UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus de Quixadá
Prof. Arthur Araruna
QXD0115- Estrutura de Dados Avançada

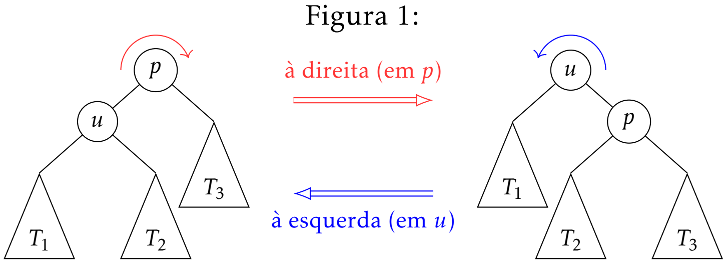
Rotações e Balanceamento de AVLs

1 Conceitos

Vamos relembrar o nossos conceitos que serão necessários para o resultado a ser demonstrado:

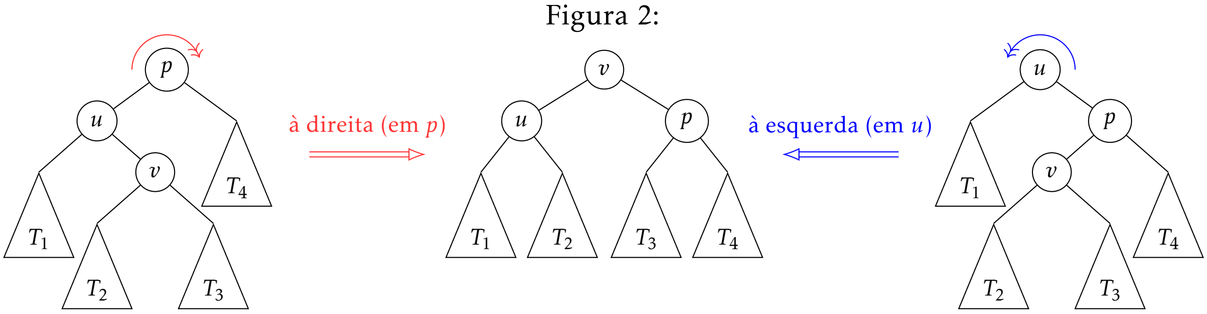
Definição 1.1. *Rotação simples* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.

Figura 1:



Definição 1.2. *Rotação dupla* (à direita ou à esquerda) é uma das transformações estruturais representadas a seguir, realizadas sobre a raiz de uma sub-árvore.

Figura 2:



2 Rotações preservam propriedade ABB

Observando as operações de rotação, podemos concluir que, se a árvore dada como entrada for binária de busca, qualquer das rotações realizada em qualquer dos seus nós preservará essa propriedade. Ou seja, após a rotação a nova estrutura obtida também será binária de busca.

2.1 Rotações simples

Suponha que a árvore à esquerda na Figura 1 seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras(considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estejamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < T_2$
- $u < p$
- $p < T_3$

E, para que a estrutura após uma rotação à direita (árvore da direita) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < p$
- $T_2 < p$
- $p < T_3$

Mas observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores, lembrando que a relação de "$<$" é transitiva.

Como os nós na sub-árvore rotacionada mudaram apenas de posição, mas permanecem os mesmos, essa alteração não tem como ter prejudicado a propriedade globalmente na árvore que a contém.

Por fim, perceba que o caso da rotação simples à esquerda é simétrico ao que acabamos de observar.

2.2 Rotações duplas

Considere agora que a árvore mais à esquerda na Figura 2 na página precedente seja binária de busca. Isso significa que todas as relações a seguir são verdadeiras(considere que quando falamos sobre uma sub-árvore estejamos falando sobre todos os seus nós):

- $T_1 < u$
- $u < v$
- $T_2 < v$
- $v < T_3$
- $u < p$
- $p < T_4$

E, para que a estrutura após uma rotação dupla à direita (árvore ao centro) mantenha a propriedade, precisamos concluir que:

- $T_1 < u$
- $u < T_2$
- $u < v$
- $v < p$
- $T_3 < p$
- $p < T_4$

Da mesma forma, observe que todas as novas relações podem ser obtidas das anteriores e globalmente a situação não é alterada. O caso à esquerda também é simétrico (considere a árvore mais à direita).

3 Rotações corrigem desbalanceamento

Nosso problema atual consiste em corrigir situações de desbalanceamento que possam ser criadas após uma inserção em uma árvore AVL. Vamos considerar os casos gerados nessa situação e observar que podemos resolvê-los usando alguma das rotações que definimos.

Considere uma árvore T inicialmente AVL no momento imediatamente após a inserção de um novo nó n. Seja p o nó mais profundo[(i)] de T que se tornou desbalanceado após essa inserção.

Primeiramente, observe que p não pode ser uma folha[(ii)] e que ele precisa ser um ascendente de n[(iii)]. Por fim, a raiz da sub-árvore de p afetada pela inserção de n não pode ser o próprio n[(iv)]. Chamaremos, então, essa raiz de u.

Existem alguns casos possíveis para os balanços e a estrutura de T nessa situação.

[(i)] O de maior nível dentre todos os nós.

[(ii)] O balanço de qualquer folha é sempre 0, pois ambas as suas sub-árvores são vazias.

[(iii)] Caso contrário, como a inserção o teria desbalanceado, se ela não teria ocorrido em uma de suas sub-árvores?

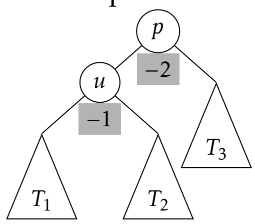
[(iv)] Pois antes ela era uma sub-árvore vazia, o que não pode ter tornado p desbalanceado.

3.1 Inserção na sub-árvore esquerda de p

3.1.1 Inserção na sub-árvore esquerda de u

Nesse caso, certamente a configuração da sub-árvore de p e seus balanços é a representada na Figura 3.

Figura 3: Nó n faz parte da sub-árvore T_1.



Assim, a seguintes relações podem se estabelecidas:

I. $bal(p) = -2 \implies h(T_3) - h(u) = -2 \implies h(T_3) = h(u) - 2$

II. $bal(u) = -1 \implies h(T_2) - h(T_1) = -1 \implies h(T_2) = h(T_1) - 1$

III. $h(u) = h(T_1) + 1$ (v)

Se substituirmos III. em I., e usarmos a expressão obtida em II., encontraremos também que

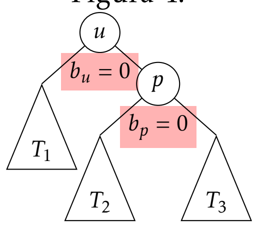
IV. $h(T_3) = h(T_1) + 1 - 2 \implies h(T_3) = h(T_1) - 1$

V. $h(T_2) = (h(T_3) + 1) - 1 \implies h(T_2) = h(T_3)$

Isso nos permite afirmar que após realizarmos uma rotação à direita em p (Figura 4) os novos balanços de p e u serão:

- $bal(p) = b_p = h(T_3) - h(T_2) = 0$ (vi)
- $bal(u) = b_u = h(p) - h(T_1) = (h(T_2) + 1) - h(T_1) = (h(T_1) - 1) + 1 - h(T_1) = 0$ (vii)

Figura 4:



Dessas informações, podemos concluir que a sub-árvore rotacionada passou a estar toda balanceada, já que os novos balanços são 0 e não alteramos as estruturas das sub-árvores T_1, T_2 e T_3. Além disso, podemos concluir que a altura dessa sub-árvore sob a ótica dos seus ancestrais não mudou entre antes e depois da inserção (viii).

(v) Pela definição recursiva de altura e porque o balanço nos informa a sub-árvore mais alta.
(vi) Observando V.
(vii) Observando a definição recursiva de altura para p e o item II.
(viii) Veja Seção 5 na página seguinte.

4 Conclusão

Apêndice

5 Altura não muda após rotação