Pole magnetyczne 10/15

Andrzej Kapanowski https://ufkapano.github.io/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2024

Prąd elektryczny

- Prąd elektryczny jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych.
- Ruch ładunków może mieć miejsce w przewodnikach, a w pewnych warunkach również w półprzewodnikach.
- W metalach ładunek przenoszą głównie elektrony przewodnictwa, czyli elektrony pochodzące z powłoki zewnętrznej, najsłabiej związane z jądrem.
- W cieczach nośnikami prądu elektrycznego są jony dodatnie (kationy) i jony ujemne (aniony).
- W rozrzedzonych gazach nośnikami prądu elektrycznego są elektrony i jony.
- Przykłady: błyskawice, prądy w nerwach organizmów żywych, prądy w instalacjach elektrycznych, wiatr słoneczny.

Natężenie prądu elektrycznego

• Natężenie prądu elektrycznego jest to stosunek ładunku Δq , jaki przejdzie przez dowolny pomyślany przekrój przewodnika w ciągu czasu Δt ,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.\tag{1}$$

- Jednostką natężenia prądu elektrycznego w układzie SI jest amper, 1A = 1C/s.
- Ładunek przepływający przez dany przekrój przewodnika w przedziale czasu od t_1 do t_2 możemy znaleźć przez całkowanie natężenia prądu ($\Delta q = I \Delta t$),

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$
, $q = (t_2 - t_1)I$ dla $I = \text{const.}$ (2)

2024

Gęstość prądu elektrycznego

- Natężenie prądu jest wielkością makroskopową charakteryzującą przepływ prądu w całości. Niekiedy niezbędne są dokładniejsze informacje o przepływie.
- Gęstość prądu elektrycznego określamy jako stosunek natężenia prądu elektrycznego ΔI do pola powierzchni ΔS przekroju poprzecznego prostopadłego do kierunku uporządkowanego ruchu ładunku,

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}. (3)$$

• Jednostką gęstości prądu elektrycznego w układzie SI jest amper na metr kwadratowy, $1A/m^2$.

Gęstość prądu elektrycznego

- Dokładnej biorąc gęstość prądu jest wektorem, którego kierunek wyznacza styczna do toru poruszającego się ładunku dodatniego. Zwrot wektora \vec{j} określa się umownie jako kierunek ruchu ładunku dodatniego.
- Mając gęstość prądu możemy obliczyć natężenie prądu, które jest skalarem,

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}. \tag{4}$$

Natężenie prądu jest strumieniem gęstości prądu przenikającego daną powierzchnię.

 Za kierunek prądu w przewodnikach przyjmuje się kierunek ruchu ładunków dodatnich.

Prędkość unoszenia

- Prąd płynie w przewodniku o długości d wtedy, gdy między jego końcami podtrzymywana jest różnica potencjałów U. Wtedy w przewodniku istnieje pole elektryczne E=U/d.
- Elektrony w przewodniku poruszają się chaotycznie zderzając się z jonami znajdującymi się w węzłach sieci krystalicznej, ale mają pewną prędkość unoszenia (dryfu) v_d w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego.
- Liczba ładunków w walcu o przekroju S i długości d wynosi $q=n_0Sde$, gdzie n_0 to koncentracja ładunków, czyli liczba ładunków w jednostce objętości.

Prędkość unoszenia

- Ładunek q przepłynie przez przekrój S w czasie $t = d/v_d$.
- Natężenie prądu $I = q/t = n_0 Sev_d$.
- Gęstość prądu $j = I/S = n_0 e v_d$.
- Po przejściu do postaci wektorowej mamy

$$\vec{j} = (n_0 e) \vec{v}_d, \tag{5}$$

gdzie n₀ e jest gęstością ładunku nośników.

• Znając gęstość prądu j oraz koncentrację nośników n_0 można wyznaczyć prędkość unoszenia v_d



Prędkość unoszenia

- Przykład: Przyjmijmy, że w miedzi każdy atom dostarcza jeden elektron przewodnictwa.
- Koncentracja nośników wynosi

$$n_0 = \frac{Nm}{Vm} = \frac{\rho}{m} = \frac{N_A \rho}{M} = 8.49 \times 10^{28} / m^3,$$
 (6)

gdzie m to masa atomu miedzi, $\rho=8.96\times 10^3 \, kg/m^3$ gęstość miedzi, M=63.54 g/mol masa molowa miedzi.

• Jeżeli drut miedziany ma przekrój $S=1mm^2$, płynący prąd natężenie I=2A, to

$$v_d = \frac{j}{n_0 e} = \frac{I}{Sn_0 e} = 0.15 \, mm/s.$$
 (7)

Opór elektryczny i prawo Ohma

 Doświadczenie pokazuje, że w przewodnikach metalicznych natężenie prądu płynącego w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia,

$$I = \frac{U}{R},\tag{8}$$

gdzie R nazywamy oporem elektrycznym (rezystancją). Jest to prawo Ohma.

- Jednostką oporu elektrycznego w układzie SI jest om, $1om = 1\Omega = 1V/A$.
- Istnieją przewodniki, dla których prawo Ohma nie jest spełnione, np. rozrzedzone gazy. Takie przewodniki nazywa się nieliniowymi, ponieważ wykres I od U nie jest wtedy linią prostą.

Opór właściwy i przewodność właściwa

 Wartość R zależy od rozmiarów geometrycznych przewodnika, dlatego określamy opór właściwy ρ, który charakteryzuje dany materiał.

$$R = \frac{\rho d}{S},\tag{9}$$

gdzie d jest długością przewodnika, a S jego przekrojem poprzecznym.

- Jednostką oporu właściwego w układzie SI jest om razy metr, $1\Omega \cdot m$.
- Przewodność właściwa (przewodnictwo elektryczne) σ jest odwrotnością oporu właściwego, $\sigma=1/\rho$.

Mikroskopowe prawo Ohma

• Prawo Ohma I=U/R możemy zapisać w innej postaci, nazywanej mikroskopowym prawem Ohma,

$$jS = \frac{(Ed)S}{\rho d} = \sigma ES, \tag{10}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \tag{11}$$

- Wybrane wartości oporu właściwego w temperaturze pokojowej $(20^{\circ}C)$: miedź (przewodnik) $1.7\times 10^{-8}\Omega m$, czysty krzem (półprzewodnik) $2.5\times 10^{3}\Omega m$, szkło (izolator) $10^{10}-10^{14}\Omega m$.
- Mikroskopowo w metalach: $v_d = a\tau = eE\tau/m_e$, $j = n_0 e v_d = n_0 e^2 \tau E/m_e$, $\sigma = n_0 e^2 \tau/m_e$, gdzie τ to średni czas pomiędzy zderzeniami (dla miedzi $\tau = 2.5 \times 10^{-14} s$).

Zależność oporu od temperatury

- Opór elektryczny właściwy, jak wiele innych wielkości fizycznych, zależy od temperatury.
- Dla metali zależność oporu właściwego od temperatury jest w przybliżeniu liniowa w szerokim zakresie temperatur,

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \tag{12}$$

gdzie T_0 jest wybraną temperaturą odniesienia (zwykle $T_0 = 293K$), a ρ_0 oporem właściwym w tej temperaturze.

- Wielkość α jest nazywana współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego.
- ullet Ze związku międzu ho a R wynika

$$R - R_0 = R_0 \alpha (T - T_0). \tag{13}$$

Moc w obwodach elektrycznych

- Rozważmy obwód elektryczny składający się ze źródła połączonego przewodnikami o zaniedbywalnym oporze z pewnym elementem obwodu, np. opornikiem. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów U między biegunami, a w obwodzie płynie stały prąd elektryczny o natężeniu I.
- Źródło wykonuje pracę przenosząc ładunek pomiędzy zaciskami

$$\Delta W = U \Delta q = U I \Delta t. \tag{14}$$

• Moc P przekazywna ze źródła do elementu obwodu wynosi

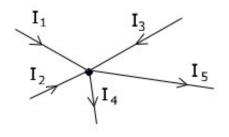
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = UI. \tag{15}$$

• Jednostki: $1V \cdot A = (1J/C)(1C/s) = 1J/s = 1W$.

Siła elektromotoryczna

- Źródło charakteryzuje różnica potencjałów na jego zaciskach zwana siłą elektromotoryczną (SEM) i jego oporność wewnętrzna R_w .
- Idealne źródło napięciowe ma $R_w = 0$.
- Źródła SEM: ogniwo elektryczne (bateria elektryczna), prądnica elektryczna, ogniwa słoneczne, ogniwa paliwowe, termoogniwa.
- Połączenie szeregowe kilku źródeł lub oporników nazywa się gałęzią. Gałęzie łączą się ze sobą w punktach zwanych węzłami. Gałęzie tworzą zamknięte ścieżki zwane oczkami. Te same gałęzie mogą wchodzić w skład wielu oczek.

Pierwsze prawo Kirchhoffa



$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$



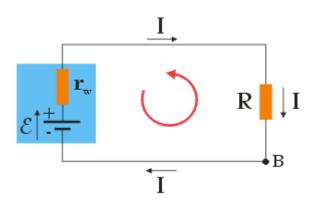
Pierwsze prawo Kirchhoffa

- Rozważmy węzeł obwodu elektrycznego z gałęziami z prądami dopływającymi do węzła i gałęziami z prądami odpływającymi z węzła.
- Pierwsze prawo Kirchhoffa mówi, że suma natężeń prądów dopływających do węzła musi być równa sumie natężeń prądów prądów odpływających z tego węzła.
- Pierwsze prawo Kirchhoffa jest konsekwencją zasady zachowania ładunku elektrycznego.
- Zwykle równanie na prądy zapisujemy w postaci $\sum_k I_k = 0$, gdzie prądy dopływające bierzemy ze znakiem plus $(+I_k)$, a prądy odpływające ze znakiem minus $(-I_k)$.

Drugie prawo Kirchhoffa

- Rozważmy oczko obwodu elektrycznego. Przyjmijmy następujące zasady oznaczania spadków potencjału.
- Prąd / płynący przez opornik R ma kierunek od wyższego potencjału do niższego, a spadek potencjału wynosi IR.
- Dla źródła SEM przejście od bieguna ujemnego do dodatniego daje wzrost potencjału o \mathcal{E} .
- Drugie prawo Kirchofa mówi, że algebraiczna suma zmian potencjału napotykanych przy pełnym obejściu oczka musi być równa zeru.
- Drugie prawo Kirchofa jest konsekwencją zasady zachowania energii.

Obwód o jednym oczku



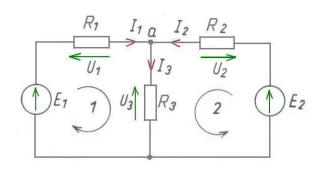
Obwód o jednym oczku

- Rozważmy obwód o jednym oczku składający się z rzeczywistego źródła SEM $\mathcal E$ o oporze wewnętrznym r_w , oraz opornika R.
- Z drugiego prawa Kirchhoffa

$$-\mathcal{E} + IR + Ir_w = 0, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_w}.$$
 (16)

• Jeżeli R=0, to takie warunki pracy źródła nazywamy zwarciem. Płynie wtedy duży prąd $I_z=\mathcal{E}/r_w$, źródło nagrzewa się, a to prowadzi zwykle do jego uszkodzenia.

Obwody o wielu oczkach



Obwody o wielu oczkach

- Rozważmy przykładowy obwód o wielu oczkach z idealnymi źródłami SEM. Na początku należy ustalić kierunek obchodzenia każdego oczka, np. kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara.
- Z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. (17)$$

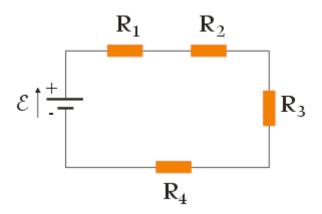
Z drugiego prawa Kirchhoffa

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0, \tag{18}$$

$$\mathcal{E}_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0. {19}$$

 Równania dla dużego oczka i drugiego węzła nie wnoszą nowych informacji.

Oporniki połączone szeregowo



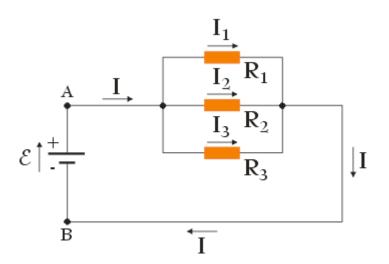
Oporniki połączone szeregowo

- Jeżeli w obwodzie elektrycznym występuje układ oporników, to nieraz możemy zastąpić ten układ opornikiem równoważnym, czyli pojedyńczym opornikiem o takim samym oporze, jak cały układ.
- Rozważmy dwa oporniki o oporach R_1 i R_2 połączone szeregowo. Natężenie prądu I płynącego przez oporniki jest takie samo, $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$,
- Całkowity spadek napięcia w układzie wynosi $U = U_1 + U_2 = I(R_1 + R_2) = IR_s$.
- Opór R_s opornika równoważnego wynosi

$$R_s = R_1 + R_2. (20)$$

Wzór można łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę oporników połączonych szeregowo.

Oporniki połączone równolegle



Oporniki połączone równolegle

- Rozważmy dwa oporniki o oporach R_1 i R_2 połączone równolegle. Spadek napięcia na obu opornikach jest taki sam, $U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I R_r$.
- Z pierwszego prawa Kirchhoffa $I = I_1 + I_2$,

$$\frac{U}{R_r} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2},\tag{21}$$

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. (22)$$

Wzór można łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę oporników połączonych szeregowo.

Prawo Joule'a-Lenza

Prąd płynący przez opornik wykonuje pracę

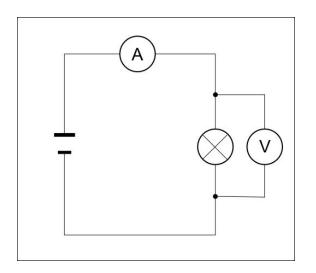
$$W = qU = UIt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt.$$
 (23)

• Praca ta zamienia się na ciepło, więc identyczne wzory określają ilość ciepła wydzielającego się w oporniku

$$Q = UIt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt. \tag{24}$$

Podane zależności stanowią treść prawa Joule'a-Lenza.

Amperomierz i woltomierz



Amperomierz i woltomierz

- Przyrząd używany do pomiaru natężenia prądu nazywamy amperomierzem. Amperomierz włącza się do obwodu szeregowo z opornikiem, w którym chcemy zmierzyć natężenie prądu. Istotne jest, aby opór R_A amperomierza był bardzo mały w porównaniu z innymi oporami w obwodzie.
- Miernik używany do pomiaru różnicy potencjałów nazywamy woltomierzem. Woltomierz dołącza się równolegle do opornika, na którym chcemy zmierzyć napięcie. Opór R_V woltomierza powiniem być bardzo duży w porównaniu z innymi oporami w obwodzie.

Pole magnetyczne

- Z doświadczeń wiadomo, że gdy ładunki są w ruchu względem jakiegoś układu odniesienia, wtedy występują między nimi siły oddziaływania różne od elektrostatycznych. Są to siły magnetyczne, a oddziaływanie realizuje się za pośrednictwem pola.
- Polem magnetycznym nazywamy taki stan przestrzeni, w którym na poruszające się ładunki działają siły.
- Pole magnetyczne wytwarzają prądy płynące w przewodnikach (elektromagnes) lub pewne ciała (magnesy trwałe).

Wektor indukcji magnetycznej

- Badania ruchów ładunków w polu magnetycznym sugerują, że pole magnetyczne trzeba scharakteryzować za pomocą wielkości wektorowej, nazywanej indukcją magnetyczną B.
- Siła $\vec{F_L}$ działająca na cząstkę o ładunku q, poruszającą się z prędkością \vec{v} , nosi nazwę siły Lorentza,

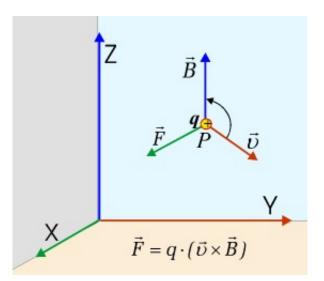
$$\vec{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B},\tag{25}$$

$$F_L = |q| vB \sin \alpha. \tag{26}$$

• Jednostką indukcji magnetycznej w układzie SI jest tesla, $1T = 1N \cdot s/(C \cdot m) = 1kg/(C \cdot s)$.



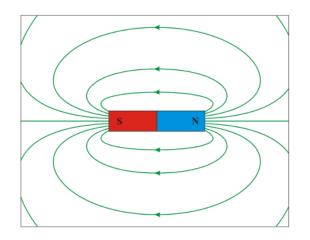
Siła Lorentza



Linie pola magnetycznego

- Pole magnetyczne przedstawia się graficznie za pomocą linii pola magnetycznego, o kierunku zgodnym z wektorem indukcji magnetycznej.
- W przypadku magnesu sztabkowego wszystkie linie przechodzą przez magnes i tworzą zamknięte pętle. Koniec magnesu, z którego linie wychodzą, nazywamy biegunem północnym. Przeciwny koniec magnesu to biegun południowy.
- Różnoimienne bieguny magnetyczne przyciągają się, a jednoimienne bieguny magnetyczne się odpychają.

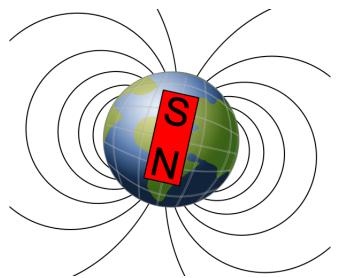
Linie pola magnetycznego magnesu sztabkowego



Pole magnetyczne Ziemi

- Wokół ziemi istnieje pole magnetyczne, którego źródłem jest jej jądro, lecz mechanizm jego powstawania nie jest znany.
- Biegun geomagnetyczny jest to punkt przecięcia się osi geomagnetycznej (osi dipola ziemskiego pola magnetycznego) z powierzchnią Ziemi. W geografii północny biegun geomagnetyczny oznacza biegun leżący na półkuli północnej, choć z fizycznego punktu widzenia jest to biegun południowy ziemskiego pola magnetycznego (który przyciąga północny biegun igły kompasu).
- W dziejach Ziemi dochodziło wielokrotnie do odwrócenia biegunów, co zostało utrwalone w skałach magmowych i niektórych osadowych, w postaci magnetyzacji szczątkowej.

Pole magnetyczne Ziemi



Ładunek w polu magnetycznym

- Rozważmy cząstkę o masie m i ładunku elektrycznym q, która porusza się z prędkością \vec{v} prostopadle do kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} w jednorodnym polu magnetycznym.
- Wartość siły Lorentza $F_L = qvB$.
- Siła Lorentza jest prostopadła do prędkości cząstki, czyli jest siłą dośrodkową w ruchu cząstki po okręgu $F = mv^2/r$.
- ullet Z porównania otrzymujemy promień toru cząstki r=mv/(qB).
- Czas jednego obiegu (okres) wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}.$$
 (27)

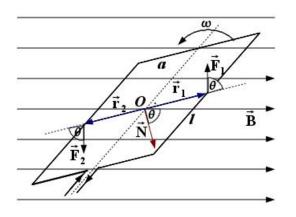
Przewodnik z prądem w polu magnetycznym

- Rozważmy przewodnik o długości L umieszczony prostopadle do kierunku wektora indukcji magnetycznej B w jednorodnym polu magnetycznym. Przez przewodnik przepływa prąd o natężeniu I.
- W przewodniku elektrony poruszają się z prędkością unoszenia \vec{v}_d , a więc działa na nie siła Lorentza. Elektron przepłynie przez cały przewodnik w czasie $t=L/v_d$.
- Całkowity ładunek, który przepłynie przez prostopadły przekrój przewodnika w czasie t wynosi $q=It=IL/v_d$.
- Siła działająca na przewodnik z prądem wynosi

$$F = qv_d B = \frac{IL}{v_d} v_d B = ILB, \tag{28}$$

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}. \tag{29}$$

Ramka z prądem w polu magnetycznym



Ramka z prądem w polu magnetycznym

- Rozważmy prostokątną ramkę o bokach a i b umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B. Przez ramkę płynie prąd o natężeniu I. Pole powierzchni ramki wynosi S = ab.
- Na boki ramki działają siły pochodzące od pola magnetycznego.
 Wypadkowa siła równa się zeru, ale powstaje niezerowy moment siły względem osi ramki

$$M = labB \sin \theta = lSB \sin \theta, \tag{30}$$

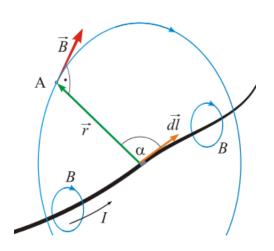
$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B},\tag{31}$$

gdzie $\mu = IS$ jest dipolowym momentem magnetycznym.

Energia potencjalna momentu magnetycznego w polu magnetycznym

$$E_{p}(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta. \tag{32}$$

Prawo Biota-Savarta



Prawo Biota-Savarta

• Prawo Biota-Savarta podaje wartość wektora indukcji $\Delta \vec{B}$ pola wytworzonego przez odcinek $\Delta \vec{s}$ z prądem I

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta \vec{s} \times \vec{r}}{r^3},\tag{33}$$

gdzie $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, T \cdot m/A$ jest stałą, zwaną przenikalnością magnetyczną próżni.

- Wniosek: Pole od przewodnika prostoliniowego z prądem w odległości R wynosi $B = \mu_0 I/(2\pi R)$.
- Wniosek: Pole od przewodnika kołowego w jego środku wynosi $B = \mu_0 I/(2R)$.



Siła oddziaływania przewodów

- Rozważmy dwa długie równoległe przewody, w których płyną prądy I_1 i I_2 . Odległość między przewodami wynosi d.
- Pole wytworzone przez przewód 1 w miejscu, w którym znajduje się przewód 2 wynosi $B_1 = \mu_0 I_1/(2\pi d)$.
- Siła jaka działa na przewód 2 wynosi

$$F_{12} = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L I_1 I_2}{2\pi d}.$$
 (34)

Analogicznie można pokazać, że

$$F_{21} = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 L I_1 I_2}{2\pi d}.$$
 (35)

 Przewody, w których płyną prądy równoległe, przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównoległe, odpychają się.

Prawo Ampere'a

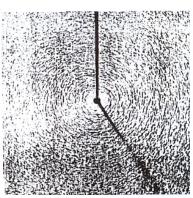
• Prawo Ampere'a pozwala powiązać całkę wzdłuż zamkniętego konturu z wektora indukcji \vec{B} , z całkowitym natężeniem prądu I_p przebijającego powierzchnię rozpiętą na tym konturze

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p.$$
(36)

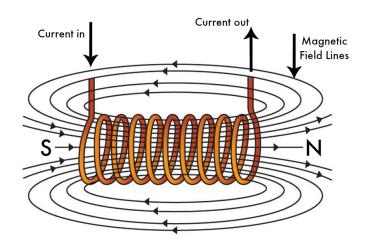
- Prawo Ampere'a jest szczególnie wygodne, jeżeli potrafimy uwzględnić szczególna symetrię zagadnienia.
- Przykład: Pole od przewodnika prostoliniowego z prądem, $B2\pi R = \mu_0 I_p$.
- Przykład: Pole wewnątrz długiego solenoidu $Bd = \mu_0 \, n \, ld$, n liczba zwojów na jednostkę długości.

Pole od przewodnika prostoliniowego





Pole solenoidu



Strumień magnetyczny

- Rozważmy mały płaski element powierzchni ΔS w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Elementowi powierzchni przyporządkowujemy wektor $\Delta \vec{S}$ prostopadły do powierzchni, o wartości równej polu powierzchni elementu (rozróżniamy górną i dolną stronę elementu powierzchni).
- Strumień magnetyczny przenikający przez element powierzchni określamy jako

$$\Delta \Phi_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{S}. \tag{37}$$

 Dla dużej powierzchni strumień magnetyczny obliczamy jako całkę po elementach powierzchni

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{38}$$

• Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber, $1Wb = 1T \cdot m^2$.

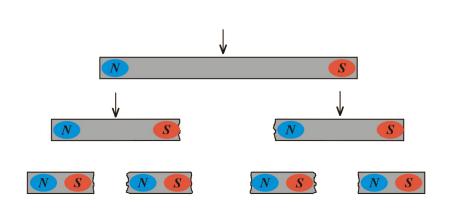
Prawo Gaussa dla pól magnetycznych

• Prawo Gaussa dla pól magnetycznych mówi, że wypadkowy strumień magnetyczny Φ_B przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy zeru,

$$\Phi_B = 0. (39)$$

Wniosek: Nie ma pojedyńczych biegunów magnetycznych
 (monopoli magnetycznych). Najprostszą strukturą magnetyczną,
 która może istnieć, jest dipol magnetyczny. Inne sformułowanie:
 pole magnetyczne jest bezźródłowe.

Prawo Gaussa dla pól magnetycznych



Właściwości magnetyczne materii

- Ze względu na właściwości magnetyczne substancje można podzielić na trzy grupy: diamagnetyki, paramagnetyki i ferromagnetyki.
- W diamagnetykach atomy wykazują tylko słabe indukowane momenty magnetyczne.
- W paramagnetykach atomy mają trwałe wypadkowe momenty magnetyczne, ale są one zorientowane przypadkowo.
- W ferromagnetykach atomy mają trwałe wypadkowe momenty magnetyczne, które są uporządkowane w domenach magnetycznych.