UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus de Quixadá
Prof. Arthur Araruna
QXD0115- Estrutura de Dados Avançada

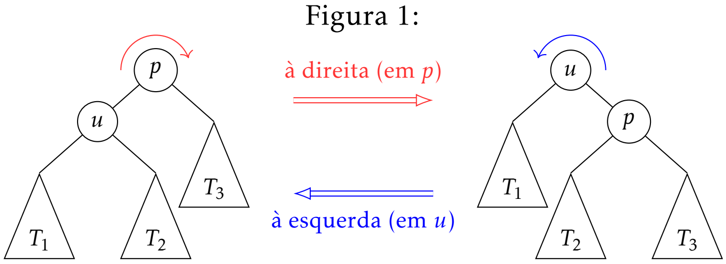
Rotações e Balanceamento de AVLs

1 Conceitos

Vamos relembrar o nossos conceitos que serão necessários para o resultado a ser demonstrado:

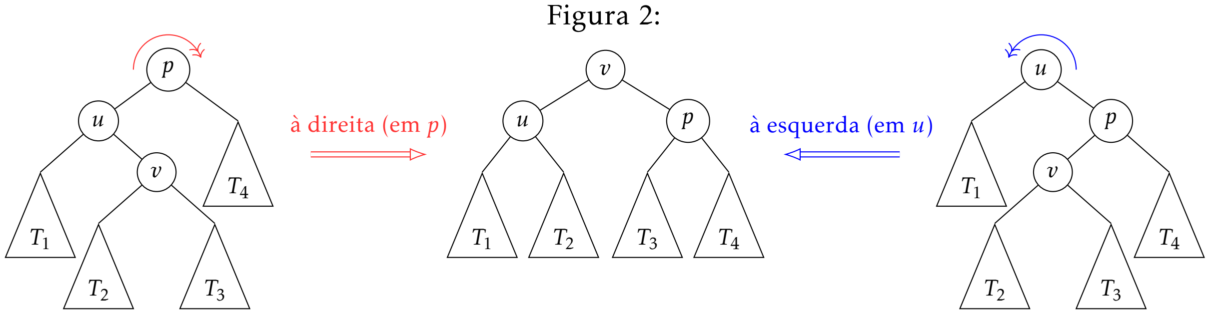
Definição 1.1. *Rotação simples* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.

Figura 1:



Definição 1.2. *Rotação dupla* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.

Figura 2:



2 Rotações preservam propriedade ABB

Observando as operações de rotação, podemos concluir que, se a árvore dada como entrada for binária de busca, qualquer das rotações realizada em qualquer dos seus nós preservará essa propriedade. Ou seja, após a rotação a nova estrutura obtida também será binária de busca.

2.1 Rotações simples

Suponha que a árvore à esquerda na Figura 1 seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras(considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estejamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < T_2$
- $u < p$
- $p < T_3$

E, para que a estrutura após uma rotação à direita (árvore da direita) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < p$
- $T_2 < p$
- $p < T_3$

Mas observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores, lembrando que a relação de "$<$" é transitiva.

Como os nós na sub-árvore rotacionada mudaram apenas de posição, mas permanecem os mesmos, essa alteração não tem como ter prejudicado a propriedade globalmente na árvore que a contém.

Por fim, perceba que o caso da rotação simples à esquerda é simétrico ao que acabamos de observar.

2.2 Rotações duplas

Considere agora que a árvore mais à esquerda na Figura 2 na página precedente seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras(considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estejamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < v$
- $T_2 < v$
- $v < T_3$
- $u < p$
- $p < T_4$

E, para que a estrutura após uma rotação dupla à direita (árvore ao centro) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < T_2$
- $u < v$
- $v < p$
- $T_3 < p$
- $p < T_4$

Da mesma forma, observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores e globalmente a situação não é alterada. O caso à esquerda também é simétrico (considere a árvore mais à direita).

3 Rotações corrigem desbalanceamento

Nosso problema atual consiste em corrigir situações de desbalanceamento que possam ser criadas após uma inserção em uma árvore AVL. Vamos considerar os casos gerados nessa situação e observar que podemos resolvê-los usando alguma das rotações que definimos.

Considere uma árvore T inicialmente AVL no momento imediatamente após a inserção de um novo nó n. Seja p o nó mais profundo[i] de T que se tornou desbalanceado após essa inserção.

Primeiramente, observe que p não pode ser uma folha[ii] e que ele precisa ser um ascendente de n[iii]. Por fim, a raiz da sub-árvore de p afetada pela inserção de n não pode ser o próprio n[iv]. Chamaremos, então, essa raiz de u.

Existem alguns casos possíveis para os balanços e a estrutura de T nessa situação.

[i] O de maior nível dentre todos os nós.

[ii] O balanço de qualquer folha é sempre 0, pois ambas as suas sub-árvores são vazias.

[iii] Caso contrário, como a inserção o teria desbalanceado, se ela não teria ocorrido em uma de suas sub-árvores?

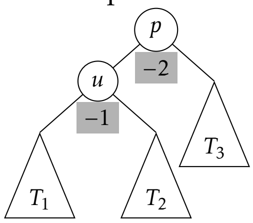
[iv] Pois antes ela era uma sub-árvore vazia, o que não pode ter tornado p desbalanceado.

3.1 Inserção na sub-árvore esquerda de p

3.1.1 Inserção na sub-árvore esquerda de u

Nesse caso, certamente a configuração da sub-árvore de p e seus balanços é a representada na Figura 3.

Figura 3: Nó n faz parte da sub-árvore T_1.



Assim, a seguintes relações podem se estabelecidas:

I. $bal(p) = -2 \implies h(T_3) - h(u) = -2 \implies h(T_3) = h(u) - 2$

II. $bal(u) = -1 \implies h(T_2) - h(T_1) = -1 \implies h(T_2) = h(T_1) - 1$

III. $h(u) = h(T_1) + 1$[(v)]

Se substituirmos III. em I., e usarmos a expressão obtida em II., encontraremos também que

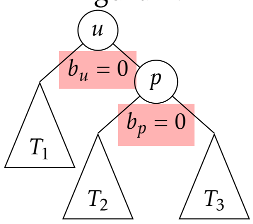
IV. $h(T_3) = h(T_1) + 1 - 2 \implies h(T_3) = h(T_1) - 1$

V. $h(T_2) = (h(T_3) + 1) - 1 \implies h(T_2) = h(T_3)$

Isso nos permite afirmar que após realizarmos uma rotação à direita em p (Figura 4) os novos balanços de p e u serão:

- $bal(p) = b_p = h(T_3) - h(T_2) = 0$[(vi)]
- $bal(u) = b_u = h(p) - h(T_1) = (h(T_2) + 1) - h(T_1) = (h(T_1) - 1) + 1 - h(T_1) = 0$[(vii)]

Figura 4:



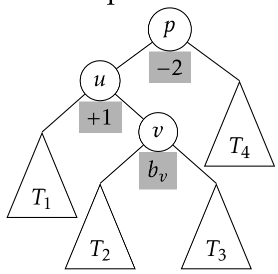
Dessas informações, podemos concluir que a sub-árvore rotacionada passou a estar toda balanceada, já que os novos balanços são 0 e não alteramos as estruturas das sub-árvores T_1, T_2 e T_3. Além disso, podemos concluir que a altura dessa sub-árvore sob a ótica dos seus ancestrais não mudou entre antes e depois da inserção[(viii)]. Isso significa que com apenas essa rotação conseguimos rebalancear toda a árvore.

3.1.2 Inserção na sub-árvore esquerda de u

Nesse caso, certamente a configuração da sub-árvore de p e seus balanços é a representada na Figura 3.

(v) Pela definição recursiva de altura e porque o balanço nos informa a sub-árvore mais alta.
(vi) Observando V.
(vii) Observando a definição recursiva de altura para p e o item II.
(viii) Veja Seção 5 na página 5.

Figura 5: Nó n faz parte da sub-árvore $T(v)$.



Note que o nó v pode ou não ser o novo nó n inserido. Seu valor de balanço b_v será analisado em breve. Independentemente disso, podemos concluir algumas relações entre as alturas das sub-árvores:

I. $bal(u) = +1 \implies h(v) - h(T_1) = +1 \implies h(v) = h(T_1) + 1$

II. $bal(p) = -2 \implies h(T_4) - h(u) = -2 \implies h(u) = h(T_4) + 2$

III. $h(v) = \max\{h(T_2); h(T_3)\} + 1$

IV. $h(u) = h(v) + 1$

A partir de substituições entre os itens acima, ainda concluímos que:

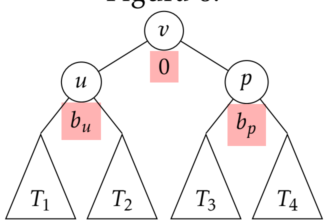
V. $h(T_1) = \max\{h(T_2); h(T_3)\} \implies h(T_1) \geq h(T_2), h(T_3)$

VI. $h(T_4) = (h(v) + 1) - 2 = (\max\{h(T_2);\ h(T_3)\} + 1) - 1 = \max\{h(T_2);\ h(T_3)\} \implies h(T_4) \geq h(T_2), h(T_3)$

VII. $h(T_1) = h(T_4)$

Após uma rotação dupla à direita, teremos a situação na Figura 6. Veja que por conta de VII. e dos itens

Figura 6:



V. e VI., podemos calcular o novo balanço de v como sendo:

$$\begin{aligned} bal(v) &= h(p) - h(u) \\ &= (\max\{h(T_3);\ h(T_4)\} + 1) - (\max\{h(T_1);\ h(T_2)\} + 1) \\ &= (h(T_4) + 1) - (h(T_1) + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

E também observamos que os valores exatos dos novos balanços de u e p vão depender diretamente do valor de b_v.

Por conta da escolha de p[(ix)], certamente o balanço $b_v \in \{-1, 0, +1\}$.

CASO $b_v = 0$**:** concluímos que, como $h(T_2) = h(T_3)$, necessariamente $b_u = b_p = 0$.

[(ix)]Lembre-se que p deve ser o nó desbalanceado mais profundo, o que impede que v esteja balanceado.

CASO $b_v = +1$: concluímos que, como $h(T_3) = h(T_2) + 1$, necessariamente $b_u = -1$ e $b_p = 0$.

CASO $b_v = -1$: concluímos que, como $h(T_2) = h(T_3) + 1$, necessariamente $b_u = 0$ e $b_p = +1$.

Em todos os casos, podemos concluir que todos os nós afetados estarão balanceados após a rotação. Além disso, semelhante à Seção 3.1.1 na página 3, podemos concluir que todos os nós da árvore como um todo voltaram a estar balanceados.

3.2 Demais casos

Os demais casos são na verdade as situações simétricas dos casos descritos anteriormente nas Seções 3.1.1 a 3.1.2 na página 3.

4 Conclusão

Concluímos que uma única rotação é suficiente para corrigir o balanço de todos os nós de uma árvore AVL após uma inserção. Basta localizarmos o nó mais profundo que tenha se desbalanceado por conta dessa inserção. Essa informação será usada na construção do algoritmo InserirAVL.

Além disso, a mecânica de análise seguida por nós será aproveitada para concluirmos como corrigir um desbalanceamento após remoção através de rotações, e como usar isso no algoritmo RemoverAVL.

Apêndice

5 Altura não muda após rotação

(falta texto...)