Pole grawitacyjne

5/15

Andrzej Kapanowski
http://users.uj.edu.pl/~ufkapano/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2020

Wprowadzenie

- Oddziaływanie grawitacyjne jest jednym z czterech podstawowych oddziaływań w przyrodzie. Wszystkie ciała obdarzone masą oddziaływują grawitacyjnie.
- Siły związane z tym oddziaływaniem nazywamy siłami ciążenia lub siłami grawitacji.
- Przejawy sił grawitacji: ruchy planet, galaktyk we Wszechświecie; przypływy i odpływy oceanów (wpływ Księżyca); czarne dziury (Nobel 2020).

Prawo grawitacji

Prawo powszechnego ciążenia (Newton 1687)

Między dwoma punktami materialnymi działa siła wzajemnego przyciągania wprost proporcjonalna do iloczynu mas tych punktów i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

$$F_g = G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}, \tag{1}$$

gdzie $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ jest stałą grawitacji.

W zapisie wektorowym

$$\vec{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}. \tag{2}$$

Zasada superpozycji

- Rozważmy zbiór punktów materialnych. Szukamy wypadkowej siły grawitacji działającej na wybrany punkt materiany z tego zbioru.
- Zasada superpozycji mówi ogólnie, że łączne działanie pewnego czynnika jest sumą przyczynków od poszczególnych jego źródeł. W przypadku sił grawitacji należy znaleźć sumę wektorową sił grawitacji z jakimi działają pozostałe punkty materialne na wybrany punkt materialny.

Zasada superpozycji

- Można udowodnić, że ciało w kształcie jednorodnej powłoki kulistej przyciąga punkt materialny znajdujący się na zewnątrz powłoki tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w jej środku. Jeżeli punkt materialny znajduje się wewnątrz powłoki, to siły grawitacyjne działające na ten punkt równoważą się.
- Jeżeli dwa ciała mają kształt kulisty, a ich gęstości są stałe lub zależą tylko od odległości od środków tych ciał, to wzór na prawo powszechnego ciążenia pozostaje słuszny.

Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie M_z i promieniu R_z. Z prawa grawitacji wynika, że Ziemia przyciąga ciało o masie m znajdujące się przy jej powierzchni siłą

$$F_g = G\frac{mM_z}{R_z^2}. \tag{3}$$

- Z drugiej zasady dynamiki Newtona wiemy, że $F_g = mg$ ($g = 9.8m/s^2$). Z porównania obu wzorów dostajemy

$$g = G\frac{M_z}{R_z^2}. \tag{4}$$

- Należy zauważyć, że m w prawie grawitacji, to masa grawitacyjna (ciężka), a m w drugiej zasadzie dynamiki to masa bezwładna. Wszystkie znane doświadczenia potwierdzają równość obu mas.

Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- Oszacowanie masy Ziemi, $R_z = 6.37 \cdot 10^6 m$ (por. pomiar Eratostenesa ok. roku 230 p.n.e.),

$$M_z = \frac{gR_z^2}{G} = 5.98 \cdot 10^{24} kg. \tag{5}$$

- Oszacowanie średniej gęstości Ziemi,

$$\rho_z = \frac{M_z}{V_z} = \frac{M_z}{(4/3)\pi R_z^3} = 5.52 \cdot 10^3 kg/m^3. \tag{6}$$

Przeciętna gęstość minerałów tworzących skorupę ziemską wynosi $2.83 \cdot 10^3 kg/m^3$. Wnioskujemy, że najcięższe minerały skupione są w pobliżu środka Ziemi. Ziemia nie jest jednorodna.

Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- Ziemia nie jest kulista. Promień Ziemi na równiku jest o 21 km większy od jej promienia na biegunie. Wniosek: ciążenie ziemskie zależy od szerokości geograficznej.
- Ziemia obraca się. Okres obrotu Ziemi wokół jej osi wynosi $T_z = 24h$. Przyspieszenie dośrodkowe na równiku wynosi

$$a_n = \omega^2 R_z = (2\pi/T_z)^2 R_z = 0.034 m/s^2. \tag{7}$$

  W układzie nieinercjalnym związanym z powierzchnią Ziemi siła grawitacyjna działająca na ciało jest pomniejszana o wartość ma_n.
- Uwaga: $v = \omega R_z = 463 m/s = 1668 km/h$.

Grawitacja wewnątrz Ziemi

- Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie M_z i promieniu R_z. Szukamy wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na punkt materialny o masie m położony w odległości r od środka Ziemi, przy czym $0 < r < R_z$.
- Z prawa grawitacji wnioskujemy, że na punkt materialny wpływa tylko masa zawarta w kuli o promieniu r,

$$M(r) = (4/3)\pi r^3 \rho_z = M_z(r/R_z)^3, \tag{8}$$

$$F_g(r) = -G\frac{M(r)m}{r^2} = -\frac{GM_z mr}{R_z^3}. \tag{9}$$

W rzeczywistości Ziemia nie jest jednorodna i przy przemieszczaniu punktu materialnego od powierzchni do środka Ziemi siła działająca na punkt początkowo rośnie, osiąga maksimum na pewnej głębokości, a dopiero potem maleje.

Energia potencjalna grawitacyjna

- Siły grawitacyjne są siłami zachowawczymi. Siła grawitacyjna działająca pomiędzy masami m i M, znajdującymi się w odległości r, wynosi

$$F_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}. \tag{10}$$

- Obliczamy pracę wykonaną przeciwko sile grawitacyjnej, przy przemieszczaniu masy m,

$$W = -\int_{r_1}^{r_2} F_g(r)dr = GMm\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1}. \tag{11}$$

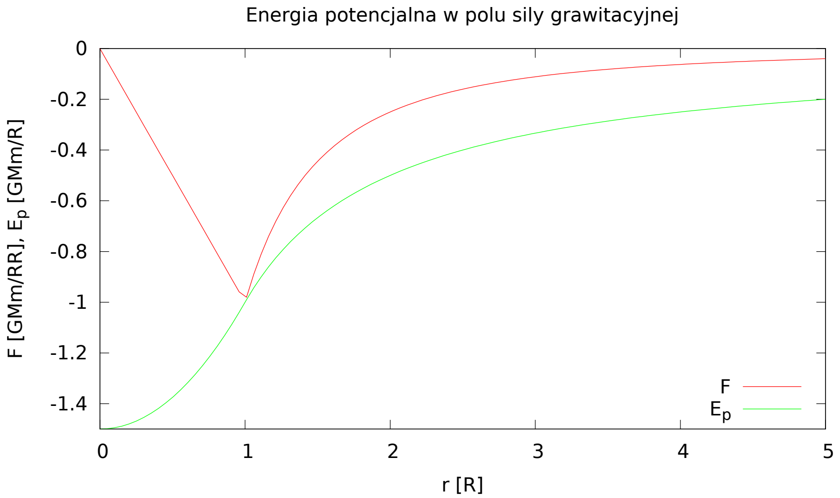
- Oznaczmy $E_p(r) = -GMm/r$, $W = E_p(r_2) - E_p(r_1)$.

Energia potencjalna grawitacyjna

- Przy definicji E_p zastosowaliśmy konwencję, że energia potencjalna grawitacyjna wynosi zero tam, gdzie znikają siły grawitacyjne ($r = \infty$).
- Znajomość energii potencjalnej pozwala znaleźć siłę zachowawczą

$$F_g(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \qquad (12)$$

Energia potencjalna grawitacyjna



Prędkość ucieczki

- Prędkość ucieczki (druga prędkość kosmiczna v_{II}) ciała niebieskiego jest to minimalna pozioma prędkość początkowa (startowa) jaką musi mieć obiekt, aby mógł opuścić pole grawitacyjne danego ciała niebieskiego.
- Z zasady zachowania energii mechanicznej mamy

$$0 = E_k + E_p(R) = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R}, \tag{13}$$

$$v_{II} = \sqrt{2GM/R}. \tag{14}$$

- Przykładowe wartości drugiej prędkości kosmicznej: dla Ziemi $11.2 km/s$, dla Księżyca Ziemi $2.38 km/s$, dla Słońca $618 km/s$.

Prędkość ucieczki

- Planety obracają się wokół własnej osi, co można wykorzystać do zmniejszenia prędkości startowej rakiety, jeżeli rakieta będzie wystrzeliwana z obszarów okołorównikowych. Z tego powodu wszystkie kosmodromy na Ziemi lokowane są na małych szerokościach geograficznych. Europa leży daleko od równika, dlatego Europejska Agencja Kosmiczna (ESA) wystrzeliwuje swoje rakiety z terytorium Gujany Francuskiej.
- W praktyce prędkość startowa rakiety powinna być większa niż prędkość ucieczki lub powinno się dostarczać dodatkową energię w trakcie ruchu pozwalającą na pokonanie oporów materii.
- Polska przystąpiła do ESA w 2012 roku.

Promień Schwarzschilda

- W klasycznej teorii grawitacji możemy rozważyć obiekt w takiej odległości od ciała niebieskiego, że prędkość ucieczki będzie równa prędkości światła $v_{II} = c$. Tak określona odległość nazywa się promieniem Schwarzschilda

$$r_{schw} = \frac{2GM}{c^2}. \tag{15}$$

- Przykładowe wartości r_{schw}: dla Ziemi $9mm$, dla Słońca $3km$.
- Promień Schwarzschilda wiąże się z takimi pojęciami z Ogólnej Teorii Względności, jak horyzont zdarzeń, kolaps grawitacyjny masywnej gwiazdy, zakrzywienie czasoprzestrzeni, czarna dziura, itp.

Pierwsza prędkość kosmiczna

- Pierwsza prędkość kosmiczna to najmniejsza pozioma prędkość, jaką należy nadać ciału względem przyciągającego je ciała niebieskiego, aby ciało to poruszało się po zamkniętej orbicie.
- Dla ciała niebieskiego o kształcie kuli, orbita będzie orbitą kołową o promieniu równym promieniowi planety.
- Podczas ruchu orbitalnego po orbicie kołowej siła grawitacji stanowi siłę dośrodkową, czyli

$$\frac{mv_I^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}, \quad v_I = \sqrt{GM/R}. \tag{16}$$

- Przykładowe wartości pierwszej prędkości kosmicznej:
dla Ziemi $7.91 km/s$, dla Księżyca Ziemi $1.68 km/s$,
dla Słońca $437 km/s$.

Prawa Keplera

Pierwsze prawo Keplera

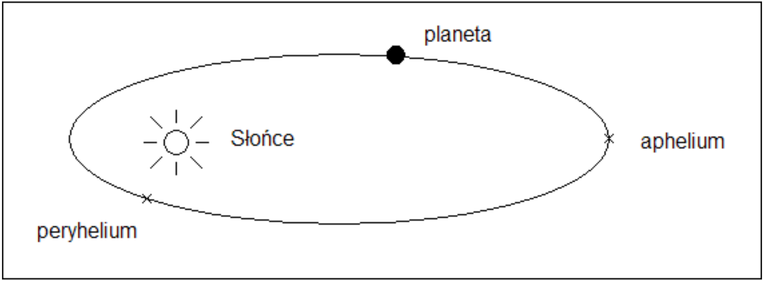
Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie, w której w jednym z ognisk jest Słońce.

W rzeczywistości orbity planet Układu Słonecznego (poza Merkurym) są bardzo bliskie okręgom.
Ogólnie ciała niebieskie poruszają się wokół środka masy układu po torach opisanych równaniem

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \text{ (krzywe stożkowe)}, \tag{17}$$

gdzie p to parametr, a e to mimośród.

Prawa Keplera



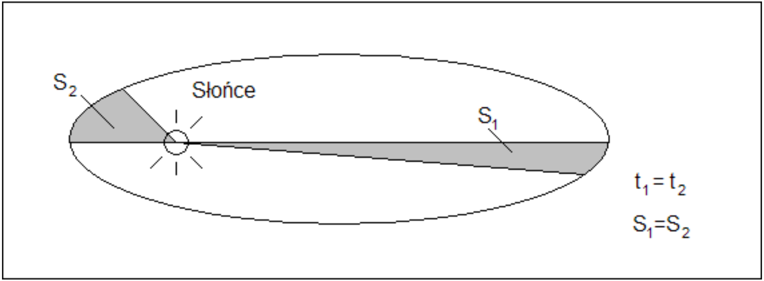
Prawa Keplera

Drugie prawo Keplera

W równych odstępach czasu, promień wodzący planety poprowadzony od Słońca zakreśla równe pola.

Planeta porusza się po orbicie wolniej, gdy jest daleko od Słońca, a szybciej, gdy jest bliżej od niego.
Drugie prawo Keplera jest równoważne zasadzie zachowania momentu pędu.

Prawa Keplera



Prawa Keplera

Trzecie prawo Keplera

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu wielkiej półosi jej orbity (czyli średniej odległości od Słońca) jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

Z drugiej zasady dynamiki dla orbity kołowej mamy

$$\frac{GM_S m}{R^2} = m\omega^2 R, \ \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{18}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \ (M_S \text{ to masa Słońca}). \tag{19}$$

Satelity

- Rozważmy satelitę obiegającego Ziemię po orbicie kołowej. Szukamy jego energii potencjalnej, kinetycznej i całkowitej.
- Z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}. \tag{20}$$

- Energia kinetyczna $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R}$.
- Energia potencjalna grawitacyjna $E_p = -\frac{GMm}{R}$.
- Energia całkowita $E_c = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2R}$.

Pole grawitacyjne

- Zamiast mówić o siłach grawitacyjnych, działających między punktami materialnymi, możemy opisywać oddziaływanie grawitacyjne za pomocą pola grawitacyjnego. Jeżeli oddziaływania zmieniają się w czasie, to jedynie opis polowy jest poprawny.
- Polem grawitacyjnym nazywamy zbiór tych właściwości przestrzeni, które są wywołane umieszczeniem w niej ciała o masie m. Inaczej można powiedzieć, że pole grawitacyjne jest to przestrzeń, w której na umieszczone w niej ciała działają siły grawitacyjne.
- Pole grawitacyjne istnieje obiektywnie, niezależnie od naszej świadomości. Jest ono jedną z form materii. Materia występuje w dwóch postaciach, jako substancja i jako pole.

Natężenie pola grawitacyjnego

- Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego natężenie. Jest to wektor równy stosunkowi siły działającej na masę wprowadzoną do pola, do wartości tej masy.

$$\vec{K}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}. \tag{21}$$

- Jeżeli pole grawitacyjne wytwarza punktowa masa M, to

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}, \quad K_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{r^2}. \tag{22}$$

- Natężenie pola grawitacyjnego ma wymiar przyspieszenia.
- Natężenie pola grawitacyjnego jest zwrócone ku masie, która je wytwarza.

Potencjał pola grawitacyjnego

- Potencjał pola grawitacyjnego jest równy stosunkowi energii potencjalnej ciała w polu grawitacyjnym do jego masy,

$$V_g = \frac{E_p}{m}. \tag{23}$$

- Jeżeli pole grawitacyjne wytwarza punktowa masa M, to

$$E_p = -\frac{GMm}{r}, \quad V_g = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}. \tag{24}$$

- Jeżeli pole grawitacyjne jest wytwarzane przez zbiór mas M_i, to potencjał grawitacyjny w punkcie $\vec{r}$ wynosi

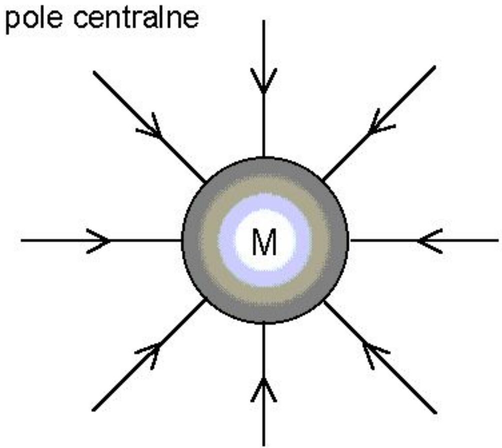
$$V_g(\vec{r}) = -\sum_i \frac{GM_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \tag{25}$$

gdzie $\vec{r}_i$ oznaczają położenia mas M_i względem początku układu współrzędnych.

Linie sił pola

- Dowolne pole można opisać poglądowo za pomocą linii sił pola lub powierzchni ekwipotencjalnych.
- Linie sił pola są to linie wskazujące kierunek wektora natężenia pola, tj. w każdym punkcie pola wektor natężenia jest styczny do linii sił. Zgodnie z konwencją, w obszarze zagęszczenia linii sił wartość natężenia pola jest większa.
- Pole jednorodne o stałym wektorze natężenia pola jest przedstawianie za pomocą zbioru prostych równoległych, równo od siebie oddalonych.

Prezentacja pola



Powierzchnie ekwipotencjalne

- Powierzchnię ekwipotencjalną tworzą punkty o jednakowym potencjale. Zwykle przedstawia się zbiór powierzchni odpowiadającym wartościom potencjału różniącym się o ustaloną wartość. Wtedy bliskość dwóch powierzchni ekwipotencjalnych mówi o dużych zmianach potencjału na jednostkę długości.
- Pole jednorodne o stałym wektorze natężenia pola jest przedstawianie za pomocą zbioru płaszczyzn równoległych, równo od siebie oddalonych.
- Linie sił pola są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.

Energia grawitacyjna

- Energia układu punktów materialnych

$$E_g = -\sum_{i<j} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \tag{26}$$

$$E_g = -\frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_g(\vec{r}_i). \tag{27}$$

- Energia grawitacyjna kuli (energia wiązania) [Januszajtis]

$$E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \tag{28}$$

Energia grawitacyjna

- Gęstość energii pola grawitacyjnego

$$\rho_g(\vec{r}) = -\frac{K_g^2(\vec{r})}{8\pi G}. \tag{29}$$

- Gęstość energii dla kuli

$$\rho_g = -\frac{GM^2 r^2}{8\pi R^6} \text{ dla } 0 < r < R, \tag{30}$$

$$\rho_g = -\frac{GM^2}{8\pi r^4} \text{ dla } r > R. \tag{31}$$

Organizmy żywe w polu grawitacyjnym

- Siła grawitacji określa udział kośćca w budowie organizmów wyższych oraz rozmiary organizmów.
- Organizmy posiadają specjalne narządy równowagi, aby utrzymać się w pionie.
- Organizm żywy reaguje na zmiany działającej siły ciężkości, a więc reaguje na stan przeciążenia i nieważkości. Człowiek w krótkim odcinku czasu (rzędu 10s) znosi przeciążenia dodatnie $6g$ i przeciążenia ujemne $3g$. W stanie nieważkości zaobserwowano u kosmonautów zaburzenia w układzie krążeniu krwi, zaburzenia czynności układu hormonalnego, zanikanie mięśni i inne.