

Heurística Construtiva Para o Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS)

Arthur Pontes Nader, Luiz Philippe Pereira, Rita Borges de Lima

November 2023

1 Resumo

O Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS) representa um desafio intrigante na otimização logística, onde os veículos, desprovidos de restrições de capacidade, são obrigados a retornar à base após completarem suas rotas. Este problema se destaca pela presença de uma frota fixa, acrescentando uma camada adicional de complexidade ao compará-lo com o clássico Problema de Roteamento de Veículos (VRP).

Neste projeto, exploramos uma heurística construtiva inovadora para abordar o NCVRP-FFS. As heurísticas construtivas são abordagens eficazes para encontrar soluções aproximadas em problemas complexos de otimização combinatória. Apresentaremos uma nova heurística denominada TBD, destacando como ela supera desafios específicos do NCVRP-FFS. Este projeto visa proporcionar uma compreensão aprofundada do problema, discutir as nuances em comparação com o VRP convencional e apresentar uma abordagem heurística para a resolução desses cenários logísticos desafiadores.

Clique para acessar o vídeo da apresentação: [link do youtube](#)

2 Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (VRP) é um desafio clássico na otimização combinatória, frequentemente descrito por um conjunto de clientes que devem ser atendidos por uma frota de veículos a partir de uma base central (depósito). Cada cliente possui uma demanda específica, e o objetivo é determinar rotas eficientes para os veículos, minimizando o custo total, que inclui distância percorrida ou tempo de viagem.

A formulação matemática do VRP pode ser expressa como um problema de programação linear inteira da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
& \text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{2, \dots, n\} \\
& && \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\
& && \sum_{i=1}^n x_{ij} - \sum_{i=1}^n x_{ji} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
& && \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset, V \\
& && u_i + d_i - u_j \leq Q(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in V, i \neq j \\
& && 0 \leq u_i \leq Q, \quad \forall i \in V \\
& && x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V
\end{aligned} \tag{1}$$

onde:

1. n é o número de clientes,
2. V é o conjunto de todos os nós (clientes e depósito),
3. Q é a capacidade máxima dos veículos,
4. c_{ij} é o custo associado à transição do nó i para o nó j ,
5. x_{ij} é uma variável binária que indica se há uma transição do nó i para o nó j ,
6. u_i é a carga acumulada no nó i ,
7. d_i é a demanda do cliente no nó i .

O Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS) adiciona a restrição de uma frota fixa ao VRP, não havendo uma capacidade máxima para os veículos, o que implica em que não é necessário retornar ao depósito até o fim da rota. A formulação matemática do NCVRP-FFS pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
& \text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{2, \dots, n\} \\
& && \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\
& && \sum_{i=1}^n x_{ij} - \sum_{i=1}^n x_{ji} = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
& && \sum_{i \in S} \sum_{j \in V \setminus S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset, V \\
& && \sum_{i=1}^n x_{i0} = m \\
& && x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V
\end{aligned} \tag{2}$$

onde:

1. m é o número fixo de veículos na frota,
2. n é o número de clientes,
3. V é o conjunto de todos os nós (clientes e depósito),
4. c_{ij} é o custo associado à transição do nó i para o nó j ,
5. x_{ij} é uma variável binária que indica se há uma transição do nó i para o nó j ,

A classe de complexidade do Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS) está intrinsecamente relacionada à sua natureza NP-difícil, herdada do VRP clássico. O VRP é conhecido por ser um problema NP-difícil, o que significa que não existe um algoritmo polinomial conhecido para resolvê-lo de maneira exata em tempo polinomial. O NCVRP-FFS compartilha essa complexidade devido à sua semelhança estrutural com o VRP convencional, mas adiciona uma camada adicional de desafio devido à restrição de frota fixa. A necessidade de determinar o número exato de veículos na frota aumenta a complexidade computacional do problema, tornando-o ainda mais desafiador. Nesse contexto, estratégias heurísticas tornam-se cruciais para encontrar soluções eficientes em tempo útil, explorando efetivamente o vasto espaço de soluções possíveis.

A heurística proposta neste artigo, denominada TBD, é desenvolvida para lidar com essa complexidade, oferecendo uma abordagem eficaz para encontrar soluções de boa qualidade em um tempo computacionalmente viável. Ao equilibrar a eficiência com a qualidade da solução, TBD busca superar os desafios inerentes ao NCVRP-FFS, destacando a importância de abordagens heurísticas na resolução de problemas de roteamento de veículos em contextos práticos.

Existem inúmeros problemas que, assim como o NCVRP-FFS, pertencem à classe de problemas de otimização combinatorial que envolvem o planejamento e a alocação eficiente de recursos em redes de transporte e logística. Alguns exemplos incluem:

- Problema do Caixeiro Viajante (TSP - Traveling Salesman Problem): O TSP envolve encontrar a rota mais curta que visita um conjunto de cidades exatamente uma vez e retorna à cidade de origem. Embora o TSP não envolva veículos com capacidade, é semelhante ao VRP, pois ambos envolvem o planejamento de rotas eficientes.
- Problema de Coleta de Lixo (CVRP - Capacitated Vehicle Routing Problem): O CVRP é uma variante do VRP em que veículos com capacidade limitada são usados para coletar lixo de contêineres em locais diferentes. É semelhante ao VRP, mas com a adição do desafio de coleta de resíduos.
- Problema de Entrega Fracionada (FVRP - Fractional Vehicle Routing Problem): O FVRP é uma variante do VRP onde a capacidade dos veículos é tratada de forma fracionada, permitindo que os veículos realizem entregas parciais. É útil quando a divisão exata da capacidade não é estritamente necessária.
- Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Depósitos (MDVRP - Multiple Depot Vehicle Routing Problem): Como mencionado anteriormente, o MDVRP envolve múltiplos depósitos com frotas de veículos, tornando-o uma extensão do VRP.

O estudo do NCVRP-FFS é motivado pela sua estreita relação com desafios logísticos do mundo real, nos quais a gestão eficiente de frotas desempenha um papel crucial. Em cenários práticos, muitas empresas enfrentam restrições orçamentárias e logísticas que tornam a otimização da utilização da frota uma prioridade estratégica. O NCVRP-FFS, ao considerar uma frota fixa de veículos, reflete com precisão as condições encontradas em diversas indústrias, como distribuição, serviços de entrega e coleta, e até mesmo na gestão de equipes em ambientes urbanos. Compreender e resolver o NCVRP-FFS não apenas contribui para a eficiência operacional, reduzindo custos e tempo de transporte, mas também abre caminho para soluções que têm impacto prático tangível. Ao abordar este problema sob a perspectiva de exemplos do mundo real, a pesquisa busca fornecer insights valiosos e ferramentas aplicáveis que possam ser incorporadas às estratégias logísticas cotidianas, aprimorando assim a eficiência e sustentabilidade operacional.

A heurística proposta nesse trabalho consiste em dividir o NCVRP-FFS em um conjunto de instâncias do TSP, dessa forma qualquer heurística para o TSP pode ser aplicado nos problemas resultantes para se obter a solução do problema original. As próximas seções apresentaram o procedimento estabelecido para a separação do VRP em instâncias do TSP.

3 Trabalhos Relacionados

Na busca por soluções inovadoras para o NCVRP-FFS, é fundamental explorar as pesquisas relacionadas que fornecem insights valiosos e estratégias que moldaram o campo. A seção a seguir revisitará trabalhos anteriores dedicados ao VRP e suas variantes, concentrando-se especialmente em abordagens que abordam questões similares de frota fixa e otimização de rotas. A análise de pesquisas relacionadas oferecerá uma perspectiva abrangente do estado atual do conhecimento

nesse domínio, destacando lacunas, desafios persistentes e avanços significativos que pavimentaram o caminho para a pesquisa atual sobre o NCVRP-FFS.

Existem diversas abordagens diferentes propostas para heurísticas capazes de solucionar o VRP. Gilbert Laporte, Stefan Ropke, e Thibaut Vidal [LRV], oferece uma revisão abrangente das heurísticas desenvolvidas para enfrentar os desafios variados apresentados pelo VRP. Os autores exploram uma série de técnicas heurísticas, incluindo métodos de construção de rotas, otimização local e abordagens híbridas, proporcionando uma visão profunda das estratégias aplicadas no contexto do VRP. A revisão deste capítulo é fundamental para compreender a evolução das heurísticas no campo, bem como para avaliar a eficácia de diferentes abordagens em diferentes variantes do VRP. Essa revisão será valiosa ao considerar a TBD proposta neste trabalho, proporcionando um contexto robusto para a análise e compreensão de sua eficácia no contexto do Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS).

Notavelmente, Ropke e Pisinger [PR07] destaca-se como uma contribuição notável para a resolução de Problemas de Roteamento de Veículos (VRP). A heurística apresentada pelos autores demonstra uma abordagem abrangente e flexível para lidar com diversas variantes do VRP. A ênfase recai sobre estratégias heurísticas gerais que visam otimizar a eficiência computacional e a qualidade das soluções. Ao examinar as técnicas propostas para construção de rotas e otimização local, o artigo oferece insights valiosos que têm implicações diretas na pesquisa atual sobre o Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS). A heurística proposta superou o baseline em 183 casos entre 486 experimentos. A revisão deste trabalho será instrumental para contextualizar as abordagens heurísticas em VRP, fornecendo uma base sólida para avaliar a TBD proposta neste artigo.

Em Vidal et al. [Vid+12], destaca-se como uma contribuição proeminente para a abordagem de algoritmos genéticos híbridos no contexto de Problemas de Roteamento de Veículos (VRP) com múltiplos depósitos e rotas periódicas. Os autores propõem uma abordagem inovadora que combina elementos de algoritmos genéticos com técnicas heurísticas, visando solucionar eficientemente instâncias complexas do VRP. O artigo explora detalhadamente a formulação do problema, apresentando estratégias específicas para lidar com desafios associados a múltiplos depósitos e rotas periódicas. A metodologia proposta destaca-se pela sua capacidade de encontrar soluções de alta qualidade em cenários práticos, evidenciando a eficácia do algoritmo genético híbrido. Esta revisão é essencial para compreender a evolução das técnicas híbridas no contexto do VRP, fornecendo uma base sólida para avaliar a TBD proposta neste trabalho. Ao explorar o artigo, espera-se extrair insights valiosos que possam contribuir para aprimorar a abordagem heurística desenvolvida para o Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS).

4 Metodologia

A seção dedicada à metodologia deste projeto desvela a abordagem estratégica e as ferramentas essenciais empregadas para enfrentar os desafios inerentes ao NCVRP-FFS. Inspirados pelas contribuições de estudos anteriores e embasados em uma compreensão aprofundada da complexidade computacional do problema, delineamos cuidadosamente nossa estratégia para o desenvolvimento e avaliação da TBD proposta. Esta seção oferecerá uma visão transparente sobre o design da heurística, a seleção de parâmetros, a avaliação de desempenho e as técnicas implementadas para

enfrentar os desafios específicos do NCVRP-FFS. Ao compartilhar os detalhes da nossa metodologia, buscamos proporcionar uma compreensão abrangente do processo de desenvolvimento e validação da heurística, promovendo transparência e replicabilidade em futuras investigações neste domínio desafiador.

4.1 Detalhes sobre a heurística de controle

A heurística Clarke-Wright é uma técnica amplamente utilizada para resolver o Problema de Roteamento de Veículos, que foi proposta por G. Clarke e J.W. Wright em 1964 e tem como objetivo encontrar uma solução próxima da ótima para o problema, sem a necessidade de examinar todas as possíveis combinações de rotas, tarefa essa que é computacionalmente custosa.

A decisão de adotar a heurística de Clarke-Wright como heurística de controle para este projeto é fundamentada em sua reconhecida eficácia e ampla aplicabilidade em problemas de roteamento de veículos. A heurística de Clarke-Wright, desenvolvida inicialmente para o Problema de Roteamento de Veículos (VRP), destaca-se por sua simplicidade conceitual e notável capacidade de encontrar soluções razoavelmente eficientes. Além disso, sua abordagem centrada em rotas, combinada com a consolidação de entregas, permite uma otimização eficiente do uso da frota, tornando-a particularmente relevante para o contexto do NCVRP-FFS. Ao escolher a heurística de Clarke-Wright como controle, buscamos estabelecer uma referência sólida e comparável para avaliar o desempenho da TBD proposta. Essa escolha estratégica permite não apenas destacar melhorias significativas alcançadas pela nova heurística, mas também contextualizar sua eficácia em relação a uma abordagem clássica e amplamente reconhecida no campo de otimização de roteamento de veículos.

A metodologia começa construindo rotas iniciais para cada veículo, geralmente conectando o depósito a clientes próximos, e atribuindo uma rota para cada veículo individualmente. Em seguida, a heurística realiza uma fase de consolidação, identificando pares de rotas que podem ser combinadas para otimizar a eficiência do percurso. Esse processo busca reduzir a distância total percorrida pela frota, consolidando entregas em rotas compartilhadas sempre que possível. A heurística de Clarke-Wright utiliza uma estratégia de economia, onde o ganho em termos de distância percorrida ao combinar rotas supera os custos adicionais associados à consolidação. Essa abordagem centrada em rotas e consolidação de entregas faz da heurística de Clarke-Wright uma escolha intuitiva para problemas de roteamento de veículos, proporcionando uma solução inicial eficiente que pode ser aprimorada por técnicas mais avançadas.

4.2 Detalhes sobre a heurística proposta

A heurística proposta consiste em duas partes. A primeira é a subdivisão do espaço em n subespaços, em que n é o número de veículos. A partir disso, gera-se uma rota limitada ao subespaço que passe em cada ponto presente nele. Para se gerar essa rota, utilizou-se a heurística construtiva de inserção mais próxima do Problema do Caixeiro Viajante

Algorithm 1 Heurística TBD

```
1:  $N \leftarrow$  número de veículos
2:  $V \leftarrow$  lista de clientes
3:  $D \leftarrow$  depósito
4:  $R \leftarrow$  lista de rotas
5:  $P \leftarrow$  lista de pontos chave
6:  $F \leftarrow$  lista de fronteiras
7:  $d_{max} \leftarrow$  cliente mais distante do depósito
8:  $AddItem(P, d_{max})$ 
9:
10: for  $i = 1 \dots N$  do
11:    $d_{max} \leftarrow$  cliente mais distante em média dos pontos de  $P$ 
12:    $AddItem(P, d_{max})$ 
13: end for
14:
15:  $P \leftarrow P$  ordenado por ângulo relativo a  $D$ 
16: for  $i = 1 \dots N$  do
17:    $f_{i,i+1} \leftarrow avg(angle(V_i, D), angle(V_{i+1}, D))$ 
18:    $AddItem(F, f_{i,i+1})$ 
19: end for
20:
21: for  $i = 1 \dots N$  do
22:    $v_i \leftarrow$  lista de clientes com angulo entre  $F_i$  e  $F_{i+1}$ 
23:    $r_i \leftarrow$  aplique um heurística de TSP para  $v_i$ 
24:    $AddItem(R, r_i)$ 
25: end for
26:
27: return  $R$ 
```

4.2.1 Explicação da heurística e pseudo-código

O programa recebe como entrada o número N de veículos desejados, a lista de clientes V a serem atendidos e o depósito D . Inicializamos três listas vazias: pontos chave, fronteiras e rotas.

Inicialmente adicionamos o ponto mais distante do depósito a lista de pontos chave. Em seguida iteramos uma vez para cada veículo desejado e adicionamos ao pontos chave um ponto que, em média tem a maior distância dos demais pontos chave. Seguimos então ordenando os pontos chave de acordo com seu ângulo relativo ao depósito. Agora iteramos pela lista ordenada em pares e adicionamos o angulo médio entre os pontos em relação ao depósito na lista de fronteiras. Por fim, agrupamos os pontos entre as fronteiras em N diferentes regiões e aplicamos qualquer heurística para o TSP sobre o conjunto de pontos obtidos adicionando cada solução a lista de rotas.

Como as regiões são criadas a partir das fronteiras entre dois pontos chaves vizinhos, cada região inclui no mínimo seu ponto chave, assim cada região possui pelo menos um ponto, garantindo que obteremos as N rotas desejadas. A seleção dos pontos chave pela escolha do ponto mais distante dos já selecionados tende a nos fornecer um conjunto de pontos bem distribuído ao redor do depósito.

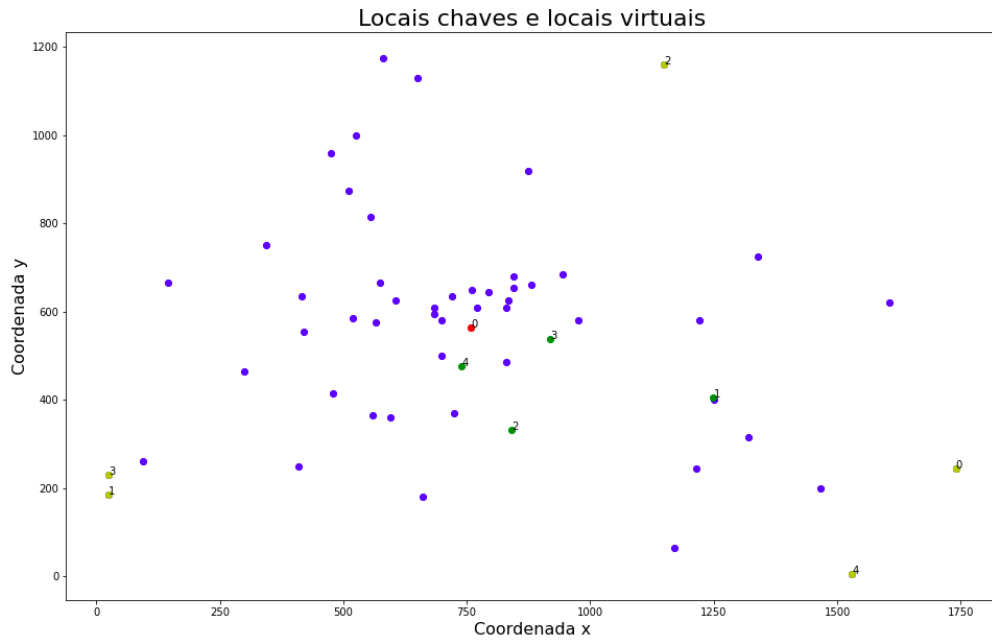


Figure 1: Distribuição e classificação obtida dos pontos. Na figura, o ponto vermelho representa o depósito, os pontos azuis são os clientes a serem atendidos, os pontos amarelos são clientes a serem atendidos que foram selecionados como pontos chave e os pontos verdes representam as fronteiras.

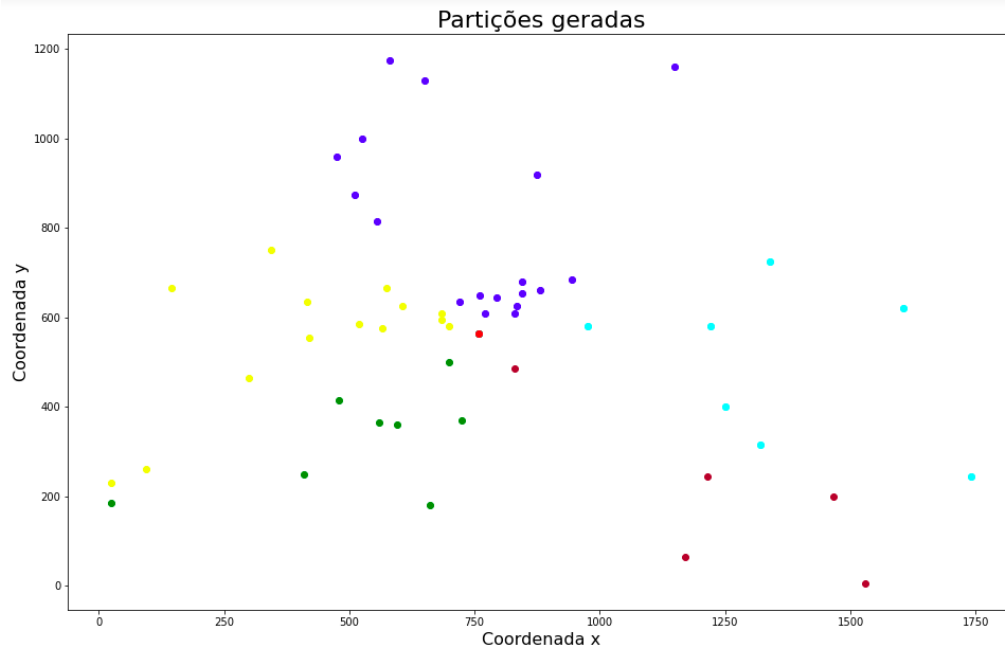


Figure 2: Classificação de regiões obtidas para os pontos. O ponto vermelho representa o depósito, cada uma das demais cores representam os pontos em uma região.

4.3 Experimentos

Para realização dos experimentos, utilizou-se as próprias instâncias do Problema do Caixeiro Viajante vistas nos trabalhos de implementação da disciplina. Para cada instância, a única adaptação necessária foi a criação de um ponto referente ao depósito. Esse ponto será localizado na média das coordenadas x e y de todos os pontos presentes no dataset.

Além disso, teve-se que escolher o número de veículos a serem usados na geração das rotas. A princípio, a execução foi feita para 3, 5 e 7 veículos.

5 Resultados

Esta seção apresenta os resultados concretos derivados dos experimentos conduzidos no decorrer deste projeto, visando avaliar a eficácia da heurística TBD no contexto do Problema de Roteamento de Veículos Não-Capacitado com Frota Fixa (NCVRP-FFS). Ao confrontar a TBD com a heurística de Clarke-Wright, esta análise proporcionará insights quantitativos sobre o desempenho relativo das abordagens. A meticulosa execução dos experimentos, que abrange instâncias variadas do problema, revelará nuances e padrões que contribuem para uma compreensão aprofundada da capacidade da heurística proposta em lidar com cenários práticos e desafiadores.

As tabelas abaixo apresentam os resultados para $N = 3, 5$ e 7 . As tabelas possuem três colunas: controle, proposta e proposta com fronteiras aleatórias. A coluna de controle apresenta o custo das rotas obtidas pelo Clarke-Wright em cada instância do problema. A coluna proposta é o resultado obtido pela TBD. A coluna da proposta com fronteiras aleatórias tem objetivo de testar o impacto da estratégia de seleção de fronteiras, ela apresenta um resultado utilizando uma modificação da TBD onde a seleção dos pontos chave é feita de forma aleatória.

Percebe-se que, de modo geral, a heurística de controle teve melhores resultados quando comparada com as demais. Já no que se refere a comparação entre a heurísticas proposta e a versão dela com inicialização aleatória, nota-se que os resultados obtidos foram bem próximos. É possível observar que em certos casos alguma delas se sobressaiu em relação a outra, mas sem uma tendência aparente de se tornar dominante. Isso sugere que, embora a heurística proposta tenha uma abordagem matemática para geração das partições, esse procedimento não mostrou vantagens significativas em relação à versão da heurística proposta com inicialização aleatória.

Instância	Heurística		
	Controle	Proposta	Aleatória
att48	40667	44554.23	43732.92
berlin52	9355	9391.27	10732.16
kroA100	27689	28431.71	29644.02
kroA150	33638	38201.46	38080.17
kroA200	45102	43335.15	45132.14
kroB100	25134	28649.39	30004.40
kroB150	28804	35947.45	37840.52
kroB200	39042	42788.63	42447.02
kroC100	27236	30992.84	30992.84
kroD100	29633	30135.81	30830.28
kroE100	28574	33327.93	33765.98
lin105	22553	22375.21	23621.14
pr107	56202	57798.26	54710.68
pr124	69417	80346.94	89771.19
pr136	107772	152956.72	157707.94
pr144	73067	83952.12	83824.35
pr152	95042	101038.95	97264.70
pr76	119358	152722.43	161551.95
rat195	2991	3378.60	3372.13
rat99	1488	1609.97	1607.13
st70	812	932.51	950.28

(a) Custo total para 3 veículos

Instância	Heurística		
	Controle	Proposta	Aleatória
att48	41423	53892.40	53892.40
berlin52	9586	9683.12	11087.78
kroA100	31901	34065.97	33189.74
kroA150	38635	39708.82	39513.73
kroA200	42447	46139.84	45999.66
kroB100	26258	30278.75	30512.04
kroB150	39491	41970.18	41970.18
kroB200	38494	44711.12	42095.16
kroC100	27993	32744.72	33508.53
kroD100	29827	33769.98	32763.05
kroE100	29295	37279.53	34680.54
lin105	22873	23656.81	24681.81
pr107	60143	68645.79	58909.03
pr124	73036	90801.93	93710.43
pr136	109926	146864.59	157698.35
pr144	84449	91893.19	84066.31
pr152	96035	115458.11	117878.09
pr76	119386	167373.99	147769.97
rat195	3029	3556.82	3599.36
rat99	1541	1722.42	1782.40
st70	832	950.13	922.25

(b) Custo total para 5 veículos

Instância	Heurística		
	Controle	Proposta	Aleatória
att48	41831	58594.51	56548.41
berlin52	9714	10265.44	11314.90
kroA100	33083	36850.83	37607.30
kroA150	43619	44238.14	41573.74
kroA200	45507	47688.79	47012.19
kroB100	27428	35223.40	34615.34
kroB150	40809	44445.35	41431.11
kroB200	39406	47814.12	45696.73
kroC100	28839	34212.85	34589.60
kroD100	29393	36586.97	35801.70
kroE100	29982	38526.39	37975.54
lin105	23918	24542.33	25358.34
pr107	73116	82405.35	79913.85
pr124	72437	93742.17	100534.54
pr136	113286	152611.46	169275.01
pr144	88633	91152.79	91152.79
pr152	967715	130314.74	134535.80
pr76	127049	159884.79	161924.21
rat195	3082	3557.21	3530.44
rat99	1581	1917.22	1958.72
st70	879	1021.98	1092.55

(c) Custo total para 7 veículos

Figure 3: Custos totais para diferentes números de veículos

References

- [PR07] David Pisinger and Stefan Ropke. “A general heuristic for vehicle routing problems”. In: *Computers & Operations Research* 34.8 (2007), pp. 2403–2435. ISSN: 0305-0548. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.09.012>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054805003023>.
- [Vid+12] Thibaut Vidal et al. “A Hybrid Genetic Algorithm for Multidepot and Periodic Vehicle Routing Problems”. In: *Operations Research* (2012). ISSN: 611-624. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.1120.1048>.
- [LRV] Gilbert Laporte, Stefan Ropke, and Thibaut Vidal. “Chapter 4: Heuristics for the Vehicle Routing Problem”. In: *Vehicle Routing*, pp. 87–116. DOI: 10.1137/1.9781611973594.ch4. eprint: <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611973594.ch4>. URL: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973594.ch4>.