16.04.2025

Matematyka dyskretna, zestaw 5.

5.1. Udowodnij indukcyjnie tożsamość $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$, gdzie φ jest złotą liczbą. Nie używaj przy tym wzoru Eulera-Bineta. Pokaż analogicznie także, że $\varphi^{-n} = F_{-n}\varphi + F_{-n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ to rozszerzenie liczb Fibonacciego o indeksy ujemne.

5.2. Oblicz długość najkrótszej sekwencji ruchów dla problemu Hanoi ze słupkami A, B i C, w którym bezpośrednie ruchy pomiędzy słupkiem A a słupkiem C są zabronione. Tak jak w oryginalnym problemie, na każdym krążku można położyć tylko krążek mniejszy. Pokaż, że przy takim sposobie przenoszenia krążków przejdziemy przez wszystkie możliwe ich rozmieszczenia na trzech słupkach.

5.3. Korzystając z równania charakterystycznego, rozwiąż liniowe rekurencje

$$s_0 = \tfrac{1}{4}\,, \qquad s_1 = 0\,, \qquad s_{k+2} = 2s_{k+1} + 8s_k\,, \tag{1}$$

$$s_1 = -5\,, \qquad s_2 = -3\,, \qquad s_{k+1} = 3s_k - \tfrac{9}{4}s_{k-1}\,. \tag{2}$$

Ile wynosi s_0 w drugim przypadku?

5.4. Przekształć poniższe rekurencje tak, aby dało się do nich zastosować metodę równania charakterystycznego 2-go stopnia, a następnie je rozwiąż:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3\,, \qquad a_0 = -1\,, \tag{3}$$

$$(a_{n+1})^2 = 4a_n\,, \qquad a_1 = 2\,. \tag{4}$$

5.5. Rozważmy planszę $2 \times n$. Na ile sposobów można wypełnić ją kostkami 2×1 (cała kostka jest jednego koloru), mając do dyspozycji nieograniczoną liczbę kostek białych i czarnych. Jak będzie wyglądało równanie rekurencyjne, jeżeli mamy do dyspozycji k kolorów?

5.6. Niech b_n oznacza liczbę niepustych podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb. Znaleźć liniową zależność rekurencyjną na b_n.

Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski