

Uma breve incursão pelo Caos

Determinismo vs imprevisibilidade

- Impressão que sistemas completamente determinísticos não podem apresentar comportamento imprevisível
- Exemplo: Pêndulo duplo (<https://www.youtube.com/watch?v=4xViPStT5II>)

O Mapa Logístico

- Dinâmica discretizada de uma população
 - A população tende a aumentar na próxima geração
 - Com o excesso de indivíduos, os recursos ficam escassos e a população tende a diminuir na próxima geração
 - Consideraremos que a população máxima suportada pelo ambiente é 1

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Tarefa

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Faça gráficos de x_n como função de n para os seguintes valores de r : 0.5; 2.5; 3.1; 3.5 e 3.7. Use $x_0=0,5$ e n entre 1 e 50. Comente sobre cada resultado. Em particular comente sobre a existência de padrões.
- Refaça os gráficos anteriores considerando três condições iniciais consideravelmente diferentes, ou seja, trace, em um mesmo gráfico, as curvas para $x_0 = 0.25$, $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 0.75$. Comente
- Refaça o item anterior considerando três condições iniciais ligeiramente diferentes, ou seja, trace as curvas para $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.501$ e $x_0 = 0.5001$. Comente

Tarefa

Aqui, você deve ter percebido que para determinados valores de r o comportamento do sistema após um longo tempo não pode ser predito com segurança. Para explorar melhor esse comportamento, vamos adotar o seguinte procedimento:

- Considere 10000 valores de r igualmente espaçados entre 10^{-5} e 4. Para cada um desses valores de r , vamos iterar a equação logística 1000 vezes, i.e., $n_{\max} = 1000$. Em um gráfico de x_n como função de r , vamos plotar para cada valor de r os 100 últimos passos da evolução. Teremos 100 pontos no eixo y do gráfico para cada valor de r , que estará no eixo x . A figura gerada é conhecida como diagrama de bifurcação. Essa figura traz inúmeras informações importantes. Tire um tempo para pensar nela e analisar o que encontrou.
- Para explorar melhor uma das interessantes propriedades desse diagrama, refaça o procedimento anterior para valores de r entre 3.7 e 3.9 e para valores de r entre 3.840 e 3.856. No último caso, para melhorar a visualização, restrinja os valores do eixo y para o intervalo entre 0,44 e 0,56. Comente seus resultados.

Expoente de Liapunov

- Medida da influência da condição inicial no comportamento em longos tempos
- Assuma que a diferença entre duas condições iniciais seja Δx_0

$$\Delta x_n \sim \Delta x_0 e^{\lambda n}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

- Para lambda negativo, a diferença no comportamento em longos tempos é desprezível
- Para lambda positivo, as trajetórias se separam exponencialmente, caracterizando o comportamento caótico