26.03.2025

Matematyka dyskretna, zestaw 2.

Definicje i podstawowe własności funkcji podłoga i sufit:
Podłoga $\lfloor x \rfloor$ - największa liczba całkowita nie większa od x, tj.

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbf{Z} : n \leqslant x\}$$

Sufit $\lceil x \rceil$ - najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od x, tj.

$$\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbf{Z} : n \geqslant x\}$$

Liczbę rzeczywistą x możemy przedstawić jako $x = k + r$, gdzie $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}, r \in [0, 1)$.
Dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.

2.1. Skonstruuj bijekcję $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ przy użyciu funkcji podłoga, taką że $\gamma(0) = 0$. Zauważmy następnie, że
$\forall_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \exists!_{a_1,a_2,\ldots\in\mathbb{N}}\, n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots$ oraz
$\forall_{q\in\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}} \exists!_{b_1,b_2,\ldots\in\mathbb{Z}}\, q = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots$,
gdzie p_i są kolejnymi liczbami pierwszymi (tj. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...). Widać zatem, że przy użyciu γ łatwo zdefiniować bijekcję z $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ do $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}_+\setminus\{0\}$. Jak rozszerzyć tę ostatnią do bijekcji z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$?

2.2. Przyjmując definicję

$$a \bmod m = a - \lfloor a/m \rfloor m \,, \tag{1}$$

sprawdź czy $17 \bmod 6 = (-17) \bmod 6$ oraz $17 \bmod (-6) = (-17) \bmod (-6)$, a także udowodnij następujące prawo rozdzielności

$$\forall c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} : \; c\,(a \bmod m) = (ca) \bmod (cm) \tag{2}$$

i uogólnij przy jego użyciu związki pomiędzy $17 \bmod 6$ i $(-17) \bmod (-6)$ oraz $(-17) \bmod 6$ i $17 \bmod (-6)$.

2.3. Odpowiednim rachunkiem, znajdź liczby spełniające równanie

$$\lfloor \tfrac{1}{7}(2x - 4) \rfloor = \tfrac{1}{4}(3x - 7) \,. \tag{3}$$

2.4. Odpowiednim rachunkiem, znajdź zbiór liczb spełniających równanie

$$\lceil 5x \rceil \lceil 2x \rceil = 40 \,. \tag{4}$$

2.5. Odpowiednim rachunkiem, znajdź zbiór liczb spełniających równanie

$$\lfloor 4x \rfloor \lceil -x \rceil = -18 \,. \tag{5}$$

2.6. Wykaż, że (wskazówka: skorzystaj z sumy szeregu arytmetycznego)

$$\sum_{k=1}^{n} \lceil \tfrac{k}{2} \rceil = \lceil \tfrac{n(n+2)}{4} \rceil \,. \tag{6}$$

2.7. Korzystając z przybliżeń $\log_{10}(\pi) \approx 0.4971$, $\log_{10}(e) \approx 0.4342$, $\log_{10}(\varphi) \approx 0.2089$ oblicz ile cyfr ma liczba

$$\left\lfloor \frac{\pi^{100} e^{145}}{\varphi^{238}} \right\rfloor. \tag{7}$$

Piotr Czarnik
Andrzej Kapanowski
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski