6.03.2023

Matematyka dyskretna, zestaw 1.

1.1. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ określono relacje równoważności:

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\,, \tag{1}$$

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{S}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2\,, \tag{2}$$

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{T}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2\,. \tag{3}$$

Zapisz klasy abstrakcji tych relacji i ustal, czym każda z nich jest geometrycznie.

1.2. Niech X, Y będą zbiorami skończonymi o tej samej mocy $|X| = |Y|$. Wykaż, że dowolna iniekcja $f : X \hookrightarrow Y$ jest bijekcją. Wskazówka: zastosuj indukcję.

1.3. Pokaż na ile sposobów można

(a) włożyć 10 arkuszy w dowolnej kolejności do co najwyżej 4-ech segregatorów,

(b) utworzyć 10-elementowy ciąg (z powtórzeniami) z co najwyżej 4-ech etykiet.

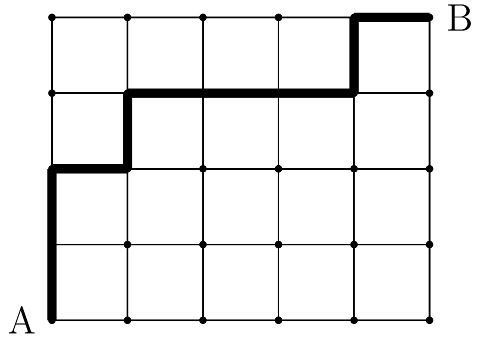
1.4. Udowodnij poniższe tożsamości nie korzystając ze wzorów na współczynniki dwumianowe, tylko zliczając elementy odpowiednich zbiorów na dwa różne sposoby:

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Zinterpretuj je następnie jako własności trójkąta Pascala.

1.5. Na rysunku przedstawiona została przykładowa droga łącząca punkty A i B na siatce o wymiarach 5×4. Ile jest możliwych dróg z A do B przy założeniu, iż wolno się poruszać jedynie w górę lub w prawo? A przy dowolnych wymiarach siatki $n \times m$? Czy i jak można stąd wywnioskować, ile jest niemalejących funkcji $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$?



1.6. Ile jest liczb nie podzielnych przez 2, 3 lub 5 w zbiorze $\{1, \ldots, 100\}$? Należy to obliczyć w efektywny sposób i opisać, z czego się skorzystało.

1.7. W magazynie zgromadzono zapasy 18 substancji, przy czym 10 zaklasyfikowano jako toksyczne, 9 jako żrące, 3 jako toksyczne i żrące, 1 jako toksyczną i łatwopalną, 1 jako żrącą i łatwopalną. Ile substancji przyporządkowano do wszystkich trzech kategorii, a ile tylko do łatwopalnych, zakładając że każda substancja jest przyporządkowana do przynajmniej jednej kategorii?

1.8. Indukcja wydaje się prowadzić do wniosku, że wszyscy ludzie mają ten sam kolor oczu. Mianowicie, zauważmy najpierw, że jeżeli istnieje jeden człowiek, to ma pewien kolor oczu. Załóżmy następnie, że mamy n ludzi, ponumerowanych od 1 do n. Z założenia indukcyjnego wynika, że osoby od 1 do n-1 mają ten sam kolor oczu; podobnie dla osób od 2 do n (obie grupy to n-1-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego). Osoby od 2 do n-1 należą do obu grup, więc wszystkie n osób ma ten sam kolor oczu. Wyjaśnij dokładnie, co jest błędnego w tym dowodzie.

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Jakub Czartowski
Grzegorz Czelusta
Andrzej Kapanowski
Piotr Korcyl
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski