Drgania i fale

7/15

Andrzej Kapanowski
http://users.uj.edu.pl/~ufkapano/

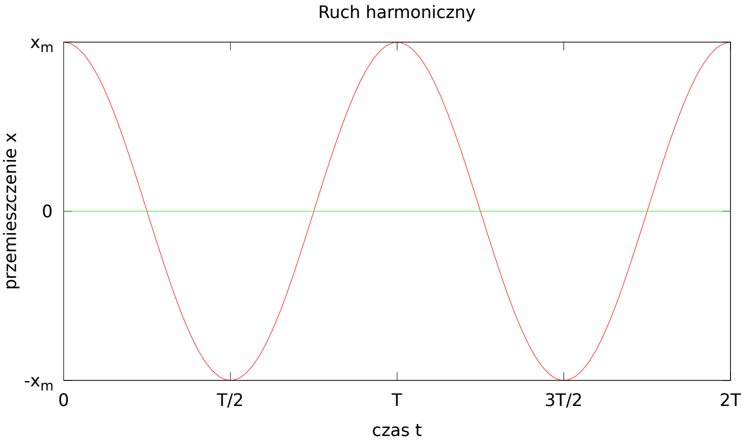
WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2020

Drgania

- Drgania to ruchy powtarzające się, ciało powraca do tych samych punktów.
- Jeżeli czas powtarzalności ruchu jest stały, to nazywamy go okresem T, a ruch nazywamy okresowym (periodycznym).
- Odwrotność okresu nazywamy częstotliwością, $f = 1/T$, $[f] = 1/s = 1\text{Hz}$ (herc).
- Przykłady ruchów drgających: kołysząca się łódź, wahający się żyrandol, ruch ciężarka zawieszonego na sprężynie.
- Drgania występujące w realnym świecie zwykle są tłumione i ruch stopniowo zanika.

Ruch harmoniczny



Ruch harmoniczny

- Ruch harmoniczny jest to ruch okresowy opisany równaniem

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi_0), \tag{1}$$

gdzie x_m to amplituda drgań (zawsze dodatnia), $\omega = 2\pi/T$ częstość (kołowa), ϕ_0 faza początkowa.

- Wyrażenie $(\omega t + \phi_0)$ jest fazą ruchu harmonicznego.
- Położenie $x(t)$ zmienia się w przedziale od $-x_m$ do x_m.
- Czasem ruch harmoniczny opisuje się równaniem

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi_1), \tag{2}$$

ale oznacza to tylko zmianę $\phi_1 = \phi_0 + \pi/2$.

Prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym

- Zauważmy, że $x(t + nT) = x(t)$, n liczba całkowita.
- Prędkość w ruchu harmonicznym

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi_0). \tag{3}$$

- Przyspieszenie w ruchu harmonicznym

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x. \tag{4}$$

- Związek ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu: ruch harmoniczny jest ruchem rzutu punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu na średnicę okręgu, po którym ten ruch się odbywa.

Oscylatory

- Ciała lub układy wykonujące drgania noszą nazwę oscylatorów. Rozróżniamy oscylatory mechaniczne, elektryczne, atomowe i jądrowe, które różnią się rodzajem drgającej wielkości fizycznej i zakresem częstości drgań.
- Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione następujące warunki:
  (a) istnieje położenie równowagi i przywracająca je siła zwrotna;
  (b) układ ma bezwładność;
  (c) opory ruchu nie są zbyt duże.

Drgania sprężyste

- Rozważmy klocek poruszający się bez tarcia po poziomej powierzchni, który przymocowano do poziomej sprężyny.
- Z drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$-kx = ma, \quad a = -\frac{k}{m}x. \tag{5}$$

- Z porównania ze związkiem kinematycznym dostajemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{6}$$

- Mamy tu przykład oscylatora mechanicznego.

Energia w ruchu harmonicznym

- Z zasady zachowania energii mechanicznej wiemy, że całkowita energia oscylatora pozostaje stała, ale występuje zamiana energii kinetycznej w potencjalną i z powrotem.
- Energia potencjalna oscylatora

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 cos^2(\omega t + \phi_0). \tag{7}$$

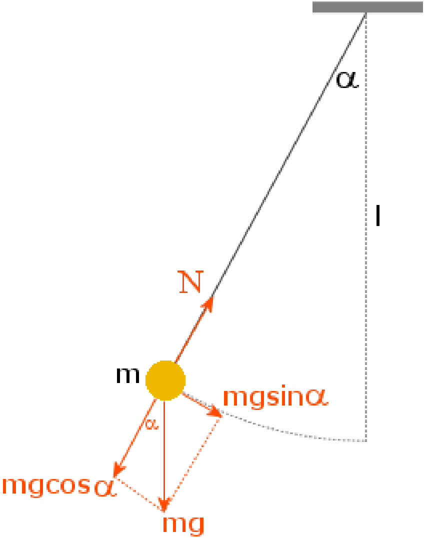
- Energia kinetyczna oscylatora

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 sin^2(\omega t + \phi_0). \tag{8}$$

- Energia całkowita ($k = \omega^2 m$)

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}kx_m^2. \tag{9}$$

Wahadło matematyczne



Wahadło matematyczne

- Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny zawieszony na długiej, nierozciągliwej nitce.
- Masa punktu wynosi m, długośc nitki d.
- Siłę ciężkości mg działającą na punkt materialny rozkładamy na dwie składowe - równoległą i prostopadłą do nitki.
- Składowa równoległa $mg \cos \alpha$ jest równoważona przez siłę naciągu nitki N.
- Składowa prostopadła $mg \sin \alpha$ jest bezpośrednią przyczyną drgań wahadła. Moment siły wynosi $M = -mgd \sin \alpha$.

Wahadło matematyczne

- Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy $M = I\epsilon$, gdzie $I = md^2$ jest momentem bezwładności punktu materialnego względem punktu zawieszenia nitki.
- Jeżeli amplituda drgań jest mała, to możemy przybliżyć $\sin\alpha \approx \alpha$. Dostajemy równanie

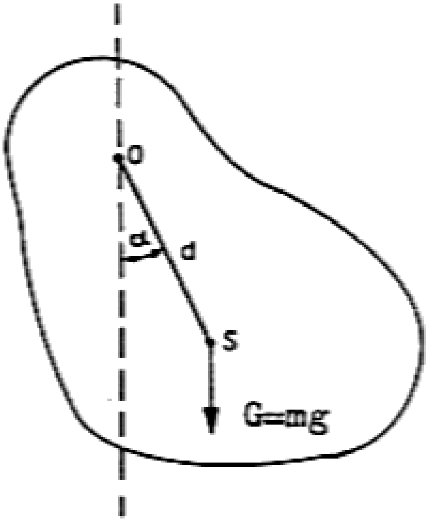
$$-mgd\alpha = md^2\epsilon, \quad \epsilon = -\frac{g}{d}\alpha. \tag{10}$$

- Z porównania ze związkiem kinematycznym dostajemy

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}. \tag{11}$$

- Jeżeli amplituda drgań jest duża, to mamy doczynienia z wahadłem anharmonicznym, dla którego okres zależy od amplitudy.

Wahadło fizyczne



Wahadło fizyczne

- Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną wahającą się wokół osi obrotu nie przechodzącej przez jej środek masy.
- Masa bryły wynosi m, moment bezwładności względem osi obrotu I. Środek masy bryły znajduje się w odległości d od osi obrotu.
- Podobnie jak dla wahadła matematycznego zapisujemy równanie ruchu w przybliżeniu małych drgań

$$-mgd\alpha = I\epsilon, \quad \epsilon = -\frac{mgd}{I}\alpha. \tag{12}$$

- Z porównania ze związkiem kinematycznym dostajemy

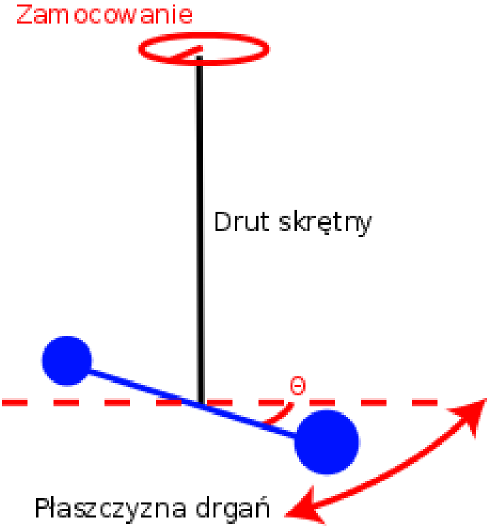
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{13}$$

Pomiar przyspieszenia ziemskiego

- Wahadło fizyczne może być wykorzystane do pomiaru przyspiesznie ziemskiego.
- Rozważmy jednorodny pręt o masie m i długości h zawieszony na jednym końcu.
- Moment bezwładności pręta względem jego końca wynosi $I = mh^2/3$, a odległość środka masy od osi obrotu $d = h/2$.
- Ze wzoru na okres drgań otrzymujemy

$$g = \frac{4\pi^2 I}{mdT^2} = \frac{8\pi^2 h}{3T^2}. \tag{14}$$

Wahadło torsyjne



Wahadło torsyjne

- Wahadłem torsyjnym nazywamy bryłę sztywną (okrągła tarcza, krzyżak, itp.) zawieszoną na pręcie, którego drugi koniec jest nieruchomy. Skręcenie wahadła o kąt α powoduje powstanie momentu siły dążącego do przywrócenia bryły do położenia równowagi.
- Moment siły jest proporcjonalny do wartości kąta (prawo Hooke'a) $M = -D\alpha$, gdzie D nazywamy momentem kierującym. Wartość D zależy od rozmiaru pręta i rodzaju materiału.
- Równanie ruchu ma postać

$$-D\alpha = I\epsilon, \quad \epsilon = -\frac{D}{I}\alpha. \tag{15}$$

- Z porównania ze związkiem kinematycznym dostajemy

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{16}$$

Ruch harmoniczny tłumiony

- Układ drgający, który oddziaływuje ze swym otoczeniem zwykle traci energię i zmniejsza amplitudę drgań. Zwykle przyczyną zanikania drgań jest tarcie.
- Rozważmy oscylator harmoniczny z siłą oporu proporcjonalną do prędkości $F_t = -bv$.
- Równanie ruchu układu ma postać

$$-bv - kx = ma, \tag{17}$$

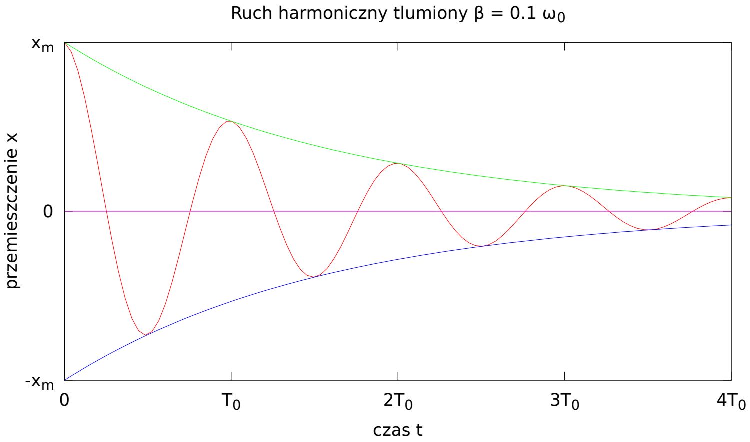
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{18}$$

- Oznaczamy $\omega_0^2 = k/m$ (częstość drgań własnych/swobodnych), $2\beta = b/m$ (współczynnik tłumienia).

Ruch harmoniczny tłumiony

- Rozwiązanie równania dla małego tłumienia ($\omega_0^2 > \beta^2$) ma postać
$$x(t) = x_m \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \phi_0), \tag{19}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{20}$$
- Wyraz $x_m \exp(-\beta t)$ interpretujemy jako amplitudę malejącą z czasem.

Ruch harmoniczny tłumiony



Drgania wymuszone

- Jeżeli chcemy utrzymać stałość amplitudy drgań układu tłumionego, to musimy do tego układu doprowadzić systematycznie tę ilość energii, którą układ traci w wyniku tłumienia.
- Siła wymuszająca $F_w = F_0 \cos(\Omega t)$, gdzie F_0 amplituda, Ω częstość siły wymuszającej.
- Równanie ruchu układu ma postać

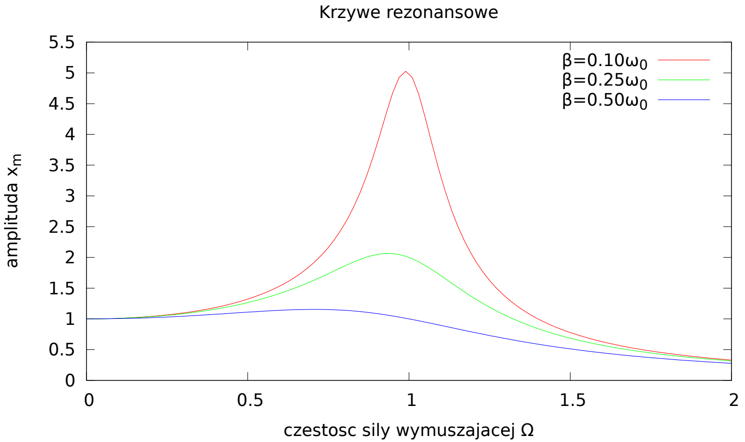
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\Omega t). \tag{21}$$

- Ustalone drgania wymuszone mają postać

$$x(t) = x_m(\Omega) \cos[\Omega t + \phi_0(\Omega)], \tag{22}$$

$$x_m(\Omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \tag{23}$$

Krzywe rezonansowe



Rezonans

- Rezonansem nazywamy zjawisko silnego wzrostu amplitudy drgań układu drgającego dla określonych częstości siły wymuszającej.
- Maksymalną wartość amplitudy $x_m(\Omega)$ otrzymamy dla

$$\Omega = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \tag{24}$$

$$x_m(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{25}$$

- Dla małego tłumienia $\Omega_r \approx \omega_0$.

Rezonans

- Ze wzrostem tłumienia można zaobserwować, że:
  (a) Ω_r maleje,
  (b) amplituda $x_m(\Omega_r)$ maleje,
  (c) szerokość krzywej rezonansowej rośnie.
- Szerokość połówkowa krzywej rezonansowej (szerokość krzywej w połowie wysokości) wynosi w przybliżeniu $\Delta\Omega = 2\sqrt{3}\beta$.
- Wszystkie konstrukcje mechaniczne mają jedną lub więcej częstości własnych. Jeżeli na tę konstrukcję działa duża siła zewnętrzna zmieniająca się z częstością bliską częstości własnej, to powstające drgania mogą zniszczyć konstrukcję.

Ruch falowy

- Przedstawione do tej pory ruchy mechaniczne charakteryzowały się tym, że w miarę upływu czasu przemieszczały się ciała obdarzone masą. Następował transport masy, a z tym związany był transport energii.
- W ruchu falowym transport energii nie jest związany z transportem masy. Przemieszcza się zaburzenie ośrodka, a nie masa.
- Przykłady fal mechanicznych: falowanie powierzchni wody po wrzuceniu kamienia, przenoszenie odkształcenia sprężystego wzdłuż sprężyny, fala nadciśnienia po wybuchu bomby.

Ruch falowy

- Przykłady zaburzeń pól: fale pola elektromagnetycznego (nie potrzebują ośrodka!), fale polaryzacji elektrycznej lub magnetycznej, fale grawitacyjne (postulowane przez Ogólną Teorię Względności).
- W fizyce występują również fale materii (fale de Broglie'a), które są alternatywnym do klasycznego (czyli korpuskularnego) sposobem opisu obiektów materialnych. Według hipotezy de Broglie'a dualizmu korpuskularno-falowego każdy obiekt materialny może być opisywany na dwa sposoby: jako zbiór cząstek albo jako fala.

Fale mechaniczne

- Fale mechaniczne mogą się rozchodzić w takim ośrodku, który charakteryzuje się określonym rodzajem sprężystości.
- Fala poprzeczna jest to fala, w której kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali. Przykład: fala wzdłuż naciągniętej liny, fala elektromagnetyczna.
- Fale mechaniczne poprzeczne mogą powstawać tylko w takich ośrodkach, które charakteryzują się sprężystością postaciową (ciała stałe).

Fale mechaniczne

- Fala podłużna jest to fala, w której drgania odbywają się w kierunku zgodnym z kierunkiem jej rozchodzenia się. Przykład: fala dźwiękowa, fala w zwojach sprężyny.
- Fale mechaniczne podłużne mogą powstawać w ośrodkach o sprężystości objętościowej (płyny) lub o sprężystości postaciowej.
- Prędkością fali nazywamy prędkość, z jaką rozchodzi się w przestrzeni zaburzenie ośrodka.

Parametry fali

- Rozważmy falę sinusoidalną poprzeczną, rozchodzącą się w dodatnim kierunku x. Przemieszczenie y dane jest wzorem

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \tag{26}$$

  y_m to amplituda fali, argument $(kx - \omega t)$ to faza fali, k to liczba falowa, ω to częstość (kołowa) fali.
- Powierzchnią falową nazywamy powierzchnię utworzoną z punktów ośrodka, znajdujących się w tej samej fazie drgania.
- Długością fali λ nazywamy najkrótszą odległość między dwoma powierzchniami falowymi różniącymi się fazą o 2π. Daje to związek $k\lambda = 2\pi$.

Parametry fali

- Okres T fali to czas, w którym dany punkt ośrodka wykona jedno pełne drganie. Daje to związek $\omega T = 2\pi$.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{27}$$

- Po czasie Δt powierzchnia falowa (punkt o ustalonej fazie) przesunie się o Δx.

$$k\Delta x - \omega\Delta t = 0. \tag{28}$$

- Możemy zapisać prędkość fali jako

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{29}$$

Prędkość fali

- Dla struny lub napiętej liny prędkość fali poprzecznej określona jest wzorem

$$v = \sqrt{\frac{N}{\mu}}, \tag{30}$$

gdzie N to siła naciągu liny, μ to gęstość liniowa liny.

- Prędkość fal podłużnych w ciałach stałych wynosi

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{31}$$

gdzie E to moduł Younga, ρ to gęstość materiału.

Zasada superpozycji fal

- Rozważmy dwie fale biegnące jednocześnie wzdłuż tej samej napiętej liny. Przemieszczenia liny wywołane przez każdą z fal osobno wynoszą $y_1(x, t)$ i $y_2(x, t)$.
- Zasada superpozycji mówi, że wypadkowe wychylenie ośrodka jest sumą algebraiczną

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \tag{32}$$

- Warunkiem stosowania tej zasady jest ograniczenie zaburzeń ośrodka do zakresu sprężystości tego ośrodka (fale mechaniczne) i do zakresu zjawisk liniowych (fale elektromagnetyczne).

Interferencja fal

- Rozważmy dwie fale biegnące jednocześnie wzdłuż tej samej napiętej liny, opisane wzorami

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \tag{33}$$

- Z zasady superpozycji dostajemy falę wypadkową

$$y(x,t) = [2y_m \cos(\phi/2)] \sin(kx - \omega t + \phi/2). \tag{34}$$

- Interferencją nazywamy zjawisko powstawania nowego, przestrzennego rozkładu amplitudy fali w wyniku nakładania się fal.
- Interferencja w naszym układzie może być konstruktywna ($\phi = 0$) lub destruktywna ($\phi = \pi$).

Fala stojąca

- Rozważmy dwie fale biegnące jednocześnie wzdłuż tej samej napiętej liny w przeciwnych kierunkach

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t), \quad y_2 = y_m \sin(kx + \omega t). \tag{35}$$

- Z zasady superpozycji dostajemy falę wypadkową

$$y(x,t) = [2y_m \sin(kx)] \cos(\omega t). \tag{36}$$

- Wyraz $2y_m \sin(kx)$ interpretujemy jako amplitudę drgań w punkcie x, która zmienia się wraz z położeniem (fala stojąca).
- Amplituda zerowa występuje dla $kx = n\pi$ (węzły).
- Maksymalna amplituda występuje w punktach $kx = (n + 1/2)\pi$ (strzałki), n całkowite.

Odbicie od granicy

- Rozważmy impuls biegnący po linie z prawa na lewo, $y_1 = f_1(kx + \omega t)$. Rozważymy dwa sposoby odbicia impulsu od granicy położonej w $x = 0$. Po odbiciu w obszarze $x > 0$ pojawia się fala odbita $y_2 = f_2(kx - \omega t)$.
- Odbicie twarde. Dla $x = 0$ wymagamy $y_1 + y_2 = 0$ (sztywne mocowanie), $f_1(\omega t) + f_2(-\omega t) = 0$, $f_2(\xi) = -f_1(-\xi)$. Jeżeli $f_1(\xi) = y_m \sin(\xi)$, to $y_2 = -y_m \sin(-kx + \omega t) = y_m \sin(-kx + \omega t + \pi)$. Następuje zmiana fazy o π.
- Odbicie miękkie. Dla $x = 0$ wymagamy $y_1 = y_2$, $f_1(\omega t) = f_2(-\omega t)$, $f_2(\xi) = f_1(-\xi)$. Jeżeli $f_1(\xi) = y_m \sin(\xi)$, to $y_2 = y_m \sin(-kx + \omega t)$.

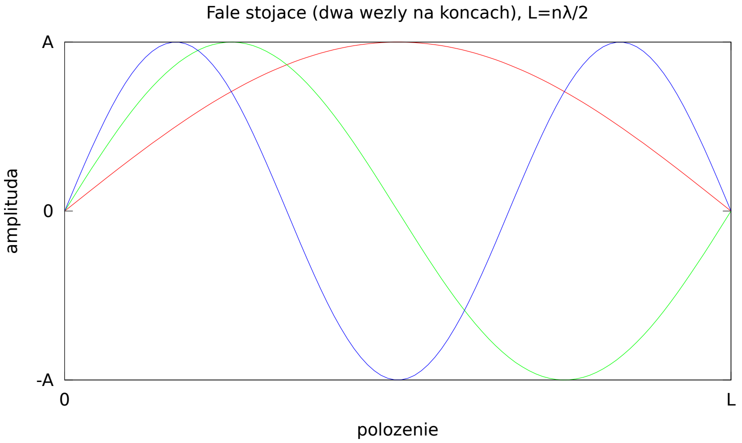
Fala stojąca i rezonans

- Rozważmy strunę (jak w gitarze) rozpiętą między dwoma zaciskami. Załóżmy, że wytwarzamy ciągłą falę sinusoidalną o pewnej częstości biegnącą wzdłuż struny w prawo. Fala odbije się od prawego końca i zacznie biec w lewo, interferując z pierwotną falą.
- Przy pewnych częstościach w strunie powstanie fala stojąca, nastąpi rezonans.
- Na końcach struny muszą być węzły fali, czyli $n\lambda/2 = L$, gdzie L to długość struny.
- Częstotliwości rezonansowe odpowiadające tym długościom fali wynoszą

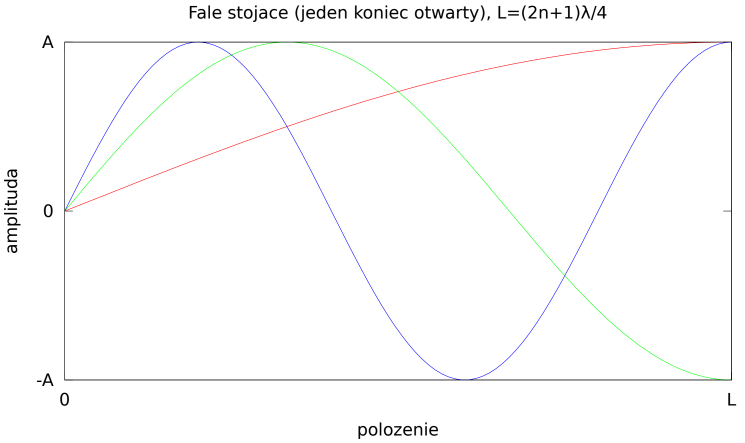
$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{37}$$

gdzie v jest prędkością fali biegnącej w strunie.

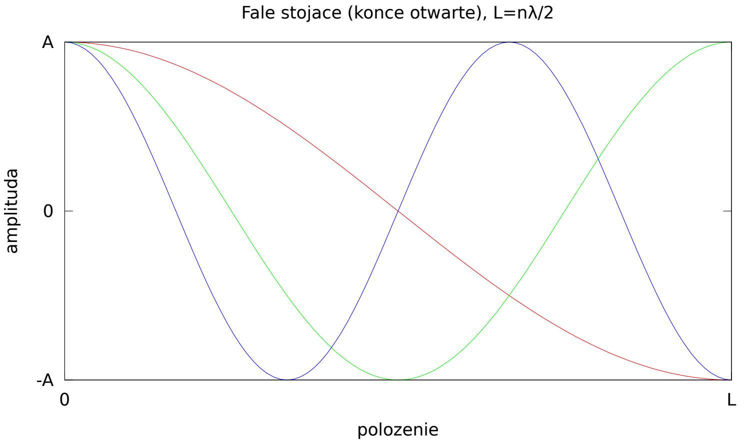
Fala stojąca w rurze



Fala stojąca w rurze



Fala stojąca w rurze



Dudnienia

- Rozważmy dwie fale akustyczne biegnące jednocześnie wzdłuż tego samego kierunku. W pewnym punkcie przemieszczenia są opisane wzorami ($\omega_1 > \omega_2$)

$$s_1 = s_m \cos(\omega_1 t), \quad s_2 = s_m \cos(\omega_2 t). \tag{38}$$

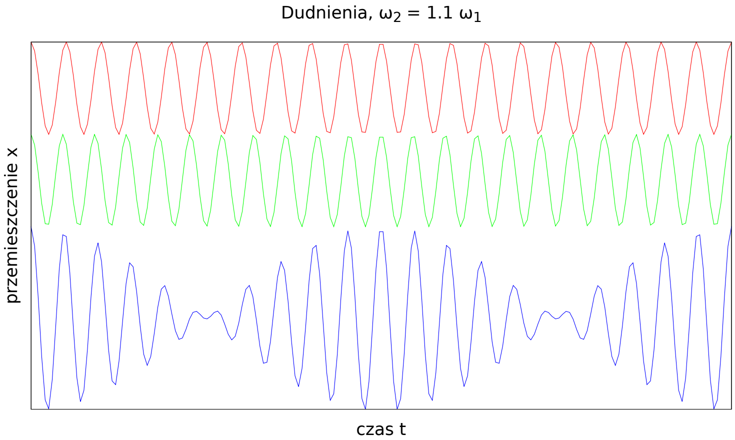
- Z zasady superpozycji dostajemy falę wypadkową

$$s = 2 s_m \cos[(\omega_1 - \omega_2) t/2] \cos[(\omega_1 + \omega_2) t/2]. \tag{39}$$

- Wyraz $2 s_m \cos[(\omega_1 - \omega_2) t/2]$ interpretujemy jako wolno zmienną amplitudę. Częstość zmian amplitudy wynosi $(\omega_1 - \omega_2)/2$, ale dla fali akustycznej bardziej liczy się częstość pojawiania maksymalnej amplitudy ($2 s_m$ i $-2 s_m$). Dlatego częstość dudnień określamy wzorem

$$\omega_d = \omega_1 - \omega_2. \tag{40}$$

Dudnienia



Zjawisko Dopplera

- Zjawisko Dopplera polega na względnej zmianie częstotliwości fali odbieranej przez przyrząd rejestrujący, w stosunku do częstotliwości fali wysyłanej ze źródła, gdy źródło i przyrząd poruszają się względem siebie.
- Jeżeli f_1 to częstotliwość emitowana, f_2 częstotliwość odbierana, v prędkość dźwięku w ośrodku, v_d prędkość detektora względem ośrodka, v_s prędkość źródła względem ośrodka, to mamy zależność
$$f_2 = \left(\frac{v + v_d}{v - v_s}\right) f_1 . \tag{41}$$
- Prędkości v_d i v_s uważamy za dodatnie, gdy źródło i detektor zbliżają się do siebie.