22.05.2023

Matematyka dyskretna, zestaw 10.

10.1. Weźmy permutację

$$\sigma = (1234) \in S_5 .$$

Oblicz σ^2, σ^3, σ^4, σ^5 i σ^{-1}. Ile wynosi rząd σ jako elementu grupy S_5?

10.2. Rozłóż na rozłączne cykle permutację

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 9 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz wyznacz π^{71}.

10.3. Znak permutacji π to wielkość obliczana ze wzoru $\mathrm{sgn}\pi = (-1)^k$, gdzie k można wyznaczyć na dwa sposoby. Po pierwsze, każdą permutację da się rozłożyć na pewną liczbę transpozycji – transpozycja jest to cykl o długości 2. Po drugie, każda permutacja określa pewną liczbę inwersji – inwersja występuje wtedy, gdy $i < j$, ale $\pi(i) > \pi(j)$. Dowolną z powyższych liczb podstawiamy za k.

Wyznacz liczbę transpozycji i oblicz liczbę inwersji dla przykładowej permutacji

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 8 & 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} .$$

Czy otrzymane k jest takie samo w obu przypadkach? Jaki jest znak π?

10.4. Jeżeli litery d,y,s,k,r,e,t,n,a ułożymy w losowym porządku, to z jakim prawdopodobieństwem utworzą one słowo "dyskretna"? A co w przypadku liter m,m,a,a,a,t,t,e,y,k i słowa "matematyka"?

10.5. Ile różnych parzystych liczb sześciocyfrowych da się ułożyć z cyfr 0,1,3,4,5,7 (bez powtórzeń)? A ile co najwyżej trzyliterowych ciągów znaków można utworzyć przy użyciu liter A,B,C,D,E,F,G (bez powtórzeń)? Oblicz przy użyciu permutacji.

10.6. Nie korzystając z relacji rekurencyjnej, a tylko ze wzorów na liczbę permutacji danego typu, oblicz wartość liczb Stirlinga $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

10.7. Nie korzystając z relacji rekurencyjnej, a tylko zliczając odpowiednie podzbiory przy użyciu współczynników dwumianowych, oblicz wartość liczb Stirlinga $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ i $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

10.8. Uzasadnij w języku kombinatoryki, dlaczego dla dowolnego $n > 0$ zachodzą równości

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}, \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1 . \tag{2}$$

10.9. Udowodnij – zliczając odpowiednie podzbiory – że dla $n \geqslant 3$ zachodzi równość

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

10.10. Udowodnij tożsamość

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Jakub Czartowski
Grzegorz Czelusta
Andrzej Kapanowski
Piotr Korcyl
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski