



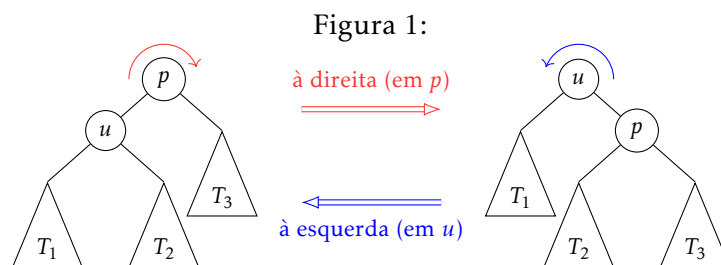
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
Campus de Quixadá  
Prof. Arthur Araruna  
QXD0115- Estrutura de Dados Avançada

# Rotações e Balanceamento de AVLs

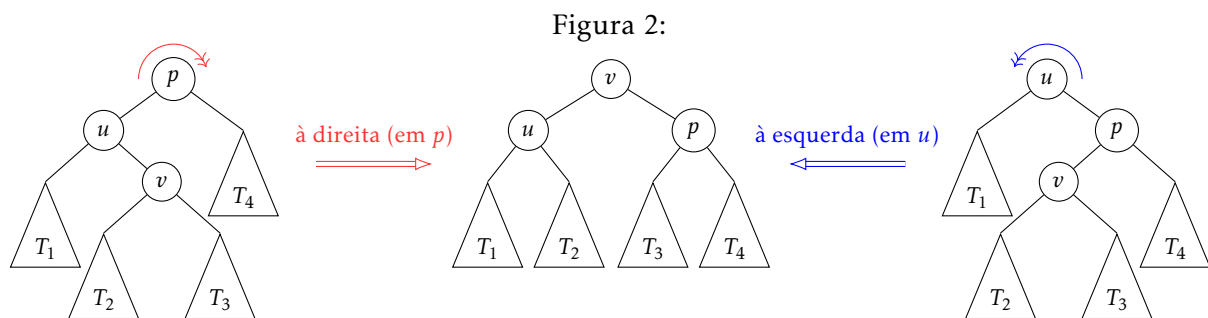
## 1 Conceitos

Vamos relembrar o nossos conceitos que serão necessários para o resultado a ser demonstrado:

**Definição 1.1.** *Rotação simples* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.



**Definição 1.2.** *Rotação dupla* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.



## 2 Rotações preservam propriedade ABB

Observando as operações de rotação, podemos concluir que, se a árvore dada como entrada for binária de busca, qualquer das rotações realizada em qualquer dos seus nós preservará essa propriedade. Ou seja, após a rotação a nova estrutura obtida também será binária de busca.

### 2.1 Rotações simples

Suponha que a árvore à esquerda na Figura 1 seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras (considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < T_2$
- $u < p$
- $p < T_3$

E, para que a estrutura após uma rotação à direita (árvore da direita) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < p$
- $T_2 < p$
- $p < T_3$

Mas observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores, lembrando que a relação de “<” é transitiva.

Como os nós na sub-árvore rotacionada mudaram apenas de posição, mas permanecem os mesmos, essa alteração não tem como ter prejudicado a propriedade globalmente na árvore que a contém.

Por fim, perceba que o caso da rotação simples à esquerda é simétrico ao que acabamos de observar.

## 2.2 Rotações duplas

Considere agora que a árvore mais à esquerda na Figura 2 na página precedente seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras (considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < v$
- $T_2 < v$
- $v < T_3$
- $u < p$
- $p < T_4$

E, para que a estrutura após uma rotação dupla à direita (árvore ao centro) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < v$
- $T_3 < p$
- $u < T_2$
- $v < p$
- $p < T_4$

Da mesma forma, observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores e globalmente a situação não é alterada. O caso à esquerda também é simétrico (considere a árvore mais à direita).

## 3 Rotações corrigem desbalanceamento

Nosso problema atual consiste em corrigir situações de desbalanceamento que possam ser criadas após uma inserção em uma árvore AVL. Vamos considerar os casos gerados nessa situação e observar que podemos resolvê-los usando alguma das rotações que definimos.

Considere uma árvore  $T$  inicialmente AVL no momento imediatamente após a inserção de um novo nó  $n$ . Seja  $p$  o nó mais profundo<sup>(i)</sup> de  $T$  que se tornou desbalanceado após essa inserção.

Primeiramente, observe que  $p$  não pode ser uma folha<sup>(ii)</sup> e que ele precisa ser um ascendente de  $n$ <sup>(iii)</sup>. Por fim, a raiz da sub-árvore de  $p$  afetada pela inserção de  $n$  não pode ser o próprio  $n$ <sup>(iv)</sup>. Chamaremos, então, essa raiz de  $u$ .

Existem alguns casos possíveis para os balanços e a estrutura de  $T$  nessa situação.

<sup>(i)</sup>O de maior nível dentre todos os nós.

<sup>(ii)</sup>O balanço de qualquer folha é sempre 0, pois ambas as suas sub-árvores são vazias.

<sup>(iii)</sup>Caso contrário, como a inserção o teria desbalanceado, se ela não teria ocorrido em uma de suas sub-árvores?

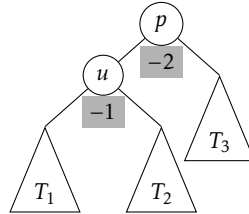
<sup>(iv)</sup>Pois antes ela era uma sub-árvore vazia, o que não pode ter tornado  $p$  desbalanceado.

### 3.1 Inserção na sub-árvore esquerda de $p$

#### 3.1.1 Inserção na sub-árvore esquerda de $u$

Nesse caso, certamente a configuração da sub-árvore de  $p$  e seus balanços é a representada na Figura 3.

Figura 3: Nó  $n$  faz parte da sub-árvore  $T_1$ .



Assim, a seguintes relações podem se estabelecidas:

- I.  $bal(p) = -2 \implies h(T_3) - h(u) = -2 \implies h(T_3) = h(u) - 2$
- II.  $bal(u) = -1 \implies h(T_2) - h(T_1) = -1 \implies h(T_2) = h(T_1) - 1$
- III.  $h(u) = h(T_1) + 1^{(v)}$

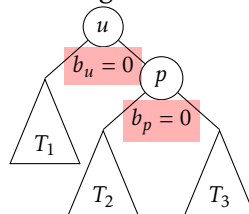
Se substituirmos III. em I., e usarmos a expressão obtida em II., encontraremos também que

- IV.  $h(T_3) = h(T_1) + 1 - 2 \implies h(T_3) = h(T_1) - 1$
- V.  $h(T_2) = (h(T_3) + 1) - 1 \implies h(T_2) = h(T_3)$

Isso nos permite afirmar que após realizarmos uma rotação à direita em  $p$  (Figura 4) os novos balanços de  $p$  e  $u$  serão:

- $bal(p) = b_p = h(T_3) - h(T_2) = 0^{(vi)}$
- $bal(u) = b_u = h(p) - h(T_1) = (h(T_2) + 1) - h(T_1) = (h(T_1) - 1) + 1 - h(T_1) = 0^{(vii)}$

Figura 4:



Dessas informações, podemos concluir que a sub-árvore rotacionada passou a estar toda balanceada, já que os novos balanços são 0 e não alteramos as estruturas das sub-árvores  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ . Além disso, podemos concluir que a altura dessa sub-árvore sob a ótica dos seus ancestrais não mudou entre antes e depois da inserção<sup>(viii)</sup>.

<sup>(v)</sup>Pela definição recursiva de altura e porque o balanço nos informa a sub-árvore mais alta.

<sup>(vi)</sup>Observando V.

<sup>(vii)</sup>Observando a definição recursiva de altura para  $p$  e o item II.

<sup>(viii)</sup>Veja Seção 5 na página seguinte.

## **4 Conclusão**

# **Apêndice**

## **5 Altura não muda após rotação**