

# Pole grawitacyjne

5/15

Andrzej Kapanowski  
*<http://users.uj.edu.pl/~ufkapano/>*

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2019

- Oddziaływanie grawitacyjne jest jednym z czterech podstawowych oddziaływań w przyrodzie. Wszystkie ciała obdarzone masą oddziałują grawitacyjnie.
- Siły związane z tym oddziaływaniem nazywamy **siłami ciężenia** lub **siłami grawitacji**.
- Przejawy sił grawitacji: ruchy planet, galaktyk we Wszechświecie; przyływy i odpływy oceanów (wpływ Księżyca); czarne dziury.

## Prawo powszechnego ciążenia (Newton 1687)

Między dwoma punktami materialnymi działa siła wzajemnego przyciągania wprost proporcjonalna do iloczynu mas tych punktów i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

$$F_g = G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}, \quad (1)$$

gdzie  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$  jest stałą grawitacji.

W zapisie wektorowym

$$\vec{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{r_{AB}^2} \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}. \quad (2)$$

# Zasada superpozycji

- Rozważmy zbiór punktów materialnych. Szukamy wypadkowej siły grawitacji działającej na wybrany punkt materialny z tego zbioru.
- **Zasada superpozycji** mówi ogólnie, że łączne działanie pewnego czynnika jest sumą przyczynków od poszczególnych jego źródeł. W przypadku sił grawitacji należy znaleźć sumę wektorową sił grawitacji z jakimi działają pozostałe punkty materialne na wybrany punkt materialny.

# Zasada superpozycji

- Można udowodnić, że ciało w kształcie **jednorodnej powłoki kulistej** przyciąga punkt materialny znajdujący się na zewnątrz powłoki tak, jak gdyby cała masa powłoki była skupiona w jej środku. Jeżeli punkt materialny znajduje się wewnątrz powłoki, to siły grawitacyjne działające na ten punkt równoważą się.
- Jeżeli dwa ciała mają kształt kulisty, a ich gęstości są stałe lub zależą tylko od odległości od środków tych ciał, to wzór na prawo powszechnego ciążenia pozostaje słuszny.

# Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie  $M_z$  i promieniu  $R_z$ . Z prawa grawitacji wynika, że Ziemia przyciąga ciało o masie  $m$  znajdujące się przy jej powierzchni siłą

$$F_g = G \frac{mM_z}{R_z^2}. \quad (3)$$

- Z drugiej zasady dynamiki Newtona wiemy, że  $F_g = mg$  ( $g = 9.8m/s^2$ ). Z porównania obu wzorów dostajemy

$$g = G \frac{M_z}{R_z^2}. \quad (4)$$

- Należy zauważyć, że  $m$  w prawie grawitacji, to masa grawitacyjna (ciężka), a  $m$  w drugiej zasadzie dynamiki to masa bezwładna. Wszystkie znane doświadczenia potwierdzają równość obu mas.

# Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- Oszacowanie masy Ziemi,  $R_z = 6.37 \cdot 10^6 m$ ,

$$M_z = \frac{gR_z^2}{G} = 5.98 \cdot 10^{24} kg. \quad (5)$$

- Oszacowanie średniej gęstości Ziemi,

$$\rho_z = \frac{M_z}{V_z} = \frac{M_z}{(4/3)\pi R_z^3} = 5.52 \cdot 10^3 kg/m^3. \quad (6)$$

Przeciętna gęstość minerałów tworzących skorupę ziemską wynosi  $2.83 \cdot 10^3 kg/m^3$ . Wnioskujemy, że najcięższe minerały skupione są w pobliżu środka Ziemi. **Ziemia nie jest jednorodna.**

# Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi

- **Ziemia nie jest kulista.** Promień Ziemi na równiku jest o 21 km większy od jej promienia na biegunie. Wniosek: ciężenie ziemskie zależy od szerokości geograficznej.
- **Ziemia obraca się.** Okres obrotu Ziemi wokół jej osi wynosi  $T_z = 24h$ . Przyspieszenie dośrodkowe na równiku wynosi

$$a_n = \omega^2 R_z = (2\pi/T_z)^2 R_z = 0.034 m/s^2. \quad (7)$$

W układzie nieinercyjnym związanym z powierzchnią Ziemi siła grawitacyjna działająca na ciało jest pomniejszana o wartość  $ma_n$ .

- Uwaga:  $v = \omega R_z = 463 m/s = 1668 km/h$ .



# Grawitacja wewnątrz Ziemi

- Załóżmy, że Ziemia jest jednorodną kulą o masie  $M_z$  i promieniu  $R_z$ . Szukamy wypadkowej siły grawitacyjnej działającej na punkt materialny o masie  $m$  położony w odległości  $r$  od środka Ziemi, przy czym  $0 < r < R_z$ .
- Z prawa grawitacji wnioskujemy, że na punkt materialny wpływa tylko masa zawarta w kuli o promieniu  $r$ ,

$$M(r) = (4/3)\pi r^3 \rho_z = M_z(r/R_z)^3, \quad (8)$$

$$F_g(r) = -G \frac{M(r)m}{r^2} = -\frac{GM_z m r}{R_z^3}. \quad (9)$$

W rzeczywistości Ziemia nie jest jednorodna i przy przemieszczaniu punktu materialnego od powierzchni do środka Ziemi siła działająca na punkt początkowo rośnie, osiąga maksimum na pewnej głębokości, a dopiero potem maleje.

# Energia potencjalna grawitacyjna

- Siły grawitacyjne są siłami zachowawczymi. Siła grawitacyjna działająca pomiędzy masami  $m$  i  $M$ , znajdującymi się w odległości  $r$ , wynosi

$$F_g(r) = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad (10)$$

- Obliczamy pracę wykonaną przeciwko sile grawitacyjnej, przy przemieszczaniu masy  $m$ ,

$$W = - \int_{r_1}^{r_2} F_g(r) dr = GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1}. \quad (11)$$

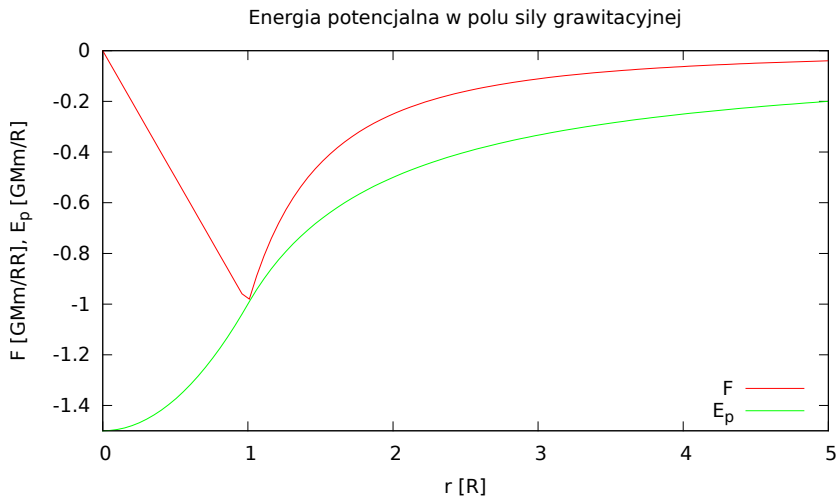
- Oznaczmy  $E_p(r) = -GMm/r$ ,  $W = E_p(r_2) - E_p(r_1)$ .

# Energia potencjalna grawitacyjna

- Przy definicji  $E_p$  zastosowaliśmy konwencję, że energia potencjalna grawitacyjna wynosi zero tam, gdzie znikają siły grawitacyjne ( $r = \infty$ ).
- Znajomość energii potencjalnej pozwala znaleźć siłę zachowawczą

$$F_g(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{GMm}{r} \right) = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (12)$$

# Energia potencjalna grawitacyjna



# Prędkość ucieczki

- **Prędkość ucieczki** (druga prędkość kosmiczna  $v_{II}$ ) ciała niebieskiego jest to minimalna pozioma prędkość początkowa (startowa) jaką musi mieć obiekt, aby mógł opuścić pole grawitacyjne danego ciała niebieskiego.
- Z zasady zachowania energii mechanicznej mamy

$$0 = E_k + E_p(R) = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R}, \quad (13)$$

$$v_{II} = \sqrt{2GM/R}. \quad (14)$$

- Przykładowe wartości drugiej prędkości kosmicznej:  
dla Ziemi  $11.2\text{km/s}$ , dla Księżycy Ziemi  $2.38\text{km/s}$ ,  
dla Słońca  $618\text{km/s}$ .

# Prędkość ucieczki

- Planety obracają się wokół własnej osi, co można wykorzystać do zmniejszenia prędkości startowej rakiety, jeżeli rakietę będzie wystrzeliwana z **obszarów okołorównikowych**. Z tego powodu wszystkie kosmodromy na Ziemi lokowane są na małych szerokościach geograficznych. Europa leży daleko od równika, dlatego Europejska Agencja Kosmiczna (ESA) wystrzeliwuje swoje rakiety z terytorium Gujany Francuskiej.
- W praktyce prędkość startowa rakiety powinna być większa niż prędkość ucieczki lub powinno się dostarczać dodatkową energię w trakcie ruchu pozwalającą na pokonanie oporów materii.
- Polska przystąpiła do ESA w 2012 roku.

# Promień Schwarzschilda

- W klasycznej teorii grawitacji możemy rozważyć obiekt w takiej odległości od ciała niebieskiego, że prędkość ucieczki będzie równa prędkości światła  $v_{II} = c$ . Tak określona odległość nazywa się **promieniem Schwarzschilda**

$$r_{schw} = \frac{2GM}{c^2}. \quad (15)$$

- Przykładowe wartości  $r_{schw}$ : dla Ziemi  $9mm$ , dla Słońca  $3km$ .
- Promień Schwarzschilda wiąże się z takimi pojęciami z Ogólnej Teorii Względności, jak horyzont zdarzeń, kolaps grawitacyjny masywnej gwiazdy, zakrzywienie czasoprzestrzeni, czarna dziura, itp.

# Pierwsza prędkość kosmiczna

- **Pierwsza prędkość kosmiczna** to najmniejsza pozioma prędkość, jaką należy nadać ciału względem przyciągającego je ciała niebieskiego, aby ciało to poruszało się po zamkniętej orbicie.
- Dla ciała niebieskiego o kształcie kuli, orbita będzie orbitą kołową o promieniu równym promieniowi planety.
- Podczas ruchu orbitalnego po orbicie kołowej siła grawitacji stanowi siłę dośrodkową, czyli

$$\frac{mv_l^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}, \quad v_l = \sqrt{GM/R}. \quad (16)$$

- Przykładowe wartości pierwszej prędkości kosmicznej:  
dla Ziemi  $7.91 \text{ km/s}$ , dla Księżyca Ziemi  $1.68 \text{ km/s}$ ,  
dla Słońca  $437 \text{ km/s}$ .



## Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie, w której w jednym z ognisk jest Słońce.

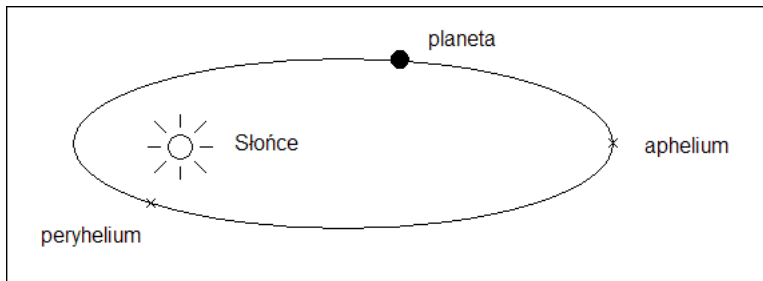
W rzeczywistości orbity planet Układu Słonecznego (poza Merkurem) są bardzo bliskie okręgom.

Ogólnie ciała niebieskie poruszają się wokół środka masy układu po torach opisanych równaniem

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \text{ (krzywe stożkowe),} \quad (17)$$

gdzie  $p$  to parametr, a  $e$  to mimośród.

# Prawa Keplera



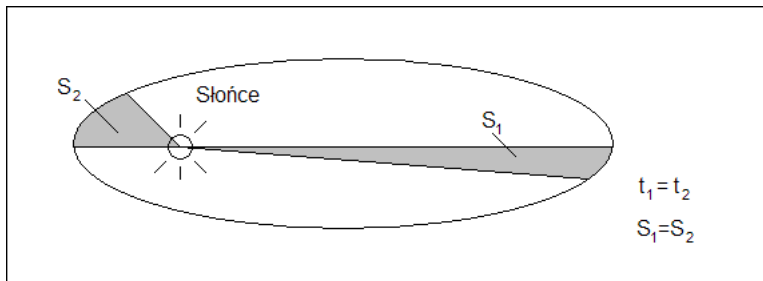
## Drugie prawo Keplera

W równych odstępach czasu, promień wodzący planety poprowadzony od Słońca zakreśla równe pola.

Planeta porusza się po orbicie wolniej, gdy jest daleko od Słońca, a szybciej, gdy jest bliżej od niego.

Drugie prawo Keplera jest równoważne zasadzie zachowania momentu pędu.

# Prawa Keplera



## Trzecie prawo Keplera

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześciangu wielkiej półosi jej orbity (czyli średniej odległości od Słońca) jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

Z drugiej zasady dynamiki dla orbity kołowej mamy

$$\frac{GM_S m}{R^2} = m\omega^2 R, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (18)$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad (M_S \text{ to masa Słońca}). \quad (19)$$

- Rozważmy satelitę obiegającego Ziemię po orbicie kołowej. Szukamy jego energii potencjalnej, kinetycznej i całkowitej.
- Z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}. \quad (20)$$

- Energia kinetyczna  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R}$ .
- Energia potencjalna grawitacyjna  $E_p = -\frac{GMm}{R}$ .
- Energia całkowita  $E_c = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2R}$ .

# Pole grawitacyjne

- Zamiast mówić o siłach grawitacyjnych, działających między punktami materialnymi, możemy opisywać oddziaływanie grawitacyjne za pomocą pola grawitacyjnego. Jeżeli oddziaływania zmieniają się w czasie, to jedynie opis polowy jest poprawny.
- **Polem grawitacyjnym** nazywamy zbiór tych właściwości przestrzeni, które są wywołane umieszczeniem w niej ciała o masie  $m$ . Inaczej można powiedzieć, że pole grawitacyjne jest to przestrzeń, w której na umieszczone w niej ciała działają siły grawitacyjne.
- Pole grawitacyjne istnieje obiektywnie, niezależnie od naszej świadomości. Jest ono jedną z form materii. Materia występuje w dwóch postaciach, jako substancja i jako pole.

# Natężenie pola grawitacyjnego

- Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego **natężenie**. Jest to wektor równy stosunkowi siły działającej na masę wprowadzoną do pola, do wartości tej masy.

$$\vec{K}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}. \quad (21)$$

- Jeżeli pole grawitacyjne wytwarza punktowa masa  $M$ , to

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}, \quad K_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{r^2}. \quad (22)$$

- Natężenie pola grawitacyjnego ma wymiar przyspieszenia.
- Natężenie pola grawitacyjnego jest zwrócone ku masie, która je wytwarza.



# Potencjał pola grawitacyjnego

- **Potencjał pola grawitacyjnego** jest równy stosunkowi energii potencjalnej ciała w polu grawitacyjnym do jego masy,

$$V_g = \frac{E_p}{m}. \quad (23)$$

- Jeżeli pole grawitacyjne wytwarza punktowa masa  $M$ , to

$$E_p = -\frac{GMm}{r}, \quad V_g = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}. \quad (24)$$

- Jeżeli pole grawitacyjne jest wytwarzane przez zbiór mas  $M_i$ , to potencjał grawitacyjny w punkcie  $\vec{r}$  wynosi

$$V_g(\vec{r}) = -\sum_i \frac{GM_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (25)$$

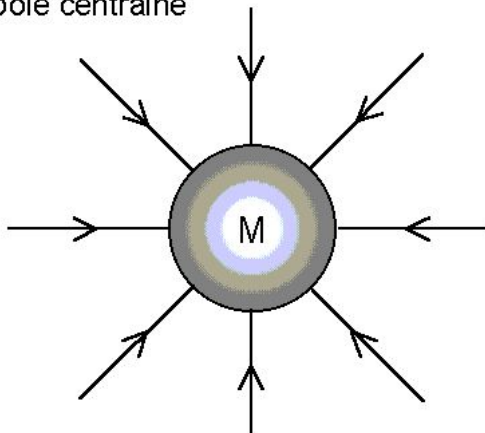
gdzie  $\vec{r}_i$  oznaczają położenia mas  $M_i$  względem początku układu współrzędnych.

# Linie sił pola

- Dowolne pole można opisać poglądowo za pomocą linii sił pola lub powierzchni ekwipotencjalnych.
- **Linie sił pola** są to linie wskazujące kierunek wektora natężenia pola, tj. w każdym punkcie pola wektor natężenia jest styczny do linii sił. Zgodnie z konwencją, w obszarze zagęszczenia linii sił wartość natężenia pola jest większa.
- **Pole jednorodne** o stałym wektorze natężenia pola jest przedstawiane za pomocą zbioru prostych równoległych, równo od siebie oddalonych.

# Prezentacja pola

pole centralne



# Powierzchnie ekwipotencjalne

- **Powierzchnię ekwipotencjalną** tworzą punkty o jednakowym potencjale. Zwykle przedstawia się zbiór powierzchni odpowiadającym wartościom potencjału różniącym się o ustaloną wartość. Wtedy bliskość dwóch powierzchni ekwipotencjalnych mówi o dużych zmianach potencjału na jednostkę długości.
- **Pole jednorodne** o stałym wektorze natężenia pola jest przedstawiane za pomocą zbioru płaszczyzn równoległych, równo od siebie oddalonych.
- Linie sił pola są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.

- Energia układu punktów materialnych

$$E_g = - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (26)$$

$$E_g = - \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{j \neq i} \frac{G m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_g(\vec{r}_i). \quad (27)$$

- Energia grawitacyjna kuli (energia wiązania) [Januszajtis]

$$E_g = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (28)$$

- Gęstość energii pola grawitacyjnego

$$\rho_g(\vec{r}) = -\frac{K_g^2(\vec{r})}{8\pi G}. \quad (29)$$

- Gęstość energii dla kuli

$$\rho_g = -\frac{GM^2 r^2}{8\pi R^6} \text{ dla } 0 < r < R, \quad (30)$$

$$\rho_g = -\frac{GM^2}{8\pi r^4} \text{ dla } r > R. \quad (31)$$

# Organizmy żywe w polu grawitacyjnym

- Siła grawitacji określa udział kośćca w budowie organizmów wyższych oraz rozmiary organizmów.
- Organizmy posiadają specjalne **narządy równowagi**, aby utrzymać się w pionie.
- Organizm żywy reaguje na zmiany działającej siły ciężkości, a więc reaguje na stan **przeciążenia** i **nieważkości**. Człowiek w krótkim odcinku czasu (rzędu 10s) znosi przeciążenia dodatnie 6g i przeciążenia ujemne 3g. W stanie nieważkości zaobserwowano u kosmonautów zaburzenia w układzie krążeniu krwi, zaburzenia czynności układu hormonalnego, zanikanie mięśni i inne.