

Fale elektromagnetyczne

11/15

Andrzej Kapanowski
<https://ufkapano.github.io/>

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2024

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

- Dwa symetryczne przypadki:
 - (a) pętla z prądem + pole magnetyczne \Rightarrow moment siły,
 - (b) moment siły + pole magnetyczne \Rightarrow prąd w pętli.
- Istotę zjawiska indukcji elektromagnetycznej można ustalić z następujących doświadczeń:
 - (a) magnes poruszający się wzdłuż osi cewki indukuje prąd w cewce,
 - (b) cewka z prądem stałym poruszająca się względem drugiej cewki indukuje w niej prąd,
 - (c) nieruchoma cewka z prądem zmiennym indukuje prąd w drugiej nieruchomej cewce.
- Uogólnienie: **zmieniający się strumień magnetyczny** przenikający cewkę indukuje w niej prąd elektryczny.

Prawo indukcji Faradaya

Prawo indukcji Faradaya (pierwsza połowa XIX wieku)

Zmienny strumień magnetyczny przenikający obwód elektryczny powoduje powstanie (indukowanie) w nim siły elektromotorycznej.

Jeżeli obwód jest zamknięty, to pod wpływem SEM może popłynąć prąd w obwodzie. Ilościowo prawo Faradaya zapisujemy następująco

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (1)$$

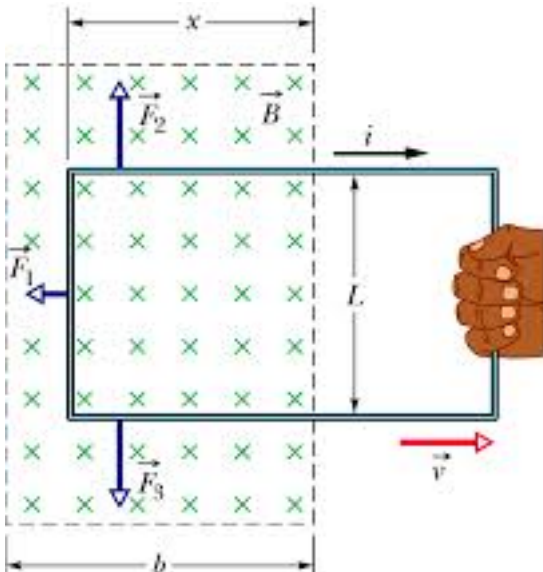
Znak minus oznacza przeciwdziałanie, co dokładniej określa reguła Lenza.

Reguła Lenza

Reguła Lenza

Prąd indukowany w obwodzie płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii



Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Prawo indukcji możemy wyprowadzić z zasady zachowania energii. Rozważmy prostokątną ramkę wyciąganą ze stałą prędkością \vec{v} z obszaru jednorodnego pola magnetycznego o indukcji \vec{B} .
- Strumień magnetyczny obejmujący ramkę zmniejsza się, a więc w obwodzie indukuje się SEM i płynie prąd indukcyjny o natężeniu I .
- Na ramkę działa siła $F = BIL$. Żeby ramka mogła przesuwać się ruchem jednostajnym, trzeba na nią działać siłą zewnętrzną o wartości F .
- Jeżeli ramka przesunie się o $\Delta x = v\Delta t$, to praca siły zewnętrznej wynosi

$$\Delta W_1 = F\Delta x = BIL\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi_B. \quad (2)$$

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Z drugiej strony prąd płynący w obwodzie wykonuje pracę (znak minus oznacza wykonanie pracy przez układ przewodników)

$$\Delta W_2 = -\mathcal{E}I\Delta t. \quad (3)$$

- Z zasady zachowania energii stwierdzamy, że praca wykonana przez siły zewnętrzne będzie równa pracy prądu elektrycznego, $\Delta W_1 = \Delta W_2$, $I\Delta\Phi_B = -\mathcal{E}I\Delta t$,

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \quad (4)$$

- Otrzymaliśmy prawo indukcji Faradaya.

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Rozważmy dalej wartość SEM pomijając znak minus

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t} = BLv. \quad (5)$$

- Jeżeli w obwodzie jest opór R , to płynący prąd ma natężenie $I = \mathcal{E}/R = BLv/R$.
- Działająca siła zewnętrzna musi mieć wartość $F = BIL = B^2L^2v/R$.
- Moc działającej siły jest równa szybkości wydzielania się energii termicznej w ramce

$$P = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R} = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = I^2R. \quad (6)$$

Indukowane pole elektryczne

- Zmienny strumień magnetyczny wytwarza indukowaną SEM, a przy zamkniętym obwodzie może płynąć prąd indukowany. Oznacza to, że w obwodzie musi istnieć pole elektryczne, które przemieszcza ładunki.
- **Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.** Jest to inne sformułowanie prawa indukcji Faradaya.
- SEM w obwodzie można wyrazić jako całkę po konturze zamkniętym z pola elektrycznego

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (7)$$

- Nowa postać prawa Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (8)$$

Cewki i indukcyjność

- Kondensator może służyć do wytworzenia pola elektrycznego o zadanej wartości natężenia E . Podobnie **cewka (solenoid)** może być zastosowana do wytworzenia pola magnetycznego o zadanej indukcji B .
- Jeżeli prąd o natężeniu I płynie przez cewkę o N zwojach, to wytwarza ona pole magnetyczne B . Oznaczmy strumień pola magnetycznego przenikającego jeden zwoj przez Φ_B .
- **Indukcyjność własną** cewki L definiujemy jako $N\Phi_B = LI$.
- Jeżeli prąd w cewce zmienia się, to powstaje SEM

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9)$$

Obliczanie indukcyjności cewki

- Rozważmy odcinek o długości d długiej cewki mającej n zwojów na jednostkę długości.
- Strumień pola magnetycznego przenikający tę część cewki wynosi $N\Phi_B = (nd)(BS)$, gdzie B jest indukcją w cewce, a S polem przekroju poprzecznego cewki.
- Z prawa Ampere'a wiemy, że $B = \mu_0 ln$.
- Indukcyjność własna cewki wynosi

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{ndBS}{I} = \frac{nSd(\mu_0 ln)}{I} = \mu_0 n^2 Sd. \quad (10)$$

- Indukcyjność na jednostkę długości wynosi $L/d = \mu_0 n^2 S$.
- Jednostką indukcyjności w układzie SI jest **henr**,
 $1\text{henr} = 1H = 1T \cdot m^2/A$.

Indukcja wzajemna

- Rozważmy układ dwóch cewek ustawionych w ten sposób, że strumień magnetyczny wytwarzany przez prąd płynący w jednej z nich przenika powierzchnię zwojów drugiej. Zmiana prądu w jednej z nich powoduje powstanie SEM indukcji w drugiej. Jest to zjawisko **indukcji wzajemnej**.
- Oznaczmy przez N_2 liczbę zwojów drugiej cewki, Φ_{12} strumień magnetyczny pochodzący od pierwszej cewki, przenikający jeden zwoj drugiej cewki.
- **Indukcyjność wzajemną** między cewkami M określamy związkiem $N_2\Phi_{12} = MI_1$ ($M \sim N_1N_2$).
- Jeżeli prąd w pierwszej cewce zmienia się, to w drugiej cewce powstaje SEM

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d(N_2\Phi_{12})}{dt} = -\frac{d(MI_1)}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (11)$$

Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

- Rozważmy cewkę o indukcyjności L , w której płynie prąd I' . Zwiększenie prądu płynącego w cewce spowoduje powstanie SEM samoindukcji. Źródło dołączone do cewki wykona pracę

$$\Delta W = \mathcal{E}' \Delta q' = L \frac{\Delta I'}{\Delta t} \Delta q' = LI' \Delta I'. \quad (12)$$

- Praca potrzebna do zwiększenia natężenia prądu od 0 do I wynosi

$$W = \int_0^I LI' dI' = \frac{LI^2}{2}. \quad (13)$$

Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

- Korzystając ze związków na L i B mamy

$$W = \frac{\mu_0 n^2 S d I^2}{2} = \frac{(\mu_0 n I)^2 S d}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} S d. \quad (14)$$

- Wyrażenie Sd jest objętością przestrzeni zamkniętą zwojami cewki, w której panuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji B . Wyrażenie $B^2/(2\mu_0)$ jest **gęstością energii magnetycznej**.
- Energia cewki z prądem jest zmagazynowana w polu magnetycznym. Cewka może oddać tą energię, kiedy będziemy ją odłączać od źródła, np. na oporniku wydzieli się ciepło.

Indukowane pole magnetyczne

- Opis zjawiska indukcji magnetycznej nasunął Maxwellowi postulat, że **zmienne pole elektryczne wytwarza pole magnetyczne**. Ilościowo można to zapisać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (15)$$

- Wyrażenie $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ ma wymiar prądu. Jest ono traktowane jako natężenie fikcyjnego prądu, zwanego **prądem przesunięcia**.
- Istnienie prądu przesunięcia można stwierdzić w doświadczeniu z kondensatorem ładowanym pewnym prądem. Rosnące pole elektryczne między okładkami kondensatora wytwarza pole magnetyczne.
- Jeżeli weźmiemy pod uwagę zwykłe prądy łącznie z prądem przesunięcia, to otrzymamy uogólnione prawo Ampere'a.

Równania Maxwella

Równania Maxwella zapisane przy założeniu, że nie występują materiały dielektryczne i magnetyczne.

- Prawo Gaussa dla elektryczności

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (16)$$

- Prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (17)$$

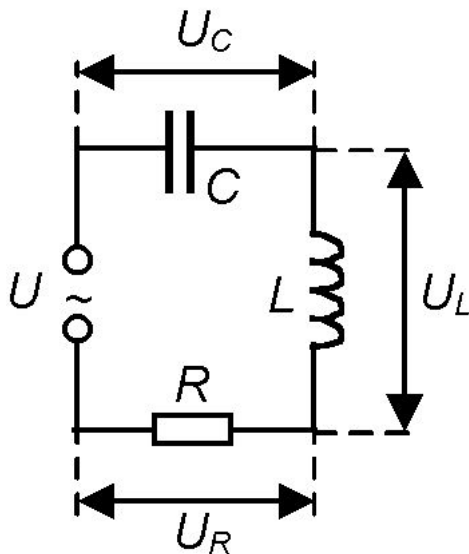
- Prawo Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (18)$$

- Uogólnione prawo Ampere'a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p. \quad (19)$$

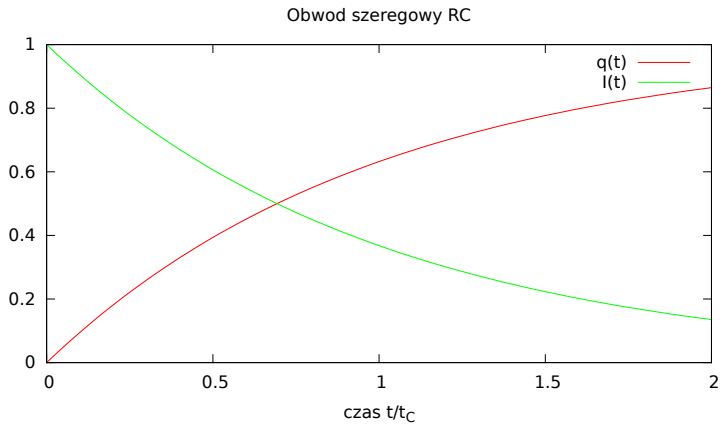
Obwód RLC



Obwody RC

- Rozważmy **obwód szeregowy RC** składający się z nienaładowanego kondensatora o pojemności C ($q = 0$ dla $t = 0$), doskonałego źródła o SEM \mathcal{E} i opornika o oporze R .
- Po zamknięciu obwodu następuje ładowanie kondensatora aż do momentu, gdy $q/C = \mathcal{E}$.
- Z drugiego prawa Kirchhoffa $\mathcal{E} - IR - q/C = 0$.
- Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $q(t)$, przy czym $I = dq/dt$.
- Rozwiązanie to $q(t) = C\mathcal{E}[1 - \exp(-t/\tau_C)]$, gdzie $\tau_C = RC$ jest **pojemnościową stałą czasową** obwodu o wymiarze czasu, $1\Omega \cdot 1F = 1s$.
- Prąd ładowania $I = (\mathcal{E}/R) \exp(-t/\tau_C)$.

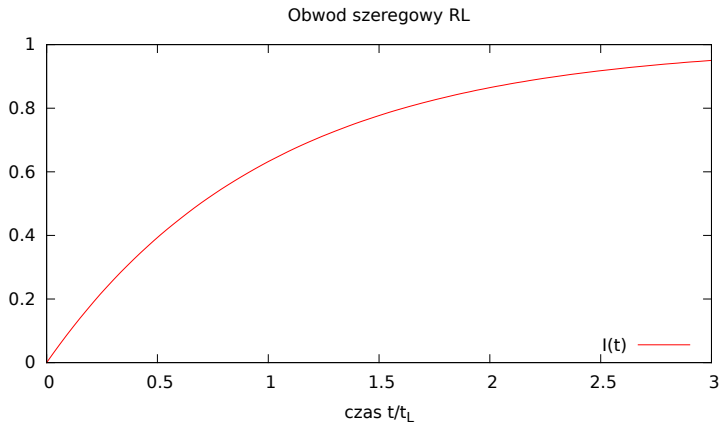
Obwody RC



Obwody RL

- Rozważmy **obwód szeregowy RL** składający się z cewki o indukcyjności L , doskonałego źródła o SEM \mathcal{E} i opornika o oporze R .
- Po zamknięciu obwodu prąd rośnie, czemu przeciwstawia się SEM samoindukcji cewki.
- Z drugiego prawa Kirchhoffa $\mathcal{E} - IR - L(di/dt) = 0$.
- Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $I(t)$, przy czym $I = 0$ dla $t = 0$.
- Rozwiązanie to $I(t) = (\mathcal{E}/R)[1 - \exp(-t/\tau_L)]$, gdzie $\tau_L = L/R$ jest **indukcyjną stałą czasową** obwodu o wymiarze czasu, $1H/1\Omega = 1s$.

Obwody RL



Obwody LC

- Rozważmy **obwód szeregowy LC** składający się z cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C .
- Z drugiego prawa Kirchoffa $L(di/dt) + q/C = 0$,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (20)$$

- Rozpoznajemy równanie oscylatora harmonicznego,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (21)$$

- W obwodzie występują drgania, $q = q_m \cos(\omega t + \phi)$,
 $i = -\omega q_m \sin(\omega t + \phi)$
- Zachowana jest energia $LI^2/2 + q^2/(2C)$.

Drgania tłumione w obwodzie RLC

- Rozważmy **obwód szeregowy RLC** składający się z opornika o oporze R , cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C .
- Z drugiego prawa Kirchhoffa $\mathcal{E} - IR - L(di/dt) - q/C = 0$,

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (22)$$

- Rozpoznajemy równanie oscylatora harmonicznego tłumionego z siłą wymuszającą (\mathcal{E}).
- Częstość drgań swobodnych $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
- Jeżeli $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\Omega t)$, to amplituda drgań będzie zależała od częstości Ω .

Drgania tłumione w obwodzie RLC

- Możemy poszukiwać warunku **rezonansu** (maksimum amplitudy) dla $q(t)$ lub $I(t)$. Należy pamiętać, że są to różne funkcje Ω i mają maksimum w innych miejscach.
- Amplituda dla prądu wynosi

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2}}, \quad (23)$$

gdzie Z nazywamy **impedancją** obwodu.

- Rezonans dla prądu $\Omega_r = 1/\sqrt{LC} = \omega$.
- Prąd w obwodzie jest zwykle przesunięty w fazie w stosunku do SEM wymuszającej.

Moc w obwodach prądu zmiennego

- W obwodzie RLC chwilowa szybkość rozpraszania energii (moc chwilowa) na oporniku wynosi

$$P = I^2 R = I_m^2 R \sin^2(\Omega t - \phi). \quad (24)$$

- Interesuje nas zwykle moc średnia

$$P_{sr} = \frac{I_m^2 R}{2} = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R = I_{sk}^2 R = I_{sk} U_{sk}, \quad (25)$$

gdzie I_{sk} jest **wartością skuteczną natężenia prądu**.

- Wartość skuteczna napięcia** $U_{sk} = U_m / \sqrt{2}$.
- Przy tej samej mocy średniej mamy pewien zakres swobody (duży prąd i małe napięcie lub na odwrót).

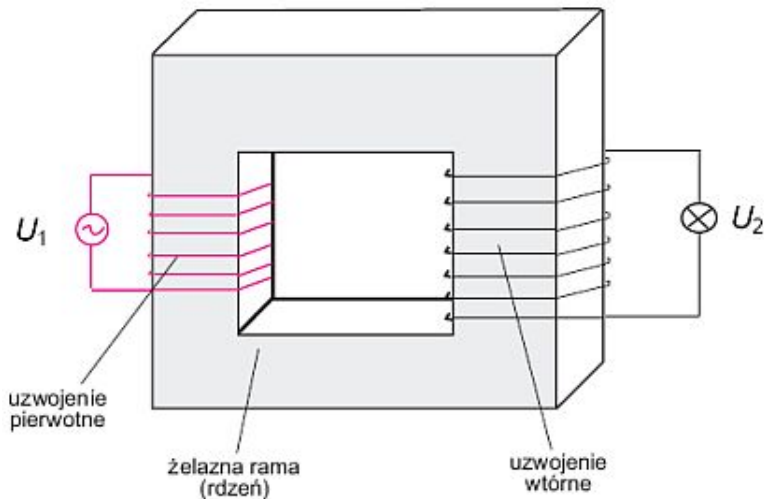
Transformatory

- W systemie przesyłania energii elektrycznej pożądane są małe natężenia prądu, aby **straty omowe** $I^2 R$ były jak najmniejsze.
- **Transformator** to urządzenie służące do podwyższania lub obniżania (transformowania) napięcia prądu zmiennego.
- Uzwojenie pierwotne o N_1 zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego U_1 . Prąd pierwotny indukuje w rdzeniu zmienny strumień magnetyczny, który przenika uzwojenie wtórne,

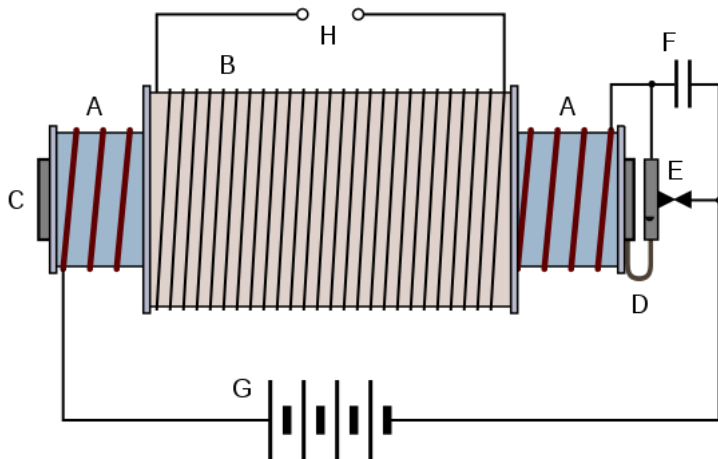
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2}. \quad (26)$$

- Stosunek N_2/N_1 nazywamy **przekładnią transformatora**.
- Transformacja napięcia $U_2 = U_1 N_2/N_1$.
- Transformacja prądów $I_2 = I_1 N_1/N_2$.

Transformator



Cewka Ruhmkorffa



Pole elektromagnetyczne

- Pole elektryczne i pole magnetyczne są przejawami **pola elektromagnetycznego**, które ujawnia swoje dwa oblicza w zależności od obranego układu odniesienia.
- **Falę elektromagnetyczną** można traktować jako przenoszenie drgań pola elektromagnetycznego od jednego punktu przestrzeni do drugiego.
- Fale elektromagnetyczne nie wymagają obecności ośrodka i mogą rozchodzić się również w próżni.
- Wielkim osiągnięciem Maxwella było pokazanie, że światło widzialne ($400 - 700\text{nm}$) jest falą elektromagnetyczną, a tym samym, że optyka jest gałęzią elektromagnetyzmu.

Widmo fal elektromagnetycznych

Przenika atmosferę ziemską?



Typ promieniowania
Długość fali (m)

Ciało o skali zbliżonej do długości fali



radiowe

10^3



budynki

mikrofale

10^{-2}



człowiek

podczerwień

10^{-5}



motyl

światło widzialne

0.5×10^{-6}



pierwotniaki

ultrafiolet

10^{-8}



molekuły

rentgenowskie

10^{-10}



atomy

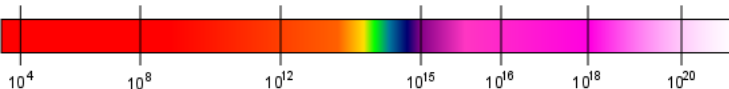
gamma

10^{-12}



jądra atomowe

Częstotliwość (Hz)



10^4

10^8

10^{12}

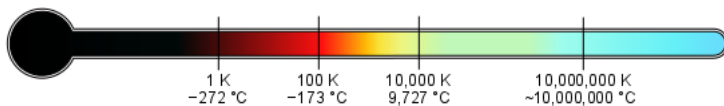
10^{15}

10^{16}

10^{18}

10^{20}

Temperatura ciała, którego maksimum promieniowania jest w danej długości fali



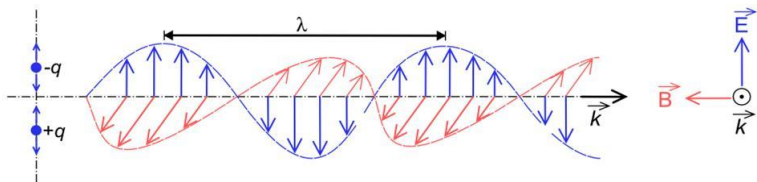
1 K
-272 °C

100 K
-173 °C

10,000 K
9,727 °C

10,000,000 K
~10,000,000 °C

Płaska fala elektromagnetyczna



Płaska fala elektromagnetyczna

- Fale elektromagnetyczne są **falami poprzecznymi**. Rozchodzenie się tych fal opisują równania Maxwella.
- Wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} jest zawsze prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} .
- Iloczyn wektorowy $\vec{E} \times \vec{B}$ zawsze wyznacza kierunek rozchodzenia się fali.
- Oscylacje pól \vec{E} i \vec{B} są zgodne w fazie.
- Biegająca fala płaska monochromatyczna (jedno λ)

$$E = E_m \sin(kx - \omega t), \quad B = B_m \sin(kx - \omega t). \quad (27)$$

- Prędkość fali

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B}. \quad (28)$$

Wektor Poyntinga

- Energetyczne właściwości fali elektromagnetycznej opisuje **wektor Poyntinga**

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (29)$$

Jest to energia przenoszona przez falę w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali.

- Kierunek wektora Poyntinga jest w każdym punkcie kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w tym punkcie.
- Wartość średnią modułu \vec{S} nazywamy **natężeniem fali**
 $I_{fali} = S_{sr} = E_m B_m / 2.$
- Dla fali kulistej rozchodzącej się z punktowego źródła
 $I_{fali} = P_{zr} / (4\pi r^2).$

Ciśnienie promieniowania

- Fale elektromagnetyczne przenoszą zarówno energię, jak i pęd. Oświetlając jakieś ciało wywieramy na nie **ciśnienie promieniowania**.
- Załóżmy, że w czasie Δt ciało uzyskało od promieniowania energię ΔU przez zaabsorbowanie promieniowania. Zmiana pędu ciała wynosi $\Delta p = \Delta U/c$.
- Jeżeli promieniowanie w całości odbiło się od ciała wzdłuż pierwotnego kierunku, to zmiana pędu wyniesie $\Delta p = 2\Delta U/c$.
- Ciśnienie promieniowania przy absorpcji

$$p_a = \frac{\Delta p}{S\Delta t} = \frac{I_{fali}S\Delta t}{S\Delta tc} = \frac{I_{fali}}{c}. \quad (30)$$

- Ciśnienie promieniowania przy odbiciu $p_o = 2I_{fali}/c$.

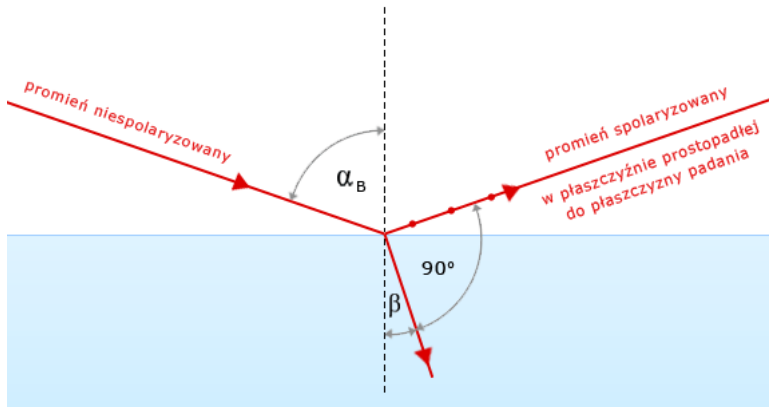
Polaryzacja

- **Polaryzacją** nazywamy właściwość fali poprzecznej polegającą na zmianach kierunku oscylacji rozchodzącego się zaburzenia w określony sposób. Dla fali elektromagnetycznej określamy **płaszczyznę drgań fali** jako płaszczyznę, w której leżą wektory \vec{E} .
- W fali **spolaryzowanej liniowo** jest jedna płaszczyzna drgań nie zmieniająca się w czasie.
- W fali **spolaryzowanej kołowo** pole \vec{E} ma stałą wartość, ale jego kierunek się zmienia. W ustalonym punkcie przestrzeni koniec wektora \vec{E} zatacza okrąg w czasie jednego okresu fali.
- Fale elektromagnetyczne emitowane przez zwykłe źródła światła (Słońce, żarówka) są **niespolaryzowane**, wektor \vec{E} w dowolnym punkcie ma przypadkowy kierunek.

Metody polaryzacji światła

- **Selektywna absorpcja.** Pewne materiały mają właściwość przepuszczania tylko fali drgającej w jednej płaszczyźnie, a pochłaniania wszystkich innych fal (dichroizm).
- **Podwójne załamanie.** Istnieją kryształy, w których prędkość światła zależy od kierunku. Takie kryształy mają dwa współczynniki załamania. Wiązka światła niespolaryzowanego padająca na taki kryształ może rozszczepić się na dwa promienie spolaryzowane liniowo w kierunkach wzajemnie prostopadłych. Przykłady: pryzmat Nikoła, ćwierćfalówka.
- **Odbicie pod kątem Brewstera.**
- **Rozpraszanie światła**, czyli absorpcja, a potem reemisja światła spolaryzowanego przez ośrodek.

Odbicie pod kątem Brewstera



Prawo Malusa

- Rozważmy światło spolaryzowane liniowo padające na polaryzator tak, że wektor \vec{E}_0 tworzy kąt θ z kierunkiem polaryzacji polaryzatora.
- Składowa przechodząca jest równa $E = E_0 \cos \theta$.
- Natężenie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego, wobec tego natężenie światła przechodzącego przez polaryzator wynosi

$$I_{fali} = I_{fali,0} \cos^2 \theta. \quad (31)$$

Jest to **prawo Malusa**.

- W typowym eksperymencie mamy dwa polaryzatory z kierunkami polaryzacji ustawionymi pod kątem θ . Pierwszy polaryzator ze światła niespolaryzowanego przygotowuje światło spolaryzowane liniowo, a drugi (analyzer) sprawdza prawo Malusa.

Polaryzacja światła –prawo Malusa

Polaryzacja światła

