24.04.2023

Matematyka dyskretna, zestaw 7.

7.1. W ramach rachunku różnicowego, definiując potęgę ubywającą

$$x^{\underline{m}} := x(x-1)\dots(x-m+1) \tag{1}$$

i korzystając z własności sumowania oznaczonego

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \tag{2}$$

oblicz $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ oraz $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

7.2. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia

$$\Delta^2 \left(2^k \sum_{j=1}^{k} (j-1)^{\underline{-1}} \right) - 2\Delta \left(2^k k^{\underline{-1}} \right) , \tag{3}$$

$$\sum_4^j \left(j4^k + k^{\underline{j-4}} \right) \delta k + \sum_0^j 4\, \delta k \tag{4}$$

(w pierwszym przypadku wygodnie skorzystać ze wzoru na różnicę iloczynu funkcji).

7.3. Oblicz sumę

$$\sum_{x=0}^{n-1} x H_x ,$$

korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i liczby harmoniczne.

7.4. Oblicz sumę oznaczoną

$$\sum_0^n 3^x x(x-1)\, \delta x ,$$

dwukrotnie korzystając z sumowania przez części. Wynik powinien się wyrażać przez dolne silnie (nazywane też potęgami ubywającymi), stałe i funkcje wykładnicze.

7.5. Przy pomocy algorytmu Euklidesa, znajdź rozwinięcie w ułamek łańcuchowy dla liczb wymiernych $\frac{196}{269}$ i $\frac{1015}{213}$.

7.6. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, wyznacz następujący rozkład największego wspólnego dzielnika:

$$\mathrm{NWD}(a,b) = ax + by , \quad x, y \in \mathbb{Z} ,$$

dla par liczb $(146, 248)$ i $(344, 484)$.

7.7.* Pokaż, że dla liczb Fibonacciego zachodzi tożsamość (w tym celu należy skorzystać z własności $F_{a+b} = F_{a+1}F_b + F_a F_{b-1}$ oraz $\mathrm{NWD}(F_n, F_{n+1}) = 1$)

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = \mathrm{NWD}(F_m, F_{n-m})\,, \quad n > m\,, \tag{5}$$

a następnie, odwołując się do algorytmu Euklidesa, udowodnij

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)}\,. \tag{6}$$

Michał Bujak
Piotr Czarnik
Jakub Czartowski
Grzegorz Czelusta
Andrzej Kapanowski
Piotr Korcyl
Jakub Mielczarek
Andrzej Rostworowski