

**ELITON TRINDADE GOMES**



**PROPAGAÇÃO DE PULSOS DE LUZ EM SISTEMAS ATÔMICOS**

**JI-PARANÁ, RO  
MÊS E ANO DA DEFESA**



**ELITON TRINDADE GOMES**

**PROPAGAÇÃO DE PULSOS DE LUZ EM SISTEMAS ATÔMICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física de Ji-Paraná, Universidade Federal de Rondônia, Campus de Ji-Paraná, como parte dos quesitos para a obtenção do Título de Bacharel em Física, sob orientação do Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza.

**JI-PARANÁ, RO**  
**MÊS E ANO DA DEFESA**



**ATA DE AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO CURSO  
DE (LICENCIATURA PLENA/BACHARELADO) EM FÍSICA**

Aos xxx dias do mês de xxx do ano de xxx, às xxx, no xxx, reuniu-se a Banca Julgadora composta pelo professor orientador Dr. Marco Polo Moreno de Souza e pelos examinadores Nome do professor da banca e Nome do professor da banca, para avaliarem o Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Bacharelado em Física, intitulado “**PROPAGAÇÃO DE PULSOS DE LUZ EM SISTEMAS ATÔMICOS**”, do discente *ELITON TRINDADE GOMES*. Após a apresentação, o candidato foi arguido pelos integrantes da Banca Julgadora por xxx (xxx) minutos. Ao final da arguição, a Banca Julgadora, em sessão reservada, **aprovou** o candidato com nota xxx (xxx), em uma avaliação de 0 (zero) a 10 (dez). Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada às xxx, dela sendo lavrada a presente ata, assinada por todos os membros da Banca Julgadora.

---

Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza - DEFIJI/CJP/UNIR  
Orientador

---

Prof. Nome do professor da banca - DEFIJI/CJP/UNIR

---

Prof. Nome do professor da banca - DEFIJI/CJP/UNIR



## **DEDICATÓRIA**

Digite a dedicatória aqui.





## **AGRADECIMENTOS**

Digite os agradecimentos aqui.



## **EPÍGRAFE**

Digite a epígrafe aqui.



## RESUMO

[illegible]

**Palavras-chave:** palavra-chave 1. palavra-chave 2. palavra-chave 3.



## LISTA DE TABELAS

5.1	Funções trigonométricas e hiperbólicas. . . . .	20
6.1	Funções trigonométricas e hiperbólicas. . . . .	23





**LISTA DE FIGURAS**

5.1 gggggggggggggggggg . . . . . 20

6.1 Espectro de um laser de femtossegundos. . . . . 23



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mecânica Quântica e Operador Densidade (<math>\rho</math>)</b>	<b>3</b>
2.1	Matriz densidade . . . . .	3
2.1.1	Propriedades do Operador Densidade . . . . .	5
2.1.2	Evolução Temporal do Operador Densidade . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Campo Eletromagnético</b>	<b>9</b>
3.1	Equações de Maxwell . . . . .	9
3.2	Solução das equações para polarização em um meio linear . . . . .	10
3.3	Solução para equações para um meio atômico de 2 níveis . . . . .	14
<b>4</b>	<b>sistema atômico de dois níveis</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Heading on level 0 (chapter)</b>	<b>17</b>
5.1	Heading on level 1 (section) . . . . .	17
5.1.1	Heading on level 2 (subsection) . . . . .	17
5.2	Lists . . . . .	18
5.2.1	Example for list (itemize) . . . . .	18
5.2.2	Example for list (enumerate) . . . . .	19
5.2.3	Example for list (description) . . . . .	19
5.3	Equações . . . . .	20
5.4	Tabelas . . . . .	20
5.5	Códigos . . . . .	21
5.6	Citação . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Outro capítulo</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>25</b>
	<b>Título do Primeiro Apêndice</b>	<b>29</b>
	<b>Título do Segundo Apêndice</b>	<b>31</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Digite a introdução aqui.



## 2 MECÂNICA QUÂNTICA E OPERADOR DENSIDADE ( $\rho$ )

Neste capítulo nos dedicamos a apresentar o formalismo do operador densidade, desenvolvido por J. von Neumann em 1927, e suas vantagens em relação à representação de autoestados e autovetores no estudo de sistemas quânticos [1].

### 2.1 MATRIZ DENSIDADE

Como sabemos, o formalismo usual da mecânica quântica, onde trabalhamos com autoestados e autovalores de um determinado observável (formalismo de Dirac), nos permite fazer previsões sobre um conjunto de sistemas físicos elaborados de forma idêntica [2]. Em termos mais específicos, garantimos que todos os sistemas membros deste ensemble sejam caracterizados por um mesmo ket de estado  $|\alpha\rangle$ . Assim, este formalismo não é válido se considerarmos, por exemplo, que 70% desses sistemas são caracterizados pelo ket de estado  $|\alpha\rangle$  e 30% pelo ket de estado  $|\beta\rangle$  (ensemble misto). Para lidar com essa situação, precisamos introduzir o conceito de operador densidade, que nos permitirá descrever quantitativamente conjuntos de sistemas quântico para ensemble puros ou, até mesmo, ensemble mistos completamente aleatórios.

Consideremos o ensemble misto, onde uma fração de sistemas com população relativa  $w_1$  estão no estado  $|\alpha^{(1)}\rangle$ ; outra fração  $w_2$  estão no estado  $|\alpha^{(2)}\rangle$ , e assim sucessivamente. Podemos dizer, com certa precisão, que um ensemble misto pode ser visto como uma mistura de ensembles puros. As populações  $w_i$  devem satisfazer a condição de normalização, ou seja:

$$\sum_i w_i = 1. \quad (2.1)$$

Não é necessário que  $|\alpha^{(1)}\rangle, |\alpha^{(2)}\rangle, \dots, |\alpha^{(i)}\rangle$  sejam ortogonais entre si e o número de termos na soma em  $i$  na equação (2.1) não precisa ser igual ao número de dimensões  $N$  no espaço de Hilbert.

Vamos supor que realizamos a medida de um operador  $\hat{A}$  em um ensemble misto. É possível calcular o valor médio se houver um número grande de medidas. O resultado é dado pela média sobre o ensembles, definida por:

$$\begin{aligned} [\hat{A}] &\equiv \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | a' \rangle \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle \langle a' | \alpha^{(i)} \rangle a' \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle^* \langle \alpha^{(i)} | a' \rangle a' \\ &= \sum_i \sum_{a'} w_i \|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle\|^2 a', \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo que  $|a'\rangle$  é um autovetor do operador  $\hat{A}$  e que  $\langle \alpha^{(i)} | \hat{A} | \alpha^{(i)} \rangle$  trata-se do valor esperado habitual para  $\hat{A}$  em relação a um estado  $|\alpha^{(i)}\rangle$ . Vemos na equação (2.2) que estes valores esperados precisam ser ponderados pelas populações relativas  $w_i$ . É possível observar também que  $\|\langle a' | \alpha^{(i)} \rangle\|^2$  é a probabilidade do estado  $|\alpha^{(i)}\rangle$  de ser encontrado em um autoestado  $|a'\rangle$  após colapso do ket de estado e que  $w_i$  identifica a quantidade relativa de sistemas no estado quântico caracterizado por  $|\alpha^{(i)}\rangle$ .

Se considerarmos uma base genérica  $\{|b'\rangle\}$ , podemos reescrever a média sobre o ensemble (2.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}] &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \hat{A} \sum_{b''} |b''\rangle \langle b''| | \alpha^{(i)} \rangle \\
 &= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \\
 &= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \\
 &= \sum_{b'} \sum_{b''} \left( \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \right) \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

O termo destacado entre parênteses é o elemento de matriz de um certo operador hermitiano, que denominamos **matriz densidade** ou ainda, **operador densidade**  $\hat{\rho}$ , conforme equações (2.4) e (2.5):

$$\langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle = \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \tag{2.4}$$

De forma geral, o operador densidade é definido como

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|. \tag{2.5}$$

Uma vez determinado o operador densidade do sistema, podemos caracterizar o ensemble quântico em questão, de modo a obter todas as informações físicas encerradas por tal operador. Substituindo (2.4) em (2.3), podemos reescrever o valor esperado de  $\hat{A}$  como:

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}] &= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle \\
 &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

onde a operação  $\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})$  corresponde ao traço do operador resultante do produto entre  $\hat{\rho}$  e  $\hat{A}$ , ficando assim explícito o poder desta construção, pois o traço independe da representação e pode ser calculado usando uma base conveniente.



### 2.1.1 Propriedades do Operador Densidade

Vamos agora nos ater a algumas propriedades do operador densidade:

**Primeira propriedade:** O operador densidade é hermitiano, ou seja:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger. \quad (2.7)$$

**Segunda propriedade:** O operador densidade satisfaz a condição de normalização

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &= \sum_i \sum_{b'} w_i \langle b' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Terceira propriedade:** Podemos substituir o operador  $\hat{A}$  em (2.6) pelo próprio operador densidade obtendo:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\rho}) \\ &= \sum_i w_i \langle \alpha^{(i)} | \left( \sum_j w_j |\alpha^{(j)}\rangle\langle\alpha^{(j)}| \right) | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle^* \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \|\langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle\|^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esse resultado precisa ser analisado, observando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|\langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(j)} \rangle\|^2 \leq \langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(j)} \rangle \quad (2.10)$$

Como os kets  $|\alpha^{(i)}\rangle$  são normalizados, ou seja,  $\langle \alpha^{(i)} | \alpha^{(i)} \rangle = \langle \alpha^{(j)} | \alpha^{(j)} \rangle = 1$ , obtemos a seguinte propriedade:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1. \quad (2.11)$$

É possível observar que quando se trata de um ensemble puro, ou seja, quando um dos pesos  $w_i$  tem valor 1 e o restante de valor 0, então

$$\hat{\rho} = |a^{(i)}\rangle\langle a^{(i)}|. \quad (2.12)$$

Nesse caso  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  tem valor máximo, isto é,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (2.13)$$

Assim, é fácil provar que o operador densidade de um ensemble puro é idempotente, ou seja:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \quad (2.14)$$

Para melhor compreensão dessas propriedades, vamos supor, por exemplo, um sistema de dois níveis onde o operador densidade é dado pela matriz

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Em primeiro caso, consideramos que 100% dos sistemas estão no ket estado  $|\alpha\rangle$ , onde

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle. \quad (2.16)$$

Então, calculamos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\alpha\rangle\langle\alpha| \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \times \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Neste caso, é fácil observar que  $\hat{\rho}$  satisfaz condição de normalização e, como esperado, representa um caso puro, pois

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$= 1 \quad (2.19)$$

Em um segundo caso, temos que 50% dos sistemas estão no ket estado  $|\alpha\rangle$  (2.16) e 50% estão no ket estado  $|\beta\rangle$ , onde

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle. \quad (2.20)$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \frac{1}{2} |\alpha\rangle\langle\alpha| + \frac{1}{2} |\beta\rangle\langle\beta| \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \times \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \times \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0| - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1| \right) \\
 &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

O segundo caso também obedece a condição de normalização, mas diferente do primeiro caso, se trata de ensemble misto, pois

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{2},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &< \text{Tr}(\hat{\rho}) \\
 &< 1.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

### 2.1.2 Evolução Temporal do Operador Densidade

Agora, precisamos determinar como o operador densidade evolui no tempo. Para isso, devemos supor que para um tempo  $t_0$  o operador densidade corresponde a

$$\hat{\rho}(t_0) = \sum_i w_i |\alpha^{(i)}(t_0)\rangle\langle\alpha^{(i)}(t_0)|. \tag{2.24}$$

Consideremos que o ensemble não sofre perturbação conforme evolui no tempo, ou seja, as populações relativas  $w_i$  se mantêm estáticas. Assim, a alteração de  $\hat{\rho}$  acontece unicamente pela evolução temporal dos kets de estado  $|\alpha^{(i)}(t_0)\rangle$ .

$$|\alpha^{(i)}(t_0)\rangle \xrightarrow{\text{evolução temporal}} |\alpha^{(i)}(t)\rangle \quad (2.25)$$

Sabemos que  $|\alpha^{(i)}(t)\rangle$  satisfaz equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha^{(i)}(t)\rangle = \hat{H} |\alpha^{(i)}(t)\rangle, \quad (2.26)$$

então podemos derivar a equação (2.24) de modo que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_i w_i |\alpha^{(i)}(t)\rangle \langle \alpha^{(i)}(t)| \\ &= \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial t} (|\alpha^{(i)}(t)\rangle \langle \alpha^{(i)}(t)|) + \sum_i w_i |\alpha^{(i)}(t)\rangle \frac{\partial}{\partial t} (\langle \alpha^{(i)}(t)|). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.26) em (2.27), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \left( \sum_i w_i |\alpha^{(i)}(t)\rangle \langle \alpha^{(i)}(t)| \right) - \frac{1}{i\hbar} \left( \sum_i w_i |\alpha^{(i)}(t)\rangle \langle \alpha^{(i)}(t)| \right) \hat{H} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{\rho} - \frac{1}{i\hbar} \hat{\rho} \hat{H}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

resultando na equação de **Liouville-von Neumann**, que descreve a evolução temporal do operador densidade [1, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = -\frac{1}{i\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}]. \quad (2.29)$$

Embora a equação (2.29) seja semelhante a equação de Heisenberg, exceto por um sinal negativo (−), é preciso lembrar que estamos trabalhando na formulação Schrödinger, visto que  $\hat{\rho}$  é construído a partir de kets e bras que evoluem no tempo e obedecem a equação de Schrödinger.

### 3 CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste capítulo, revisitamos conceitos importantes do eletromagnetismo, para estudarmos a propagação de pulsos eletromagnéticos em meios atômicos. Assim, primeiramente apresentaremos a propagação em um meio linear e depois expandiremos para um caso de um meio atômico não-linear de dois níveis.

#### 3.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

A princípio, sabemos que as leis do electromagnetismo pa um meio podem ser resumidas por quatro equações de Maxwell[4]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho_l \text{ (Lei de Gauss),} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_l \text{ (Lei de Ampère),} \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \text{ (Lei de Faraday)} \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ (Lei de Gauss para o magnetismo),} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  correspondem aos o vetores de campo elétrico e magnético,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  são o deslocamento elétrico e campo campo magnetizante, que se relacionam com  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  a partir das equações:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.5)$$

e

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (3.6)$$

sendo  $\mathbf{P}$  a polarização e  $\mathbf{M}$  magnetização de um meio material.  $\varrho_l$  e  $\mathbf{J}_l$  correspondem a densidade de carga livre e densidade de corrente volumétrica livre. Levando em conta que o meio atômico estudado neste trabalho é neutro e não magnético, podemos desconsiderar  $\varrho_l$ ,  $\mathbf{J}_l$  e  $\mathbf{M}$ , fazendo

$$\|\varrho_l\| = \|\mathbf{J}_l\| = \|\mathbf{M}\| = 0. \quad (3.7)$$

Aplicando o operador rotacional à equação (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.2), respeitando as condições (3.7), obtemos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (3.9)$$

Substituindo esse resultado em (3.8) e usando o fato de que  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$ , obtemos a seguinte equação de onda para o campo elétrico que se propaga em uma dimensão[5]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

O lado esquerdo é a equação de ondas para a propagação da luz no vácuo, enquanto que o termo no lado direito representa a interação do campo eletromagnético com o meio material.

A polarização  $\mathbf{P}$  é comumente decomposta em duas partes:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}, \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{P}^L$  representa contribuições que variam de forma linear e  $\mathbf{P}^{NL}$  as contribuições que variam de forma não-linear.

No próximo subcapítulo 3.2 apresentamos a solução para um caso linear onde são desprezados os termos não lineares e, posteriormente, no subcapítulo 3.3 apresentamos o caso não linear que se aplica ao sistema atômico de dois níveis, ao qual, estudaremos no Capítulo 4.

### 3.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA POLARIZAÇÃO EM UM MEIO LINEAR

A equação (3.10), normalmente é resolvida somente usando métodos numérico. No entanto, podemos realizar simplificações e aproximações que, ainda assim, nos permita lidar com problemas práticos da propagação de pulsos em um meio material [6]. Em um meio linear podemos reescrever a equação (3.10) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^L}{\partial t^2}. \quad (3.12)$$

Sabemos que em um meio linear, a polarização se relaciona com o Campo elétrico a partir da Susceptibilidade Elétrica  $\chi_e$  [4, 7], seguindo a seguinte expressão:

$$\mathbf{P}^L(z, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi_e(t') \mathbf{E}(z, t - t'). \quad (3.13)$$

Reescrevendo no domínio das frequência, obtemos:

$$\mathbf{P}^L(z, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(z, \omega) \mathbf{E}(z, \omega). \quad (3.14)$$

Realizando transformação de Fourier sobre (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}(z, t) &= \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^L(z, t) \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right] &= \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{P}^L(z, \omega) e^{i\omega t} \right] \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right] \mathbf{E}(z, \omega) &= -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}^L(z, \omega). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14) em (3.15) e usando o fato de que  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \right] \mathbf{E}(z, \omega) &= -\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi_e(z, \omega) \mathbf{E}(z, \omega) \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \epsilon_0 (1 + \chi_e(z, \omega)) \right] \mathbf{E}(z, \omega) &= 0 \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_0 \omega^2 \epsilon(\omega) \right] \mathbf{E}(z, \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi_e(z, \omega)) \quad (3.17)$$

é a constante dielétrica.

Para resolvermos a equação (3.16), assumimos a susceptibilidade e constante dielétrica são reais. Assim, a solução geral da E.D.P. na direção  $+z$  é:

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{E}(0, \omega) e^{-ik(\omega)z} \quad (3.18)$$

Aqui, a constante de propagação  $k(\omega)$  é obtida a partir da relação de dispersão da óptica linear

$$k^2(\omega) = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2} n(\omega), \quad (3.19)$$

sendo  $n(\omega)$  o índice de refração do material. Para uma análise mais minuciosa, vamos expandir  $k(\omega)$  em serie de Taylor, fixando  $\omega_0$  na frequência central  $\omega_c$

$$k(\omega) = k(\omega_c) + \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_c} (\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_c} (\omega - \omega_c)^2 + \dots}_{\delta \kappa} \quad (3.20)$$

Assim,

$$k(\omega) = k(\omega_c) + \delta \kappa. \quad (3.21)$$

Substituindo na equação (3.18), a expressão (3.21), temos:

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{E}(0, \omega) e^{-iK(\omega_c)z} e^{-i\delta \kappa z}, \quad (3.22)$$

onde

$$k^2(\omega_c) = \omega_c^2 \epsilon(\omega_c) \mu_0 = \frac{\omega_c^2}{c^2} n(\omega_c). \quad (3.23)$$

Para o casos práticos que nos interessam nesse trabalho, podemos centralizar a amplitude Fourier em um vetor de numero de onda médio  $k_c$ , e só terá valor significativo para o intervalo  $\Delta k$  pequeno comparado a  $k_c$ .

No apêndice "A" é introduzido de uma função envelope que varia lentamente no tempo, após a separação de um termo que oscila rapidamente, cf. Eqs. (3.24) e (3.25), podemos definir agora uma amplitude que varia lentamente na coordenada espacial:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega, z) \equiv \tilde{E}(\omega + \omega_c, 0) e^{-i\delta k z} \quad (3.24)$$

Isso requer que:

$$\left\| \frac{d}{dz} \tilde{\mathcal{E}}(\omega, z) \right\| \ll k_l \tilde{\mathcal{E}}(\omega, z) \quad (3.25)$$

pois, partimos do fato que:

$$\left\| \frac{\Delta k}{k_l} \right\| \ll 1 \quad (3.26)$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa à equação (3.22) na forma complexa e substituindo o resultado (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(z, \omega) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(0, \omega) e^{-ik_c z - i\delta z} e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(0, \omega) e^{-ik_c z - i\delta z} e^{i\omega t} \right\} e^{iw_c t} e^{-iw_c t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(0, \omega) e^{-i\delta z} e^{i(\omega - w_c)t} \right\} e^{iw_c t - ik_c z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E(0, \omega + \omega_c) e^{-i\delta z} e^{i\omega t} \right\} e^{iw_c t - ik_c z} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.24) em (3.27), temos:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right\} e^{iw_c t - ik_c z} \quad (3.28)$$

Assim, usando relação do apêndice , obtemos

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, \omega) e^{iw_c t - ik_c z} \quad (3.29)$$

onde  $\mathcal{E}(z, t)$  é o envelope do pulso que varia lentamente no espaço e no tempo.

Agora, precisamos obter uma expressão para  $P^L(z, t)$ , para isso reescrevemos (3.14) em termos de  $\epsilon(\omega)$  e expandimos  $\epsilon(\omega)$  em serie de Taylor em torno de  $\omega_c$ , assim como fizemos para  $k(\omega)$ , de forma que:

$$\begin{aligned} P^L(z, \omega) &= [\epsilon(\omega) - \epsilon_0] E(z, \omega) \\ &= \left[ \epsilon(\omega_c) + (\omega - \omega_c) \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \Big|_{\omega_c} + \frac{(\omega - \omega_c)^2}{2!} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_c} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - \omega_c)^n}{n!} \frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} - \epsilon_0 \right] E(z, \omega) \\ &= \left[ \epsilon(\omega_c) - \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_c)^n}{n!} \frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} \right] E(z, \omega) \end{aligned} \quad (3.30)$$



Aplicando transformada de Fourier inversa à equação (3.30), temos:

$$\begin{aligned}
P^L(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \epsilon(\omega_c) - \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega - \omega_c)^n \frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} \right] E(z, \omega) \\
&= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \epsilon(\omega_c) - \epsilon_0 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (\omega - \omega_c)^n \frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} \right] E(0, \omega) e^{-ik_c z} e^{i(\omega - \omega_c)t} \\
&= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \epsilon(\omega_c) - \epsilon_0 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} \right] E(0, \omega + \omega_c) e^{-ik_c z} e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo (3.24) em (3.31) e considerando o fato que  $\frac{\partial^n \epsilon}{\partial \omega^n} \Big|_{\omega_c} = \epsilon^{(n)}(\omega_c)$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
P^L(z, t) &= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[ \epsilon(\omega_c) - \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{(n)}(\omega_c)}{n!} \omega^n \right] \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \\
&= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2} \left[ \frac{\epsilon(\omega_c) - \epsilon_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{(n)}(\omega_c)}{n!} \omega^n \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right] \\
&= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2} \left[ \frac{\epsilon(\omega_c) - \epsilon_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \epsilon^{(n)}(\omega_c) \mathcal{E}(z, \omega) \frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} \right] \\
&= \frac{e^{i\omega t - ik_c z}}{2} \left[ \frac{\epsilon(\omega_c) - \epsilon_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \epsilon^{(n)}(\omega_c) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}(z, \omega) e^{i\omega t} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ [\epsilon(\omega_c) - \epsilon_0] \mathcal{E}(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \epsilon^{(n)}(\omega_c) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathcal{E}(z, \omega) \right\} e^{i\omega t - ik_c z} \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{P}^{\mathcal{L}}(z, t) e^{i\omega t - ik_c z},
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde  $\mathcal{P}^{\mathcal{L}}(z, t)$ , é o envelope da polarização que varia lentamente em relação o espaço e tempo. o próximo passo é substituir o campo elétrico (3.29) e a polarização (3.32) na equação de

propagação de onda (3.12). Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{E}(z, t) - 2ik_c \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}(z, t) - k_c^2 \mathcal{E}(z, t) \right] &= \frac{1}{2c^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}(z, t) + 2i\omega_c \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(z, t) - \omega_c^2 \mathcal{E}(z, t) \right] \\ &+ \frac{\mu_0}{2c^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}(z, t) + 2i\omega_c \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(z, t) - \omega_c^2 \mathcal{E}(z, t) \right] \end{aligned}$$

### 3.3 SOLUÇÃO PARA EQUAÇÕES PARA UM MEIO ATÔMICO DE 2 NÍVEIS

#### **4 SISTEMA ATÔMICO DE DOIS NÍVEIS**



## 5 HEADING ON LEVEL 0 (CHAPTER)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 5.1 HEADING ON LEVEL 1 (SECTION)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 5.1.1 Heading on level 2 (subsection)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### Heading on level 3 (subsubsection)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque.

Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

**Heading on level 4 (paragraph)** Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 5.2 LISTS

### 5.2.1 Example for list (itemize)

- First itemtext
- Second itemtext
- Last itemtext
- First itemtext
- Second itemtext

### Example for list (4\*itemize)

- First itemtext
  - First itemtext
    - \* First itemtext
      - First itemtext
      - Second itemtext
    - \* Last itemtext
  - First itemtext
- Second itemtext

### 5.2.2 Example for list (enumerate)

1. First itemtext
2. Second itemtext
3. Last itemtext
4. First itemtext
5. Second itemtext

### Example for list (4\*enumerate)

1. First itemtext
  - (a) First itemtext
    - i. First itemtext
      - A. First itemtext
      - B. Second itemtext
    - ii. Last itemtext
  - (b) First itemtext
2. Second itemtext

### 5.2.3 Example for list (description)

**First** itemtext

**Second** itemtext

**Last** itemtext

**First** itemtext

**Second** itemtext

### Example for list (4\*description)

**First** itemtext

**First** itemtext

**First** itemtext

**First** itemtext

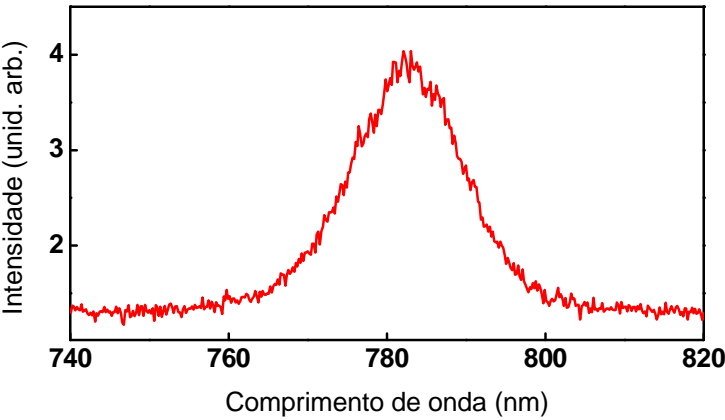
**Second** itemtext

**Last** itemtext

**First** itemtext

**Second** itemtext

Exemplo de figura:



**Figura 5.1:** ggggggggggggggggggggg

5.3 EQUAÇÕES

Exemplo de equação centralizada:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

(5.1)

Exemplo de equação no texto:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Citação de equação: [5.1](#).

5.4 TABELAS

Exemplo de tabela:

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

**Tabela 5.1:** Funções trigonométricas e hiperbólicas.



## 5.5 CÓDIGOS

Exemplo de código (linguagem C):

```
1 #include<stdio.h>
2
3 int k;
4
5 main ()
6 {
7     for (k=1; k<=5; k++)
8         printf("Física - UNIR - Ji-Paraná\n");
9 }
```

## 5.6 CITAÇÃO

Exemplo de citação:

Bla  
Bla  
Bla  
Bla  
Bla  
Bla  
Bla Bla

Citando um trabalho: (ARAÚJO, 2004).

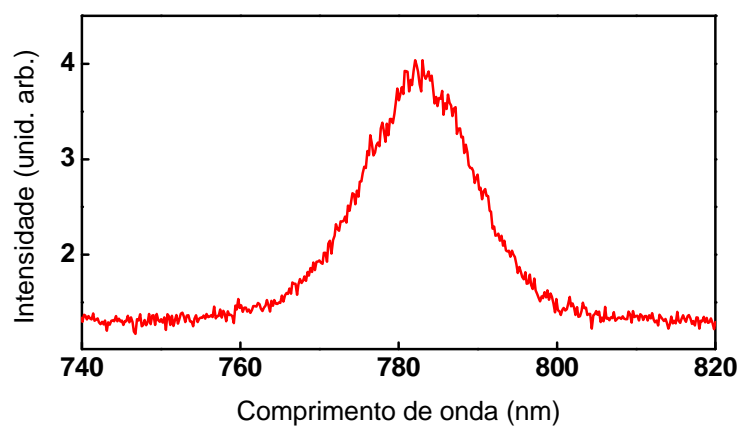


## 6 OUTRO CAPÍTULO

Digite aqui o conteúdo de outro capítulo.

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

**Tabela 6.1:** Funções trigonométricas e hiperbólicas.



**Figura 6.1:** Espectro de um laser de femtossegundos.



## **7 CONCLUSÃO**

Digite a conclusão do TCC aqui.



**REFERÊNCIAS**

- [1] J. Sakurai, J. Napolitano, and S. Dahmen, *Mecânica quântica moderna*. Bookman, 2013.
- [2] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *et al.*, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [3] R. Field and A. Tokmakoff, *5.74 Introductory Quantum Mechanics II*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, Spring 2004.
- [4] J. Jackson, *CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, 3RD ED*. Jhon Wiley, 1998.
- [5] L. Allen and J. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms*. Dover books on physics and chemistry, Dover, 1987.
- [6] J. Diels, W. Rudolph, P. Liao, and P. Kelley, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. Electronics & Electrical, Elsevier Science, 2006.
- [7] D. Griffiths, *Eletrodinâmica*. Pearson Addison Wesley, 2011.





**TÍTULO DO PRIMEIRO APÊNDICE**

Digite o primeiro apêndice aqui.



**TÍTULO DO SEGUNDO APÊNDICE**

Digite o segundo apêndice aqui.