12.03.2025

Matematyka dyskretna, zestaw 1 (zestaw na dwa spotkania).

1.1. Na zbiorze $\mathbb{R}^2$ określono relacje równoważności:

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\,, \tag{1}$$
$$(x_1, y_1)\,\mathcal{S}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2\,, \tag{2}$$
$$(x_1, y_1)\,\mathcal{T}\,(x_2, y_2) \iff x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2\,. \tag{3}$$

Zapisz klasy abstrakcji tych relacji i ustal, czym każda z nich jest geometrycznie.

1.2. Jaś i Małgosia są dwiema spośród 90 osób na obozie. Obozowiczów należy podzielić na równoliczne grupy czerwoną, zieloną i niebieską. Na ile sposobów można dokonać tego podziału tak, by Jaś i Małgosia byli w jednej grupie? Na ile sposobów, jeżeli grupy uznamy za nierozróżnialne?

1.3. Na ile sposób można ułożyć n wież nierozróżnialnych na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie wieże się nie atakowały (nie stały na jednej linii poziomej lub pionowej)?

1.4. Na ile sposobów można do ręki pobrać 7 kart ze standardowej talii 52 kart tak, by w ręce znalazły się:

- dokładnie 3 asy?
- dokładnie 2 króle?
- dokładnie 3 asy lub dokładnie 2 króle?

1.5. Do dyspozycji mamy n kolejno ponumerowanych kartek oraz k kolorów ($n \leqslant k$). Na ile sposobów możemy pokolorować kartki tak, by żadne dwie nie były w tym samym kolorze?

1.6. Windą z parteru, w 10-piętrowym budynku, wyrusza w górę 10 (rozróżnialnych) osób. Na ile sposobów mogą wysiąść tak, by każda osoba wysiadła na innym piętrze?

1.7. Niech X, Y będą zbiorami skończonymi o tej samej mocy $|X| = |Y|$. Wykaż, że dowolna iniekcja $f : X \hookrightarrow Y$ jest bijekcją. Wskazówka: zastosuj indukcję.

1.8. Pokaż na ile sposobów można

(a) włożyć 10 **nierozróżnialnych** arkuszy do co najwyżej 4-ech ponumerowanych segregatorów;

(b) włożyć 10 **ponumerowanych** arkuszy do co najwyżej 4-ech ponumerowanych segregatorów tak, że kolejność wewnątrz segregatora **nie ma** znaczenia;

(c) włożyć 10 **ponumerowanych** arkuszy w do co najwyżej 4-ech ponumerowanych segregatorów tak, że kolejność wewnątrz segregatora **ma** znaczenie;

(d) uogólnij podane wzory na sytuacje gdzie jest n arkuszy oraz k segregatorów.

1.9. Indukcja wydaje się prowadzić do wniosku, że wszyscy ludzie mają ten sam kolor oczu. Mianowicie, zauważmy najpierw, że jeżeli istnieje jeden człowiek, to ma pewien kolor oczu. Załóżmy następnie, że mamy n ludzi, ponumerowanych od 1 do n. Z założenia indukcyjnego wynika, że osoby od 1 do n-1 mają ten sam kolor oczu; podobnie dla osób od 2 do n (obie grupy to n-1-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego). Osoby od 2 do n-1 należą do obu grup, więc wszystkie n osób ma ten sam kolor oczu. Wyjaśnij dokładnie, co jest błędnego w tym dowodzie.

1.10. Mamy do dyspozycji 3 identyczne sześcienne (standardowe) kości do gry. Na ile sposobów możemy ułożyć kości, uznając je za nierozróżnialne, aby dały sumę 11? Na ile sposobów by dały sumę 12? Jak sytuacja się zmienia, gdy kości uznamy za rozróżnialne? Ile jest różnych układów kości?

1.11. Ile jest liczb nie podzielnych przez 2, 3 lub 5 w zbiorze $\{1, \ldots, 100\}$? Należy to obliczyć w efektywny sposób i opisać, z czego się skorzystało.

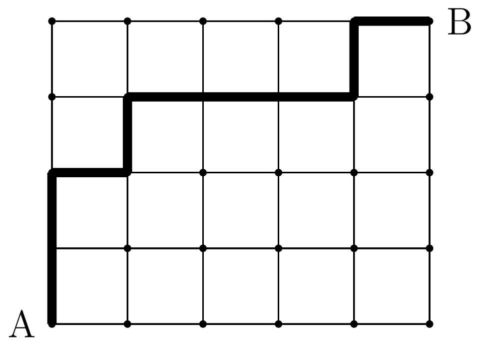
1.12. W magazynie zgromadzono zapasy 18 substancji, przy czym 10 zaklasyfikowano jako toksyczne, 9 jako żrące, 3 jako toksyczne i żrące, 1 jako toksyczną i łatwopalną, 1 jako żrącą i łatwopalną. Ile substancji przyporządkowano do wszystkich trzech kategorii, a ile tylko do łatwopalnych, zakładając że każda substancja jest przyporządkowana do przynajmniej jednej kategorii?

1.13. Udowodnij poniższe tożsamości nie korzystając ze wzorów na współczynniki dwumianowe, tylko zliczając elementy odpowiednich zbiorów na dwa różne sposoby:

(a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$,
(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Zinterpretuj je następnie jako własności trójkąta Pascala.

1.14. Na rysunku przedstawiona została przykładowa droga łącząca punkty A i B na siatce o wymiarach 5×4. Ile jest możliwych dróg z A do B przy założeniu, iż wolno się poruszać jedynie w górę lub w prawo? A przy dowolnych wymiarach siatki $n \times m$? Czy i jak można stąd wywnioskować, ile jest niemalejących funkcji $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$?



Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski