

Matematyka dyskretna, zestaw 6.

- 6.1. Ciąg τ_n opisuje średnią liczbę porównań potrzebnych do posortowania n losowych elementów przy użyciu „sortowania szybkiego” (quicksort):

$$\begin{cases} \tau_0 = 0, \\ \tau_n = 1 + n + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Przekształć relację rekurencyjną do prostszej postaci, a następnie zastosuj metodę czynnika sumacyjnego, aby znaleźć jawny wzór na τ_n .

- 6.2. Wiedząc że funkcja tworząca ciągu $a_n = 1$ ma postać

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

znajdź funkcje tworzące następujących ciągów:

- $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$,
- $b_n = n$,
- $c_n = n^2 + n$.

- 6.3. Niech a_n oznacza liczbę sposobów zapłacenia za zakupy o wartości n zł, jeżeli dysponujemy nieograniczoną liczbą monet o nominałach 1, 2 i 5 zł. Wyznacz funkcję tworzącą ciąg a_n .
- 6.4. Liczby Catalana C_n pojawiają się w wielu zagadnieniach kombinatorycznych (dotyczących zliczania m.in. drzew binarnych, rozmieszczeń nawiasów, monotonicznych dróg, czy podziałów uporządkowanego zbioru). Spełniają one następujące równanie rekurencyjne:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \quad C_0 = 1.$$

Wyprowadź ich funkcję tworzącą. Wskazówka: można w tym celu zmienić kolejność podwójnego sumowania. Nadobowiązkowo: korzystając z funkcji tworzącej, znajdź postać zwartą C_n .

- 6.5. Oblicz wartości sum

$$\frac{1}{136} \sum_{j=2}^{13} \sum_{k^2-6k+8=0} k H_k, \tag{1}$$

$$-2 + \sum_{0 < j+1 \leq k \leq 4} k^j. \tag{2}$$

- 6.6. Odwracając kolejność podwójnego sumowania i dokonując dalszych przekształceń, znajdź postać zwartą sumy

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^k k.$$

Pojedynczą sumą jakich wyrazów jest ona?

- 6.7. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^n k^3, \quad \text{zaburzając} \quad \sum_{k=0}^n k^4.$$

Wynik sumy n wyrazów k^2 można potraktować jako znany.

- 6.8. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^n H_k, \quad \text{zaburzając} \quad \sum_{k=0}^n k H_k.$$

Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski