

**ELITON TRINDADE GOMES**



**TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER**

**JI-PARANÁ, RO  
MÊS E ANO DA DEFESA**



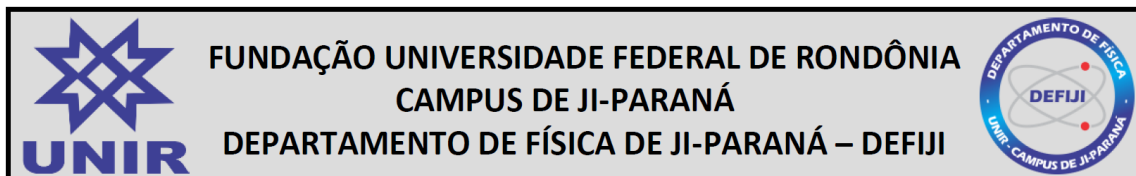
**ELITON TRINDADE GOMES**

**TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Departamento de Física de Ji-Paraná, Uni-  
versidade Federal de Rondônia, Campus de Ji-  
Paraná, como parte dos quesitos para a obtenção  
do Título de Bacharel em Física, sob orientação  
do Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza.

**JI-PARANÁ, RO**  
**MÊS E ANO DA DEFESA**





## ATA DE AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO CURSO DE (LICENCIATURA PLENA/BACHARELADO) EM FÍSICA

Aos xxx dias do mês de xxx do ano de xxx, às xxx, no xxx, reuniu-se a Banca Julgadora composta pelo professor orientador Dr. Marco Polo Moreno de Souza e pelos examinadores Nome do professor da banca e Nome do professor da banca, para avaliarem o Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Bacharelado em Física, intitulado “**TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER**”, do discente *ELITON TRINDADE GOMES*. Após a apresentação, o candidato foi arguido pelos integrantes da Banca Julgadora por xxx (xxx) minutos. Ao final da arguição, a Banca Julgadora, em sessão reservada, **aprovou** o candidato com nota xxx (xxx), em uma avaliação de 0 (zero) a 10 (dez). Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada às xxx, dela sendo lavrada a presente ata, assinada por todos os membros da Banca Julgadora.

---

Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza - DEFIJI/CJP/UNIR  
Orientador

---

Prof. Nome do professor da banca - DEFIJI/CJP/UNIR

---

Prof. Nome do professor da banca - xxxxx



## **DEDICATÓRIA**

Digite a dedicatória aqui.





## **AGRADECIMENTOS**

Digite os agradecimentos aqui.



## **EPÍGRAFE**

Digite a epígrafe aqui.



## RESUMO

[illegible]

**Palavras-chave:** palavra-chave 1. palavra-chave 2. palavra-chave 3.



## LISTA DE TABELAS

2.1	Funções trigonométricas e hiperbólicas. . . . .	7
3.1	Funções trigonométricas e hiperbólicas. . . . .	9





**LISTA DE FIGURAS**

2.1 gggggggggggggggggg . . . . . 6

3.1 Espectro de um laser de femtossegundos. . . . . 9



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mecânica Quântica e Operador Densidade (<math>\rho</math>)</b>	<b>3</b>
2.1	Matriz densidade . . . . .	3
2.1.1	Propriedade do Operador Densidade . . . . .	4
2.1.2	Evolução Temporal do Operador Densidade . . . . .	6
2.2	Figuras . . . . .	6
2.3	Equações . . . . .	6
2.4	Tabelas . . . . .	7
2.5	Códigos . . . . .	7
2.6	Citação . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Outro capítulo</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>11</b>
	<b>Título do Primeiro Apêndice</b>	<b>15</b>
	<b>Título do Segundo Apêndice</b>	<b>17</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Digite a introdução aqui.



## 2 MECÂNICA QUÂNTICA E OPERADOR DENSIDADE ( $\rho$ )

Neste capítulo nos dedicamos a discutir sobre formalismo do operador densidade, desenvolvido por J.von Neumann em 1917, e suas vantagens em relação ao formalismos de auto-estados e autovetores no estudo de sistema quânticos.

### 2.1 MATRIZ DENSIDADE

Como sabemos, o formalismo usual da mecânica quântica (formalismo de Dirac) nos permite fazer previsões sobre um conjunto de sistemas físicos elaborados de forma idêntica (ensemble puro). Em termos mais específicos, garantimos que todos os sistemas membros deste ensemble seja caracterizado por um mesmo ket de estados  $|\alpha\rangle$ . Assim, este formalismo não é válido se considerarmos, por exemplo, que 70% desses sistemas são caracterizados pelo ket de estado  $|\alpha\rangle$  e 30% pelo ket de estado  $|\beta\rangle$  (ensemble misto). Para lidar com essa situação, precisamos introduzir o conceito de operador densidade, que nos permitirá descrever quantitativamente conjuntos de sistemas quântico para ensemble puros ou, até mesmo, ensemble mistos completamente aleatórios.

Consideremos o ensemble misto, onde uma fração de membros com população relativa  $w_1$  é caracterizada por  $|\alpha^{(1)}\rangle$ ; outra fração  $w_2$  é caracterizada por  $|\alpha^{(2)}\rangle$  e assim sucessivamente. Podemos dizer, com certa precisão, que um ensemble misto pode ser visto como uma mistura de ensembles puros. As populações  $w_i$  devem satisfazer a condição de normalização, ou seja:

$$\sum_i w_i = 1 \quad (2.1)$$

Não é necessário que  $|\alpha^{(1)}\rangle, |\alpha^{(2)}\rangle, \dots, |\alpha^{(i)}\rangle$  sejam ortogonais entre si e o número de termos na soma  $i$  na equação (2.1) não precisam igual ao número de dimensões  $N$  no espaço de Hilbert. Vamos supor que realizamos a medida de um operador  $\hat{A}$  em um ensemble misto. É possível calcular o valor médio se houver um número grande de medidas. O resultado é dado pela média sobre o ensembles, definida por:

$$\begin{aligned} [\hat{A}] &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} \sum_{a'} | a' \rangle \langle a' | | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | a' \rangle \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle a' \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle^* \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle a' \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle\|^2 a' \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sendo que  $|a'\rangle$  é um autovetor do operador  $\hat{A}$  e que  $\langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | \alpha^{(i)} \rangle$  trata-se do valor esperado usual para  $\hat{A}$  em relação a um estado  $|\alpha^{(i)}\rangle$ . Vemos na equação (2.2) que estes valores esperados precisam ser considerados pelas populações relativas  $w_i$ . É possível observar também que  $\|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle\|^2$  é a probabilidade do estado  $|\alpha^{(i)}\rangle$  de ser encontrado em um autoestado  $|a'\rangle$  e que  $w_i$  identifica a probabilidade de encontrarmos um estado quântico caracterizado por  $|\alpha^{(i)}\rangle$ .

Se aplicarmos uma base genérica ( $|b'\rangle$ ), podemos rescrever a média sobre o ensemble (2.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}] &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \hat{A} \sum_{b''} |b''\rangle \langle b''| | \alpha^{(i)} \rangle \\
 &= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \\
 &= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \\
 &= \sum_{b'} \sum_{b''} \left( \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \right) \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

O termo destacado entre parenteses é definido como elemento de matriz de um certo operador hermitiano, que denominamos matriz densidade ou ainda, operador densidade  $\rho$ ,

$$\langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle = \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \tag{2.4}$$

De forma geral, o operador densidade é definido como

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \tag{2.5}$$

Uma vez determinado o operador densidade do sistema, podemos caracterizar o ensemble quântico em questão de modo a obter todas as informações físicas encerradas por tal operador. Substituindo (2.4) em (2.3), podemos rescrever o valor esperado de  $\hat{A}$  como:

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}] &= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \\
 &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Onde a operação  $\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$  corresponde ao traço do operador resultante do produto entre  $\hat{\rho} \hat{A}$ , ficando assim explícito o poder desta construção, pois o traço independe da representação e pode ser calculado usando uma base conveniente.

### 2.1.1 Propriedade do Operador Densidade

Vamos agora nos ater à algumas propriedades do operador densidade:



Primeira propriedade: O operador densidade é hermitiano, ou seja:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \quad (2.7)$$

Segunda propriedade: O operador densidade satisfaz a condição de normalização

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &= \sum_i \sum_{b'} w_i \langle b' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Terceira propriedade: Podemos ainda substituir o operador  $\hat{A}$  pelo próprio operador densidade obtendo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\rho}) \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \left( \sum_j w_j |\alpha^{(j)}\rangle \langle \alpha^{(j)}| \right) | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle^* \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \left\| \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \right\|^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esse resultado precisa ser analisado, observando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left\| \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \right\|^2 \leq \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(j)} \rangle \quad (2.10)$$

Como os kets  $|\alpha^{(i)}\rangle$  são ortogonais, ou seja,  $\langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle = \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(j)} \rangle = 1$ , obtemos a seguinte propriedade:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1 \quad (2.11)$$

É possível observar que quando se trata de um ensemble puro, ou seja, um dos pesos  $w_i$  tem valor 1 e o restante de valor 0,  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  tem valor máximo, isto é,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (2.12)$$

Assim, é fácil provar que o operador densidade de um ensemble puro é idempotente, ou seja:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (2.13)$$



## 2.4 TABELAS

Exemplo de tabela:

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

**Tabela 2.1:** Funções trigonométricas e hiperbólicas.

## 2.5 CÓDIGOS

Exemplo de código (linguagem C):

```

1 #include<stdio.h>
2
3 int k;
4
5 main ()
6 {
7     for (k=1; k<=5; k++)
8         printf("Física - UNIR - Ji-Paraná\n");
9 }
```

## 2.6 CITAÇÃO

Exemplo de citação:

Bla  
 Bla  
 Bla  
 Bla  
 Bla  
 Bla  
 Bla

Citando um trabalho: [1] ou (ARAÚJO, 2004).

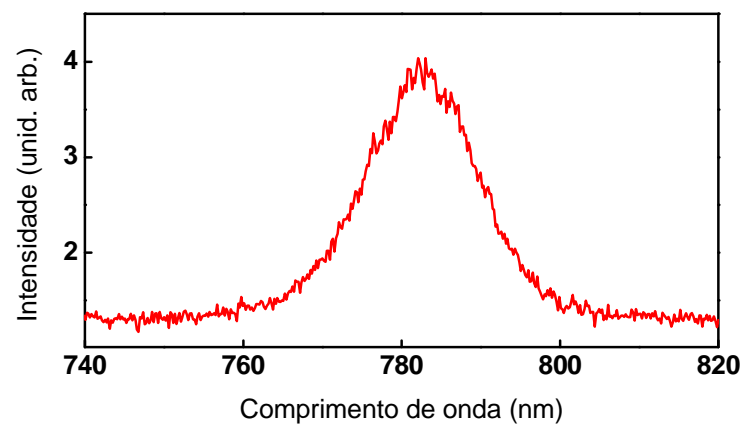


### 3 OUTRO CAPÍTULO

Digite aqui o conteúdo de outro capítulo.

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

**Tabela 3.1:** Funções trigonométricas e hiperbólicas.



**Figura 3.1:** Espectro de um laser de femtossegundos.



#### **4 CONCLUSÃO**

Digite a conclusão do TCC aqui.





**REFERÊNCIAS**

- [1] Inês Lacerda Araújo. **Do signo ao discurso**: introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola, 2004.
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12225**: informação e documentação: lombada: apresentação. Rio de Janeiro, 2004.
- [3] Cezar Roberto Bitencourt. Atentado violento ao pudor. In: BITENCOURT, Cezar Roberto. **Tratado de direito penal**. São Paulo: Saraiva, 2008. v. 4, p. 8-16.
- [4] BRASIL. Ministério da Saúde. Atentado violento ao pudor. In: BITENCOURT, Cezar Roberto. **ABC do SUS**: doutrinas e princípios. Brasília: Ministério da Saúde, 1990.
- [5] Barbara J. Howard (Ed.) **Clinical and pathogenic microbiology**. 2nd ed. St. Louis, MO: Mosby, 1994.



**TÍTULO DO PRIMEIRO APÊNDICE**

Digite o primeiro apêndice aqui.



**TÍTULO DO SEGUNDO APÊNDICE**

Digite o segundo apêndice aqui.