Kinematyka i dynamika bryły sztywnej
4/15

Andrzej Kapanowski
https://ufkapano.github.io/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2021

Kinematyka bryły sztywnej

- Ruch bryły sztywnej można złożyć z ruchów prostszych, które będą albo ruchami postępowymi, albo ruchami obrotowymi.
- Ruchem postępowym bryły nazywamy ruch, w czasie którego dowolna prosta sztywno związana z tą bryłą przemieszcza się równolegle do samej siebie. Stąd kinematyczna analiza ruchu postępowego bryły sprowadza się do analizy ruchu jednego, dowolnego punktu materialnego tej bryły.
- Ruchem obrotowym bryły nazywamy ruch, w którym punkty materialne tworzące tę bryłę poruszają się po okręgach współśrodkowych, których środki leżą na jednej prostej zwanej osią obrotu.

Kinematyczne wielkości kątowe

- Podczas ruchu obrotowego punkty materialne bryły zakreślają łuki o różnym promieniu dokoła osi obrotu. Jednocześnie obracają się w tym samym czasie o taki sam kąt ϕ. Stąd przy badaniu kinematycznych właściwości ruchu obrotowego bryły posługujemy się wyłącznie kinematycznymi wielkościami kątowymi, a nie wielkościami liniowymi.
- Położenie kątowe bryły to kąt zakreślony w czasie obrotu bryły przez promień leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i łączący dowolny punkt bryły z tą osią.
- Jeżeli promień r zakreśli łuk o długości s, to

$$\phi = \frac{s}{r} \text{ (miara łukowa kąta).} \tag{1}$$

Prędkość kątowa

Prędkość kątowa średnia

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Prędkość kątowa chwilowa

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}. \tag{3}$$

Jednostką drogi kątowej jest radian (rad).
Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę (rad/s).

Przyspieszenie kątowe

Przyspieszenie kątowe średnie

$$\epsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \tag{4}$$

Przyspieszenie kątowe chwilowe

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}. \tag{5}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest radian na sekundę do kwadratu (rad/s^2).

Zmienne obrotowe

- Prędkość i przyspieszenie kątowe są wektorami. Obrót nie jest wektorem, ale mały (elementarny) przyrost kąta $d\phi$ jest wektorem.
- 1 pełny obrót $= 360^\circ = 2\pi r/r = 2\pi rad$.
- Związek między zmiennymi liniowymi a kątowymi: $s = \phi r$, $v = \omega r$, $a_t = \epsilon r$, gdzie a_t to przyspieszenie styczne.
- Dla ruchu jednostajnego po okręgu mamy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \tag{6}$$

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \tag{7}$$

Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym

- Stałe przyspieszenie kątowe chwilowe $\epsilon = \mathrm{const}$.
- Prędkość kątowa chwilowa $\omega = \omega_0 + \epsilon t$, gdzie $\omega_0 = \omega(0)$.
- Przyspieszenie kątowe średnie $\epsilon_{sr} = \epsilon$.
- Położenie kątowe $\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \epsilon t^2/2$, gdzie $\phi_0 = \phi(0)$.
- Prędkość kątowa średnia $\omega_{sr} = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Dynamika bryły sztywnej

- W ruchu postępowym bryła sztywna może być uważana za punkt materialny, gdyż wszystkie jej części poruszają się w taki sam sposób.
- Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego należy jednak dopiero sformułować, gdyż inne wielkości dynamiczne decydują o przebiegu i charakterze tego ruchu.

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

- Dla punktu materialnego mamy $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.
- Dla bryły sztywnej w ruchu obrotowym sumujemy energię kinetyczną wszystkich punktów materialnych bryły

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2, \tag{8}$$

gdzie r_i to odległości punktów od osi obrotu.

- Określamy moment bezwładności bryły

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \ E_k = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{9}$$

- Jednostką momentu bezwładności w układzie SI jest $1 kg \cdot m^2$.

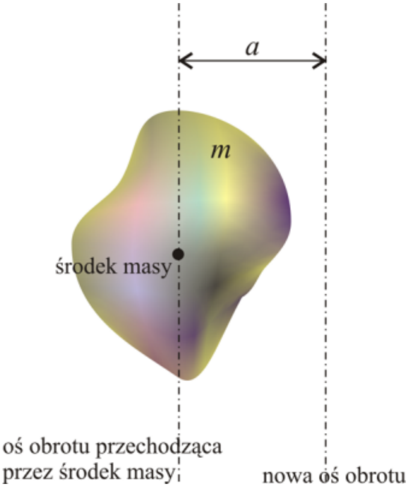
Twierdzenie Steinera

- Moment bezwładności bryły jest wyznaczony względem ustalonej osi obrotu. Wygodnie jest wyróżnić moment bezwładności bryły I_{CM} względem osi przechodzącej przez środek masy bryły.
- Twierdzenie Steinera mówi, że moment bezwładności bryły I względem osi obrotu *nie przechodzącej* przez środek masy tej bryły wynosi

$$I = I_{CM} + mh^2, \tag{10}$$

gdzie m jest masą całej bryły, a h jest odległością między osią obrotu a środkiem masy bryły.

Twierdzenie Steinera



Twierdzenie Steinera

- Wartości I_{CM} dla prostych brył można znaleźć w tablicach albo obliczyć samemu.
- Przykład: kula, $I_{CM} = \frac{2}{5} m R^2$.
- Przykład: rura o promieniach $R_1 > R_2$, oś obrotu jest osią symetrii obrotowej, $I_{CM} = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$.
- Przykład: walec, oś obrotu prostopadła do osi symetrii obrotowej, $I_{CM} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$.
- Przykład: płyta prostokątna o rozmiarach $a \times b$, oś obrotu prostopadła do płyty, $I_{CM} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$.

Moment siły

- Moment siły jest wielkością wektorową równą iloczynowi wektorowemu wektora położenia punktu przyłożenia siły i wektora siły działającej na bryłę

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{11}$$

- Wartość momentu siły wynosi

$$M = rF \sin \phi. \tag{12}$$

Zasady dynamiki dla bryły sztywnej

Bezwładność jest cechą ciał, która przejawia się również w ruchu obrotowym.

Pierwsza zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

W inercjalnym układzie odniesienia bryła nie obraca się lub obraca się ruchem jednostajnym, gdy nie działają na nią żadne momenty sił lub gdy działające momenty sił równoważą się wzajemnie.

Powyższa zasada pozwala na podanie warunku równowagi bryły w ruchu obrotowym.

Zasady dynamiki dla bryły sztywnej

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Gdy na bryłę działa niezrównoważony moment siły, wtedy nadaje on tej bryle przyspieszenie kątowe, którego wartość jest proporcjonalna do wartości momentu siły, a zwrot i kierunek są identyczne jak zwrot i kierunek tego momentu siły:

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}. \tag{13}$$

Moment bezwładności bryły jest miarą bezwładności bryły w ruchu obrotowym.

Zasady dynamiki dla bryły sztywnej

Trzecia zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Jeżeli ciało A działa na ciało B momentem siły $\vec{M}_{AB}$, wtedy ciało B działa na ciało A momentem siły $\vec{M}_{BA}$ równym co do wartości, równoleglym i przeciwnie zwróconym do momentu siły $\vec{M}_{AB}$:

$$\vec{M}_{AB} = -\vec{M}_{BA}. \tag{14}$$

Moment pędu

- Moment pędu punktu materialnego jest równy

$$\vec{L}_p = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{15}$$

gdzie $\vec{r}$ jest odległością punktu materialnego względem punktu odniesienia.

- Moment pędu bryły względem danego punktu odniesienia określamy jako sumę momentów pędu jej punktów materialnych względem tego samego punktu odniesienia

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i]. \tag{16}$$

Moment pędu

- Każda bryła sztywna, niezależnie od kształtu, ma trzy prostopadłe osie przechodzące przez środek masy tej bryły, które mają specjalną właściwość. Jeżeli bryła obraca się wokół jednej z tych osi z prędkością kątową $\vec{\omega}$, to spełniona jest zależność wektorowa
$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{17}$$
- Te trzy osie nazywamy osiami głównymi bryły.
- Na ogół jednak $\vec{L}$ nie jest równoległe do $\vec{\omega}$.

Moment pędu

Obliczmy zmianę momentu pędu pod wpływem działającego momentu siły

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\epsilon} = \vec{M}. \tag{18}$$

Otrzymane równanie jest innym sformułowaniem drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{19}$$

Moment pędu

- Ogólna postać momentu pędu, $\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$,

$$
\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.
\end{aligned} \tag{20}
$$

- Ogólna postać energii kinetycznej w ruchu obrotowym

$$
\begin{aligned}
E_k &= \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 \\
&+ 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z).
\end{aligned} \tag{21}
$$

- Dziewięć liczb $I_{\alpha\beta}$ tworzy symetryczny tensor momentu bezwładności ($I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$).

Zachowanie momentu pędu

Zasada zachowania momentu pędu (bryła sztywna)

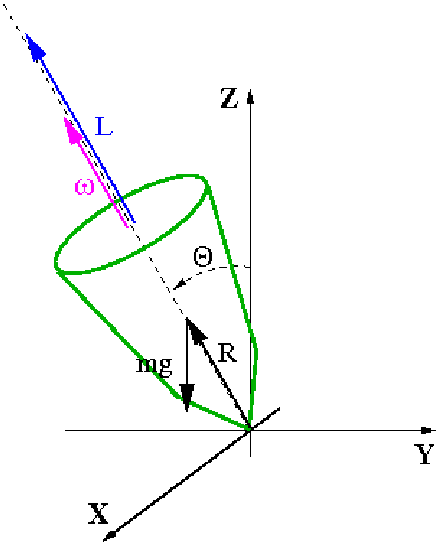
Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem nieruchomej osi obrotu bryły sztywnej jest równy zeru, to moment pędu bryły względem tej osi obrotu nie zmienia się podczas ruchu.

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega} = \text{const.} \tag{22}$$

Zasada zachowania momentu pędu (układ punktów)

Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych wynosi zero, to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.

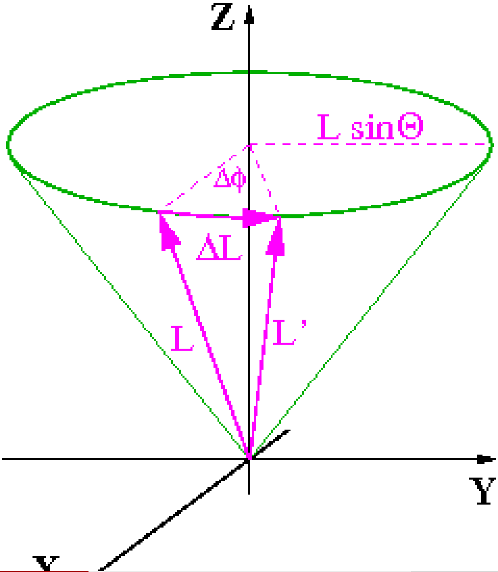
Precesja



Precesja

- Rozważmy bąk obracający się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ względem swojej osi symetrii obrotowej.
- Moment pędu wynosi $\vec{L}$ i jest równoległy do $\vec{\omega}$.
- Na bąk działa moment siły prostopadły do $\vec{L}$ o wartości $\vec{M} = \vec{R} \times m\vec{g}$.
- Zmienia się tylko kierunek momentu pędu i osi obrotu. Zjawisko to nazywamy precesją.
- W przedziale czasu Δt moment pędu zmieni się o $\Delta L = M\Delta t = mgR\sin\theta\Delta t$.

Precesja



Precesja

- Pozioma składowa momentu pędu obróci się o kąt

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{mgR\sin\theta\Delta t}{L\sin\theta}. \tag{23}$$

- Częstość precesji ω_p wynosi

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{mgR}{L}. \tag{24}$$

- Idealna precesja zachodzi przy szczególnym wyborze warunków początkowych. W ogólnym przypadku na precesję nakładają się oscylacje osi obrotu ciała, które nazywamy nutacją.

Zachowanie momentu pędu

- Przykład: łyżwiarz wykonujący piruet na lodzie.
- Przykład: żyroskop.
- Przykład: jojo (zachowanie energii mechanicznej).

Praca w ruchu obrotowym

- Elementarna praca w ruchu obrotowym jest określona przez iloczyn skalarny wektorów działającego na bryłę momentu siły i elementarnego kąta obrotu

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\phi}. \tag{25}$$

- Całkowita praca wyraża się całką

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \vec{M} \cdot d\vec{\phi}. \tag{26}$$

- Moc w ruchu obrotowym

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \tag{27}$$

Toczenie się ciał

- Rozważmy walec toczący się po podłożu bez poślizgu. Wykonuje on ruch postępowy i obrotowy.
- Droga w ruchu postępowym wiąże się z drogą kątową

$$s = \phi R. \tag{28}$$

- Różniczkowanie po czasie daje nam związek

$$v_{CM} = \omega R, \tag{29}$$

  gdzie v_{CM} to prędkość liniowa środka walca.
- Zauważmy, że punkty walca stykające się z podłożem mają prędkość równą zeru, natomiast punkty najdalej położone od podłoża mają prędkość $2v_{CM}$.

Energia kinetyczna bryły

Jeżeli bryła porusza się zarówno ruchem postępowym z prędkością v_{CM} jak i obrotowym z prędkością kątową ω dokoła osi przechodzącej przez środek masy tej bryły, to jej energia kinetyczna jest równa sumie

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2. \tag{30}$$

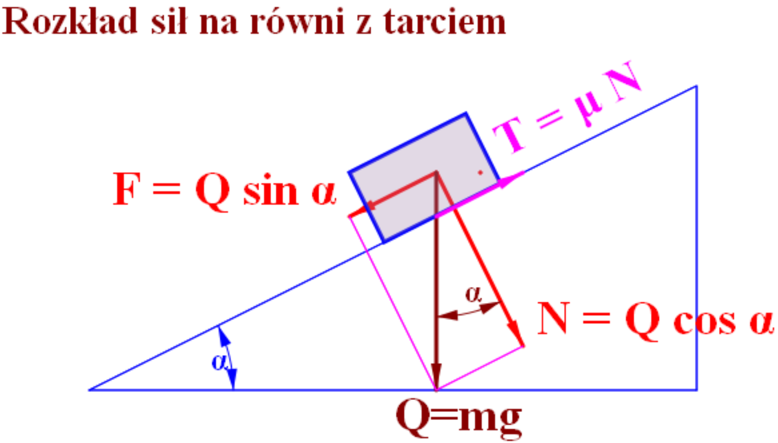
Właściwości tarcia

- Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego $\vec{T}_s$ równoważy składową siły zewnętrznej $\vec{F}_t$ równoległą do powierzchni.
- Maksymalna wartość siły $\vec{T}_s$ dana jest wzorem $T_{s,max} = \mu_s N$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, a N jest wartością siły normalnej, z jaką ciało działa na powierzchnię.
- Jeżeli $\vec{F}_t$ przekracza $T_{s,max}$, to ciało zaczyna się ślizgać po powierzchni, a wartość siły tarcia gwałtownie maleje do wartości równej $T_k = \mu_k N$, gdzie μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego.
- Współczynniki μ_s i μ_t są bezwymiarowe, a ich wartości wyznaczamy doświadczalnie.

Zadanie: ciało spoczywa na równi pochyłej

- Mamy dane ciało o masie m spoczywające na równi pochyłej o kącie nachylenia α. Szukamy siły tarcia statycznego, działającego na ciało.
- Siły wzdłuż kierunku równoległego do równi, $mg \sin\alpha = T$, tarcie równoważy siłę ściągającą (składowa ciężaru ciała).
- Siły wzdłuż kierunku prostopadłego do równi, $N = mg \cos\alpha$, nacisk ciała na równię, równoważony przez siłę sprężystości podłoża.
- Największy kąt nachylenia równi, dla którego ciało jeszcze spoczywa dostajemy z warunku $T_{max} = \mu_s N$, a stąd $\operatorname{tg} \alpha_{max} = \mu_s$.

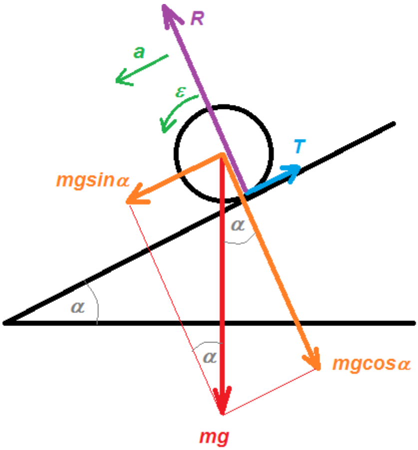
Zadanie: ciało zsuwające się z równi pochyłej



Zadanie: ciało zsuwające się z równi pochyłej

- Mamy dane ciało o masie m umieszczone na równi pochyłej o kącie nachylenia α. Szukamy przyspieszenia ciała zsuwającego się z równi.
- Równanie ruchu dla kierunku równoległego do równi, $mg \sin\alpha - T = ma$, gdzie T jest siłą tarcia kinetycznego, $T = \mu_k N$.
- Dla kierunku prostopadłego do równi mamy $N = mg\cos\alpha$.
- Wynik, $a = g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha)$.
- Warunek $a > 0$ daje ograniczenie $\operatorname{tg}\alpha > \mu_k$.

Zadanie: ciało staczające się z równi pochyłej



Zadanie: ciało staczające się z równi pochyłej

- Mamy dane ciało (np. walec lub kula) o masie m i momencie bezwładności I względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy i równoległej do równi. Ciało umieszczono na równi pochyłej o kącie nachylenia α. Szukamy przyspieszenia ciała staczającego się z równi bez poślizgu.
- Równanie ruchu postępowego dla kierunku równoległego do równi, $mg \sin\alpha - T = ma$.
- Równanie ruchu obrotowego, $Tr = I\epsilon$.
- Przy braku poślizgu zachodzi $r\epsilon = a$.
- Rozwiązanie

$$a = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{I + mr^2}. \tag{31}$$

Zadanie: ciało staczające się z równi pochyłej

- Tarcie toczne wynikające z równań wynosi

$$T = \frac{Img \sin\alpha}{I + mr^2}. \tag{32}$$

- Dyskusja: tarcie toczne T nie może przekroczyć maksymalnej wartości tarcia statycznego $T_{max} = \mu_s mg \cos\alpha$.
- Największa wartość kąta nachylenia równi wynosi

$$\operatorname{tg}\alpha_{max} = \mu_s \frac{I + mr^2}{I}. \tag{33}$$