14.05.2025

Matematyka dyskretna, zestaw 7.

7.1. Definiujemy operator różnicy $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Przekształć wielomian

$$p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2 \tag{1}$$

w kombinację potęg ubywających

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\Delta^k p(x)|_{x=0}}{k!}\, x^{\underline{k}}, \tag{2}$$

a następnie oblicz na tej podstawie kolejne różnice $\Delta^k p(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

7.2. W ramach rachunku różnicowego, definiując potęgę ubywającą

$$x^{\underline{m}} := x(x-1)\ldots(x-m+1) \tag{3}$$

i korzystając z własności sumowania oznaczonego

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \sum_{0}^{n} x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \tag{4}$$

oblicz $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ oraz $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

7.3. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia

$$\Delta^2 \left(2^k \sum_{j=1}^{k} (j-1)^{\underline{-1}} \right) - 2\Delta \left(2^k k^{\underline{-1}} \right), \tag{5}$$

$$\sum_{4}^{j} \left(j4^x + x^{\underline{j-4}} \right) \delta x + \sum_{0}^{j} 4\,\delta x \tag{6}$$

(w pierwszym przypadku wygodnie skorzystać ze wzoru na różnicę iloczynu funkcji).

7.4. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n-1} kH_k\,, \tag{7}$$

korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i liczby harmoniczne.

7.5. Oblicz sumę oznaczoną

$$\sum_{0}^{n} 3^x x(x-1)\,\delta x\,, \tag{8}$$

dwukrotnie korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i funkcje wykładnicze.

7.6. Przy pomocy algorytmu Euklidesa, znajdź rozwinięcie w ułamek łańcuchowy dla liczb wymiernych $\frac{196}{269}$ i $\frac{1015}{213}$.

7.7. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, wyznacz następujący rozkład największego wspólnego dzielnika:

$$\mathrm{NWD}(a,b) = ax + by\,, \quad x, y \in \mathbb{Z}\,, \tag{9}$$

dla par liczb $(146, 248)$ i $(344, 484)$.

7.8.* Pokaż, że dla liczb Fibonacciego zachodzi tożsamość (w tym celu należy skorzystać z własności $F_{a+b} = F_{a+1}F_b + F_aF_{b-1}$ oraz $\mathrm{NWD}(F_n, F_{n+1}) = 1$)

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = \mathrm{NWD}(F_m, F_{n-m})\,, \quad n > m\,, \tag{10}$$

a następnie, odwołując się do algorytmu Euklidesa, udowodnij

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)}\,. \tag{11}$$

Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski