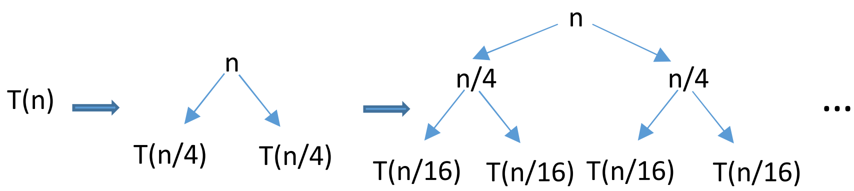
Ders 9:

- T(n)=2T(n/4)+n, bunun recursion tree'sini çizelim.

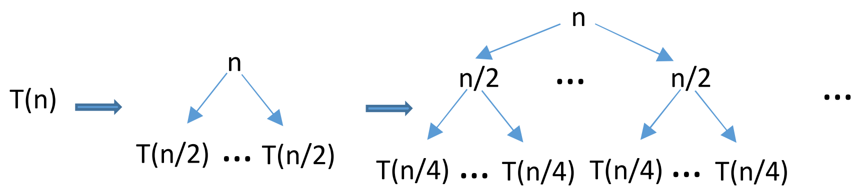


1 adet n → n
2 adet n/4 → n/2
4 adet n/16 → n/4
8 adet n/64 → n/8
…..

2^h adet 1

  - h=$\log_4$n
  - $T(n) = n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\cdots = n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right) = n\sum_{i=0}^{\log_4 n}(\frac{1}{2})^i$
  - $T(n) = n\frac{\frac{1}{2}^{(\log_4 n)+1}-1}{\frac{1}{2}-1} = n\frac{1-\frac{1}{2}^{(\log_4 n)+1}}{\frac{1}{2}} = 2n\left(1-\frac{1}{2}^{(\log_4 n)+1}\right) = 2n\left(1-2^{-(\log_4 n)-1}\right)$
  - $T(n) = 2n\left(1-\frac{2^{-(\log_4 n)}}{2}\right) = 2n\left(1-\frac{n^{-(\log_4 2)}}{2}\right) = 2n\left(1-\frac{n^{-2}}{2}\right) = 2n\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 2n-\sqrt{n} = O(n)$

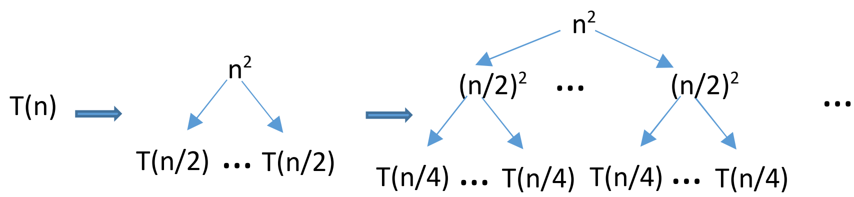
- T(n)=8T(n/2)+n için recursion tree'i çiziniz.



1 adet n
8 adet n/2
64 adet n/4
512 adet n/8
…..

  - $T(n) = n+4n+16n+64n+\cdots = n(1+4+16+64+\cdots) = n\sum_{i=0}^{h}4^i$
  - $h=\log_2 n, T(n) = n\sum_{i=0}^{\log_2 n}4^i = n\frac{4^{(\log_2 n)+1}-1}{4-1} = \frac{n}{3}(4*4^{\log_2 n}-1)$
  - $T(n) = \frac{n}{3}\left(4n^{\log_2 4}-1\right) = \frac{n}{3}(4n^2-1) = O(n^3)$

- T(n)=8T(n/2)+n^2 için recursion tree'i çiziniz.

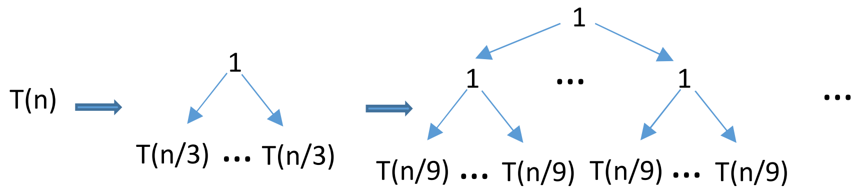


1 adet n^2
8 adet $(n/2)^2$
64 adet $(n/4)^2$
512 adet $(n/8)^2$
…..

  - $T(n) = n^2+2n^2+4n^2+8n^2+\cdots = n^2(1+2+4+8+\cdots) = n^2\sum_{i=0}^{h}2^i$
  - $h=\log_2 n, T(n) = n^2\sum_{i=0}^{\log_2 n}2^i = n^2\frac{2^{(\log_2 n)+1}-1}{2-1} = n^2(2*2^{\log_2 n}-1)$
  - $T(n) = n^2\left(2n^{\log_2 2}-1\right) = n^2(2n-1) = O(n^3)$

- T(n)=8T(n/2)+1 için O(n) ?
  - T(n)=O(n^3)

- T(n)=4T(n/3)+1 için recursion tree'i çiziniz.

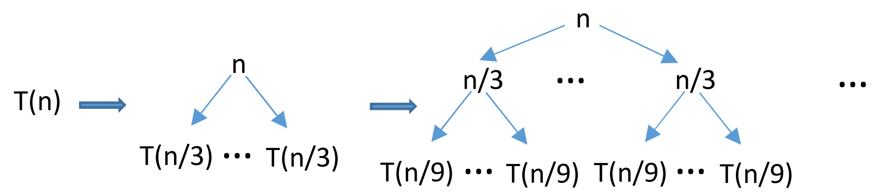


1 adet 1
4 adet 1
16 adet 1
64 adet 1
.....

  - $T(n) = \sum_{i=0}^{h} 4^i,\ h = log_3 n$
  - $T(n) = \sum_{i=0}^{log_3 n} 4^i = \frac{4^{(log_3 n)+1}-1}{4-1} = \frac{4*4^{log_3 n}-1}{3} = \frac{4*n^{log_3 4}-1}{3} = O(n^{log_3 4})$

- T(n)=9T(n/3)+1 için recursion tree'i çiziniz.
  - $T(n) = \sum_{i=0}^{h} 9^i,\ h = log_3 n$
  - $T(n) = \sum_{i=0}^{log_3 n} 9^i = \frac{9^{(log_3 n)+1}-1}{9-1} = \frac{9*9^{log_3 n}-1}{8} = \frac{9n^{log_3 9}-1}{8} = \frac{9*n^2-1}{8} = O(n^2)$

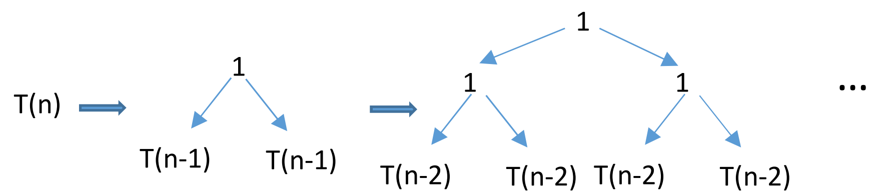
- T(n)=4T(n/3)+n için recursion tree'i çiziniz.



1 adet n
4 adet n/3
16 adet n/9
64 adet n/27
.....

  - $T(n) = n + 4n/3 + 16n/9 + 64n/27 + \cdots = n(1 + 4/3 + 16/9 + 64/27 + \cdots) = n\sum_{i=0}^{h}(\frac{4}{3})^i,\ h = log_3 n, T(n) = n\sum_{i=0}^{log_3 n}(\frac{4}{3})^i$
  - $\sum_{i=0}^{log_3 n}(\frac{4}{3})^i = \frac{(\frac{4}{3})^{(log_3 n)+1}-1}{\frac{4}{3}-1} = 3*\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{log_3 n} - 1\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^{log_3 n} - 3 = 4n^{log_3 \frac{4}{3}} - 3$
  - $= 4n^{log_3 (\frac{1}{3}*4)} - 3\ = 4n^{log_3 \frac{1}{3} + log_3 4} - 3 = 4n^{(log_3 4)-1} - 3$
  - $T(n) = n(4n^{(log_3 4)-1} - 3) = 4n^{log_3 4} - 3n = O(n^{log_3 4})$

- T(n)=2T(n-1)+1 için recursion tree'i çiziniz.



1 adet 1
2 adet 1
4 adet 1
8 adet 1
.....

  - $T(n) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = \sum_{i=0}^{h} 2^i,\ h = n$
  - $T(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = O(2^n)$, çok fazla
- T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1 olursa, fibonacci
  - $T(n) = O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$, bu da çok fazla

- Fibonacci(n)'i recursive hesaplama:
    - $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ golden ratio ≈ 1.618, 2^n'den küçük çünkü bazı recursion'lar daha önce bitiyor. Hepsi aynı seviyede değil. Önceden fibonacci(n)'i O(n) ile hesaplayabiliyorduk. Bu şekilde (fib(n)=fib(n-1)+fib(n-2)) recursive olarak tanımlarsak çok daha kötü oldu. ☹
- Fibonacci(n)'i O(n)'den daha iyi bulabilir miyiz?
    - $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. $F^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
    - $F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $F^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,
    - $F^5 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
    - $F^n = \begin{bmatrix} fib(n+1) & fib(n) \\ fib(n) & fib(n-1) \end{bmatrix}$ güzel ☺
    - F^n'i lineer olarak hesaplarsak karmaşıklık yine O(n) olur. Ama bir sayının üssünü $\log_2 n$'le bulabilmiştik. Aynı şekilde bir matrisinde üssünü $\log_2 n$'de bulabilir miyiz?
    - hpower'ın aynısı sadece T=k*k'da k'lar sayı değil, 2*2'lik matris. 2*2'lik 2 matris sabit sayıda işlemle çarpılır. Yani n'e bağlı değil. Dolayısıyla F^n'de $\log_2 n$'le bulanabilir. İşte bu süper ☺

- Connected component labelling: bir görüntüdeki bağlı bölgeleri bulur.

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1

0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	2	2
1	1	1	0	0	2	0
1	1	0	0	0	2	0
0	0	0	3	0	2	0
0	0	3	3	0	0	0
0	0	0	0	0	4	4

[*]http://k-sience.blogspot.com/2017/06/object-counting-using-connected.html

Kodu (connectedComponent.c) inceleyelim.