5.03.2025

Matematyka dyskretna, zestaw 0.

0.1. Dane są zbiory $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, a\}$, $D = \{d, e, f\}$, $E = A \times C$ oraz $F = (B \cap E) \cup D$. Zapisz $\mathcal{P}(F)$.

0.2. Wiemy, że dla zbiorów A, B zachodzi $A \setminus B = \emptyset$, $A \cap B = \{\emptyset\}$ oraz $A \cup B = \{\emptyset, a\}$. Na tej podstawie wyznacz $\mathcal{P}(A \times B)$.

0.3. Przypomnij potrzebne definicje, udowodnij formalnie oraz zaprezentuj na rysunkach:

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)\,, \tag{1}$$
$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)\,, \tag{2}$$
$$(A \times C) \backslash (B \times D) = (A \times (C \backslash D)) \cup ((A \backslash B) \times C)\,. \tag{3}$$

0.4. Człowiek posiada cztery grupy krwi: A, B, AB oraz 0. Krew osób z grupy 0 może być podawana każdemu; osób z grup A oraz B osobom z grupy AB oraz, odpowiednio, A bądź B; osób z grupy AB jedynie osobom z tej samej grupy. Zinterpretuj te informacje jako relację binarną i opisz jej własności.

0.5. Podaj konkretny przykład relacji na zbiorze nie złożonym z liczb, która jest:

(a) przechodnia i symetryczna, ale nie zwrotna,

(b) przechodnia i zwrotna, ale nie symetryczna,

(c) zwrotna i symetryczna, ale nie przechodnia.

0.6. Zaproponuj relację równoważności na zbiorze liczb całkowitych $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, taką, że jej zbiór ilorazowy $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}}$ zawiera 5 elementów.

0.7. Na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru liczb całkowitych $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ określono relację $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ taką, że:

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap \{0, 1, 2\} = B \cap \{0, 1, 2\}\,.$$

(a) Pokaż, że jest to relacja równoważności.

(b) Wyznacz klasę abstrakcji zbioru pustego $[\emptyset]_{\mathcal{R}}$.

(c) Znajdź liczbę elementów zbioru ilorazowego $\mathcal{P}(\mathbb{Z})/_{\mathcal{R}}$.

Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski