

6. Uma Álgebra para Transformações Geométricas

Para ilustrar a importância das transformações geométricas na descrição da forma e dos movimentos em cenários virtuais, a Fig. 6.1 apresenta três modelos. O primeiro é um modelo complexo de uma plataforma marítima composta de muitos equipamentos, o segundo é de um tanque militar e o terceiro é um braço mecânico.

A complexidade dos modelos da Fig. 6.1 pode ser reduzida se observarmos que cada componente é composta de um conjunto de sub-componentes. Estes podem, por sua vez, ser compostos de outros sub-componentes ou de formas geométricas simples como cilindros, cubos e calotas esféricas. A partir de modelos padrões destes objetos mais simples podemos gerar o modelo da cena através das transformações geométricas de forma e movimento que são o foco deste capítulo.

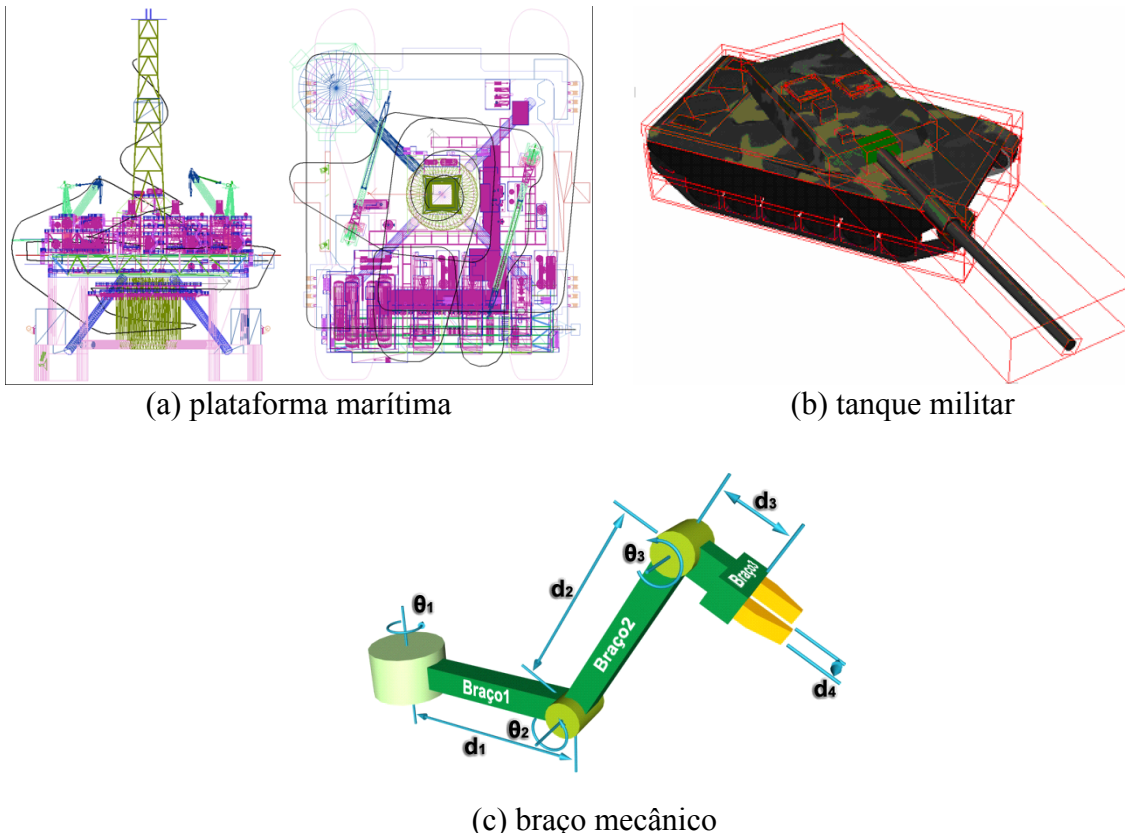


Fig. 6.1 – Exemplos de formas e movimentos descritos por transformações.

Este capítulo começa com uma revisão das transformações lineares no plano e evolui para transformações no espaço homogêneo. A álgebra desenvolvida no espaço homogêneo é suficiente para dar suporte às operações de modelagem de forma e movimento, exceto as rotações no espaço. Elas serão tratadas em um capítulo dado a seguir.

Apesar de iniciar com uma revisão de conceitos conhecidos dos cursos de Álgebra Linear, este capítulo evolui para assuntos que são tratados apenas nos cursos de Computação Gráfica. A revisão é importante para estabelecer as ligações entre a Álgebra e a Computação Gráfica.

Transformações Lineares e Matrizes

Para facilitar a visualização dos processos geométricos envolvidos, vamos iniciar o nosso estudo de transformações no R^2 . Como ilustra a Fig. 6.2, uma transformação T no R^2 é uma função que associa a cada ponto \mathbf{p} do plano um novo ponto \mathbf{p}' tal que:

$$\mathbf{p}' = T(\mathbf{p}) \quad (6.1a)$$

ou:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.1b)$$

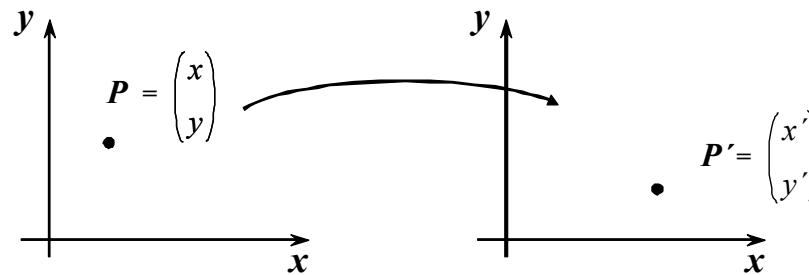


Fig. 6.2 – Transformação no R^2 .

Um exemplo de uma transformação genérica pode ser ilustrado por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Uma transformação é dita **linear** quando a transformada de uma combinação linear for sempre igual à combinação linear dos vetores transformados. Ou seja, para quaisquer \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 pertencentes ao plano ou ao espaço e quaisquer que sejam a_1 , a_2 pertencentes aos reais,

$$T(a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2) = a_1T(\mathbf{p}_1) + a_2T(\mathbf{p}_2) \quad (6.2)$$

a transformação

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{M}\mathbf{p} \quad (6.3)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz e \mathbf{p} um vetor é uma transformação linear, uma vez que o produto de matrizes tem a seguinte propriedade:

$$\mathbf{M}(a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2) = a_1\mathbf{Mp}_1 + a_2\mathbf{Mp}_2 \quad (6.4)$$

Inversamente, podemos também dizer que toda transformação linear pode ser escrita como o produto de uma matriz por um vetor. Ou seja:

$$\text{A transformação } T \text{ é Linear} \Leftrightarrow T(\mathbf{p}) = \mathbf{Mp}$$

Para determinar a matriz associada basta observar que:

$$T(\mathbf{p}) = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Se tomarmos:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

temos

$$T(\mathbf{p}) = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Ou seja, a matriz de uma transformação linear é aquela cujas colunas são as coordenadas dos vetores da base transformada.

Como não utilizamos na derivação acima nada que seja específico do R^2 , então esta propriedade é geral, ou seja, ela vale para toda transformação linear sobre um espaço vetorial qualquer. No R^3 , por exemplo, esta matriz pode ser determinada por:

$$\mathbf{M} = \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (6.8)$$

Outra propriedade importante das transformações lineares é que elas necessariamente deixam inalterada a posição do vetor nulo. Esta propriedade deriva diretamente da linearidade:

$$T(0) = T(\mathbf{p} - \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) - T(\mathbf{p}) = 0 \quad (6.9)$$

e é, de certa forma, uma limitação importante das transformações lineares.

Transformações Geométricas no Plano

Exemplos importantes de transformações lineares no plano são: escala, rotação, reflexão e cisalhamento. A transformação de escala simplesmente multiplica todas as coordenadas x por um fator s_x e as coordenadas y por s_y . A Fig. 6.3 ilustra a transformação de escala aplicada ao triângulo **abc**.

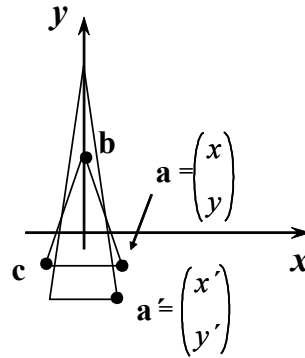


Fig. 6.3 – Transformação de escala no R^2 .

A matriz da transformação de escala é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Escala no sentido comum implica em s_x e s_y positivos. Quando seus valores estiverem no intervalo $(0,1)$ teremos uma redução da dimensão correspondente e quando forem maiores que 1 teremos um aumento. Valores negativos têm o efeito de espelhar os pontos em torno do eixo correspondente.

A transformação linear de espelhamento corresponde à matriz identidade com alguns de seus termos da diagonal com sinal negativo. O espelhamento em relação ao eixo y , ilustrado na Fig. 6.4, corresponde à matriz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

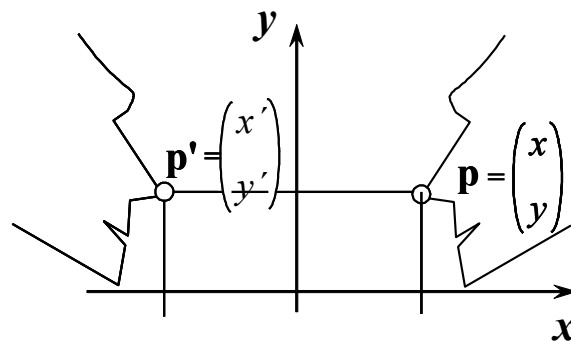


Fig. 6.4 – Transformação de espelhamento no R^2 .

A rotação de um ângulo θ em torno da origem pode ser calculada com base na Fig. 6.5 por meio das seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta \quad (6.12a)$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta \quad (6.12b)$$

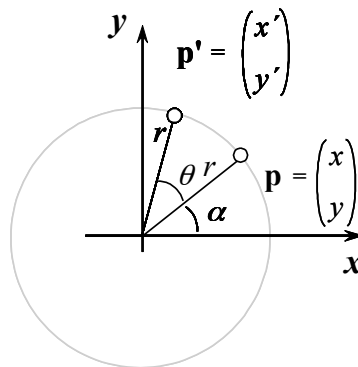


Fig. 6.5 – Transformação de rotação no R^2 .

O ponto \mathbf{p}' pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ r \cos \alpha \cdot \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Dado que $x = r \cos \alpha$ e $y = r \sin \alpha$ temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Uma maneira bem mais simples de deduzir a matriz da rotação consiste em utilizar a propriedade de que as colunas da matriz são as coordenadas dos vetores da base transformados. A Fig. 6.6 ilustra a posição dos vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} após uma rotação de um ângulo θ . A simples leitura das coordenadas permite escrever a equação (6.14).

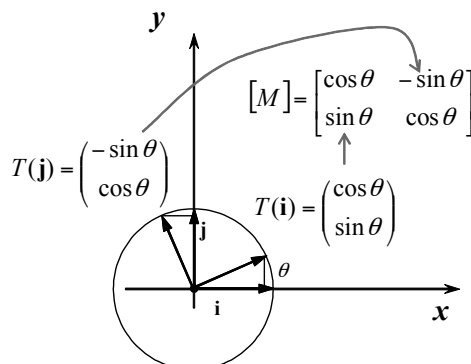


Fig. 6.6 – Dedução direta da matriz de rotação.

O produto da transposta de uma matriz de transformação por ela mesma corresponde ao produto interno dos vetores transformados entre si. Isto porque os elementos ij do produto são o resultado da linha i da transposta pela coluna j . A linha i da transposta é a coluna i da matriz original. Ou seja, o elemento ij é o resultado do produto interno do i -ésimo com o j -ésimo vetor transformado.

Como, no caso da rotação, os vetores da base canônica rodada continuam sendo unitários e perpendiculares entre si, temos que o produto da transposta de uma matriz de rotação por ela mesma resulta na matriz identidade. Como esta propriedade se origina do fato de a base transformada continuar sendo de uma base de vetores ortonormais, diz-se que a matriz de rotação é uma **matriz ortonormal**.

Outro ponto importante a destacar é a questão da mudança de referencial ou base. Aprendemos na Física que as novas coordenadas de um ponto, após um certo movimento, são as mesmas que teríamos se mantivéssemos o ponto parado e movêssemos o referencial no sentido inverso. Assim, em termos de coordenadas, tanto faz rodarmos um ponto de um ângulo θ ou escrevermos as coordenadas deste ponto num sistema de coordenadas rodado de $-\theta$, como ilustra a Fig. 6.7. Ou seja:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Este problema de mudança de uma base ortonormal para outra rodada é bastante comum na Computação Gráfica e por isto merece ser melhor elucidado. Os vetores unitários das direções \mathbf{u} e \mathbf{v} são os vetores \mathbf{i} e \mathbf{j} rodados de $-\theta$. Ou seja, se colocarmos as suas coordenadas nas colunas de uma matriz, estamos representando a rotação de $-\theta$. Para obtermos a matriz de rotação θ basta que tomemos a transposta, ou seja, a matriz com as coordenadas de \mathbf{u} e \mathbf{v} colocadas como linhas. Assim:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

A propriedade expressa na equação (6.6) é geral para qualquer espaço vetorial e pode ser enunciada da seguinte maneira: a matriz que transforma as coordenadas de um vetor qualquer escrito numa base ortonormal para outra é a matriz obtida colocando-se como linhas as coordenadas dos vetores da segunda base escritos na primeira.

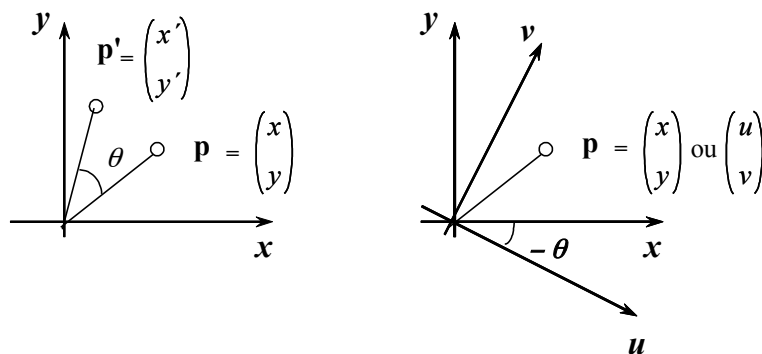
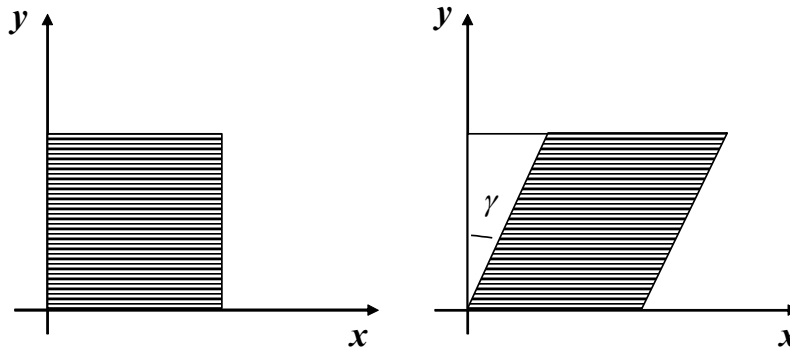


Fig. 6.7 – Transformação versus mudança de base.

No R^2 não é difícil verificar a equação (6.16) observando as Fig. 6.6 e 6.7 e a equação (6.15).

A última transformação linear de interesse geométrico é o cisalhamento. A transformação de cisalhamento na direção x tem um efeito semelhante ao de deslizarmos um baralho de cartas numa mesa, como ilustra a Fig. 6.8.

Fig. 6.8 – Transformação de cisalhamento em x .

Esta transformação preserva a coordenada y e move os pontos na direção x de acordo com o valor de y , ou seja:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \tan \gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Não é difícil deduzirmos a mesma matriz observando a transformada dos vetores da base canônica.

O cisalhamento apresentado acima ocorre somente na direção x . Se ele ocorrer simultaneamente em ambas as direções teremos uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \tan \gamma \\ x \tan \psi + y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ \tan \psi & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

onde γ e ψ são os ângulos de cisalhamento em relação aos eixos x e y , respectivamente.

Esta transformação é muito utilizada na Mecânica dos Meios Contínuos e é, erroneamente, vista pelos alunos como sendo uma transformação que não diz respeito à Computação Gráfica. Para ilustrarmos uma das utilidades desta transformação, considere o problema de transformar a pirâmide de visão simplificada da forma indicada na Fig. 6.9. Sem cisalhamento não temos como fazer esta transformação. Explique por que a rotação não pode ser usada nesse caso.

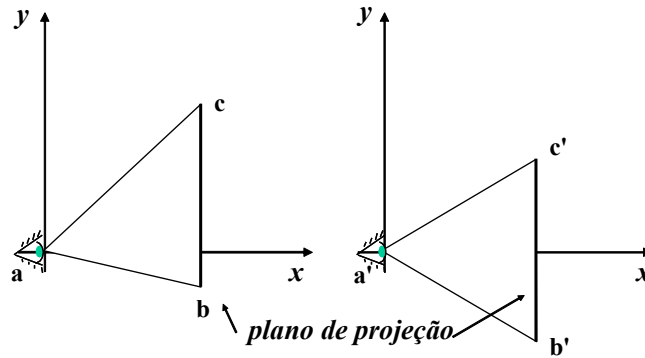


Fig. 6.9 - Exemplo da necessidade da transformação de cisalhamento.

Consequência do Teorema da Decomposição Singular

Apesar da transformação de cisalhamento ser conveniente por dar uma interpretação geométrica direta para as transformações do tipo da ilustrada na Fig. 6.9, a rigor ela é dispensável. Isto porque o Teorema de Decomposição Singular garante que qualquer matriz \mathbf{M} de dimensão $n \times n$ pode ser decomposta em:

$$\mathbf{M} = \mathbf{USV} \quad (6.19)$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes ortonormais (rotações) e \mathbf{S} é uma matriz diagonal (escala e espelhamento). Na realidade o Teorema da Decomposição Singular é mais geral, uma vez que ele trata de quaisquer matrizes $n \times m$, mas para o estudo geométrico que estamos fazendo as matrizes são quadradas e esta generalidade pouco contribui.

A prova do Teorema da Decomposição Singular e a descrição de algoritmos que calculam as matrizes \mathbf{USV} estão fora do escopo deste capítulo e podem ser encontradas em livros de Álgebra. Tais algoritmos, entretanto, são disponíveis tanto na forma de funções C/C++ quanto em sistemas computacionais tipo Maple. Ou seja, mesmo sem tratarmos da prova e da implementação, podemos calcular a decomposição e utilizar os resultados do teorema.

Considere, por exemplo, uma transformação de cisalhamento de 30° no eixo x . A matriz desta transformação é dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \tan 30^\circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5773 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz, decomposta em seus valores singulares, resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5773 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6011 & 0.7992 \\ -0.7992 & 0.6011 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7522 & 0 \\ 0 & 1.3295 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7992 & -0.6011 \\ 0.6011 & 0.7992 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan 30^\circ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-53^\circ) & -\sin(-53^\circ) \\ \sin(-53^\circ) & \cos(-53^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7522 & 0 \\ 0 & 1.3295 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(37^\circ) & -\sin(37^\circ) \\ \sin(37^\circ) & \cos(37^\circ) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes correspondem às transformações de rotação e escala, da forma:

$$\mathbf{Sh}_x(30^\circ) = \mathbf{R}(-53^\circ)\mathbf{S}\mathbf{R}(37^\circ)$$

A Fig. 6.10 ilustra este processo de escrever um cisalhamento como uma combinação de rotações e escala.

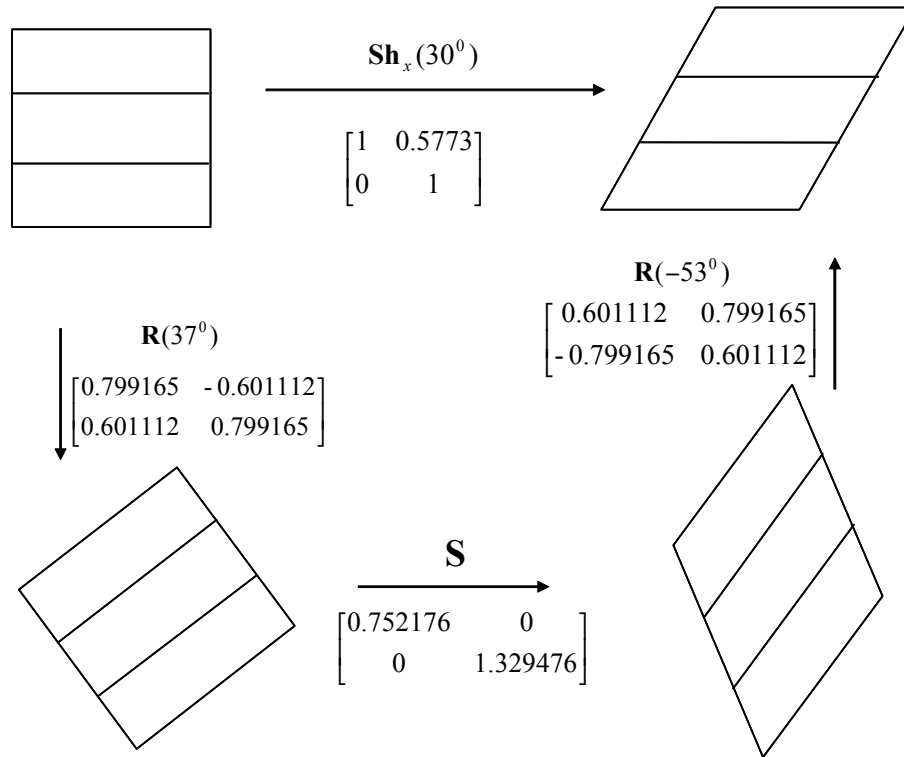


Fig. 6.10 - Cisalhamento escrito como composição de transformações.

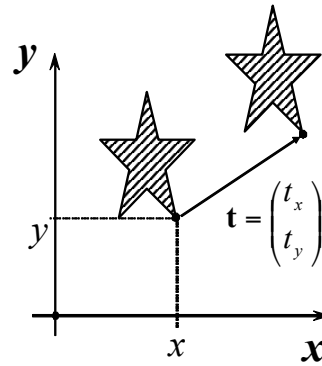
Transformações lineares e translações

As transformações lineares possuem diversas propriedades interessantes mas, infelizmente, existem algumas transformações importantes para a Computação Gráfica que não podem ser classificadas como lineares. Uma delas é a translação, na qual para cada ponto é somado um vetor constante, \mathbf{t} . Esta transformação é fundamental para qualquer processo gráfico e por isto deve ter a representação mais simples possível.

Dado um ponto qualquer P , a translação pode ser escrita como:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{t} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

A Fig.6.11 ilustra a translação de um vértice de um pentágono.

Fig. 6.11 - Translação no \mathbb{R}^2 .

Esta transformação não é linear porque não preserva a origem, isto é, a transformada do vetor zero é \mathbf{t} , que é diferente de zero. Consequentemente a translação também não pode ser escrita na forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

com a , b , c e d constantes reais. A forma matricial com matrizes 2×2 , comumente apresentada no estudo de transformações lineares afins¹, é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Esta forma tem o inconveniente de complicar a composição de transformações. Isto porque, se duas transformações lineares são dadas por \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 , a sua composta é dada simplesmente por $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$. Já se a transformação for do formato $\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{p} + \mathbf{t}_1$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_2$, a composta $\mathbf{p}_2 = \mathbf{M}_3 \mathbf{p} + \mathbf{t}_3$ é tal que $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$ e $\mathbf{t}_3 = \mathbf{M}_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$. Se continuarmos a compor as transformações a expressão da translação vai se complicando mais ainda.

Espaço homogêneo

Existe uma maneira algebricamente elegante de tratarmos translações como combinações lineares. Basta imaginarmos o \mathbb{R}^2 como sendo um plano imerso num espaço de dimensão três. Para não associarmos este espaço ao \mathbb{R}^3 vamos denominar os eixos deste de sistema x_h, y_h, w . Estas coordenadas são chamadas de **homogêneas** ou **projetivas** PR^2 por razões que ficarão claras ao longo deste capítulo.

¹ O termo “transformação linear afim” vem do termo em inglês “affine linear transformation”, que tem o sentido de uma transformação “aparentada” com a linear. As transformações lineares afins são transformações lineares acrescidas da translação.

Podemos tratar a translação de vetores do R^2 como uma transformação linear de pontos que estão no plano $w=1$ associando a cada ponto deste plano sua coordenada incrementada das coordenadas do vetor \mathbf{t} , como ilustra a Fig. 6.12. A seguinte transformação linear:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

descreve a translação que o ocorre no plano $w=1$. Note que os pontos que estão inicialmente neste plano permanecem nele. Isto continua valendo para transformações mais gerais, desde que a última linha da matriz permaneça $[0 \ 0 \ 1]$.

Devemos observar que, para qualquer ponto do R^2 com coordenadas $(x, y)^T$, existe um único ponto no sistema homogêneo dado por $[x, y, 1]^T$ e vice-versa. Esta associação de um para um, denominada *homeomorfismo* ou *isomorfismo*, permite que matrizes 3×3 possam representar transformações do R^2 e matrizes 4×4 representem transformações do R^3 . Para evitar confusões entre um vetor homogêneo do R^2 e um vetor cartesiano do R^3 , que também tem 3 coordenadas, adotamos a notação $[]$ para os homogêneos e $()$ para os cartesianos.

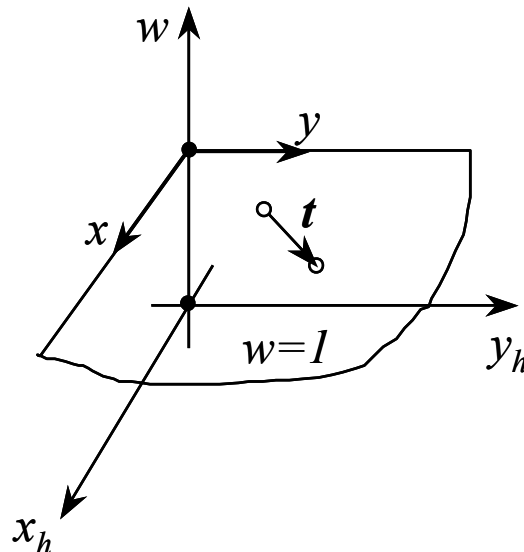


Fig. 6.12 - Imersão do R^2 no sistema homogêneo x_h, y_h e w .

Esta base homogênea permite um mesmo tratamento algébrico para as transformações lineares e para as translações. O produto de matrizes modela a composição destas transformações.

Composição de transformações afins

Para ilustrar o processo de composição de transformações afins com o uso de coordenadas homogêneas, considere a transformação que roda um triângulo em torno do seu centro. Esta

transformação pode ser escrita como uma composição de uma translação do centro de rotação para a origem seguida de uma rotação em torno da origem e, finalmente, uma translação do centro de volta para sua posição original, como mostra a Fig. 6.13.

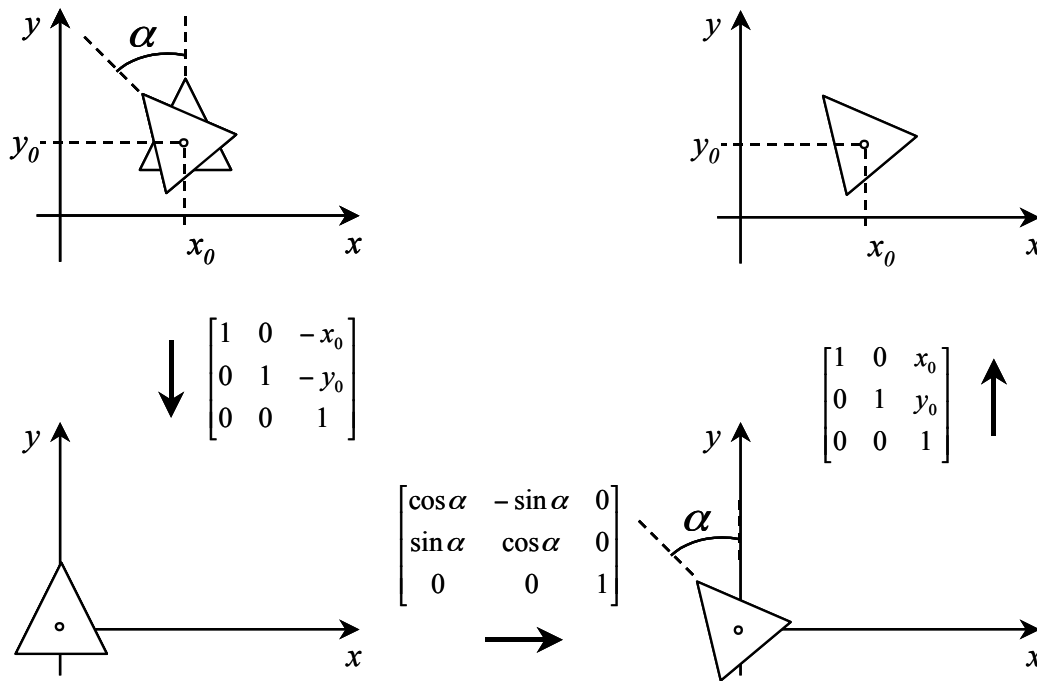


Fig. 6.13 - Composição de transformações escritas em coordenadas homogêneas.

Assim sendo, a equação da transformação que faz a rotação de α em torno de um ponto $(x_0, y_0)^T$, ou $[x_0, y_0, 1]^T$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Note que o produto de matrizes não é comutativo, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, o que também se reflete nas transformações geométricas associadas. O que torna o problema um pouco confuso é a ordem de leitura de texto normal, da esquerda para a direita que corresponde à ordem inversa em que as transformações são aplicadas. Para colocar ambos na mesma ordem, os primeiros textos de Computação Gráfica escreveram as equações matriciais transpostas, ou seja, os vetores eram linhas e multiplicavam as matrizes pelo lado esquerdo. Com o tempo, a notação convencional da Matemática acabou prevalecendo e a ordem de leitura para transformações deve ser a ordem de multiplicação do vetor, da direita para a esquerda.

Transformações Geométricas no Espaço

As transformações de escala, rotação e translação são as mais comumente utilizadas nas cenas compostas por diversos objetos pois atendem ao problema de instanciação de objetos numa cena. As matrizes de translação e escala são uma simples extensão das transformações do plano e, no R^3 homogêneo, são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24a)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24b)$$

As matrizes de rotação no espaço, entretanto, são bem mais complicadas do que a matriz de rotação no plano. Uma extensão natural seria definirmos a rotação de um corpo a partir de três rotações em torno de cada um dos eixos cartesianos, como ilustra a Fig. 6.14.

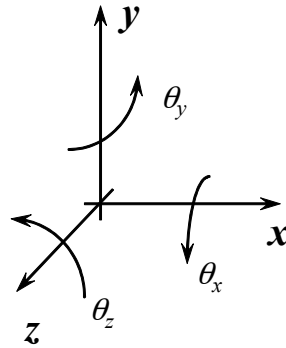
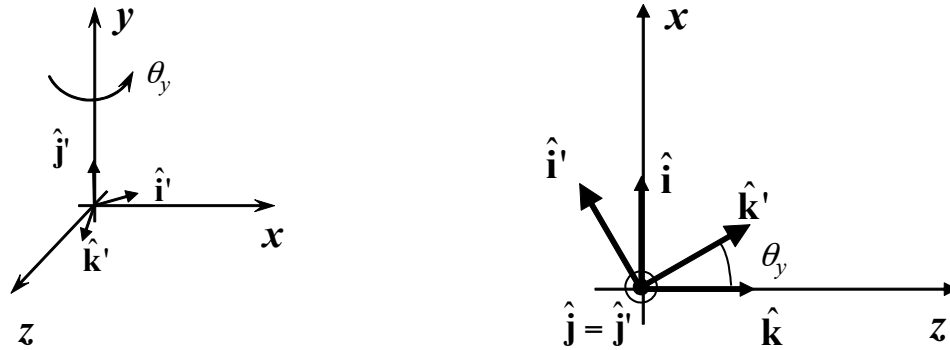


Fig. 6.14 – Rotações em torno dos eixos cartesianos.

Se utilizarmos o fato de que as colunas da matriz são as coordenadas dos vetores da base transformada, podemos facilmente derivar as matrizes de cada uma destas rotações. Para exemplificar, vamos considerar a rotação em torno do eixo y . A Fig. 6.15 mostra a posição dos vetores unitários da base canônica antes e depois da rotação de θ_y .

Fig. 6.15 – Rotação em torno do eixo y .

As coordenadas cartesianas dos vetores da base canônica depois da rotação são dadas por:

$$\hat{\mathbf{i}}' = \begin{pmatrix} \cos \theta_y \\ 0 \\ -\sin \theta_y \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{j}}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{k}}' = \begin{pmatrix} \sin \theta_y \\ 1 \\ \cos \theta_y \end{pmatrix}$$

A rotação escrita em forma de matriz resulta em:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Esta rotação pode também ser escrita em coordenadas homogêneas como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26a)$$

Analogamente, podemos derivar a rotação em torno de x e z chegando a:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26b)$$

e

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.26c)$$

respectivamente. A Fig. 6.16 ilustra estas rotações aplicadas à base canônica para estes dois casos.

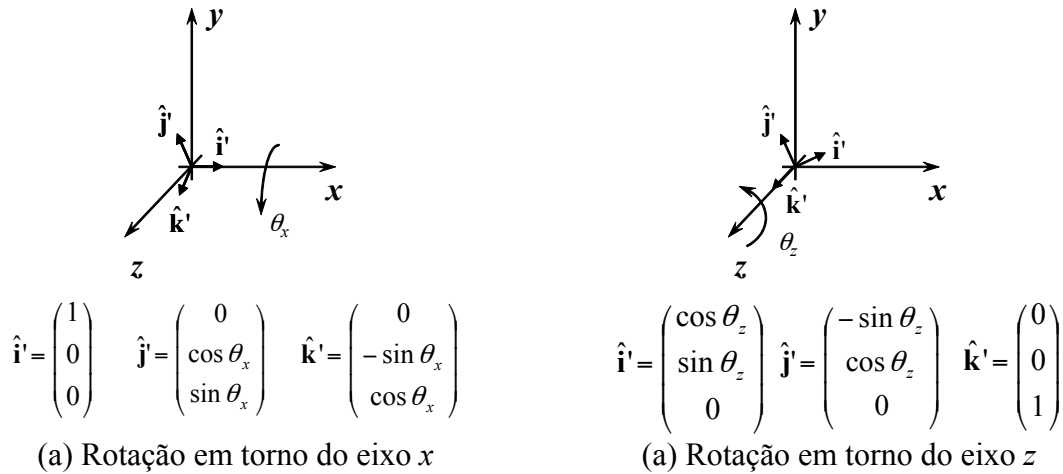


Fig. 6.16 – Matrizes das rotações em torno dos eixos coordenados.

Transformação de Normais

Quando um conjunto de objetos sofre uma determinada transformação, calculamos a matriz desta transformação e a aplicamos a todos os vértices do modelo. Assim, ao transformarmos os pontos das extremidades de um segmento de reta, estamos de fato transformando todos os pontos do segmento. O mesmo acontece com outras entidades geométricas, como triângulos e quadriláteros. Todos utilizam a mesma matriz. As normais destes objetos, entretanto, não seguem a mesma transformação. Para exemplificar o problema considere a Fig. 6.30.

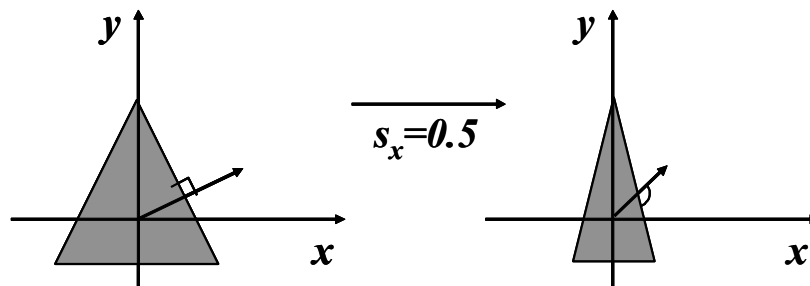


Fig. 6.30 – As normais não sofrem a mesma transformação que os pontos.

Para computar a transformação da normal, considere a equação do plano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0$ escrita na forma:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.70)$$

Esta equação não se altera se incluirmos a matriz identidade na forma de uma matriz \mathbf{M} e da sua inversa:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.71)$$

Se \mathbf{M} é a matriz da transformação homogênea da transformada que estamos tratando, os pontos \mathbf{p} são levados para:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{M} \mathbf{p} \text{ ou } \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

Substituindo esta equação na equação (6.71) temos:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = 0 \quad (6.73)$$

Esta equação pode ser vista com a equação do plano transformada, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{p}' = 0$, se:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{M}^{-T} \mathbf{n} \text{ ou } \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-T} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

De onde concluímos que, se \mathbf{M} transforma os pontos, \mathbf{M}^{-T} transforma as normais. Note que se a matriz \mathbf{M} for ortogonal as duas matrizes são iguais.

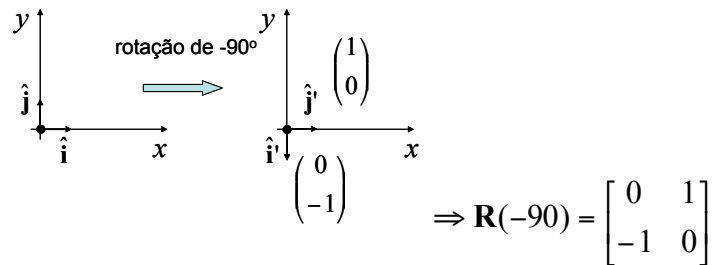
Exercícios resolvidos

1. Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(3,4)^T$ de um ângulo de 90° graus no sentido horário. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Faça um desenho ilustrando este significado geométrico.

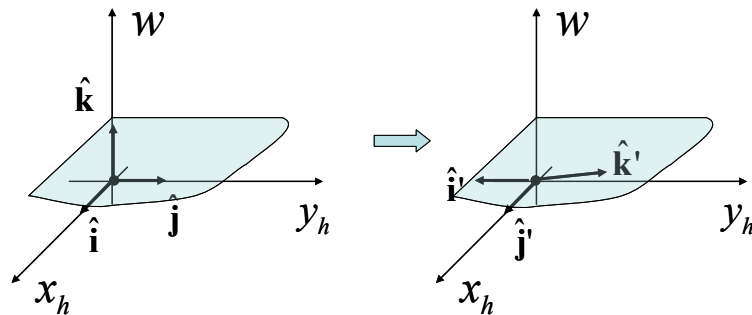
Resp.:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

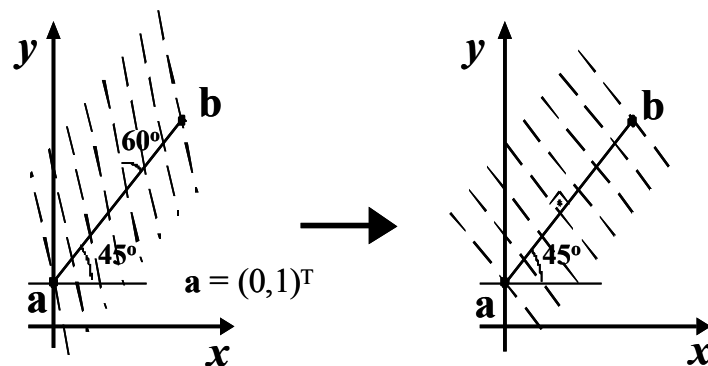
As colunas de uma matriz que representa uma transformação linear correspondem a imagem da transformada dos vetores da base. Servem, por exemplo, para se determinar a matriz de rotação mostrada acima, como ilustra a figura abaixo.



Como estamos envolvendo translações estamos trabalhando no espaço homogêneo e a interpretação geométrica é a da figura abaixo (que é pouco intuitiva).



- Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que as retas tracejadas fiquem ortogonais à reta que passa por **a** na forma indicada nos desenhos abaixo. Note que a reta que passa por **a** deve permanecer com sua posição inalterada.



Para poder transformar as retas tracejadas, de forma que fiquem ortogonais a reta **ab**, será necessário realizar 5 operações:

- Primeiramente é necessário transladar a reta de forma que ela passe na origem, ou seja:

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Em seguida devemos realizar uma rotação de 45° no sentido horário. Esta rotação faz com que a reta **ab** fique sobreposta ao eixo **x** e, conseqüentemente a reta não sofrerá alterações na terceira operação (cisalhamento). Vale a pena ressaltar as retas tracejadas serão afetadas, sim, pelo cisalhamento.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nesta operação, é realizado o cisalhamento que inclina as retas tracejadas em 30° no sentido negativo de x . As retas que anteriormente formavam um ângulo de 60° ficam ortogonais à reta **ab**.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & \tan(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A quarta e a quinta operação basicamente desfazem a segunda e primeira, respectivamente, ao rotacionar (ou desfazer a rotação anterior) os pontos do plano em 45° no sentido anti-horário e transladar os mesmos aumentado em $+1$ o eixo **y**, fazendo com que os pontos **a** e **b** voltem as suas posições originais.

$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

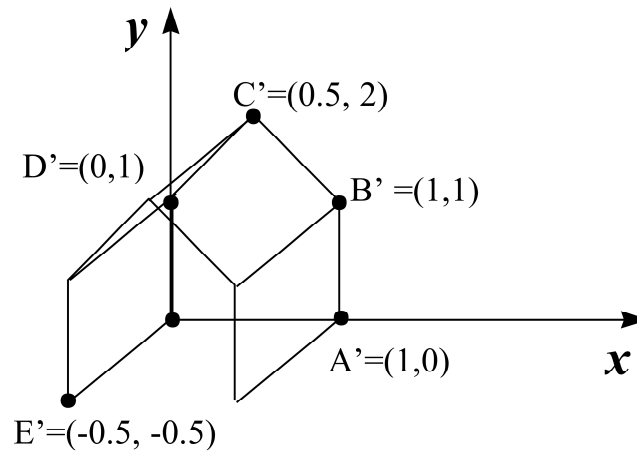
$$\text{Matriz da operação: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- No final, a matriz que transformará os pontos do plano, de forma que as retas tracejadas fiquem ortogonais à reta que passa por **ab** será:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(continuação) $\begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Determine a matriz da transformação linear que leva $A = (10, 0, 0)$, $B = (10, 10, 0)$, $C = (5, 20, 0)$, $D = (0, 10, 0)$ e $E = (0, 0, 20)$ do \mathbb{R}^3 para os pontos A' , B' , C' , D' , e E' do \mathbb{R}^2 , da forma mostrada na figura abaixo.



Resposta:

É uma matriz 3×2 com as colunas sendo a transformada dos vetores $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$.

O ponto A é $10(1, 0, 0)^T$, logo a transformada de $(1, 0, 0)^T$ é $(1/10, 0)^T$.

O ponto D é $10(0, 1, 0)^T$, logo a transformada de $(0, 1, 0)^T$ é $(0, 1/10)^T$.

O ponto E é $20(0, 0, 1)^T$, logo a transformada de $(0, 0, 1)^T$ é $(-0.5/20, -0.5/20)^T$.

Ou seja: $\begin{bmatrix} 1/10 & 0 & -1/40 \\ 0 & 1/10 & -1/40 \end{bmatrix}$

4. Calcule a inversa da matriz, **M**, mostrada abaixo. O resultado era esperado? Qual a interpretação geométrica da transformação associada a esta matriz?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Resposta:

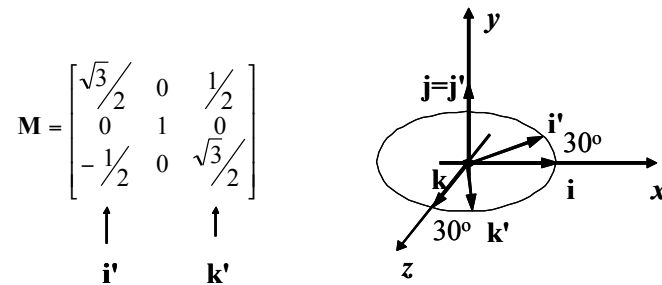
Pela regra de Cramer a inversa de um matriz pode ser calculada por:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \mathbf{M}^{adj}$$

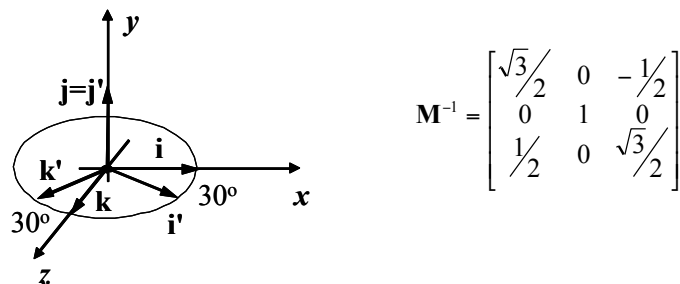
$$\det(\mathbf{M}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 0 - (-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + 0 + 0) = 1$$

$$\mathbf{M}^{adj} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Examinando as colunas da matriz \mathbf{M} vemos que a transformada da base canônica consiste numa rotação de 30° em torno do eixo y , como ilustra a figura abaixo.



Como a matriz de rotação é ortonormal, a inversa é a transposta. Ou, continuando o raciocínio geométrico, a inversa é corresponde à rotação de -30° que resulta na mesma matriz, como ilustra a figura a seguir.



Em ambos caminhos chegamos à mesma resposta.

- Mostre que a matriz, \mathbf{R} , associada a uma rotação em torno de um eixo qualquer que passa pela origem é ortonormal, ou seja, $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ou $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Dica: qual a interpretação geométrica das colunas da matriz R ?

Resp.:

Se aplicarmos uma transformação \mathbf{M} ao sistema canônico $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{M}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{M}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{k}' = \mathbf{M}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$$

Pela equação (6.8) podemos escrever a matriz \mathbf{M} como sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

Podemos notar que as colunas da matriz correspondem aos vetores da base rodada escrita na base original e as linhas são vice-versa. Ou seja:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{j}' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k}' \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \rangle \end{bmatrix}$$

A interpretação da matriz transposta também é imediata:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{j} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{k} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \rangle \end{bmatrix}$$

O produto da matriz pela sua transposta pode ser interpretado como sendo o produto interno entre os vetores da base canônica original:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

O produto da transposta pela matriz contém os produtos internos dos vetores da base rodada:

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}' \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Em ambos os casos, como as bases são ortonormais, os produtos resultam na matriz identidade, como queríamos provar.

6. A que pontos do R^2 correspondem as seguintes coordenadas homogêneas?

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resp.:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \cdot 3/2 \\ 2 \cdot 3/2 \\ 2/3 \cdot 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

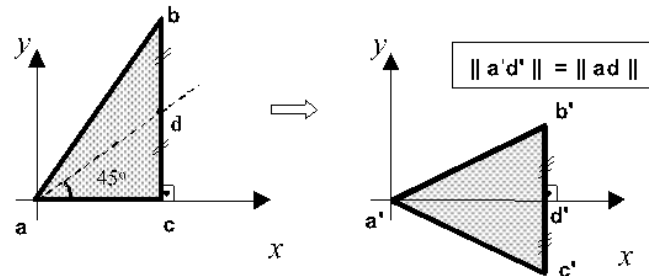
$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \infty \text{ na direção } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios

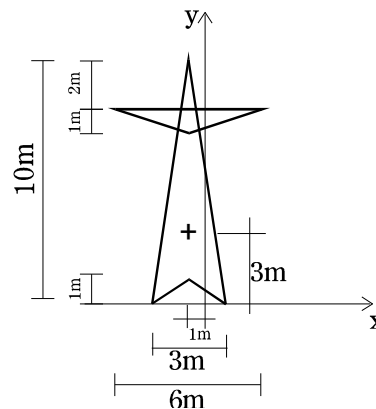
- 1) Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(2,3)^T$ de um ângulo de 90° graus.
- 2) Determine o centro, o sentido e o ângulo de rotação da transformação geométrica representada pela matriz \mathbf{M} mostrada abaixo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

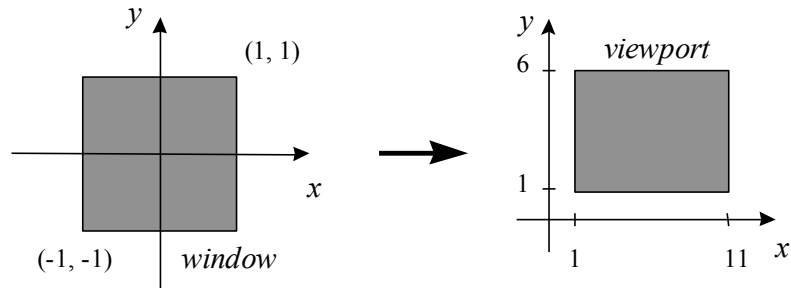
- 3) Determine um produto de matrizes cuja matriz resultante transforme o triângulo \mathbf{abc} em $\mathbf{a'b'c'}$ respeitando as condições geométricas indicadas na figura abaixo.



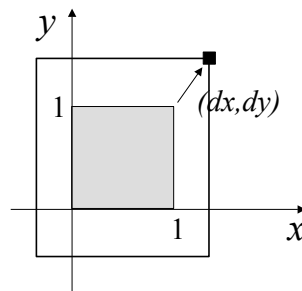
- 4) Determine a matriz que escala o objeto mostrado na figura de $s_x = 2$ e $s_y = 3$ em torno do ponto $(-1, 3)^T$. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Em que espaço essas colunas têm este significado?



- 5) Determine um produto de matrizes homogêneas que represente a seqüência de transformações geométricas que transforma a *window* da figura da esquerda na *viewport* da figura da direita. Este produto é único? E a matriz resultante, é única?



- 6) Nos sistemas gráficos no plano, as transformações entre sistemas de coordenadas são geralmente feitas através do par *window*, *viewport*. Como pode-se refazer um desenho aumentando seu tamanho na superfície de visualização (zoom +)? (Marque certo ou errado após cada frase.)
- ☐ aumentando a *window*;
 - ☐ diminuindo a *viewport*;
 - ☐ diminuindo a *window*;
 - ☐ aumentando a *window* e diminuindo a *viewport* de um mesmo fator;
 - ☐ aumentando a *window* e aumentando a *viewport* de um mesmo fator.
- 7) Determine o produto de matrizes homogêneas que transforma o quadrado unitário da forma indicada na figura. A resposta pode ser dada na forma de um produto de matrizes (não é necessário fazer as contas).



- 8) Determine a matriz que transforma os pontos do plano R^2 de forma que os objetos rodem em torno do ponto $(3,2)^T$ de um ângulo de 45° graus no sentido anti-horário. Qual o significado geométrico das colunas desta matriz? Faça um desenho ilustrando este significado geométrico.
- 9) Calcule posição do ponto $\mathbf{p} = (1,2,2)$ após uma a rotação de 60° em torno do eixo que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1,1,1)$ utilizando três formulações diferentes. São elas: (a) matriz de rotação dada pela equação (6.42); (b) expressão vetorial dada pela equação (6.40); e (c) pelo procedimento de quatérnios (veja (6.60)).