ELITON TRINDADE GOMES

TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER

JI-PARANÁ, RO
MÊS E ANO DA DEFESA

ELITON TRINDADE GOMES

TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física de Ji-Paraná, Universidade Federal de Rondônia, Campus de Ji-Paraná, como parte dos quesitos para a obtenção do Título de Bacharel em Física, sob orientação do Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza.

JI-PARANÁ, RO
MÊS E ANO DA DEFESA

ATA DE AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO CURSO DE (LICENCIATURA PLENA/BACHARELADO) EM FÍSICA

Aos xxx dias do mês de xxx do ano de xxx, às xxx, no xxx, reuniu-se a Banca Julgadora composta pelo professor orientador Dr. Marco Polo Moreno de Souza e pelos examinadores Nome do professor da banca e Nome do professor da banca, para avaliarem o Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso de Bacharelado em Física, intitulado "**TÍTULO DO TRABALHO, SEGUIDO DO SUBTÍTULO, SE HOUVER**", do discente *ELITON TRINDADE GOMES*. Após a apresentação, o candidato foi arguido pelos integrantes da Banca Julgadora por xxx (xxx) minutos. Ao final da arguição, a Banca Julgadora, em sessão reservada, **aprovou** o candidato com nota xxx (xxx), em uma avaliação de 0 (zero) a 10 (dez). Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada às xxx, dela sendo lavrada a presente ata, assinada por todos os membros da Banca Julgadora.

Prof. Dr. Marco Polo Moreno de Souza - DEFIJI/CJP/UNIR
Orientador

Prof. Nome do professor da banca - DEFIJI/CJP/UNIR

Prof. Nome do professor da banca - xxxxx

DEDICATÓRIA

Digite a dedicatória aqui.

AGRADECIMENTOS

Digite os agradecimentos aqui.

EPÍGRAFE

Digite a epígrafe aqui.

RESUMO

O resumo em língua portuguesa deverá conter no mínimo 150 e no máximo 500 palavras. Bla

Palavras-chave: palavra-chave 1. palavra-chave 2. palavra-chave 3.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Digite a introdução aqui.

2 MECÂNICA QUÂNTICA E OPERADOR DENSIDADE (ρ)

Neste capitulo nos dedicamos a apresentar o formalismo do operador densidade , desenvolvido por J.von Neumann em 1917, e suas vantagens em relação ao representação de autoestados e autovetores no estudo de sistema quânticos [1].

2.1 MATRIZ DENSIDADE

Como sabemos, o formalismo usual da mecânica quântica, onde trabalhamos com autoestados e autovetores (formalismo de dirac), nos permite fazer previsões sobre um conjunto de sistemas físicos elaborados de forma idêntica (ensemble puro). Em termos mais específicos, garantimos que todos o sistemas membros deste ensemble seja caracterizado por um mesmo ket de estados $|\alpha\rangle$. Assim, este formalismo não é válido se considerarmos, por exemplo, que 70% desses sistemas são caracterizados pelo ket de estado $|\alpha\rangle$ e 30% pelo ket de estado $|\beta\rangle$ (ensemble misto). Para lidar com essa situação, precisamos introduzir o conceito de operador densidade, que nos permitirá descrever quantitativamente conjuntos de sistemas quântico para ensemble puros ou, até mesmo, ensemble mistos completamente aleatórios.

Consideremos o ensemble misto, onde uma fração de membros com população relativa w_1 é caracterizada por $\left|\alpha^{(1)}\right\rangle$; outra fração w_2 é caracterizada por $\left|\alpha^{(2)}\right\rangle$ e assim sucessivamente. Podemos dizer, com certa precisão, que um ensemble misto pode ser visto como uma mistura de ensembles puros. As populações w_i devem satisfazer a condição de normalização, ou seja:

$$\sum_i w_i = 1. \tag{2.1}$$

Não é necessário que $|\alpha^{(1)}\rangle$, $|\alpha^{(2)}\rangle$,..., $|\alpha^{(i)}\rangle$ sejam ortogonais entre si e o número de termos na soma em i na equação (2.1) não precisa ser igual ao número de dimensões N no espaço de Hilbert. Vamos supor que realizamos a medida de um operador $\hat{A}$ em um ensemble misto. É possível calcular o valor médio se houver um número grande de medidas. O resultado é dado pela média sobre o ensembles, definida por:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}] &= \sum_i w_i \left\langle\alpha^{(i)}\middle|\hat{A}\middle|\alpha^{(i)}\right\rangle \\
&= \sum_i w_i \left\langle\alpha^{(i)}\middle|\hat{A}\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\middle|\alpha^{(i)}\right\rangle \\
&= \sum_i\sum_{a'} w_i \left\langle\alpha^{(i)}\middle|\hat{A}\,|a'\rangle\langle a'|\middle|\alpha^{(i)}\right\rangle \\
&= \sum_i\sum_{a'} w_i \left\langle\alpha^{(i)}\middle|a'\right\rangle\left\langle a'\middle|\alpha^{(i)}\right\rangle a' \\
&= \sum_i\sum_{a'} w_i \left\langle\alpha^{(i)}\middle|a'\right\rangle^* \left\langle\alpha^{(i)}\middle|a'\right\rangle a' \\
&= \sum_i\sum_{a'} w_i \left\|\left\langle a'\middle|\alpha^{(i)}\right\rangle\right\|^2 a'.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Sendo que $|a'\rangle$ é um autovetor do operador $\hat{A}$ e que $\langle\alpha^{(i)}|\hat{A}|\alpha^{(i)}\rangle$ trata-se do valor esperado habitual para $\hat{A}$ em relação a um estado $|\alpha^{(i)}\rangle$. Vemos na equação (2.2) que este valores esperados precisam ser considerados pelas populações relativas w_i. E possível observar também que que $\| \langle a'|\alpha^{(i)}\rangle \|^2$ é a probabilidade do estado $|\alpha(i)\rangle$ de ser encontrado em um autoestado $|a'\rangle$ e que w_i identifica a probabilidade de encontrarmos uma estado quântico caracterizado por $|\alpha^{(i)}\rangle$.

Se aplicarmos uma base genérica ($|b'\rangle$), podemos rescrever a média sobre o ensemble (2.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}] &= \sum_i w_i \langle\alpha^{(i)}|\sum_{b'} |b'\rangle\langle b'| \,\hat{A} \sum_{b''} |b''\rangle\langle b''||\alpha^{(i)}\rangle \\
&= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle\alpha^{(i)}|b'\rangle \, \langle b'|\hat{A}|b''\rangle \, \langle b''|\alpha^{(i)}\rangle \\
&= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle b''|\alpha^{(i)}\rangle \, \langle\alpha^{(i)}|b'\rangle \, \langle b'|\hat{A}|b''\rangle \\
&= \sum_{b'} \sum_{b''} \left(\sum_i w_i \langle b''|\alpha^{(i)}\rangle \, \langle\alpha^{(i)}|b'\rangle \right) \langle b'|\hat{A}|b''\rangle \,. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

O termo destacado entre parenteses é definido como elemento de matriz de um certo operador hermitiano, que denominamos **matriz densidade** ou ainda, **operador densidade** ρ, conforme equações (2.4) e (2.5):

$$\langle b''|\hat{\rho}|b'\rangle = \sum_i w_i \langle b''|\alpha^{(i)}\rangle \, \langle\alpha^{(i)}|b'\rangle \qquad (2.4)$$

De forma geral, o operador densidade é definido como

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i w_i \, |a^{(i)}\rangle\langle a^{(i)}| \,. \qquad (2.5)$$

Uma vez determinado o operador densidade do sistema, podemos caracterizar o ensemble quântico em questão, de modo a obter todas as informações físicas encerradas por tal operador. Substituindo (2.4) em (2.3), podemos rescrever o valor esperado de $\hat{A}$ como:

$$\begin{aligned}
[\hat{A}] &= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b''|\hat{\rho}|b'\rangle \, \langle b'|\hat{A}|b''\rangle \\
&= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Onde a operação $Tr(\hat{\rho}\hat{A})$ corresponde ao traço do operador resultante do produto entre $\hat{\rho}$ e $\hat{A}$, ficando assim explicito o poder desta construção, pois o traço independe da representação e pode ser calculado usando uma base conveniente.

2.1.1 Propriedades do Operador Densidade

Vamos agora nos ater a algumas propriedade do operador densidade:

Primeira propriedade: O operador densidade é hermitiano, ou seja:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger} \tag{2.7}$$

Segunda propriedade: O operador densidade satisfaz a condição de normalização

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\rho &= \sum_{i}\sum_{b'} w_i \left\langle b' \middle| \alpha^{(i)} \right\rangle \left\langle \alpha^{(i)} \middle| b' \right\rangle \\ &= \sum_{i} w_i \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(i)} \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Terceira propriedade: Podemos ainda substituir o operador $\hat{A}$ pelo próprio operador densidade obtendo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\big(\hat{\rho}^2\big) &= \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\rho}) \\ &= \sum_{i} w_i \left\langle \alpha^{(i)} \right| \left(\sum_{j} w_j \left| \alpha^{(j)} \middle\rangle\middle\langle \alpha^{(j)} \right| \right) \left| \alpha^{(i)} \right\rangle \\ &= \sum_{i}\sum_{j} w_i w_j \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(j)} \right\rangle \left\langle \alpha^{(j)} \middle| \alpha^{(i)} \right\rangle \\ &= \sum_{i}\sum_{j} w_i w_j \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(j)} \right\rangle \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{()} \right\rangle^* \\ &= \sum_{i}\sum_{j} w_i w_j \left\| \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(j)} \right\rangle \right\|^2 . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Esse resultado precisa ser analisado, observando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left\| \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(j)} \right\rangle \right\|^2 \leq \left\langle \alpha^{(i)} \middle| \alpha^{(i)} \right\rangle \left\langle \alpha^{(j)} \middle| \alpha^{(j)} \right\rangle \tag{2.10}$$

Como os kets $|\alpha^{(i)}\rangle$ são ortogonais, ou seja, $\langle\alpha^{(i)}|\alpha^{(i)}\rangle = \langle\alpha^{(j)}|\alpha^{(j)}\rangle = 1$, obtemos a seguinte propriedade:

$$\mathrm{Tr}\big(\hat{\rho}^2\big) \leq 1. \tag{2.11}$$

É possível observar que quando se trata de um ensemble puro, ou seja, um dos pesos w_i tem valor 1 e o restante de valor 0,

$$\hat{\rho} = \left| a^{(i)} \middle\rangle\middle\langle a^{(i)} \right| . \tag{2.12}$$

$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2)$ tem valor máximo, isto é,

$$\mathrm{Tr}\big(\hat{\rho}^2\big) = 1 \tag{2.13}$$

Assim, é facil provar que o operador densidade de um ensemble puro puro é idempotente, ou seja:

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \tag{2.14}$$

2.1.2 Evolução Temporal do Operador Densidade

Agora, precisamos determinar como o operador densidade evolui no tempo. Para isso, devemos supor que para um tempo t_0 o operador densidade corresponde a

$$\hat{\rho}(t_0) = \sum_i w_i \left|\alpha^{(i)}\middle\rangle\middle\langle\alpha^{(i)}\right|. \tag{2.15}$$

Consideremos que o ensemble não sofre pertubação conforme evolui no tempo, ou seja, a populações relativas w_i se mantém estática. Assim, a alteração de $\hat{\rho}$ acontece unicamente pela evolução temporal dos kets de estado $\left|\alpha^{(i)}\right\rangle$.

$$\left|\alpha^{(i)}\right\rangle \text{ em } t_0 \rightarrow \left|\alpha^{(i)}, t_0; t\right\rangle \tag{2.16}$$

Sabemos que $\left|\alpha^{(i)}, t_0; t\right\rangle$ que satisfaz equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\alpha^{(i)}, t_0; t\right\rangle = \hat{H}\left|\alpha^{(i)}, t_0; t\right\rangle, \tag{2.17}$$

então podemos derivar a equação (2.15) de modo que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho(t)} &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_i w_i \left|\alpha^{(i)}\middle\rangle\middle\langle\alpha^{(i)}\right| \\ &= \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\left|\alpha^{(i)}\right\rangle\right)\left\langle\alpha^{(i)}\right| + \sum_i w_i \left|\alpha^{(i)}\right\rangle \frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle\alpha^{(i)}\right|\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo (2.17) em (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho(t)} &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\left(\sum_i w_i \left|\alpha^{(i)}\right\rangle\left\langle\alpha^{(i)}\right|\right) - \frac{1}{i\hbar}\left(\sum_i w_i \left|\alpha^{(i)}\right\rangle\left\langle\alpha^{(i)}\right|\right)\hat{H} \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\hat{\rho} - \frac{1}{i\hbar}\hat{\rho}\hat{H}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

resultando na equação de **Liouville-von Neumann** que descreve a evolução temporal do operador densidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho(t)} = -\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\rho}, \hat{H}\right]. \tag{2.20}$$

Embora a equação (2.20) seja semelhante a equação de Heisenberg, exceto por um sinal negativo $(-)$, é preciso lembrar que estamos trabalhando na formulação Schrödinger, visto que $\hat{\rho}$ é construído a partir de kets e bras que evoluem no tempo e obedece a equação de Schrödinger.

2.2 FIGURAS

Exemplo de figura:

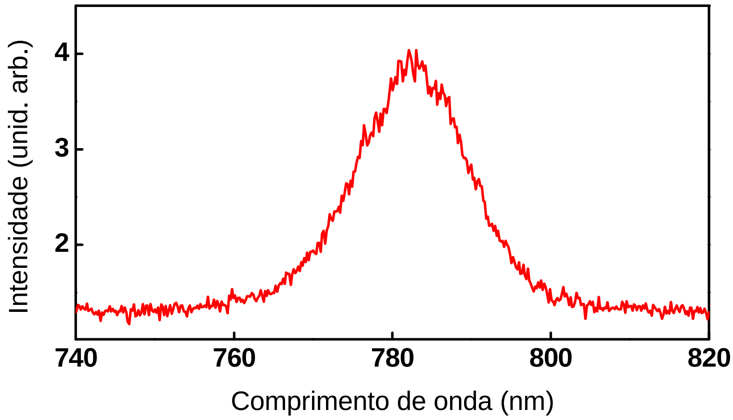

Figura 2.1: gggggggggggggggggg

2.3 EQUAÇÕES

Exemplo de equação centralizada:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.21}$$

Exemplo de equação no texto: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Citação de equação: 2.21.

2.4 TABELAS

Exemplo de tabela:

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

Tabela 2.1: Funções trigonométricas e hiperbólicas.

2.5 CÓDIGOS

Exemplo de código (linguagem C):

```c
#include<stdio.h>

int k;

main()
{
        for (k=1; k<=5; k++)
                printf("Física - UNIR - Ji-Paraná\n");
}
```

2.6 CITAÇÃO

Exemplo de citação:

> Bla

Citando um trabalho: (ARAÚJO, 2004).

3 OUTRO CAPÍTULO

Digite aqui o conteúdo de outro capítulo.

$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\sec x$	$\csc x$	$\cot x$
$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$

Tabela 3.1: Funções trigonométricas e hiperbólicas.

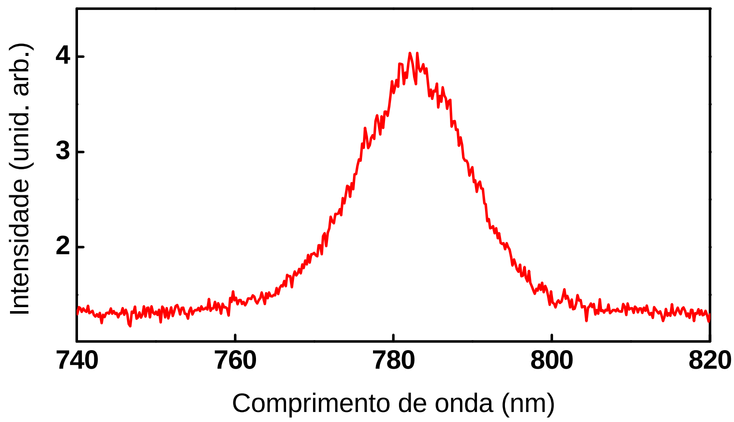

Figura 3.1: Espectro de um laser de femtossegundos.

4 CONCLUSÃO

Digite a conclusão do TCC aqui.

REFERÊNCIAS

[1] SAKURAI, J. J., AND NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna.* bookman, 2013.

TÍTULO DO PRIMEIRO APÊNDICE

Digite o primeiro apêndice aqui.

TÍTULO DO SEGUNDO APÊNDICE

Digite o segundo apêndice aqui.