

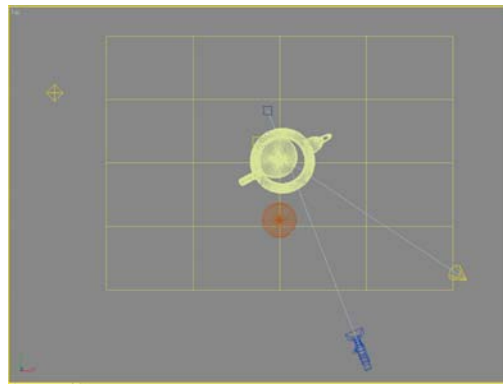
4. Geometria e Álgebra

Este capítulo procura fazer uma revisão da Álgebra Linear relacionando os conceitos algébricos com as construções geométricas encontradas na Computação Gráfica. O leitor deve encontrar nele poucos assuntos que já não sejam de seu conhecimento. Ainda assim, sugerimos uma leitura rápida para fixar os conceitos e a notação.

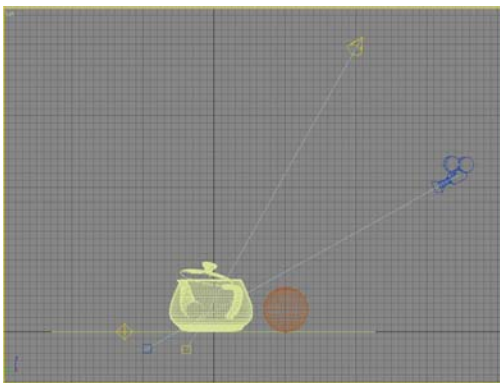
Na Computação Gráfica, os objetos possuem, além dos atributos de cor e textura, uma forma geométrica, uma posição e, possivelmente, um movimento. Considere, por exemplo, uma cena simples como a mostrada na Fig. 4.1. Além da descrição das luzes e da câmera, que são tratadas nos capítulos sobre algoritmos de síntese de imagens, precisamos descrever geometricamente o bule e a bola.



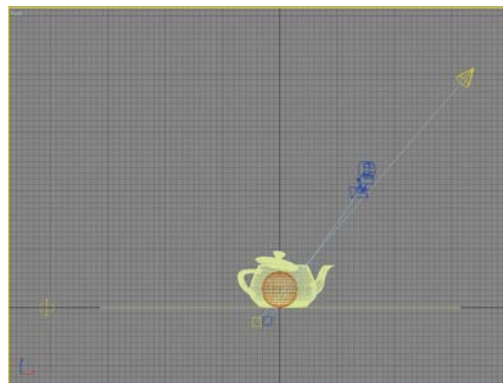
(a) Imagem resultante



(b) Modelo da cena vista de cima



(c) Modelo da cena vista de frente



(d) Modelo da cena vista de lado

Fig. 4.1 – Síntese de uma cena simples.

Na descrição desta cena para Sistemas Gráficos como o OpenGL, é natural termos a forma dos objetos, como o bule, definida por uma malha de triângulos ou quadriláteros que

compõe sua fronteira. Esta forma de representar matematicamente um objeto pela sua superfície externa é dita **representação de fronteira** (*boundary representation*) e é muito comum na Computação Gráfica porque normalmente as imagens que enxergamos são reflexões de luzes nestas superfícies. As placas gráficas atuais são baseadas no algoritmo de ZBuffer, que projeta cada um dos triângulos das malhas que aproximam estas superfícies e altera os valores dos *pixels* interceptados.

Outro problema comum da Computação Gráfica está ilustrado na Fig. 4.2. Um dos passos básicos do algoritmo de Traçado de Raios é o cálculo da interseção do raio com os objetos da cena. Após determinar o ponto de interseção com o objeto mais próximo, o algoritmo prossegue com o cálculo da cor daquele ponto, que envolve a medição de ângulos entre as fontes de luz e a normal a superfície. Estas e outras operações geométricas são baseadas na Álgebra Linear e no Cálculo Vetorial, que compõem o foco deste capítulo.

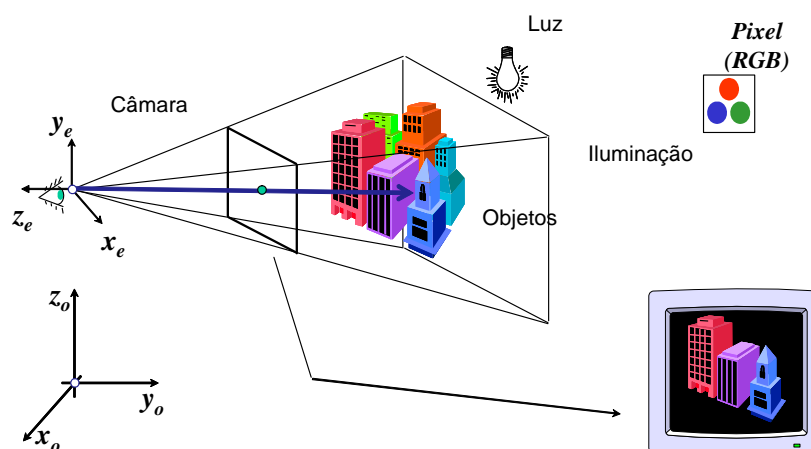


Fig. 4.2 – O algoritmo de Traçado de Raios.

Pontos e Vetores no Plano e no Espaço

Para recordar as definições de vetores e fixar uma notação, considere a posição do vértice **p** de uma estrela de 5 pontas, mostrada na Fig. 4.3a, ou de um vértice de um tetraedro, mostrado na Fig. 4.3b. As posições de cada um destes pontos com relação a um Sistema de Eixos Cartesianos xy ou xyz , respectivamente, podem ser definidas por duas coordenadas, x e y , ou três, x , y e z , respectivamente. Estes valores representam tanto a posição de **p** quanto a distância, a orientação e o sentido que seriam necessários aplicar para levar um ponto que originalmente estivesse na origem para a posição do ponto **p**. Ou seja, o vetor **p** pode tanto ser entendido como uma posição quanto por um vetor. Neste texto, *ponto* é uma entidade geométrica e *vetor* uma entidade algébrica que pode estar representando um ponto ou outra entidade matemática.

Para facilitar a leitura utilizamos aqui a seguinte notação: letras minúsculas são números reais, também denominados escalares; letras minúsculas em negrito representam vetores; e letras maiúsculas em negrito são matrizes. A representação de um vetor por suas coordenadas cartesianas é feita aqui da forma ilustrada na Fig. 4.3, ou seja, as coordenadas

são escritas em uma coluna limitada com parênteses. Esta notação detalhada é importante para distinguir as coordenadas cartesianas, que estamos apresentando agora, das coordenadas homogêneas ou projetivas que serão introduzidas depois.

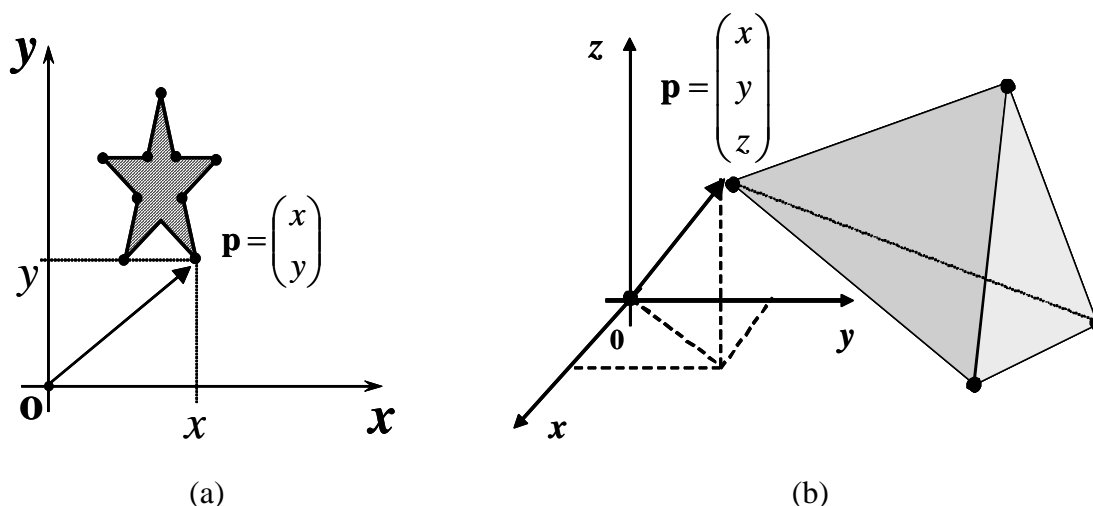


Fig. 4.3 - Posição de um vértice \mathbf{p} no plano (R^2) e no espaço (R^3).

O conjunto de todos os pontos do plano e de todos os pontos do espaço são denominados R^2 e R^3 , respectivamente. O plano e o espaço podem ser definidos formalmente como sendo o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y)^T$ ou ternos ordenados $(x, y, z)^T$ tais que x , y e z sejam números reais. Simbolicamente isto pode ser escrito como:

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tal que } x, y \in R \right\} \text{ ou } R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } x, y, z \in R \right\} \quad (4.1)$$

Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos da Fig. 4.3, podemos facilmente deduzir que o tamanho ou a magnitude de um vetor pode ser calculado por:

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ou } \|\mathbf{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.2)$$

Este tamanho também é denominado “norma do vetor \mathbf{p} ”.

Soma, produto por escalar, subtração e distância

No estudo do ensino médio aprendemos que as duas operações básicas com vetores são a **soma** e a **multiplicação por escalar**. A Fig. 4.4 ilustra a soma de dois vetores no plano, tanto do ponto de vista geométrico quanto do algébrico. Geometricamente, a soma de dois vetores é um terceiro vetor obtido a partir da origem do primeiro até a extremidade do

segundo, quando este é colocado com a sua origem na extremidade do primeiro. O mesmo vetor resultante é obtido quando colocamos o primeiro na extremidade do segundo, como ilustra o paralelogramo da Fig. 4.4 para o R^2 . Algebricamente, esta soma é simplesmente a soma das coordenadas de cada um:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Diversos exemplos motivam esta operação. Se estivermos tratando da geometria do movimento de um ponto, por exemplo, e cada vetor representar dois movimentos consecutivos, a soma representaria o movimento combinado.

Tanto algebricamente quanto geometricamente, deve ficar claro que a soma é comutativa, isto é, a ordem dos vetores não altera o resultado, ou seja $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$.

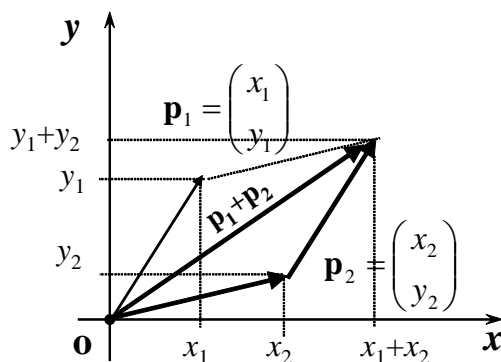


Fig. 4.4 - Soma de dois vetores no R^2 .

Dois vetores importantes a serem lembrados quanto à operação de soma são o *zero* (ou *nulo*) e o *negativo* (ou *inverso com relação à soma*). O zero é um vetor de coordenadas nulas que não altera nenhum outro quando somado a ele. Para cada vetor \mathbf{p} existe outro de igual magnitude, mesma direção e sentido contrário que, somado ao primeiro, resulta no vetor zero. Este vetor é também chamado de negativo de \mathbf{p} , ou $-\mathbf{p}$.

O produto de um escalar por um vetor resulta em outro vetor cujas componentes são iguais às do vetor original multiplicadas pelo valor escalar, ou seja:

$$a\mathbf{p} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \text{ ou } a\mathbf{p} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

A Fig. 4.5 apresenta uma interpretação geométrica do produto de um vetor por um escalar no R^2 . Note que, quando o escalar é maior do que 1.0, o vetor é aumentado. Quando o escalar é maior que 0.0 e menor que 1.0, o vetor é reduzido. Quando o escalar é negativo o vetor muda de sentido. O elemento neutro da multiplicação é o escalar 1.0 e a multiplicação por 0 torna qualquer vetor nulo. A multiplicação de um vetor \mathbf{p} por -1.0 produz um vetor negativo de \mathbf{p} . Ou seja, $-1\mathbf{p} = -\mathbf{p}$.

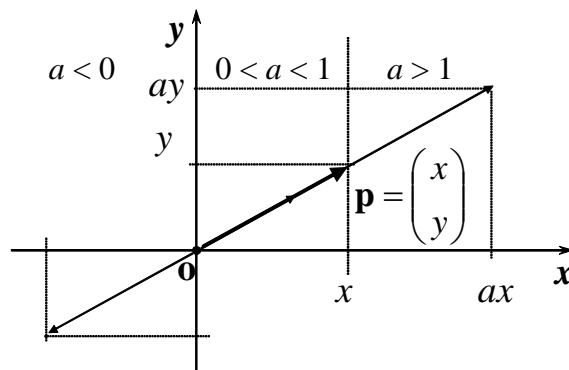


Fig. 4.5 - Produto de um vetor por um escalar.

Um caso particular importante é a multiplicação por um escalar resultando em um vetor de tamanho unitário. Vetores unitários são muito úteis para medirmos distâncias e ângulos. Para calcular o unitário, simbolizado aqui por “ $\hat{\cdot}$ ”, na direção e no sentido de qualquer vetor diferente de zero, basta multiplicá-lo por um escalar que seja o inverso de seu tamanho, ou seja:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \quad (4.5)$$

A partir da soma de dois vetores e do produto de um vetor por um escalar podemos definir a **diferença entre dois vetores** como sendo a soma do primeiro mais o negativo do segundo:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Esta ordem inversa de \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 vem da interpretação geométrica ilustrada na Fig. 4.6. O vetor diferença é o vetor que vai da extremidade do segundo vetor até a extremidade do primeiro.

Uma consequência importante da interpretação geométrica da diferença entre dois vetores é a definição da **distância entre os dois pontos** representados por estes vetores. No sentido comum, a distância entre dois pontos no plano ou no espaço é o comprimento do segmento de reta que os une. Com esta interpretação geométrica, a distância passa a ser a magnitude do vetor diferença. Ou seja:

$$\text{dist}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4.7)$$

Note que o radicando desta fórmula é a soma dos quadrados dos catetos do triângulo cinza da Fig. 4.6 – ou seja, coincide com a noção de distância da Geometria Euclidiana.

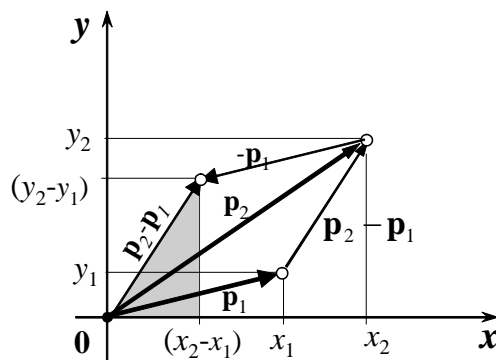


Fig. 4.6 – Diferença entre dois vetores.

Uma aplicação interessante do conceito de distância é a definição de uma esfera. No \mathbb{R}^3 a superfície de uma esfera pode ser caracterizada como sendo o lugar geométrico dos pontos $(x,y,z)^T$ que distam r do centro $(x_0,y_0,z_0)^T$. Ou seja:

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (4.8)$$

Espaços Vetoriais

Quando observamos os vetores geométricos apresentados anteriormente, notamos que as operações de soma e multiplicação por escalar satisfazem as seguintes propriedades:

- | | |
|--|--------|
| 1. Comutatividade: $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$ | (4.9a) |
| 2. Associatividade: $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r})$ | (4.9b) |
| 3. Vetor nulo: $\mathbf{p} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{p} = \mathbf{p}$ | (4.9c) |
| 4. Inverso aditivo: $\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ | (4.9d) |
| 5. Distributividade: $(a+b)\mathbf{p} = a\mathbf{p} + b\mathbf{p}$ e $a(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = a\mathbf{p} + a\mathbf{q}$ | (4.9e) |
| 6. Multiplicação por 1: $1 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}$ | (4.9f) |

para quaisquer vetores \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} e quaisquer escalares a e b .

Existem muitos outros objetos matemáticos que formam conjuntos sobre os quais podemos definir duas operações de **soma** e **produto por escalar** que satisfazem estas mesmas propriedades. Estes conjuntos são genericamente designados de **Espaços Vetoriais**.

Espaço Vetorial das Funções

As funções do intervalo $[a,b]$ nos reais, ilustradas na Fig. 4.7, podem ser somadas e multiplicadas por escalar resultando em novas funções definidas como:

$$(F+G)(x)=F(x)+G(x) \quad (4.10a)$$

e

$$(aF)(x)=aF(x) \quad (4.10b)$$

Estas operações de soma e produto por escalar das funções satisfazem as propriedades (4.9) e por isto, na Matemática, as funções podem ser tratadas como vetores.

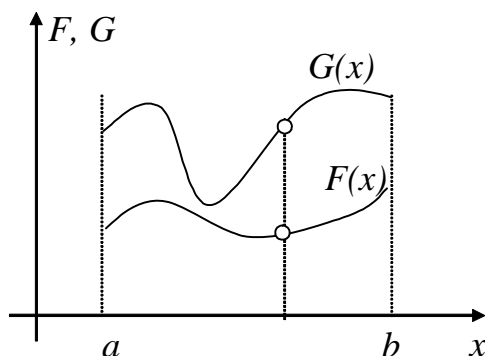


Fig. 4.7 – Funções de um intervalo $[a,b]$ na reta R .

O zero do espaço das funções do intervalo $[a,b]$ na reta é a função $0(x)$, que associa a qualquer valor no intervalo o valor 0 (zero). Como é de se esperar, esta função, quando somada a qualquer outra, não altera o resultado e é vista como a origem do espaço das funções. A função negativa também é obtida através da multiplicação da função original por -1.

Espaço Vetorial Cartesiano R^n

Outro Espaço Vetorial importante é o R^n :

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ tal que } x_i \in R, i \in [1, n]\} \quad (4.11)$$

A soma e o produto por escalar dos vetores deste espaço são semelhantes às formas algébricas da soma no R^2 e R^3 , que são, aliás, casos particulares do R^n (com $n=2$ e $n=3$). A interpretação geométrica no R^n toma emprestados os conceitos do plano e do espaço. Assim, por exemplo, podemos falar em distância entre dois pontos no R^n como uma generalização do R^2 ou R^3 , embora este conceito não seja oriundo de nossa experiência do nosso mundo físico.

Espaço das Matrizes

O conjunto das matrizes $n \times m$

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nm} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

com as operações de soma e multiplicação por escalar convencionais também constitui um Espaço Vetorial, denominado $R^{n \times m}$.

Combinação Linear e Bases

Conforme mencionado anteriormente, os espaços vetoriais são conjuntos de objetos matemáticos sobre os quais podem ser definidas duas operações: a soma e a multiplicação por escalar. Estas duas operações podem ser combinadas em uma só operação denominada **combinação linear**. A combinação linear de m vetores \mathbf{p}_i é um vetor \mathbf{p} dado pela fórmula:

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{p}_i \quad (4.13)$$

onde a_i são números reais.

No R^3 , por exemplo, quando adotamos uma Sistema Cartesiano é comum escrevermos qualquer vetor como sendo uma combinação linear de três vetores especiais, que são normalmente denominados \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Estes vetores são os unitários das direções x , y e z , respectivamente. A Fig. 4.8 ilustra esta combinação.

Esta relação entre as componentes do vetor e os coeficientes da combinação linear não é uma coincidência. Os vetores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam o que é chamado de *base canônica* do R^3 .

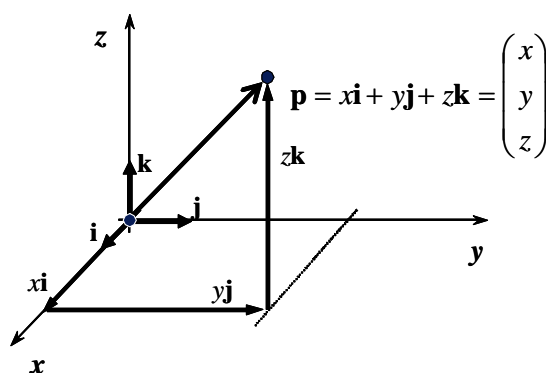


Fig. 4.8 – Vetor do R^3 escrito como uma combinação linear de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Uma **base de um espaço vetorial** é o conjunto mínimo de vetores capaz de escrever qualquer outro vetor do espaço através de uma combinação linear única. Esta unicidade é garantida por uma outra propriedade do conjunto de vetores: a **independência linear**. Um

conjunto de vetores é dito linearmente independente se nenhum deles pode ser escrito como uma combinação linear dos demais. Algebricamente, esta propriedade se escreve como:

$$a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \quad (4.14)$$

Isto porque, se algum dos a_i for diferente de zero, então poderíamos dividir o somatório por este valor e passar todo o resto da combinação linear para o outro lado da equação. Ou seja, estaríamos escrevendo o i -ésimo vetor como uma combinação linear dos outros.

Não é difícil perceber que as bases do R^3 têm exatamente 3 (três) vetores, as do R^2 têm dois vetores, o espaço das matrizes $R^{n \times m}$ tem nm matrizes, e, finalmente, no espaço das funções temos infinitas funções. No R^2 e no R^3 podemos raciocinar geometricamente. Precisamos de dois vetores para escrever todos os pontos de um plano e mais de dois vetores gerariam redundância, ou mais precisamente dependência linear. O mesmo raciocínio se aplica a três vetores no R^3 . As bases do R^n e do $R^{n \times m}$ podem ser deduzidas por indução a partir do R^2 e do R^3 ou podemos raciocinar algebricamente em termos de graus de liberdade que temos para escrever um elemento do conjunto. No R^n temos n variáveis independentes e no $R^{n \times m}$ temos nm . No espaço das funções temos infinitos pontos dentro do segmento $[a, b]$ resultando num número infinito de graus de liberdade para escrever uma função.

Este número de vetores da base de um espaço vetorial é chamado de **dimensão do espaço vetorial**. Dizemos que a dimensão do R^3 é 3, do R^2 é 2, do R^n é n e do $R^{n \times m}$ é nm . Este conceito de dimensão está intimamente ligado ao conceito físico do espaço em que vivemos.

Os vetores das bases também podem ser escritos como sendo uma combinação linear deles mesmos. Assim:

$$\mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Ou seja, o i -ésimo vetor de uma base tem como coordenadas zero em todas as posições exceto na posição i , onde a coordenada é 1.0.

O conceito algébrico de combinação linear expressa geometricamente o conceito de um conjunto de pontos, como ilustra a Fig. 4.9 para retas e planos. Nestas equações a reta é descrita em função do parâmetro t e o plano em função dos parâmetros u e v . Por isto as equações mostradas na figura são chamadas de **descrições paramétricas da reta e do plano**.

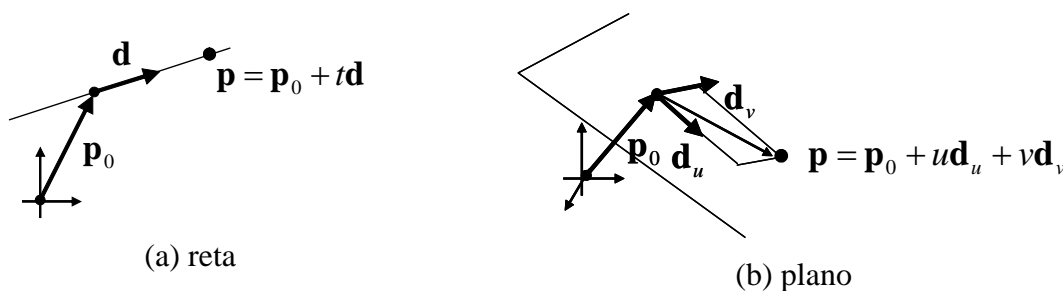


Fig. 4.9 – Retas e planos como combinação linear.

O estudo da **série de Fourier** mostra que no espaço das funções de $-\pi$ a π uma função qualquer pode ser escrita como uma combinação linear na forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \quad (4.16)$$

As funções seno e co-seno sendo vistas como vetores formam uma base para este espaço vetorial. Como a base não tem um número finito de vetores, o espaço é dito de **dimensão infinita**.

Combinação linear convexa

Uma combinação linear dada pela equação (4.13) é dita **convexa** se todos os escalares a_i forem maiores ou iguais a zero e se somados resultarem em 1, ou seja:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \Rightarrow a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0 \quad (4.17)$$

A Fig. 4.10 ilustra três casos importantes de combinações lineares convexas: o segmento de reta, o triângulo e o tetraedro. Estes três objetos são muito utilizados nas aproximações de curvas, superfícies e volumes, respectivamente. Na Computação Gráfica, por exemplo, o algoritmo de desenho de uma curva genérica se baseia no desenho de uma poligonal composta de segmentos de retas e os algoritmos do OpenGL se baseiam em superfícies aproximadas por malhas de triângulos.

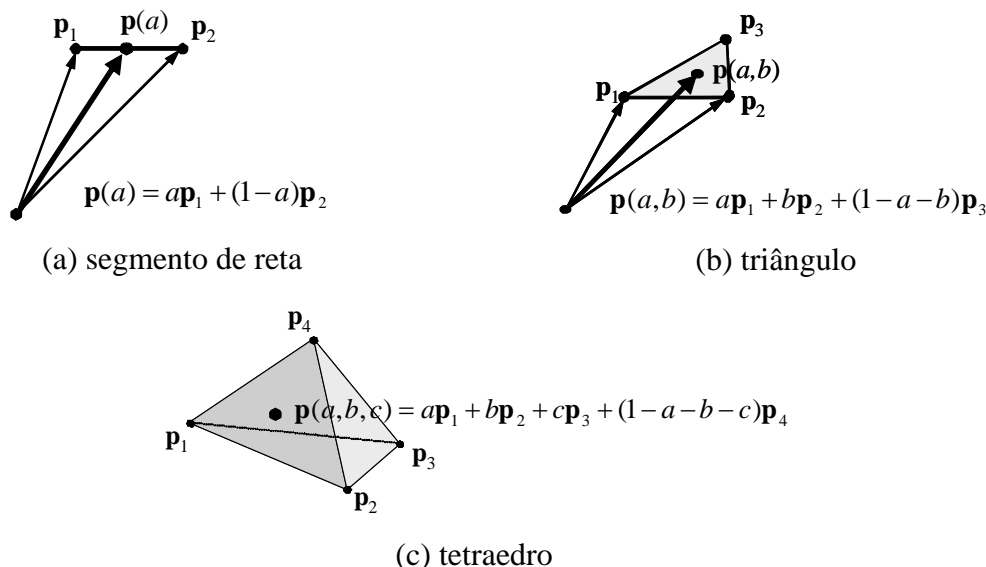


Fig. 4.10 – Exemplos de combinações lineares convexas.

Os pontos de um segmento de reta, de um triângulo ou de um tetraedro podem ser univocamente associados às coordenadas da combinação convexa dos seus vértices. Assim, por exemplo, dado um triângulo cujos vértices sejam \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}_3 , o seu baricentro

fica no ponto de coordenadas convexas $(1/3, 1/3, 1/3)$. Apesar de termos 2 coeficientes para um segmento de reta, 3 coeficientes para um triângulo e 4 para um tetraedro, a restrição de que a soma dos coeficientes resulte em 1 cria a independência necessária para esta relação ser um para um. Por isto, estes coeficientes também são chamados de **coordenadas baricêntricas**.

Generalização da distância e norma de vetores

A distância de um ponto à origem dada pela equação (4.2) e a distância entre dois pontos dada por (4.7) se baseiam na norma de um vetor. A norma utilizada nestas duas equações é a norma Euclidiana, que corresponde à nossa noção geométrica de distância no nosso cotidiano e para a qual usamos instrumentos como régua e trena para fazer medidas.

Para generalizar este conceito para outros espaços que não o R^3 , é necessário que formalizemos o que é uma norma. Para isto procuramos as propriedades que consideramos úteis e que devem ser preservadas.

Em geral, a **norma** de um vetor \mathbf{p} , denotada por $\|\mathbf{p}\|$, pode ser qualquer função do Espaço Vetorial, V , no conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero que satisfaça as seguintes propriedades:

$$\|\mathbf{p}\| \geq 0 \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in V \quad (4.18a)$$

$$\|\mathbf{p}\| = 0 \quad \text{se e somente se } \mathbf{p} = 0 \quad (4.18b)$$

$$\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\| \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in V \quad (4.18c)$$

$$\|a\mathbf{p}\| = |a|\|\mathbf{p}\| \quad \text{para todo } a \in R, \mathbf{p} \in V \quad (4.18d)$$

Esta generalização de norma é muito importante porque ela também engloba o conceito de proximidade de um ponto a outro. A distância entre dois vetores quaisquer \mathbf{p}' e \mathbf{p} pode ser dada por:

$$dist(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| \quad (4.19)$$

Com o conceito de distância entre dois vetores podemos falar em o quanto um vetor aproxima outro. Assim podemos medir o erro absoluto se utilizarmos o vetor \mathbf{p}' no lugar do vetor \mathbf{p} como sendo:

$$\varepsilon_a = dist(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| \quad (4.20)$$

e o erro relativo como sendo:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|} \quad (4.21)$$

Estes erros dependem da norma considerada. No caso do espaço das funções é comum utilizarmos a norma dada por:

$$\|F\| = \frac{1}{b-a} \sqrt{\int_a^b F(x)^2 dx} \quad (4.22)$$

Apesar desta norma não ser tão intuitiva e simples quanto a norma do R^3 , ela preserva o conceito geométrico de distância à origem (vetor zero). A norma de uma função, por exemplo, fornece o valor da ordenada média da função no intervalo. Esta média, no caso da equação (4.22), é a media geométrica do quadrado das ordenadas.

Para os vetores do R^n a extensão é natural:

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (4.23)$$

Para as matrizes a norma poderia ser a raiz quadrada da soma dos quadrados de todos os elementos dela, como se a matriz fosse um vetor no R^{nm} e não do $R^{n \times m}$, ou seja:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2} \quad (4.24)$$

Esta norma é mencionada na literatura como **norma de Frobenius**. Outra norma, mais significativa para o tratamento de matrizes como transformações, que será apresentado a seguir, é dada por:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad (4.25)$$

Esta norma de uma matriz representa o quanto a norma de um vetor pode ser aumentada quando o vetor é transformado por ela.

Em alguns algoritmos o custo de calcular uma raiz quadrada torna o cálculo de normas computacionalmente muito caro e, por isto, mesmo no R^n outras normas são utilizadas. Podemos, por exemplo, definir a norma L_1 como sendo a soma dos módulos das componentes, ou seja:

$$\|\mathbf{p}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (4.26)$$

e a norma L_∞ como sendo o módulo da maior componente:

$$\|\mathbf{p}\|_\infty = \max_{i=0}^n |x_i| \quad (4.27)$$

A notação L_p se dá em função das normas p , que são definidas por:

$$\|\mathbf{p}\|_p = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (4.28)$$

É possível mostrar que esta definição exclui a norma L_1 e a norma L_2 . Até a norma L_∞ pode ser vista como a norma L_p quando $p \rightarrow \infty$. Pelo seu significado geométrico, a norma L_2 é comumente chamada de **norma Euclidiana**.

No espaço das funções a norma equivalente à infinita é dada por:

$$\|F\|_\infty = \max_{x=a}^b |F(x)| \quad (4.29)$$

ou seja, pelo módulo do valor máximo da função no intervalo $[a, b]$.

A Fig. 4.11 ilustra um exemplo onde a distância de $F(x)$ a $G(x)$ medida pela norma infinita dá um valor bem diferente do que a distância medida pela norma Euclidiana. Dizer qual das normas é a melhor depende da aplicação. Para alguns algoritmos a norma Euclidiana dá melhores resultados, para outros a norma infinita é a melhor.

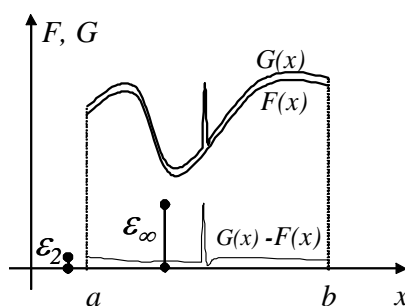


Fig. 4.11 – Norma Euclidiana e norma infinita.

Apesar de duas normas poderem produzir resultados bem diferentes, podemos afirmar que por satisfazerem as condições (4.18) ambas podem ser utilizadas em algoritmos iterativos para medir o erro de uma dada aproximação. Isto porque, se a norma da diferença de dois vetores tende a zero, então um vetor tende ao outro, independentemente da norma utilizada.

A Fig. 4.12 ilustra um modelo de um coelho com a superfície aproximada por uma malha de número variável de triângulos. A idéia básica é desenhar o coelho com mais detalhes quando ele estiver perto da câmera. Quando ele estiver longe, uma malha de poucos triângulos produz resultados satisfatórios sem sobrecarregar o processamento gráfico. Como medir erro de cada uma das malhas simplificadas com relação à de maior número de triângulos?

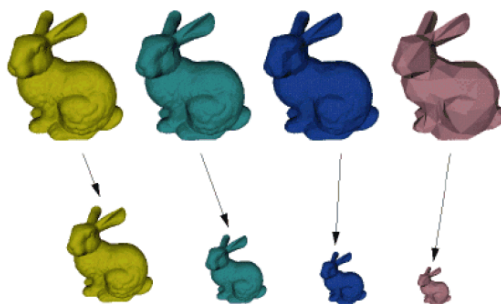


Fig. 4.12 – Norma Euclidiana e norma infinita.

A distância de um vértice \mathbf{p} até a superfície S pode ser dada pela expressão:

$$d_p(S) = \min \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|, \quad \mathbf{q} \in S \quad (4.30)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana.

Inspirados nas normas L_∞ podemos definir a distância de uma superfície S_1 a outra S_2 como sendo a distância acima medida no ponto \mathbf{p} que produza o máximo valor. Ou seja:

$$d_{s1}(S_2) = \max_{\mathbf{p} \in S_1} d_p(S_2), \quad \mathbf{p} \in S_1 \quad (4.31)$$

Não é difícil observar que a distância de uma superfície S_1 a outra S_2 não é a mesma que a distância de S_2 a S_1 . Para comprovar isto considere esta definição aplicada às curvas da Fig. 4.11, mostrada acima. Os pontos do pico da curva de cima geram distâncias muito maiores do que qualquer ponto da curva de baixo (a distância não é necessariamente na vertical).

Por isto a **distância de Housdorff** entre duas superfícies é definida como sendo a máxima das distâncias dos pontos de cada uma com relação à outra. Ou seja:

$$d_H(S_1, S_2) = \max(d_{s1}(S_2), d_{s2}(S_1)) \quad (4.32)$$

Um último ponto a observar sobre norma em geral é que, da mesma forma que o erro depende da norma, o unitário de um vetor qualquer, dado pela equação (4.5), também é função da escolha da norma. Portanto, um vetor pode ser unitário em uma norma e não ser em outra.

Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores é uma operação entre dois vetores que resulta num escalar. A definição geométrica do **produto escalar** de dois vetores \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 é dada pelo produto das normas multiplicado pelo co-seno do ângulo entre eles, ou seja:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\| \cos \theta \quad (4.33)$$

A expressão algébrica pode ser deduzida escrevendo cada um dos dois vetores na base canônica, resultando em:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \cdot (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) \quad (4.34)$$

Admitindo que o produto seja distributivo, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 &= x_1 x_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + x_1 y_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + x_1 z_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \\ &\quad \cdots + z_1 x_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + z_1 y_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + z_1 z_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como os vetores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} são perpendiculares entre si e cada um deles tem norma um, os produtos internos desta expressão resultam em zero ou um. Com isto a expressão algébrica do produto de dois vetores é dada por:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (4.36)$$

O produto interno é fundamental para o cálculo de operações comuns na Computação Gráfica, como o **cálculo de ângulos**, a **projeção de um vetor na direção e sentido de outro**, a **projeção de um vetor numa direção perpendicular à de outro**, a **reflexão de um vetor em torno de outro** e a **distância de um ponto a um plano**. Em todos estes cálculos, podemos simplificar o problema considerando que o vetor de referência é unitário. É isto que faremos a seguir. Quando, por exemplo, o vetor em que estamos projetando não for unitário, devemos normalizá-lo antes de fazer os cálculos ou adaptar as fórmulas deduzidas a seguir.

O cálculo do ângulo entre dois vetores unitários $\hat{\mathbf{u}}_1$ e $\hat{\mathbf{u}}_2$ pode ser deduzido diretamente da equação (4.33):

$$\theta = \arccos \left(\frac{\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2}{\|\hat{\mathbf{u}}_1\| \|\hat{\mathbf{u}}_2\|} \right) = \arccos(\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2) \quad (4.37)$$

Esta fórmula fornece ainda uma interpretação geométrica sobre o alinhamento de dois vetores unitários. Se o produto escalar for igual a 1.0, o co-seno é igual a 1.0 e, conseqüentemente, o ângulo entre os vetores é igual a zero. Ou seja, estão na mesma direção e no mesmo sentido. Caso o produto interno seja zero, os vetores são ditos **ortogonais**.

A projeção de um vetor na direção de outro unitário é um vetor com a mesma direção que o segundo com norma igual à norma do primeiro vezes o co-seno do ângulo entre eles, como mostra a Fig. 4.13. Esta expressão pode ser escrita através de:

$$\mathbf{p}_n = (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (4.38)$$

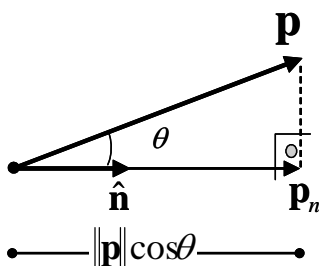


Fig. 4.13 – Projeção sobre um vetor unitário.

A projeção de um vetor numa direção normal à direção de um vetor unitário também pode ser calculada como ilustra a Fig. 4.14. O vetor \mathbf{p} pode ser escrito como sendo uma soma da componente procurada mais uma componente na direção do vetor unitário:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_n$$

Como conhecemos o valor da componente \mathbf{p}_n a componente procurada é dada por:

$$\mathbf{p}_p = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (4.39)$$

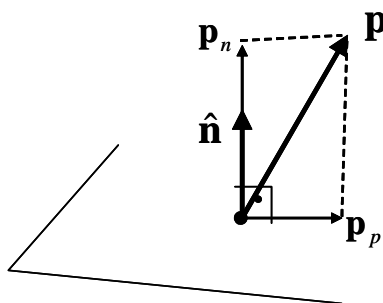


Fig. 4.14 – Projeção numa direção perpendicular a um vetor.

O cálculo de um vetor refletido em torno de outro pode ser feito com base na forma ilustrada na Fig. 4.15. A partir do vetor projetado \mathbf{p}_n calculamos o vetor \mathbf{h} tal que:

$$\mathbf{p} + \mathbf{h} = \mathbf{p}_n, \text{ ou seja } \mathbf{h} = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}$$

O vetor refletido, \mathbf{r} , pode então ser calculado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_n + \mathbf{h}, \text{ ou seja:}$$

Substituindo o valor de \mathbf{p}_n e \mathbf{h} chegamos à equação do raio refletido como sendo:

$$\mathbf{r} = 2(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{p} \quad (4.40)$$

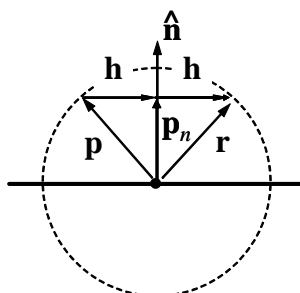


Fig. 4.15 – Reflexão de um vetor em torno de outro.

Considere um plano definido pela normal unitária $\hat{\mathbf{n}}$ e pela coordenada d que mede a distância do plano à origem na direção de $\hat{\mathbf{n}}$, como ilustra na Fig. 4.16.

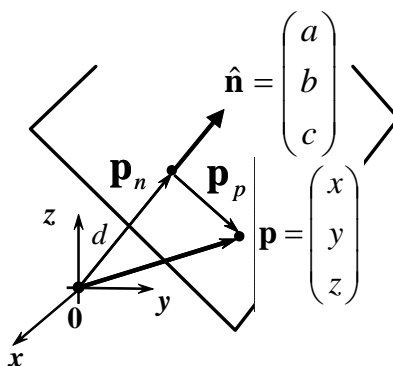


Fig. 4.16 – Pontos de um plano.

Todo ponto \mathbf{p} pertencente ao plano pode ser escrito como uma soma de um mesmo \mathbf{p}_n , que vai da origem ao plano na direção de $\hat{\mathbf{n}}$, mais uma componente paralela ao plano, \mathbf{p}_p . Como esta segunda componente é perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, o produto interno $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}$ resulta em d . Ou seja:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_n) = 0 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_n = d$$

Colocando o produto interno em termos de coordenadas chegamos a:

$$ax + by + cz - d = 0 \quad (4.41)$$

que é a **equação implícita de um plano** no R^3 . Esta equação é muito útil na verificação de pertinência de um ponto a um plano. Dado um ponto de coordenadas x , y e z podemos verificar se ele pertence a um plano simplesmente avaliando a equação:

$$F(x, y, z) = ax + by + cz - d \quad (4.42)$$

Se o valor da função for zero o ponto pertence ao plano. O mais interessante desta formulação é que ela também posiciona os demais pontos com relação ao plano. Para interpretarmos geometricamente o resultado desta função, considere a Fig. 4.17, que mostra um ponto \mathbf{p} numa posição qualquer em relação ao plano.

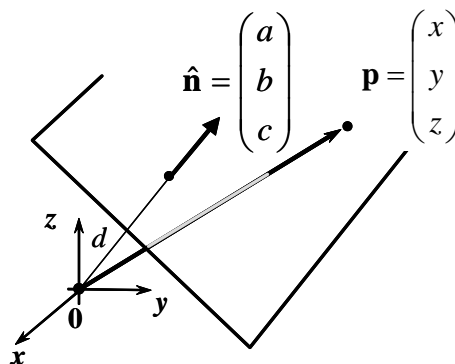


Fig. 4.17 – Posição de um ponto em relação a um plano.

A projeção de \mathbf{p} na direção de $\hat{\mathbf{n}}$ indica se o ponto está no lado do plano apontado pela normal, no plano em si, ou no lado contrário à normal, através da equação:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p} \begin{cases} > d & \text{lado da normal} \\ = d & \text{no plano} \\ < d & \text{lado contrário à normal} \end{cases}$$

Como

$$F(x, y, z) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p} - d$$

o sinal da função F indica a posição relativa do ponto em relação ao plano. Se observamos mais atentamente vemos que, sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário, o valor absoluto de F representa

a distância do ponto ao plano. Todo este estudo de ponto e plano se aplica para ponto e reta no R^2 , como ilustrado na Fig. 4.18.

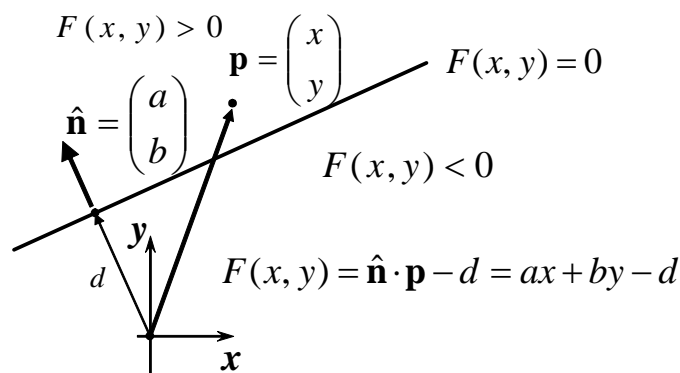


Fig. 4.18 – Posição de um ponto em relação a uma reta no R^2 .

Generalização do Produto Interno

A exemplo das propriedades (4.9) que definem os Espaços Vetoriais gerais, qualquer operação entre dois vetores \mathbf{p} e \mathbf{q} , notada aqui como $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$, que produza um escalar e que satisfaça:

Bilinearidade:

$$\langle \mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p}', \mathbf{q} \rangle \quad (4.43a)$$

$$\langle a\mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \quad (4.43b)$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} + \mathbf{q}' \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q}' \rangle \quad (4.43c)$$

$$\langle \mathbf{p}, a\mathbf{q} \rangle = a\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \quad (4.43d)$$

$$\text{Comutatividade (simetria): } \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle \quad (4.43e)$$

$$\text{Positividade: } \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \geq 0, \text{ e só é igual a zero se } \mathbf{p} = 0 \quad (4.43f)$$

é denominada um **produto escalar**.

Note que:

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)G(x)dx \quad (4.44)$$

é um produto escalar no espaço das funções.

Uma consequência natural da equação (4.33) é que a norma de um vetor pode ser calculada como sendo a raiz quadrada do produto interno de um vetor por ele mesmo. Ou seja:

$$\|F\| = \sqrt{\langle F, F \rangle} \quad (4.45)$$

Esta condição estabelece a relação estreita entre o produto interno e a norma. Se mudarmos a definição do produto interno mudamos a definição da norma e vice-versa.

As interpretações geométricas citadas acima correspondem aos conceitos comuns que temos de distância e ângulo tanto no plano quanto no espaço. Nos demais espaços vetoriais estes conceitos são generalizações úteis para formular algoritmos que calculem, por exemplo, uma função que aproxime outra. O fato de termos como medir a distância viabiliza, por exemplo, uma avaliação objetiva de o quanto a aproximação é boa.

O fato de podermos medir ângulos em quaisquer espaços vetoriais permite dizer que, como:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0, \quad \text{se } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad \text{se } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$$

então as funções trigonométricas que aparecem nas séries de Fourier são vetores perpendiculares entre si. A utilidade desta generalização vem das construções gerais que se aplicam a todos os objetos da classe como, por exemplo, o estudo de bases ortogonais mostrado a seguir.

Quando temos um conjunto de vetores quaisquer $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k\}$ que satisfaz:

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.46)$$

ele é chamado de conjunto **ortonormal**, uma vez que cada vetor é perpendicular (ortogonal) a todos os demais e todos são vetores unitários (norma igual a 1.0).

Não é difícil mostrar que um conjunto ortonormal de vetores é necessariamente linearmente independente. Dada uma combinação linear da forma:

$$a_1 \mathbf{p}_1 + a_2 \mathbf{p}_2 + \dots + a_n \mathbf{p}_n = 0$$

podemos fazer em ambos os lados desta equação o produto interno com um vetor \mathbf{p}_i resultando em:

$$a_1 \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_2 \rangle + \dots + a_n \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_n \rangle = 0$$

A ortogonalidade de \mathbf{p}_i com todos os outros vetores resulta em $a_i = 0$. Como i é qualquer, temos que :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

O que prova que vetores ortogonais são linearmente independentes. Assim, um conjunto ortonormal de n vetores num espaço de dimensão n é um candidato natural para ser uma base para este espaço.

Outra propriedade importante de bases ortogonais pode ser deduzida da expressão que escreve um vetor como uma combinação linear dos vetores da base:

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + \cdots + a_n\mathbf{p}_n$$

Se fizermos o produto interno em ambos os lados desta equação chegamos a:

$$a_i = \frac{\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i \rangle} \text{ para qualquer } i \in [1, n]$$

ou ainda, se a base for ortonormal

$$a_i = \langle \hat{\mathbf{p}}_i, \mathbf{p} \rangle$$

Com isto, os coeficientes da série de Fourier podem ser calculados por:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(ix) dx \text{ e } b_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(ix) dx$$

Por produzirem fórmulas simples como estas, as bases ortogonais e as bases ortonormais são muito populares.

Produto Vetorial

O produto vetorial é um produto somente definido no R^3 e serve principalmente para calcularmos normais, áreas e orientações no espaço. Ele pode ser usado no R^2 se imaginarmos este espaço como um sub-espaço do R^3 que satisfaça a equação $z=0$.

A definição geométrica do produto vetorial está ilustrada na Fig. 4.19. O produto vetorial é uma operação entre dois vetores \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 que resulta em um terceiro vetor $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$. O vetor resultante é perpendicular a ambos os vetores iniciais e tem como norma o produto das normas multiplicado pelo seno do ângulo entre eles.

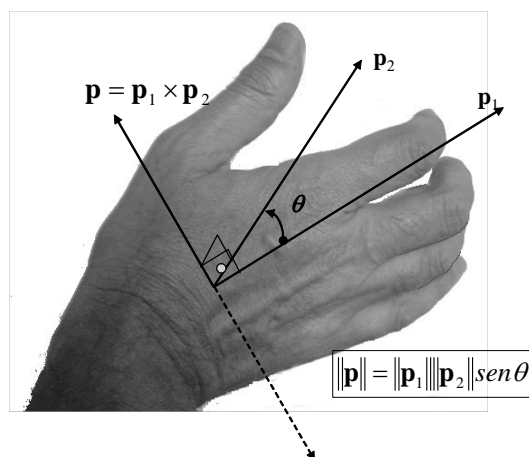


Fig. 4.19 – Definição geométrica do produto vetorial.

Um ponto importante a considerar é a orientação que fica implícita neste produto. O produto de \mathbf{p}_1 com \mathbf{p}_2 produz um vetor, \mathbf{p} , que está na direção do polegar quando os demais

dedos da mão direita se movimentam no sentido mostrado na figura. Note que o produto vetorial de \mathbf{p}_2 com \mathbf{p}_1 resulta em $-\mathbf{p}$ (tracejado na figura). Aliás, este também seria o resultado do produto vetorial de \mathbf{p}_1 com \mathbf{p}_2 se utilizássemos a mão esquerda ao invés da direita. Esta orientação, implícita na própria definição do produto, é fundamental para suas aplicações.

Algebricamente podemos escrever:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \quad (4.47)$$

Admitindo que, como o produto interno, o produto vetorial tenha as propriedades de bilinearidade, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = & x_1x_2\mathbf{i} \times \mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + x_1z_2\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ & \cdots + z_1x_2\mathbf{k} \times \mathbf{i} + z_1y_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + z_1z_2\mathbf{k} \times \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podemos então definir o produto vetorial de dois vetores quaisquer definindo apenas os produtos $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$, ..., $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$. Pela definição geométrica dada acima não é difícil perceber que:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Aplicando estes resultados na equação (4.48) chegamos a:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k} \quad (4.50)$$

Uma forma mnemônica de lembrar deste produto é dada por:

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

onde a notação $|\mathbf{A}|$ representa o determinante da matriz \mathbf{A} .

Conforme mencionado anteriormente, o produto vetorial tem diversas aplicações geométricas importantes. A Fig. 4.20 mostra como ele pode ser usado para calcular a normal e a **área de um triângulo**. Ambos podem ser calculados através do produto vetorial de dois vetores que partem de um dos vértices. O vetor normal é o próprio vetor resultante do produto e a área é a metade da norma dele.

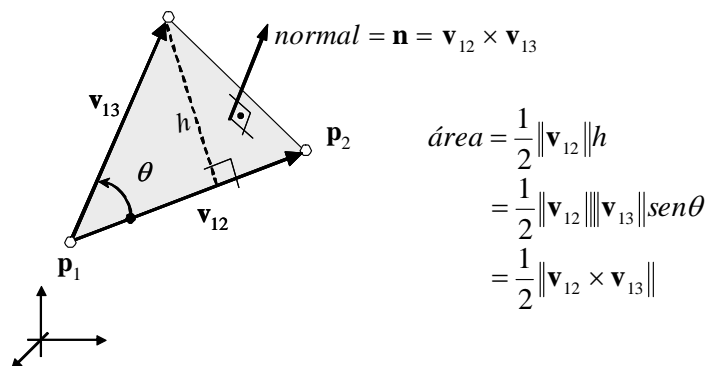


Fig. 4.20 – Cálculo da área de um triângulo pelo produto vetorial.

A Fig. 4.21 ilustra como o produto vetorial pode ser utilizado para determinar se **um ponto é ou não interior a um triângulo**. Note que a normal nesta figura é calculada utilizando dois vetores consecutivos para reforçar a noção de orientação do triângulo. Não é difícil verificar geometricamente que o resultado é o mesmo da figura anterior. Para um ponto ser interior é necessário que o produto vetorial de cada um dos vetores-arestas pelo vetor que vai do vértice inicial correspondente até ele esteja na mesma direção do vetor normal. No caso da figura isto quer dizer que o ponto está “à esquerda” de um observador que percorre as arestas orientadas.

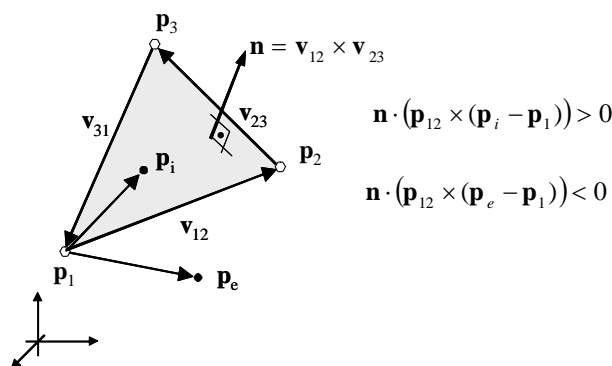


Fig. 4.21 – Determinação de pertinência de um ponto em um triângulo.

A Fig. 4.22 ilustra o uso do produto vetorial para verificar se uma **malha triangular é consistente** no sentido de ter uma única orientação e não possuir triângulos degenerados. O triângulo, por exemplo, $p_1 p_2 p_4$, está com a orientação invertida em relação aos anteriores. Como podemos computacionalmente “ver” isto? Basta calcular sua normal e comparar com as normais anteriores. Mesmo permitindo variações suaves na superfície representada pela malha, é razoável termos a normal de triângulos adjacentes apontando mais ou menos na mesma direção. Algebricamente, isto pode ser computado se examinarmos o produto escalar das respectivas normais. Se for maior que zero a orientação está correta. O triângulo $p_4 p_5 p_6$ possui área nula e isto pode ser calculado pelo produto vetorial de suas arestas.

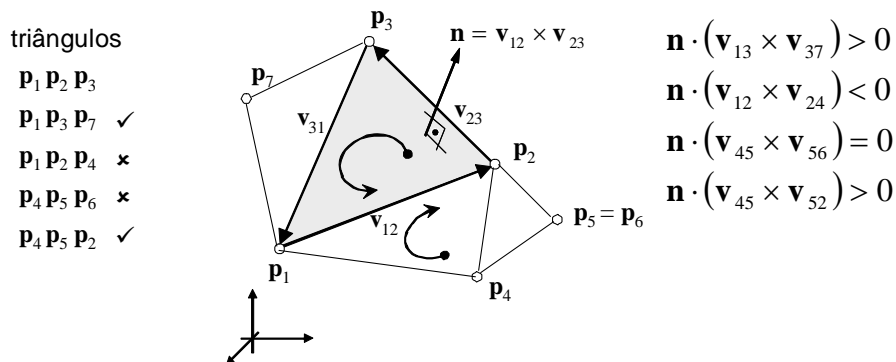


Fig. 4.22 – Consistência de malhas de triângulos.

Finalmente, também podemos calcular o ângulo entre dois vetores através do produto vetorial:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{\|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2\|}{\|\mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p}_2\|}\right) \quad (4.46)$$

Exercícios resolvidos

1. Mostre que o **produto misto** de três vetores \mathbf{u} , \mathbf{v} , e \mathbf{w} produz o volume do paralelepípedo formado por eles. Mostre também que o volume da pirâmide é 1/6 do produto misto.

Resposta:

O **produto misto de três vetores** é por definição $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ e a Fig. 4.23 ilustra o paralelepípedo formado por estes três vetores.

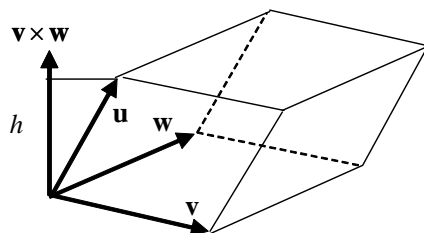


Fig. 4.23 – Produto misto e volume de um paralelepípedo.

A área da base deste paralelepípedo pode ser calculada por:

$$\text{área da base} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$$

A altura é a projeção de \mathbf{u} na direção perpendicular ao plano da base, ou seja:

$$\text{altura} = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|}$$

O volume é simplesmente o produto da base pela altura, resultando em:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \text{base} \times \text{altura} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (4.47)$$

A base da pirâmide formada pelos três vetores é o triângulo cuja área pode ser calculada por:

$$\text{área da base do triângulo} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$$

A fórmula do volume é:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{6} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (4.48)$$

2. Mostre que: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Resposta:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}^T \cdot \left(\det \begin{bmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix} \right)^T \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= u_x \det \begin{bmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{bmatrix} - u_y \det \begin{bmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{bmatrix} + u_z \det \begin{bmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Analogamente temos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

3. Calcule a reflexão do vetor $(5,0,1)^T$ em torno do vetor $(4,3,0)^T$.

Resposta:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{proj} &= \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{v}_{proj} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 12/5 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_{proj} + \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 12/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9/5 \\ 12/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 24/5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

- 1) Dados os vetores $\mathbf{p}_1 = (0, 3, 4)^T$, $\mathbf{p}_2 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{p}_3 = (3, 0, -5)^T$ e $\mathbf{p}_4 = (-1, 2, 5)^T$, determine:
 - (a) a distância entre \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 .
 - (b) a área do triângulo $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$.
 - (c) a normal unitária do triângulo $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$.
 - (d) os vetores unitários correspondentes às arestas do triângulo $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$.
 - (e) o volume da tetraedro $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4$.
- 2) Considerando os pontos do exercício anterior, calcule as coordenadas cartesianas dos pontos cujas coordenadas baricênticas em relação aos pontos:
 - (a) $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ são $(1/3, 2/3)$.
 - (b) $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$ são $(1/4, 2/4, 1/4)$.
 - (c) $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4$ são $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
- 3) Desenhe o lugar geométrico dos pontos de um triângulo $\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}$ qualquer que possuem a coordenada baricêntrica correspondente ao ponto \mathbf{b} igual a 0.4.
- 4) Determine a equação do plano que passa pelos pontos $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2$ e \mathbf{p}_3 definidos no exercício 1. Qual a distância deste plano à origem? De que lado dele o ponto \mathbf{p}_4 se situa?
- 5) Considerando os pontos do exercício 1, calcule a projeção do vetor \mathbf{p}_1 num plano perpendicular ao vetor de \mathbf{p}_2 .
- 6) Considerando os pontos do exercício 1, calcule a reflexão do vetor \mathbf{p}_1 em torno do vetor \mathbf{p}_2 .
- 7) Determine a normal e a distância da origem de uma reta que passa pelos pontos $(1, 1)^T$ e $(5, 2)^T$.