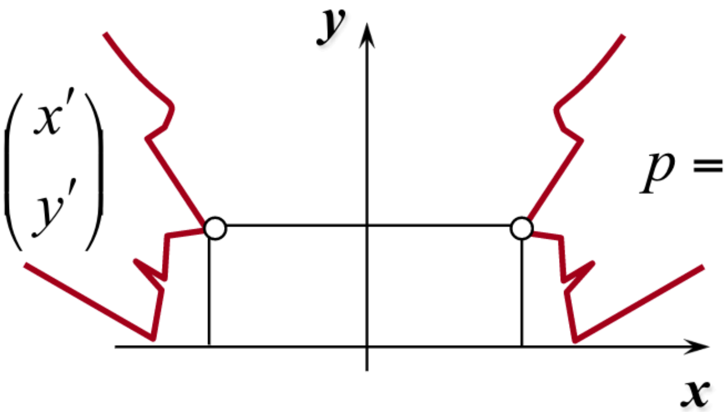


UFABC

Sumário

- Transformações 2D
  - ~~Escala~~
  - ~~Cisalhamento~~
  - ~~Rotação~~
  - Reflexão
- Transformações 3D
- Translação

Reflexão (eixo y)



$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x´ = -1.x
y´ = y

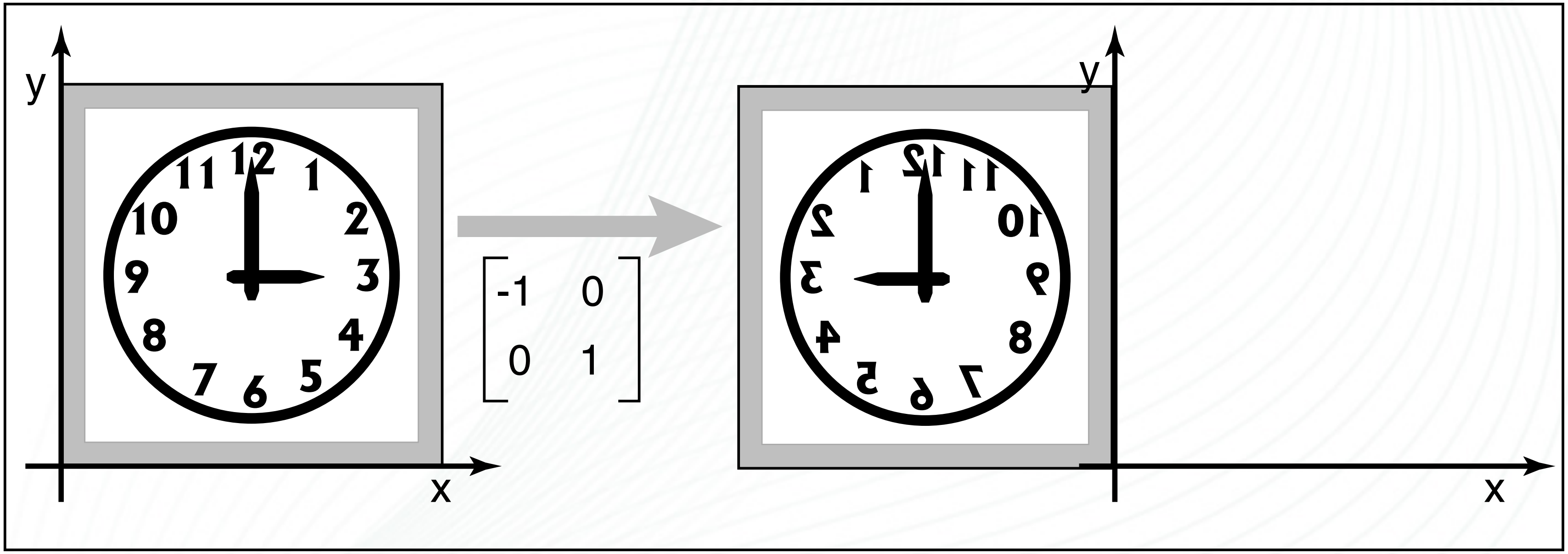
Espelhamento em relação ao eixo y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

http://www2.ic.uff.br/~anselmo/cursos/CGI/slidesGrad/CG_aula5(transformacoesnoplano).pdf

UFABC

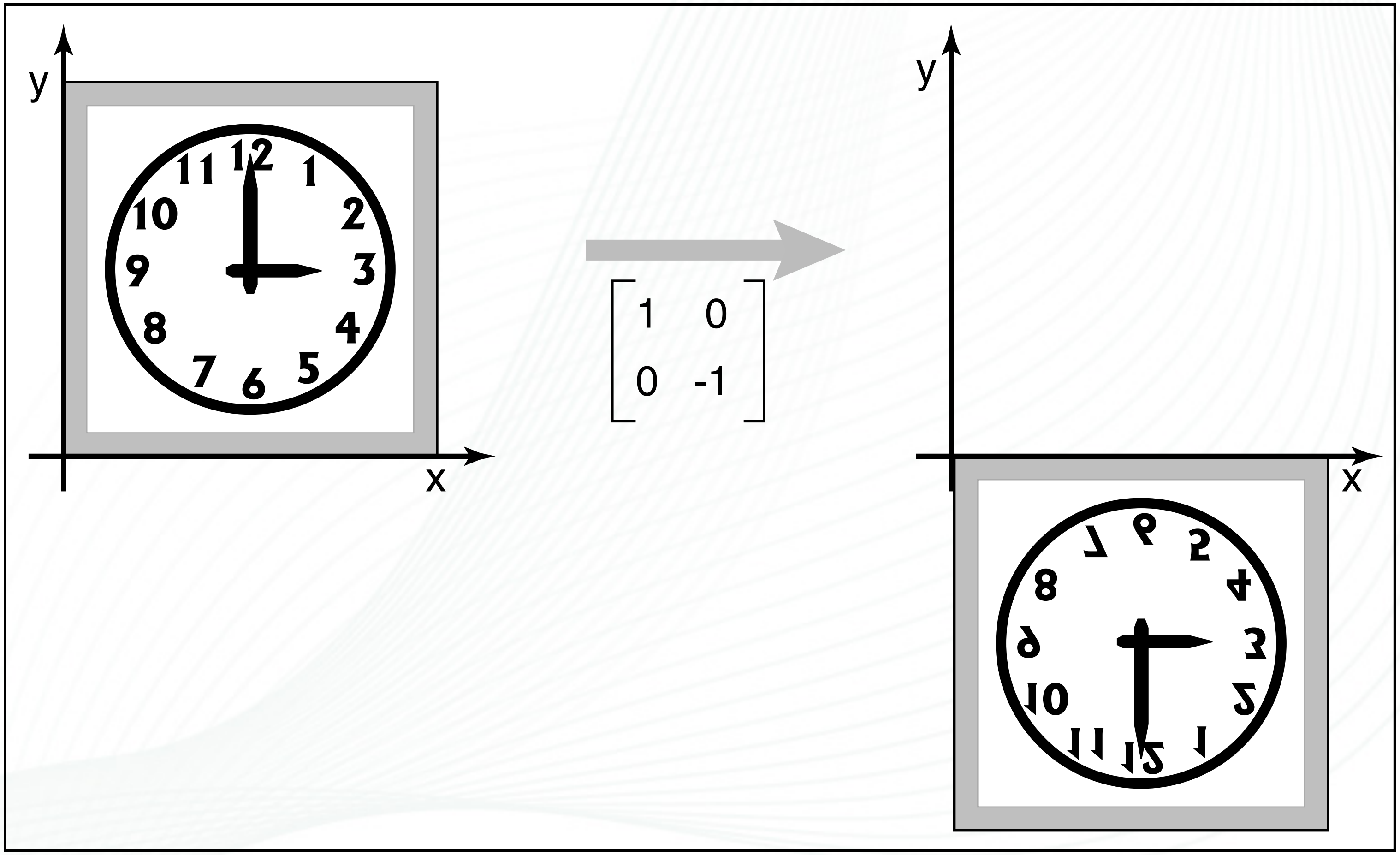
Reflexão (eixo y)



Reflexão (eixo x)

$$\text{reflect-x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexão (eixo x)



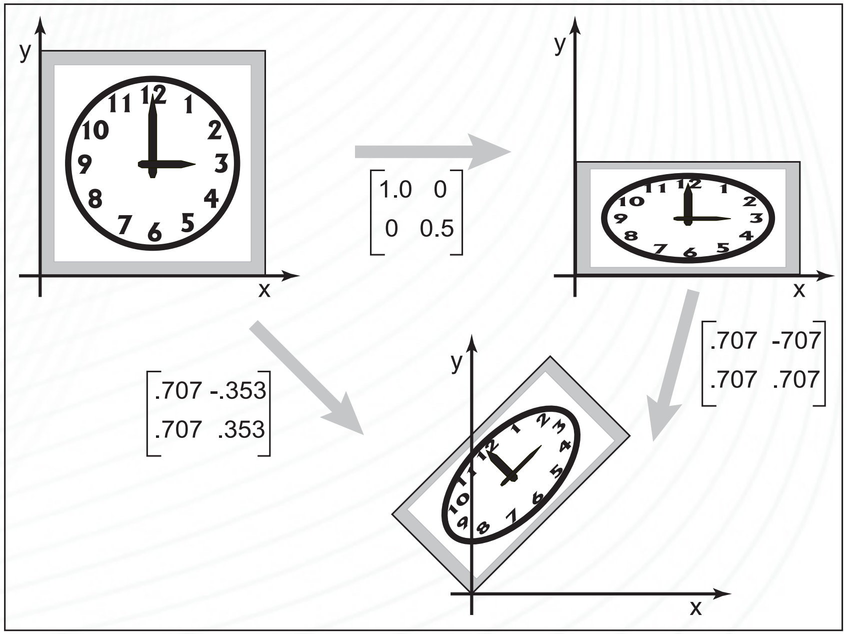
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Composição

- É comum aplicar diversas transformações a um elemento, em Computação Gráfica.
- Exemplo:
  - Aplicar uma escala S e, então, uma rotação R em um vetor v_1.
  - Primeiro, $v_2 = S*v_1$,
  - Então, $v_3 = R*v_2$
  - Outra forma de escrever: $v3 = R*(S*v_1)$

Composição

- Portanto, ao invés de se realizar duas multiplicações, a matriz de resultante das operações poderia multiplicar o objeto, diretamente.
- Exemplo: diminuir a altura do objeto pela metade e, então, rotacioná-lo em 45 graus.



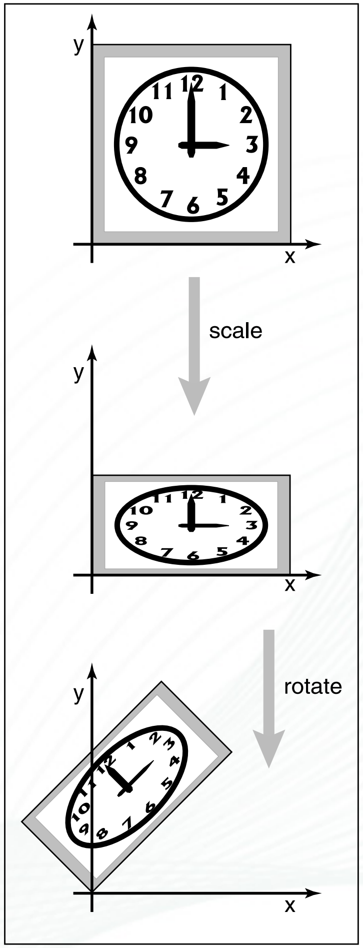
Composição

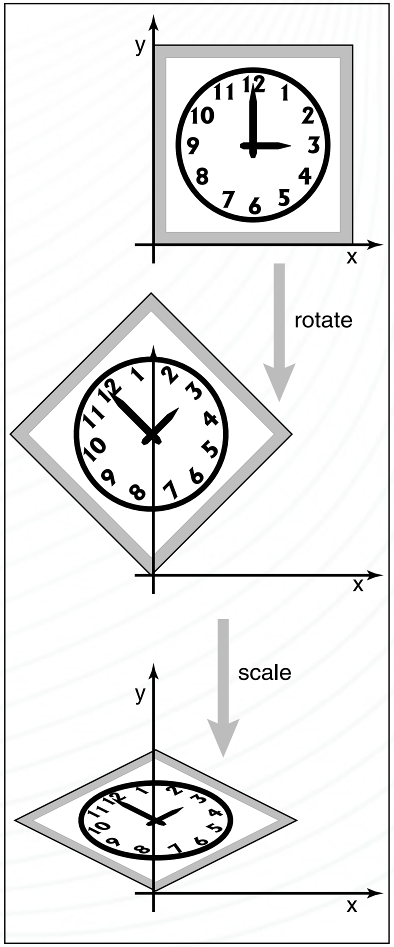
- Lembre-se que, pela propriedade da multiplicação de matrizes, a ordem das operações importa, no resultado final.

$$A*B \neq B*A$$

UFABC

Composição





Sumário

- ~~Transformações 2D~~
  - ~~Escala~~
  - ~~Cisalhamento~~
  - ~~Rotação~~
  - ~~Reflexão~~
- Transformações 3D
- Translação

Transformações 3D

- As transformações básicas;
  - Escala,
  - Cisalhamento,
  - Rotação,
  - Reflexão,

São extensões das transformações 2D.

Escala

$$\text{scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

Rotação no eixo z

$$\text{rotate-z}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação no eixo x

$$\text{rotate-x}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Rotação no eixo y

$$\text{rotate-y}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em um eixo qualquer

$$\text{shear-x}(d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & d_y & d_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

- ~~Transformações 2D~~
  - ~~Escala~~
  - ~~Cisalhamento~~
  - ~~Rotação~~
  - ~~Reflexão~~
- ~~Transformações 3D~~
- Translação

Translação

- Definida pela soma de fatores de translação tx e ty as coordenadas x e y do ponto. É uma soma de matrizes.

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

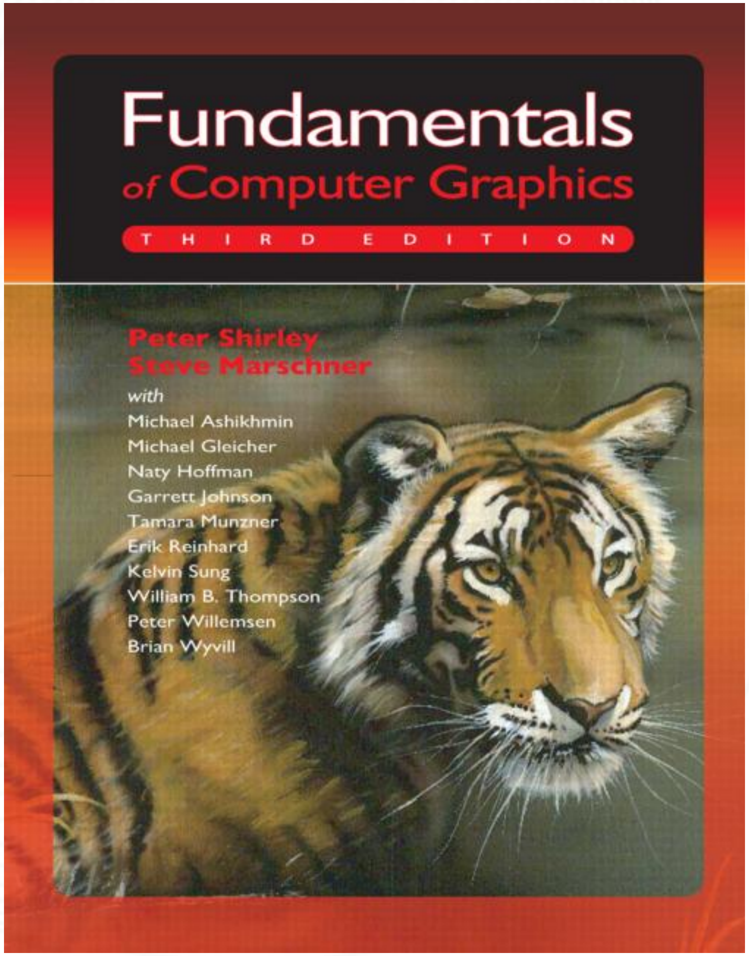
$$P' = P + T$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \end{bmatrix}$$

Aula de hoje

Shirley, Peter, Michael Ashikhmin, and Steve Marschner. Fundamentals of computer graphics. CRC Press, 3rd Edition, 2009.

- **Capítulo 6**



UFABC

Fim da Aula 04

André Luiz Brandão