27.03.2023

Matematyka dyskretna, zestaw 4.

4.1. Uczniowie i uczennice pewnej klasy postanowili z okazji świąt obdarować się prezentami. Każdy miał wybrać dokładnie jedną osobę, której kupi skromny upominek. Okazało się, że wszyscy dostali jakiś prezent. Pokaż, że każdy dostał prezent wyłącznie od jednej osoby.

4.2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$, liczba $11^n - 3^n$ jest podzielna przez 8.

4.3. Udowodnij indukcyjnie nierówność Bernoulliego, czyli

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x > -1$.

4.4. Wykaż indukcyjnie, że

(a) $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil \frac{n(n+2)}{4} \rceil$

4.5. Niech $A \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych n , dla których liczba $n^2 - 3n + 3$ jest parzysta. Pokaż, że jeśli $n \in A$ to i $n + 1 \in A$. Jakie liczby należą więc do A ?

4.6. Pokaż, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi następująca równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(6n-5) \cdot (6n+1)} = \frac{n}{6n+1}.$$

4.7. Dla ciągu $(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ podzbiorów zbioru X , ciąg zbiorów $(B_0, B_1, B_2, \ldots)$ zdefiniujmy poprzez:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_n &= B_{n-1} \div A_n \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{aligned}$$

gdzie $\div$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów. Udowodnij, że $x \in B_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in X$ występuje w nieparzystej liczbie zbiorów spośród: $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

4.8. Udowodnij, że $3 + 11 + \ldots + (8n - 5) = 4n^2 - n$ dla $n \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^*$ oznacza zbiór liczb naturalnych bez zera).

4.9. Pokaż przez indukcję, że jeśli $s_0 = a$ oraz $s_n = 2s_{n-1} + b$ dla $n \in \mathbb{N}^*$, to s_n jest wyrażone wzorem $s_n = 2^n a + (2^n - 1)b$ dla każdej $n \in \mathbb{N}$.

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Jakub Czartowski
Grzegorz Czelusta
Andrzej Kapanowski
Piotr Korcyl
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski