Fale elektromagnetyczne
11/15

Andrzej Kapanowski
https://ufkapano.github.io/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2021

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej

- Dwa symetryczne przypadki:
  (a) pętla z prądem + pole magnetyczne $\Rightarrow$ moment siły,
  (b) moment siły + pole magnetyczne $\Rightarrow$ prąd w pętli.
- Istotę zjawiska indukcji elektromagnetycznej można ustalić z następujących doświadczeń:
  (a) magnes poruszający się wzdłuż osi cewki indukuje prąd w cewce,
  (b) cewka z prądem stałym poruszająca się względem drugiej cewki indukuje w niej prąd,
  (c) nieruchoma cewka z prądem zmiennym indukuje prąd w drugiej nieruchomej cewce.
- Uogólnienie: zmieniający się strumień magnetyczny przenikający cewkę indukuje w niej prąd elektryczny.

Prawo indukcji Faradaya

Prawo indukcji Faradaya (pierwsza połowa XIX wieku)

Zmienny strumień magnetyczny przenikający obwód elektryczny powoduje powstanie (indukowanie) w nim siły elektromotorycznej.

Jeżeli obwód jest zamknięty, to pod wpływem SEM może popłynąć prąd w obwodzie. Ilościowo prawo Faradaya zapisujemy następująco

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{1}$$

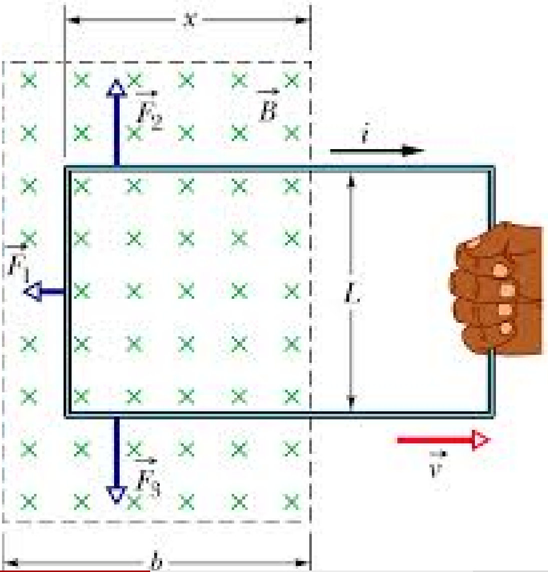
Znak minus oznacza przeciwdziałanie, co dokładniej określa reguła Lenza.

Reguła Lenza

Reguła Lenza

Prąd indukowany w obwodzie płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii



Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Prawo indukcji możemy wyprowadzić z zasady zachowania energii. Rozważmy prostokątną ramkę wyciąganą ze stałą prędkością $\vec{v}$ z obszaru jednorodnego pola magnetycznego o indukcji $\vec{B}$.
- Strumień magnetyczny obejmujący ramkę zmniejsza się, a więc w obwodzie indukuje się SEM i płynie prąd indukcyjny o natężeniu I.
- Na ramkę działa siła $F = BIL$. Żeby ramka mogła przesuwać się ruchem jednostajnym, trzeba na nią działać siłą zewnętrzną o wartości F.
- Jeżeli ramka przesunie się o $\Delta x = v\Delta t$, to praca siły zewnętrznej wynosi

$$\Delta W_1 = F\Delta x = BIL\Delta x = BI\Delta S = I\Delta\Phi_B. \tag{2}$$

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Z drugiej strony prąd płynący w obwodzie wykonuje pracę (znak minus oznacza wykonanie pracy przez układ przewodników)

$$\Delta W_2 = -\mathcal{E} I \Delta t. \tag{3}$$

- Z zasady zachowania energii stwierdzamy, że praca wykonana przez siły zewnętrzne będzie równa pracy prądu elektrycznego, $\Delta W_1 = \Delta W_2$, $I \Delta \Phi_B = -\mathcal{E} I \Delta t$,

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}. \tag{4}$$

- Otrzymaliśmy prawo indukcji Faradaya.

Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

- Rozważmy dalej wartość SEM pomijając znak minus

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t} = BLv. \tag{5}$$

- Jeżeli w obwodzie jest opór R, to płynący prąd ma natężenie $I = \mathcal{E}/R = BLv/R$.
- Działająca siła zewnętrzna musi mieć wartość $F = BIL = B^2L^2v/R$.
- Moc działającej siły jest równa szybkości wydzielania się energii termicznej w ramce

$$P = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R} = \left(\frac{BLv}{R}\right) R = I^2R. \tag{6}$$

Indukowane pole elektryczne

- Zmienny strumień magnetyczny wytwarza indukowaną SEM, a przy zamkniętym obwodzie może płynąć prąd indukowany. Oznacza to, że w obwodzie musi istnieć pole elektryczne, które przemieszcza ładunki.
- Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne. Jest to inne sformułowanie prawa indukcji Faradaya.
- SEM w obwodzie można wyrazić jako całkę po konturze zamkniętym z pola elektrycznego

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{7}$$

- Nowa postać prawa Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{8}$$

Cewki i indukcyjność

- Kondensator może służyć do wytworzenia pola elektrycznego o zadanej wartości natężenia E. Podobnie cewka (solenoid) może być zastosowana do wytworzenia pola magnetycznego o zadanej indukcji B.
- Jeżeli prąd o natężeniu I płynie przez cewkę o N zwojach, to wytwarza ona pole magnetyczne B. Oznaczmy strumień pola magnetycznego przenikającego jeden zwój przez Φ_B.
- Indukcyjność własną cewki L definiujemy jako $N\Phi_B = LI$.
- Jeżeli prąd w cewce zmienia się, to powstaje SEM

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{9}$$

Obliczanie indukcyjności cewki

- Rozważmy odcinek o długości d długiej cewki mającej n zwojów na jednostkę długości.
- Strumień pola magnetycznego przenikający tą część cewki wynosi $N\Phi_B = (nd)(BS)$, gdzie B jest indukcją w cewce, a S polem przekroju poprzecznego cewki.
- Z prawa Ampere'a wiemy, że $B = \mu_0 In$.
- Indukcyjność własna cewki wynosi

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{ndBS}{I} = \frac{nSd(\mu_0 In)}{I} = \mu_0 n^2 Sd. \qquad (10)$$

- Indukcyjność na jednostkę długości wynosi $L/d = \mu_0 n^2 S$.
- Jednostką indukcyjności w układzie SI jest henr, $1\text{henr} = 1H = 1T \cdot m^2/A$.

Indukcja wzajemna

- Rozważmy układ dwóch cewek ustawionych w ten sposób, że strumień magnetyczny wytwarzany przez prąd płynący w jednej z nich przenika powierzchnię zwojów drugiej. Zmiana prądu w jednej z nich powoduje powstanie SEM indukcji w drugiej. Jest to zjawisko indukcji wzajemnej.
- Oznaczmy przez N_2 liczbę zwojów drugiej cewki, Φ_{12} strumień magnetyczny pochodzący od pierwszej cewki, przenikający jeden zwój drugiej cewki.
- Indukcyjność wzajemną między cewkami M określamy związkiem $N_2\Phi_{12} = MI_1$ $(M \sim N_1 N_2)$.
- Jeżeli prąd w pierwszej cewce zmienia się, to w drugiej cewce powstaje SEM

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d(N_2\Phi_{12})}{dt} = -\frac{d(MI_1)}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}. \quad (11)$$

Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

- Rozważmy cewkę o indukcyjności L, w której płynie prąd I'. Zwiększenie prądu płynącego w cewce spowoduje powstanie SEM samoindukcji. Źródło dołączone do cewki wykona pracę

$$\Delta W = \mathcal{E}' \Delta q' = L \frac{\Delta I'}{\Delta t} \Delta q' = L I' \Delta I'. \tag{12}$$

- Praca potrzebna do zwiększenia natężenia prądu od 0 do I wynosi

$$W = \int_0^I L I' dI' = \frac{L I^2}{2}. \tag{13}$$

Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

- Korzystając ze związków na L i B mamy

$$W = \frac{\mu_0 n^2 S d I^2}{2} = \frac{(\mu_0 n I)^2 S d}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} S d. \tag{14}$$

- Wyrażenie Sd jest objętością przestrzeni zamkniętą zwojami cewki, w której panuje jednorodne pole magnetyczne o indukcyjności B. Wyrażenie $B^2/(2\mu_0)$ jest gęstością energii magnetycznej.
- Energia cewki z prądem jest zmagazynowana w polu magnetycznym. Cewka może oddać tą energię, kiedy będziemy ją odłączać od źródła, np. na oporniku wydzieli się ciepło.

Indukowane pole magnetyczne

- Opis zjawiska indukcji magnetycznej nasunął Maxwellowi postulat, że zmienne pole elektryczne wytwarza pole magnetyczne. Ilościowo można to zapisać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{15}$$

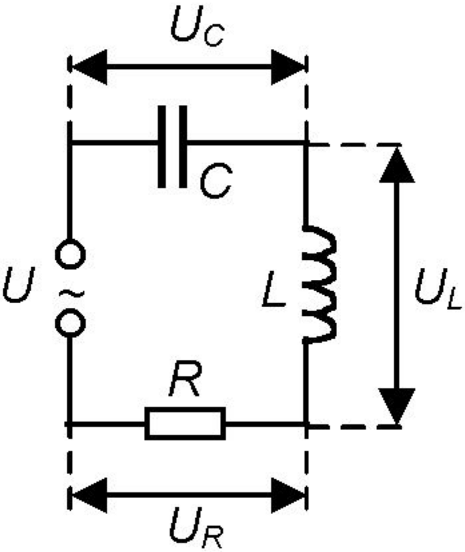
- Wyrażenie $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ ma wymiar prądu. Jest ono traktowane jako natężenie fikcyjnego prądu, zwanego prądem przesunięcia.
- Istnienie prądu przesunięcia można stwierdzić w doświadczeniu z kondensatorem ładowanym pewnym prądem. Rosnące pole elektryczne między okładkami kondensatora wytwarza pole magnetyczne.
- Jeżeli weźmiemy pod uwagę zwykłe prądy łącznie z prądem przesunięcia, to otrzymamy uogólnione prawo Ampere'a.

Równania Maxwella

Równania Maxwella zapisane przy założeniu, że nie występują materiały dielektryczne i magnetyczne.

- Prawo Gaussa dla elektryczności
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{16}$$
- Prawo Gaussa dla magnetyzmu
$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{17}$$
- Prawo Faradaya
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{18}$$
- Uogólnione prawo Ampere'a
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p. \tag{19}$$

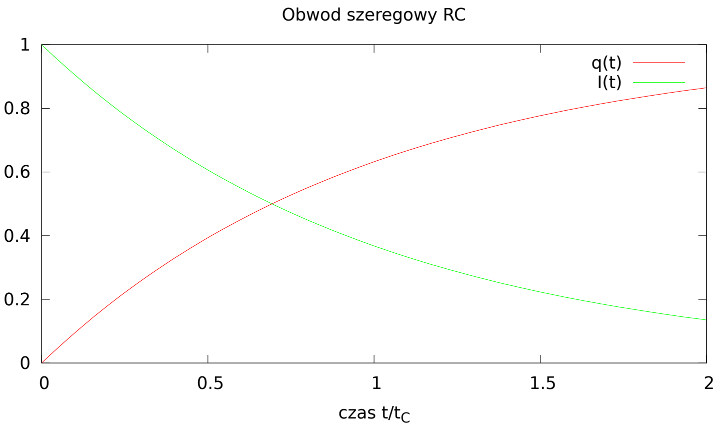
Obwód RLC



Obwody RC

- Rozważmy obwód szeregowy RC składający się z nienaładowanego kondensatora o pojemności C ($q = 0$ dla $t = 0$), doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E}$ i opornika o oporze R.
- Po zamknięciu obwodu następuje ładowanie kondensatora aż do momentu, gdy $q/C = \mathcal{E}$.
- Z drugiego prawa Kirchoffa $\mathcal{E} - IR - q/C = 0$.
- Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $q(t)$, przy czym $I = dq/dt$.
- Rozwiązanie to $q(t) = C\mathcal{E}[1 - \exp(-t/\tau_C)]$, gdzie $\tau_C = RC$ jest pojemnościową stałą czasową obwodu o wymiarze czasu, $1\Omega \cdot 1F = 1s$.
- Prąd ładowania $I = (\mathcal{E}/R)\exp(-t/\tau_C)$.

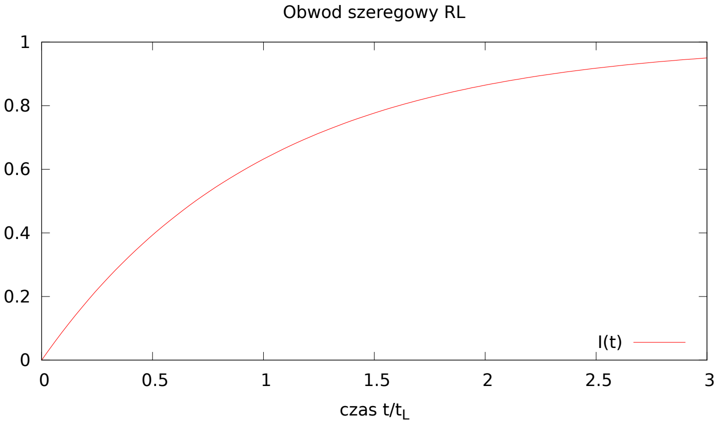
Obwody RC



Obwody RL

- Rozważmy obwód szeregowy RL składający się z cewki o indukcyjności L, doskonałego źródła o SEM $\mathcal{E}$ i opornika o oporze R.
- Po zamknięciu obwodu prąd rośnie, czemu przeciwstawia się SEM samoindukcji cewki.
- Z drugiego prawa Kirchoffa $\mathcal{E} - IR - L(dI/dt) = 0$.
- Otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $I(t)$, przy czym $I = 0$ dla $t = 0$.
- Rozwiązanie to $I(t) = (\mathcal{E}/R)[1 - \exp(-t/\tau_L)]$, gdzie $\tau_L = L/R$ jest indukcyjną stałą czasową obwodu o wymiarze czasu, $1H/1\Omega = 1s$.

Obwody RL



Obwody LC

- Rozważmy obwód szeregowy LC składający się z cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C.
- Z drugiego prawa Kirchoffa $L(dI/dt) + q/C = 0$,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \tag{20}$$

- Rozpoznajemy równanie oscylatora harmonicznego,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{21}$$

- W obwodzie występują drgania, $q = q_m \cos(\omega t + \phi)$, $I = -\omega q_m \sin(\omega t + \phi)$
- Zachowana jest energia $LI^2/2 + q^2/(2C)$.

Drgania tłumione w obwodzie RLC

- Rozważmy obwód szeregowy RLC składający się z opornika o oporze R, cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C.
- Z drugiego prawa Kirchoffa $\mathcal{E} - IR - L(dI/dt) - q/C = 0$,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \tag{22}$$

- Rozpoznajemy równanie oscylatora harmonicznego tłumionego z siłą wymuszającą ($\mathcal{E}$).
- Częstość drgań swobodnych $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
- Jeżeli $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\Omega t)$, to amplituda drgań będzie zależała od częstości Ω.

Drgania tłumione w obwodzie RLC

- Możemy poszukiwać warunku rezonansu (maksimum amplitudy) dla $q(t)$ lub $I(t)$. Należy pamiętać, że są to różne funkcje Ω i mają maksimum w innych miejscach.
- Amplituda dla prądu wynosi

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [\Omega L - 1/(\Omega C)]^2}}, \tag{23}$$

gdzie Z nazywamy impedancją obwodu.

- Rezonans dla prądu $\Omega_r = 1/\sqrt{LC} = \omega$.
- Prąd w obwodzie jest zwykle przesunięty w fazie w stosunku do SEM wymuszającej.

Moc w obwodach prądu zmiennego

- W obwodzie RLC chwilowa szybkość rozpraszania energii (moc chwilowa) na oporniku wynosi

$$P = I^2 R = I_m^2 R \sin^2(\Omega t - \phi). \tag{24}$$

- Interesuje nas zwykle moc średnia

$$P_{sr} = \frac{I_m^2 R}{2} = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 R = I_{sk}^2 R = I_{sk} U_{sk}, \tag{25}$$

gdzie I_{sk} jest wartością skuteczną natężenia prądu.

- Wartość skuteczna napięcia $U_{sk} = U_m/\sqrt{2}$.
- Przy tej samej mocy średniej mamy pewien zakres swobody (duży prąd i małe napięcie lub na odwrót).

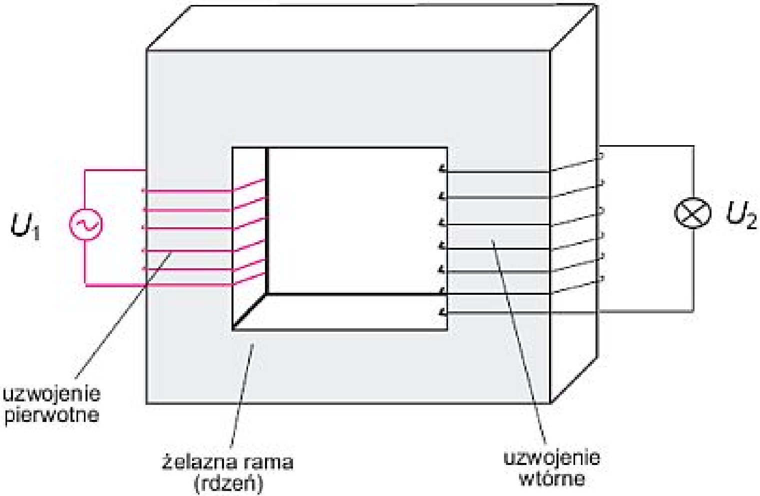
Transformatory

- W systemie przesyłania energii elektrycznej pożądane są małe natężenia prądu, aby straty omowe I^2R były jak najmniejsze.
- Transformator to urządzenie służące do podwyższania lub obniżania (transformowania) napięcia prądu zmiennego.
- Uzwojenie pierwotne o N_1 zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego U_1. Prąd pierwotny indukuje w rdzeniu zmienny strumień magnetyczny, który przenika uzwojenie wtórne,

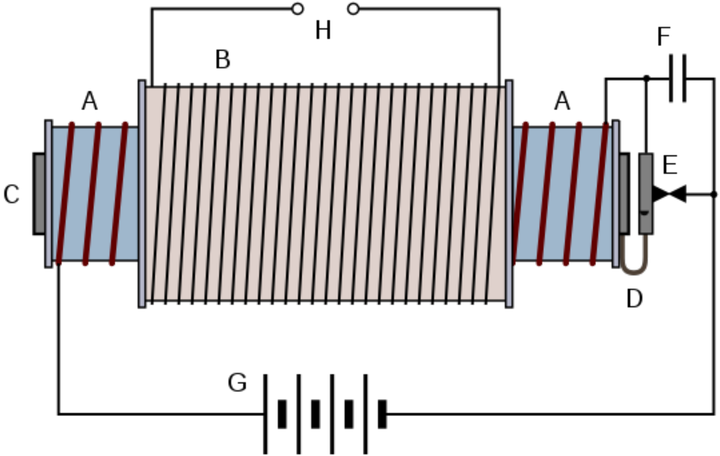
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2}. \qquad (26)$$

- Stosunek N_2/N_1 nazywamy przekładnią transformatora.
- Transformacja napięcia $U_2 = U_1 N_2/N_1$.
- Transformacja prądów $I_2 = I_1 N_1/N_2$.

Transformator



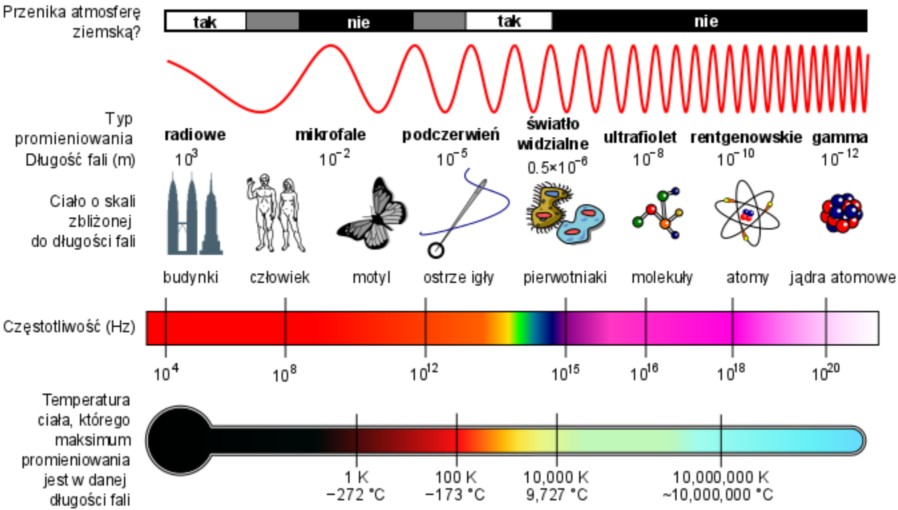
Cewka Ruhmkorffa



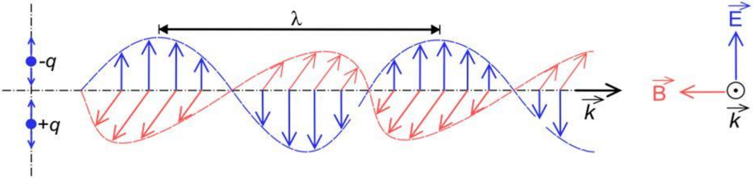
Pole elektromagnetyczne

- Pole elektryczne i pole magnetyczne są przejawami pola elektromagnetycznego, które ujawnia swoje dwa oblicza w zależności od obranego układu odniesienia.
- Falę elektromagnetyczną można traktować jako przenoszenie drgań pola elektromagnetycznego od jednego punktu przestrzeni do drugiego.
- Fale elektromagnetyczne nie wymagają obecności ośrodka i mogą rozchodzić się również w próżni.
- Wielkim osiągnięciem Maxwella było pokazanie, że światło widzialne ($400 - 700 nm$) jest falą elektromagnetyczną, a tym samym, że optyka jest gałęzią elektromagnetyzmu.

Widmo fal elektromagnetycznych



Płaska fala elektromagnetyczna



Płaska fala elektromagnetyczna

- Fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi. Rozchodzenie się tych fal opisują równania Maxwella.
- Wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest zawsze prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.
- Iloczyn wektorowy $\vec{E} \times \vec{B}$ zawsze wyznacza kierunek rozchodzenia się fali.
- Oscylacje pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$ są zgodne w fazie.
- Biegnąca fala płaska monochromatyczna (jedno λ)

$$E = E_m \sin(kx - \omega t), \quad B = B_m \sin(kx - \omega t). \tag{27}$$

- Prędkość fali

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B}. \tag{28}$$

Wektor Poyntinga

- Energetyczne właściwości fali elektromagnetycznej opisuje wektor Poyntinga
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}. \tag{29}$$
Jest to energia przenoszona przenoszona przez falę w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali.
- Kierunek wektora Poyntinga jest w każdym punkcie kierunkiem rozchodzenia się fali i kierunkiem przepływu energii w tym punkcie.
- Wartość średnią modułu $\vec{S}$ nazywamy natężeniem fali $I_{fali} = S_{sr} = E_m B_m/2$.
- Dla fali kulistej rozchodzącej się z punktowego źródła $I_{fali} = P_{zr}/(4\pi r^2)$.

Ciśnienie promieniowania

- Fale elektromagnetyczne przenoszą zarówno energię, jak i pęd. Oświetlając jakieś ciało wywieramy na nie ciśnienie promieniowania.
- Załóżmy, że w czasie Δt ciało uzyskało od promieniowania energię ΔU przez zaabsorbowanie promieniowania. Zmiana pędu ciała wynosi $\Delta p = \Delta U/c$.
- Jeżeli promieniowanie w całości odbiło się od ciała wzdłuż pierwotnego kierunku, to zmiana pędu wyniesie $\Delta p = 2\Delta U/c$.
- Ciśnienie promieniowania przy absorpcji

$$p_a = \frac{\Delta p}{S\Delta t} = \frac{I_{fali} S\Delta t}{S\Delta tc} = \frac{I_{fali}}{c}. \tag{30}$$

- Ciśnienie promieniowania przy odbiciu $p_o = 2I_{fali}/c$.

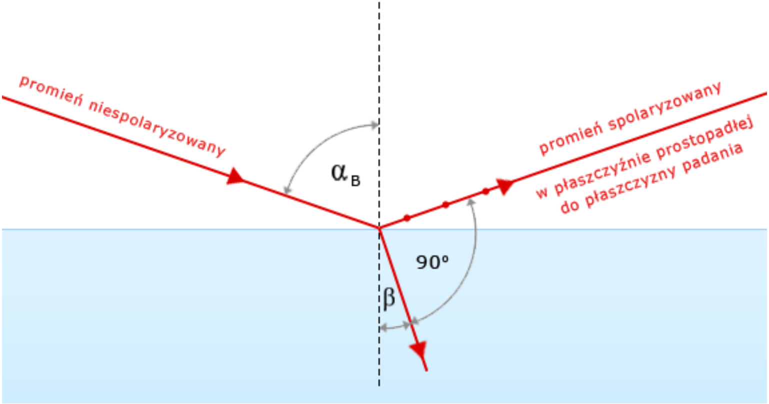
Polaryzacja

- Polaryzacją nazywamy właściwość fali poprzecznej polegającą na zmianach kierunku oscylacji rozchodzącego się zaburzenia w określony sposób. Dla fali elektromagnetycznej określamy płaszczyznę drgań fali jako płaszczyznę, w której leżą wektory $\vec{E}$.
- W fali spolaryzowanej liniowo jest jedna płaszczyzna drgań nie zmieniająca się w czasie.
- W fali spolaryzowanej kołowo pole $\vec{E}$ ma stałą wartość, ale jego kierunek się zmienia. W ustalonym punkcie przestrzeni koniec wektora $\vec{E}$ zatacza okrąg w czasie jednego okresu fali.
- Fale elektromagnetyczne emitowane przez zwykłe źródła światła (Słońce, żarówka) są niespolaryzowane, wektor $\vec{E}$ w dowolnym punkcie ma przypadkowy kierunek.

Metody polaryzacji światła

- Selektywna absorpcja. Pewne materiały mają właściwość przepuszczania tylko fali drgającej w jednej płaszczyźnie, a pochłaniania wszystkich innych fal (dichroizm).
- Podwójne załamanie. Istnieją kryształy, w których prędkość światła zależy od kierunku. Takie kryształy mają dwa współczynniki załamania. Wiązka światła niespolaryzowanego padająca na taki kryształ może rozszczepić się na dwa promienie spolaryzowane liniowo w kierunkach wzajemnie prostopadłych. Przykłady: pryzmat Nikola, ćwierćfalówka.
- Odbicie pod kątem Brewstera.
- Rozpraszanie światła, czyli absorpcja, a potem reemisja światła spolaryzowanego przez ośrodek.

Odbicie pod kątem Brewstera



Prawo Malusa

- Rozważmy światło spolaryzowane liniowo padające na polaryzator tak, że wektor $\vec{E}_0$ tworzy kąt θ z kierunkiem polaryzacji polaryzatora.
- Składowa przechodząca jest równa $E = E_0 \cos\theta$.
- Natężenie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego, wobec tego natężenie światła przechodzącego przez polaryzator wynosi

$$I_{fali} = I_{fali,0} \cos^2\theta. \tag{31}$$

  Jest to prawo Malusa.
- W typowym eksperymencie mamy dwa polaryzatory z kierunkami polaryzacji ustawionymi pod kątem θ. Pierwszy polaryzator ze światła niespolaryzowanego przygotowuje światło spolaryzowane liniowo, a drugi (analizator) sprawdza prawo Malusa.

Prawo Malusa

Polaryzacja światła –prawo Malusa

Polaryzacja światła