UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus de Quixadá
Prof. Arthur Araruna
QXD0115- Estrutura de Dados Avançada

Árvores AVL são balanceadas

1 Conceitos

Vamos relembrar o nossos conceitos que serão necessários para o resultado a ser demonstrado:

Definição 1.1. Uma árvore binária T, com n nós, tal que $h(T) = O(\lg n)$ é dita *balanceada*.

Definição 1.2. O *balanço* de um nó binário n é definido pela função $bal(n) := h(n.dir) - h(n.esq)$.

Definição 1.3. Uma árvore binária T é *AVL* quando, para todo nó $n \in T$, $|bal(n)| \leq 1$.

2 Demonstração

Observação:
A argumentação abaixo não é baseada na que consta em Szwarcfiter e Markenzon (2010) pois uma das afirmações dadas como válidas não é de fácil demonstração.

Note que, se mostrarmos que a altura de uma árvore AVL qualquer sempre é dada no máximo por uma função logarítmica do seu tamanho, poderemos concluir que a ordem de grandeza da altura não pode ser maior que logarítmica. Isso é exatamente o que significa, considerando h sendo a altura e n sendo o tamanho, que $h = O(\lg n)$ e, com isso, que toda AVL seria balanceada.

Nesse sentido, uma das formas possíveis é se conseguirmos construir uma desigualdade da forma $h \leq c \cdot k + \lg n$ para constantes c e k, com $c > 0$. A estratégia que seguiremos será um pouco mais restrita, porém permitirá concluirmos a mesma coisa.

Em vez de analisarmos uma árvore qualquer, vamos observar, para um dado h arbitrário, uma árvore AVL com altura h que contenha o mínimo possível de nós. Se essa árvore respeitar a desigualdade anterior, poderemos concluir que *todas* as AVL com essa mesma altura também a respeitarão[i].

2.1 Estrutura da árvore

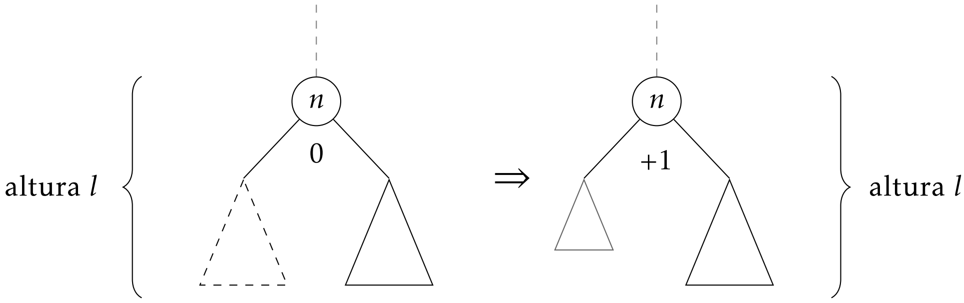
Para entendermos como construir uma árvore como desejamos, observe o raciocínio a seguir.

Imagine que T seja uma árvore AVL com altura h, e considere a situação em que encontramos um nó $n \in T$ com $bal(n) = 0$. Veja que se substituirmos, por exemplo, a sub-árvore $n.esq$ por uma outra árvore AVL arbitrária com altura $h(n.esq) - 1$, estaremos construindo uma nova árvore T' menor que T mas de mesma altura e ainda AVL. Veja a Figura 1 na página seguinte.

Isso nos permite concluir que a AVL "mínima" de altura h deve possuir todos os balanços não-nulos, caso contrário ainda poderíamos diminuir seu tamanho usando o raciocínio descrito.

[i]Pois já que para essa tal árvore "mínima" o lado direito da desigualdade é o menor possível, todas as outras apresentarão valores ainda maiores, o que mantém a desigualdade.

Figura 1: Perceba que retiramos nós, mas a altura de n permanece a mesma. Isso não gera alteração para a árvore que o contém.



2.2 Contagem de nós da árvore

Vamos definir a função $N(h)$ de forma a representar o menor número de nós possível para uma árvore AVL de altura h, que chamaremos de T.

Como vimos anteriormente, as sub-árvores de T devem possuir alturas $h-1$ e $h-2$, não necessariamente nesta ordem. Além disso, podemos afirmar que ambas se tratam de árvores AVL com o mínimo de nós para a respectiva altura, caso contrário não faria sentido T possuir tamanho mínimo (já que elas poderiam ser trocadas por outras árvores de mesma altura e menos nós).

Dessa forma, podemos afirmar que o valor de $N(h)$[ii] pode ser calculado como

$$N(h) = \begin{cases} N(h-1) + N(h-2) + 1, & \text{se } h \geq 2; \\ 2, & \text{se } h = 2; \\ 1, & \text{se } h = 1. \end{cases}$$

Observe que a função $N(h)$ é monotonicamente crescente[iii]. Com isso, e observando os casos-base, podemos afirmar que $N(h) \geq 2N(h-2)$[iv] para todo $h \geq 3$.

3 Conclusão

Resolvendo[v] a nova equação de recorrência obtida, obtemos que $N(h) \geq 2^{\frac{h-1}{2}}$. Lembrando que $N(h)$ é o número de nós de T, que passaremos a denominar por n, concluímos que, para todo $h \geq 3$,

$$\begin{aligned} n = N(h) \geq 2^{\frac{h-1}{2}} & \qquad \Longrightarrow \\ \lg n \geq \frac{h-1}{2} & \qquad \Longrightarrow \\ h \leq 1 + 2 \lg n & \end{aligned}$$

Dessa forma, temos todas as informações necessárias para concluirmos que $h = O(\lg n)$.

[ii] O caso $h = 0$ não é considerado, mas é trivial, dado que a única árvore com altura 0 é a árvore vazia, com 0 nós.

[iii] Isso porque todos os valores envolvidos são não-negativos e as operações realizadas são apenas adições.

[iv] Considere que substituímos o termo $N(h-1)$ por um termo $N(h-2)$ e o termo 1 por um termo 0. Em ambas as substituições, os novos valores são menores.

[v] Veja argumentação no Apêndice.

Apêndice

4 Resolução da Recorrência

Na Seção 2.2 na página anterior determinamos que $N(h) \geq 2N(h-2)$ para todo $h \geq 3$. Vamos agora mostrar que isso implica em $N(h) \geq 2^{\frac{h-1}{2}}$ para todo $h \geq 3$.

Observe a seguinte sequência de desigualdades, obtida por sucessivas aplicações da desigualdade mencionada acima.

$$
\begin{aligned}
N(h) &\geq 2N(h-2) &&= 2^1 N(h-2) \\
&\geq 2(2N(h-4)) &&= 2^2 N(h-4) \\
&\geq 2^2(2N(h-6)) &&= 2^3 N(h-6) \\
&\geq 2^3(2N(h-8)) &&= 2^4 N(h-8) \\
&\cdots &&\cdots \\
&\geq 2^{k-1}(2N(h-2k)) &&= 2^k N(h-2k)
\end{aligned}
$$

Considerando que a última substituição nos tenha trazido a um caso base, temos as seguintes possibilidades:

CASO $h-2k=2$: podemos concluir que $k = \frac{h-2}{2}$ e que

$$N(h) \geq 2^{\frac{h-2}{2}} N(2) = 2^{\frac{h-2}{2}} \cdot 2 = 2^{\frac{h}{2}} \geq 2^{\frac{h-1}{2}}.$$

CASO $h-2k=1$: podemos concluir que $k = \frac{h-1}{2}$ e que

$$N(h) \geq 2^{\frac{h-1}{2}} N(1) = 2^{\frac{h-1}{2}} \cdot 1 = 2^{\frac{h-1}{2}}.$$

Referências

SZWARCFITER, J.L.; MARKENZON, L. **Estruturas de dados e seus algoritmos (3a. ed.).** [S.l.]: Grupo Gen - LTC, 2010. ISBN 9788521629948.