

## Matematyka dyskretna, zestaw 4.

- 4.1. Korzystając z zasady indukcji zupełnej, udowodnij istnienie rozkładu na iloczyn (skończenie wielu) liczb pierwszych dla dowolnej liczby naturalnej większej od 1 i nie będącej liczbą pierwszą.
- 4.2. Korzystając z zasady indukcji zupełnej i dzielenia z resztą, udowodnij istnienie rozwinięcia dowolnej liczby wymiernej o mianowniku  $n \in \mathbb{N}^*$  w ułamek łańcuchowy

$$\frac{b}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}} \quad , \quad (1)$$

gdzie  $b, a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$  i  $k \in \mathbb{N}$ . Czy rozwinięcie to jest jednoznaczne?

- 4.3. Wykaż przez indukcję wzór na postać zwartą sumy:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} . \quad (2)$$

Wskazówka: w jednej z sum pojawiających się w dowodzie kroku indukcyjnego należy odpowiednio przededefiniować indeks  $k$ .

- 4.4. Korzystając z zasady minimum, udowodnij że

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) , \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 . \quad (4)$$

- 4.5. Wykaż przez indukcję, że

$$3n^2 + 3n + 1 < 3^n , \quad \forall n \geq 4 , \quad (5)$$

$$5 | (13^n - 8^n) , \quad \forall n \geq 1 . \quad (6)$$

- 4.6. Wykaż przez indukcję wzory na postać zwartą sum:

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 , \quad (7)$$

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n , \quad (8)$$

gdzie  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  i  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  (ciąg Fibonacciego).

4.7. Wyraż sumę

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \quad (9)$$

poprzez liczby harmoniczne (można to zrobić na więcej niż jeden sposób).

Piotr Czarnik  
Andrzej Kapanowski  
Jakub Mielczarek  
Andrzej Rostworowski