Płyny
6/15

Andrzej Kapanowski
http://users.uj.edu.pl/~ufkapano/

WFAIS, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

2020

Płyny

- Płyn to substancja zdolna do przepływu, czyli ciecz lub gaz. Płyn nie jest w stanie przeciwstawić się naprężeniu ścinającemu (naprężenie styczne); może działać siłą prostopadłą do swej powierzchni (naprężenie normalne).
- Cząsteczki płynu mogą się swobodnie poruszać jedne względem drugich i dlatego płyny nie mają określonej postaci, przyjmując kształt naczynia, w którym są zawarte.
- Gazy nie mają określonej objętości i zawsze całkowicie wypełniają dostępną im objętość.
- Przykłady cieczy w temperaturze pokojowej: woda, krew, rtęć, oliwa.

Płyny

- Hydrostatyka zajmuje się badaniem zachowania się płynów spoczywających, poddanych działaniu sił grawitacyjnych i sił zewnętrznych. Bada też zachowanie się ciał znajdujących się wewnątrz cieczy lub na jej powierzchni.
- Przy opisie płynów zamiast masy i siły korzystamy z gęstości i ciśnienia. Wynika to z rozciągłości substancji, braku kształtu, możliwej niejednorodności.

Gęstość

- Gęstość (masa właściwa) jest to stosunek masy pewnej ilości substancji do zajmowanej przez nią objętości.

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{1}$$

- Zakładamy, że objętość ΔV jest mała, ale o wiele większa od rozmiarów atomów. Zaniedbujemy "ziarnistość" materii.
- Gęstość jest wielkością skalarną. Jednostką gęstości jest kilogram na metr do sześcianu (kg/m^3).
- Wybrane gęstości (w kg/m^3): przestrzeń międzygwiazdowa 10^{-20}, powietrze ($20^\circ C$, $1atm$) 1.21, woda ($20^\circ C$, $1atm$) 10^3, rtęć $7.9 \cdot 10^3$, jądro uranu $3 \cdot 10^{17}$, czarna dziura (masa Słońca) 10^{19}.

Ciśnienie

- Ciśnienie definiujemy jako stosunek wartości siły prostopadłej do powierzchni, do wielkości tej powierzchni.

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{2}$$

- Jednostką ciśnienia w układzie SI jest paskal, $1Pa = 1N/m^2$. Inne jednostki to atmosfera fizyczna (atm), tor (Tr) nazywany milimetrem słupa rtęci.

$$1atm = 101325Pa = 760Tr = 760mmHg. \tag{3}$$

- Wybrane ciśnienia w Pa: środek Słońca $2 \cdot 10^{16}$, środek Ziemi $4 \cdot 10^{11}$, dno największej głębi oceanicznej $1.1 \cdot 10^8$, normalne ciśnienie krwi (skurczowe) $1.6 \cdot 10^4$ ($120mmHg$).

Płyny w spoczynku

- W wyniku działania sił grawitacyjnych wewnątrz cieczy występuje ciśnienie hydrostatyczne, którego wartość zależy od głębokości.
- Rozważmy ciecz w naczyniu. Określamy umownie pewną obiętość cieczy w kształcie walca.

$$F_2 = F_1 + mg, \;\; p_2 S = p_1 S + \rho S \Delta y g, \;\; p_2 = p_1 + \rho g \Delta y. \tag{4}$$

$$p = p_0 + \rho g h \quad \text{(ciśnienie na głębokości } h\text{)}. \tag{5}$$

- Ciśnienie w pewnym punkcie w płynie znajdującym się w równowadze statycznej zależy od głębokości tego punktu pod powierzchnią płynu, a nie zależy od poziomych rozmiarów płynu ani zbiornika, w którym płyn jest zawarty.

Wzór barometryczny

- Wzór barometryczny określa zależność między wysokością w polu grawitacyjnym h liczoną od poziomu odniesienia, a ciśnieniem gazu p

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right), \tag{6}$$

  gdzie p_0 i ρ_0 to ciśnienie i gęstość gazu na poziomie odniesienia. Zakładamy stałą temperaturę gazu.
- Ciśnienie powietrza zmienia się wraz z wysokością nad poziomem morza w bardziej skomplikowany sposób, ponieważ temperatura nie jest stała na różnych wysokościach, a także przyspieszenie ziemskie maleje wraz z wysokością.

Prawo Pascala

Prawo Pascala (1652)

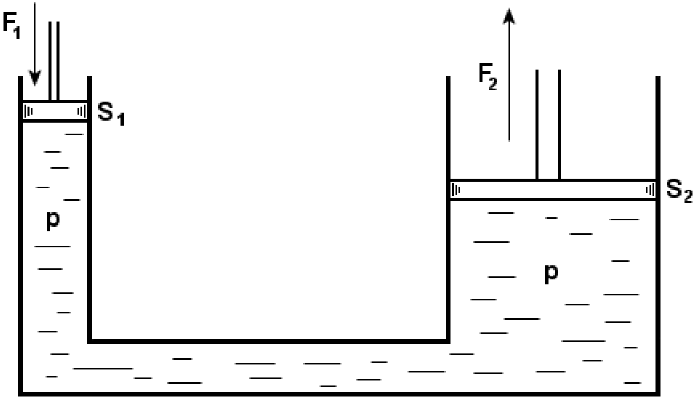
Ciśnienie wywierane na ciecz zamkniętą w jakimś naczyniu jest przenoszone bez zmiany wartości na każdy element tej cieczy i ścianki zawierającego ją naczynia.

Prawo Pascala można wykorzystać do budowy prasy hydraulicznej, która umożliwia działanie mniejszą siłą na dłuższej drodze, zamiast działania większą siłą na krótszej drodze.

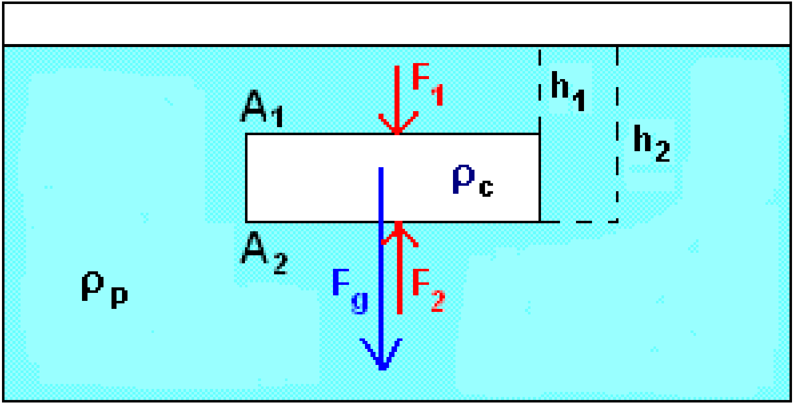
$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \tag{7}$$

$$W = F_1 h_1 = p(S_1 h_1) = p(S_2 h_2) = F_2 h_2. \tag{8}$$

Prasa hydrauliczna



Zasada pływania ciał



Zasada pływania ciał

Prawo Archimedesa (starożytność)

Każde ciało zanurzone w płynie doznaje działania siły wyporu skierowanej pionowo do góry, równej co do wartości ciężarowi wypartego przez to ciało płynu.

Ciało pływa po powierzchni cieczy lub wewnątrz cieczy, gdy jego ciężar jest równy działającej na nie sile wyporu.

Płyny w ruchu

- Badaniem ruchu płynów zajmuje się hydrodynamika, w której płyn traktuje się jako ośrodek ciągły.
- Ruch płynów rzeczywistych jest bardzo złożony i ciągle jeszcze nie umiemy go w pełni opisać. Dlatego rozważa się przepływ płynu idealnego, który można w niektórych sytuacjach stosować do przybliżonego opisu powolnego przepływu cieczy o małej lepkości i gazów.
- Płyn idealny (doskonały) jest nielepki i nieściśliwy (stała gęstość płynu).

Płyny w ruchu

- Przepływ jest ustalony (stacjonarny), gdy prędkość poruszającego się płynu w każdym punkcie nie zmienia się z upływem czasu.
- Przepływ jest laminarny (warstwowy), jeżeli stanowi zespół warstw przemieszczających się jedna względem drugiej bez ich mieszania (wirów).
  Zwykle po przekroczeniu pewnej prędkości krytycznej następuje przejście od przepływu laminarnego do przepływu turbulentnego [liczba Reynoldsa].
- Przepływ jest turbulentny (burzliwy), jeżeli w płynie warstwy się mieszają i powstają wiry.

Równanie ciągłości

- Rozważmy przepływ płynu idealnego przez poziomą rurę o zmiennym przekroju poprzecznym. Chcemy wyprowadzić zależność między prędkością v i polem przekroju poprzecznego A.
- W przedziale czasu Δt przez różne przekroje przepływa taka sama objętość płynu ΔV (płyn nieściśliwy)

$$\Delta V = A\Delta x = Av\Delta t. \tag{9}$$

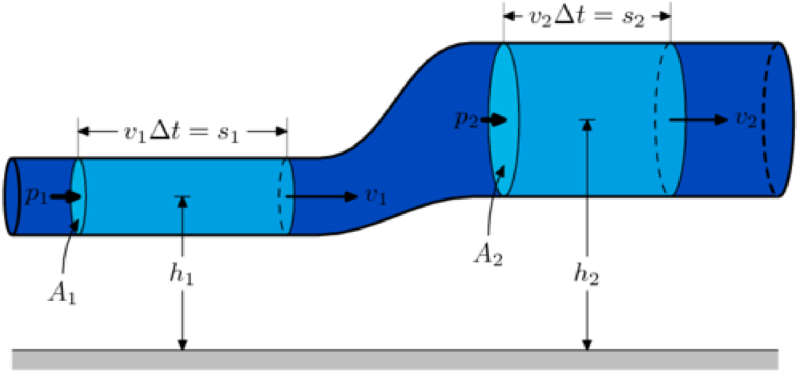
- Dla różnych przekrojów otrzymujemy

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t, \tag{10}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{(równanie ciągłości).} \tag{11}$$

- Równanie ciągłości wyraża zasadę zachowania materii (masy) w hydrodynamice.

Równanie Bernoulliego



Równanie Bernoulliego

- Rozważmy przepływ płynu idealnego przez rurę o zmiennym przekroju i zmiennej wysokości nad poziom odniesienia. Chcemy znaleźć zależność między ciśnieniami i prędkościami płynu w różnych miejscach rury.
- Z zasady zachowania energii $\Delta E_k = W_g + W_p$.
- Zmiana energii kinetycznej elementu płynu

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2). \tag{12}$$

- Praca w polu grawitacyjnym (ujemna)

$$W_g = -\Delta m g (h_2 - h_1) = -\rho g \Delta V (h_2 - h_1). \tag{13}$$

Równanie Bernoulliego

- Praca związana z ciśnieniem

$$W_p = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2, \tag{14}$$

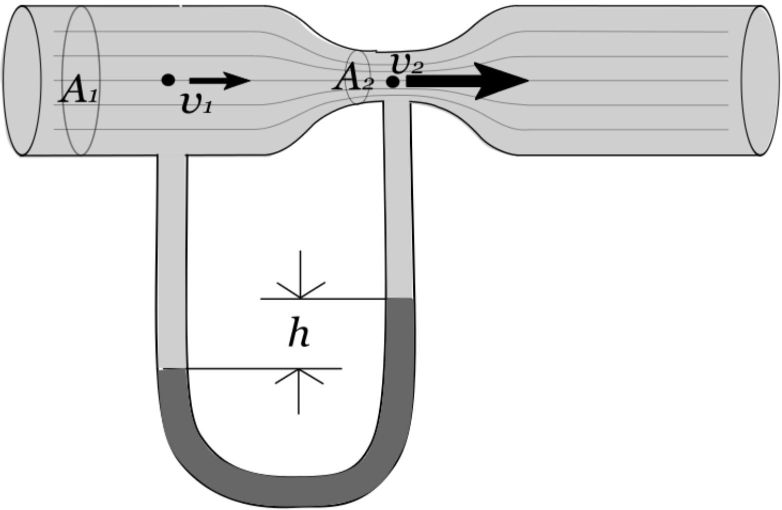
$$W_p = -(p_2 - p_1) \Delta V. \tag{15}$$

- Po przekształceniach otrzymujemy równanie Bernoulliego

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2, \tag{16}$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}. \tag{17}$$

Zwężka Venturiego



Zwężka Venturiego

- Zwężka (dysza) Venturiego jest to przyrząd służący do pomiaru prędkości przepływu płynu.
- Z równania ciągłości $v_1 A_1 = v_2 A_2$.
- Z równania Bernoulliego mamy

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \tag{18}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right], \tag{19}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)A_2^2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}. \tag{20}$$

Zjawiska transportu i unoszenia

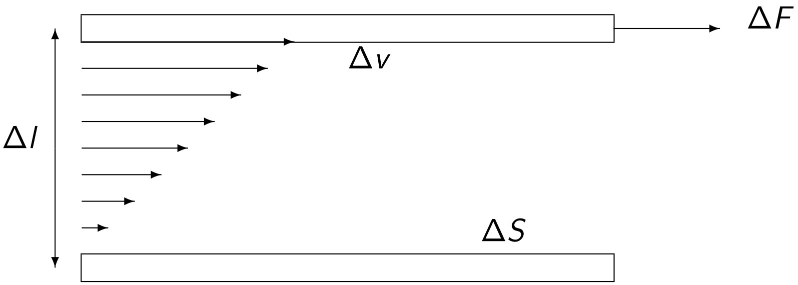
- Wyjaśnienie wielu zjawisk występujących w płynach umożliwia kinetyczno-molekularna teoria budowy ciał. Jeżeli w płynie występują obszary różniące się temperaturą, ciśnieniem, czy składem chemicznym, to pojawiają się zjawiska wyrównywania, typowo nieodwracalne, związane z ruchem cieplnym cząsteczek.
- Jeżeli w chwili początkowej w danym układzie występują w różnych miejscach różnice pewnych wielkości, to w wyniku mikroruchów cząsteczek po pewnym czasie nastąpi wyrównywanie, chyba że *celowo z zewnątrz podtrzymujemy owe różnice, aby wywołać zjawisko przepływu, transportu*.

Zjawiska transportu i unoszenia

- Lepkość (tarcie wewnętrzne) wiąże się z transportem pędu przez cząsteczki.
- Przewodnictwo cieplne jest związane z transportem energii przez cząsteczki.
- Dyfuzja wiąże się z transportem samej masy ciała.
- Makroskopowym zjawiskiem wyrównania jest unoszenie (konwekcja), czyli przemieszczanie się całych dużych makroskopowych fragmentów płynu.

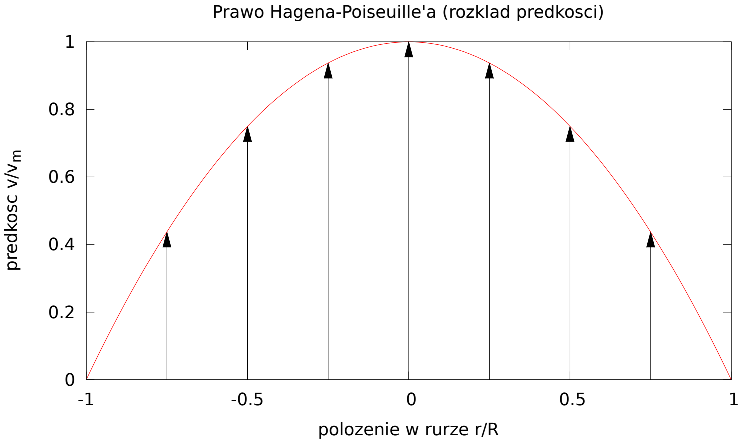
Lepkość

Rozkład prędkości płynu pomiędzy dwoma płaskimi, równoległymi, poruszającymi się względem siebie elementami.



$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta l} \quad (\eta \text{ - współczynnik lepkości}). \tag{21}$$

Prawo Hagena-Poiseuille'a



Prawo Hagena-Poiseuille'a

- Rozważmy laminarny przepływ cieczy lepkiej przez rurę o promieniu wewnętrznym R i długości L. Różnica ciśnień statycznych na końcach strugi wynosi Δp.
- Problem ma symetrię obrotową względem osi rury.
- Można pokazać, że prędkość cieczy zależy od odległości od środka rury

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2). \tag{22}$$

- Średnia prędkość cieczy wynosi

$$v_{sr} = \frac{\Delta p R^2}{8\eta L}. \tag{23}$$

Prawo Hagena-Poiseuille'a

- Objętość cieczy wypływająca z rury na jednostkę czasu dana jest przez prawo Hagena-Poiseuille'a

$$I = \frac{\Delta p \pi R^4}{8 \eta L}. \tag{24}$$

- Laminany charakter ma przepływ krwi przez układ kapilarnych naczyn krwionośnych w ludzkim ciele. Łączna długość tych kapilar jest rzędu $10^5 km$. Krew pędzona jest przez nie różnicą ciśnień wytwarzaną przez serce. Ścianki naczyń krwionośnych są elastyczne, dzięki czemu przy wysiłku mięśni przepływ krwi zwiększa się przez zmianę przekroju rurek.

Wzór Stokesa

- Rozważmy kulę o promieniu r poruszającą się w cieczy lepkiej z prędkością v. Przy małej prędkości przepływ jest laminary.
- Siła oporu z jaką ciecz działa na kulkę dana jest wzorem Stokesa

$$F = 6\pi\eta r v. \tag{25}$$

- Wzór Stokesa można zapisać w postaci wyrażenia podanego przez Newtona (wzór Newtona)

$$F = C_w \frac{\rho v^2}{2} S, \;\; C_w = \frac{12\eta}{r\rho v}, \tag{26}$$

gdzie $S = \pi r^2$ jest polem przekroju poprzecznego, C_w bezwymiarowy współczynnik, zależny od kształtu ciała opływanego przez ciecz, $\rho v^2/2$ energia kinetyczna na jednostkę objętości cieczy.

Liczba Reynoldsa

- We wzorze na C_w i w wielu wzorach dotyczących przepływu cieczy lepkiej pojawia się bezwymiarowa liczba, którą oznacza się przez Re i nazywa liczbą Reynoldsa

$$Re = \frac{r \rho v}{\eta}. \tag{27}$$

- Współczynnik oporu jest funkcją liczby Reynoldsa i kształtu ciała. Wynika stąd, że dla ciał i cieczy o takiej samej liczbie Reynoldsa współczynnik oporu jest taki sam.
- Liczbę Reynoldsa można otrzymać z analizy wymiarowej, jeżeli przyjmiemy, że czynniki fizyczne od których zależy siła oporu to ρ, η, v, r.

Przepływ turbulentny

- Dla małych wartości liczby Reynoldsa przepływ cieczy lepkiej np. przez rurę jest laminarny. Przy przekroczeniu pewnej wartości krytycznej Re_k przepływ staje się turbulentny, często występują pulsacje.
- Dla przepływu przez rurę $Re_k = 1160$. Poniżej Re_k rozkład prędkości w kapilarze jest paraboliczny. Powyżej Re_k rozkład prędkości zmienia się na bardziej płaski.
- Problem opisu turbulencji jest bardzo trudny i dotychczas nierozwiązany (problem milenijny).

Efekt Magnusa

- Jest to zjawisko polegające na powstawaniu siły prostopadłej do kierunku ruchu, działającej na obracający i poruszający się względem płynu walec lub inną bryłę obrotową.
- Wartość siły określa prawo Kutty-Żukowskiego. Za poruszającym się walcem przepływ płynu jest turbulentny. Wpływ lepkości jest pośredni, polega on na przyleganiu płynu do powierzchni walca i przyciąganiu warstw płynu.
- Zjawisko opisał w roku 1852 niemiecki fizyk H. G. Magnus. Można je zaobserwować w sporcie (piłka nożna, baseball, tenis stołowy), balistyce. Zjawisko było wykorzystywane przy budowie okrętów i maszyn latających.

Paradoks hydrodynamiczny

Doświadczenia ilustrujące prawo Bernoulliego i paradoks hydrodynamiczny.

- Kuleczka ping-pongowa w strumieniu powietrza.
- Strumień powietrza pomiędzy kartkami papieru.
- Zrywanie dachu domu.
- Wentylator okrętowy.

Pole prędkości

W hydrodynamice znane są dwa podejścia do opisu ruchu płynu.

1. Metoda Lagrange'a, w której śledzi się ruch *poszczególnej* cząsteczki płynu.
2. Metoda Eulera, w której śledzi się ruch *różnych* cząstek przechodzących przez *określony* punkt przestrzeni x, y, z. Wektor prędkości zależy od położenia i czasu, mówimy o polu wektora prędkości.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t) \tag{28}$$

Strumień pola

- Rozważmy ciecz nieściśliwą wypływającą z małego obszaru zamkniętego pomiędzy płaszczyznami x i $x + \Delta x$, y i $y + \Delta y$, z i $z + \Delta z$.

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z, \tag{29}$$

$$\Phi_x = [v_x(x + \Delta x) - v_x]\Delta y \Delta z = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \tag{30}$$

$$\Phi_y = [v_y(y + \Delta y) - v_y]\Delta x \Delta z = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z, \tag{31}$$

$$\Phi_z = [v_z(z + \Delta z) - v_z]\Delta x \Delta y = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z, \tag{32}$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta V. \tag{33}$$

Dywergencja

- Dywergencją (rozbieżnością) wektora pola nazywamy wyrażenie

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{34}$$

- Dywergencja jest przestrzenną gęstością strumienia pola wektorowego $\vec{v}$

$$\Phi = (\mathrm{div}\vec{v})\Delta V. \tag{35}$$

- Jeżeli $\vec{v} = f(r)\vec{r}$, to $\mathrm{div}\vec{v} = rf'(r) + 3f(r)$.
- Jeżeli $\vec{v} = C\vec{r}$, to $\mathrm{div}\vec{v} = 3C$.
- Jeżeli $\vec{v} = C\vec{r}/r^3$, to $\mathrm{div}\vec{v} = 0$.

Równanie ciągłości

- Dla cieczy nieściśliwej tyle samo cieczy wpływa co wypływa z każdego obszaru, więc $\Phi = 0$.
- Ze związku strumienia z dywergencją dostajemy inną postać równania ciągłości

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0. \tag{36}$$

Rotacja

- Rotacją pola wektorowego nazywamy wektor

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\hat{k}. \tag{37}$$

- Jeżeli $\vec{v} = f(r)\vec{r}$, to $\mathrm{rot}\vec{v} = 0$.
  Rotacja pola centralnego jest równa zeru. Wszystkie pola centralne są bezwirowe.

Rotacja a cyrkulacja

- Rozważmy cyrkulację wektora $\vec{v}$ po małym konturze.
- Na płaszczyźnie prostopadłej do z

$$dK_z = v_x \Delta x + v_y(x+\Delta x)\Delta y - v_x(y+\Delta y)\Delta x - v_y \Delta y, \tag{38}$$

$$dK_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \tag{39}$$

- Na płaszczyźnie prostopadłej do x

$$dK_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z. \tag{40}$$

- Na płaszczyźnie prostopadłej do y

$$dK_y = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \Delta z \Delta x. \tag{41}$$