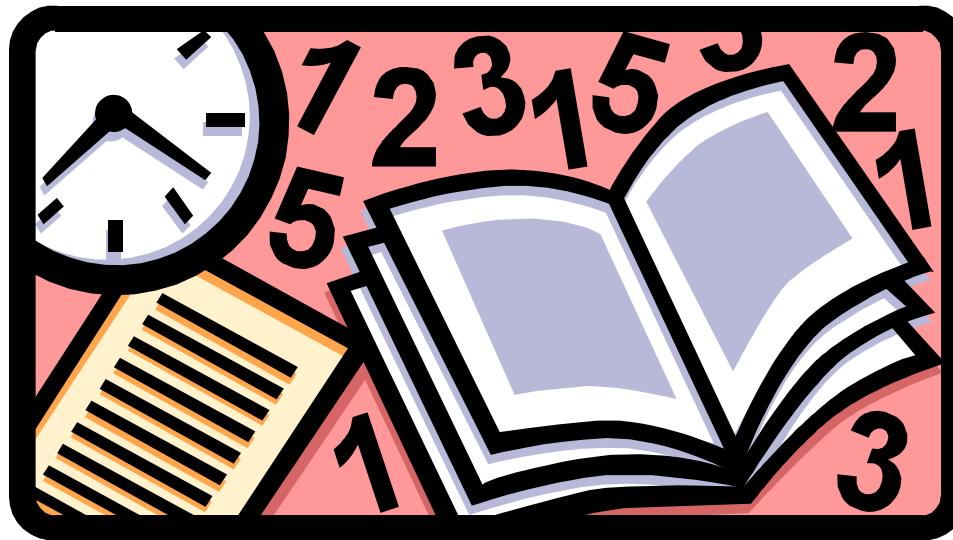


BÖLÜM 7

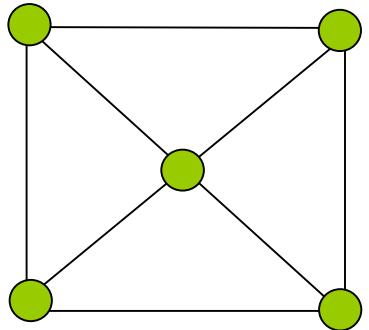
Graf Boyama ve Kromatic Polinomlar (Graph Coloring and Choromatic Polinomial)



Tanım

- ❖ Bir **G** grafının herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafın her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafın **renklendirilmesi** denir.

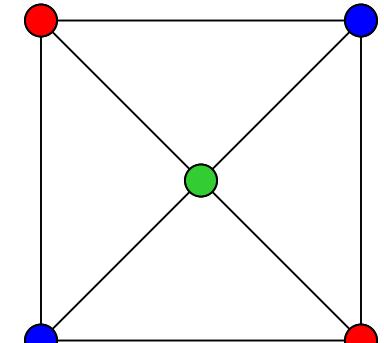
- ❖ Bir grafın **renk** (kromatik) sayısı, grafın renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir G grafının renk (kromatik) sayısı $X(G)$ ile gösterilir.



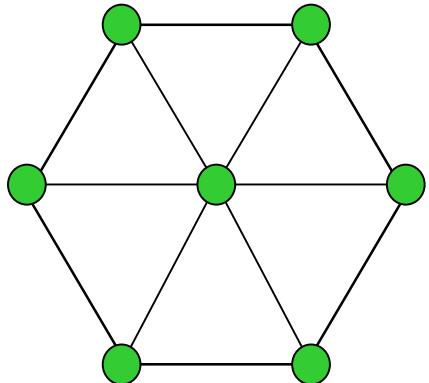
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

$X(G) = 3$ renk mi?

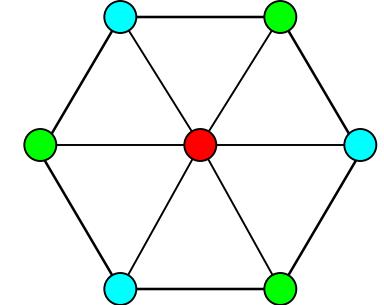
$X(G) = 4$ renk mi?



$$X(G) = 3$$



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



$$X(G) = 3$$

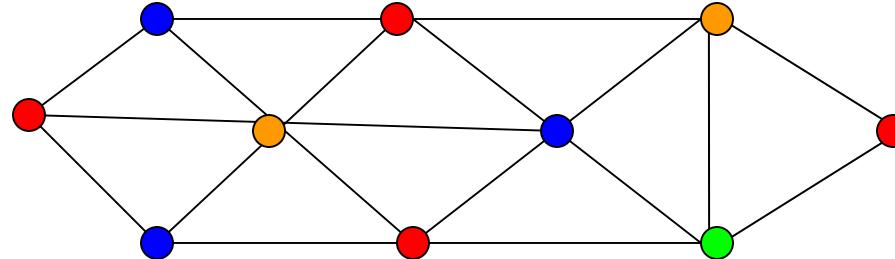
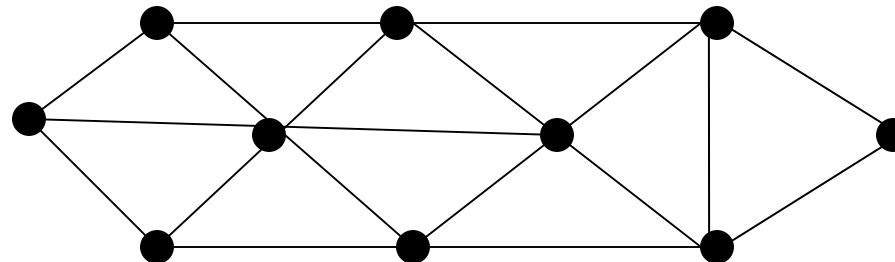
Örnek

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğümler = Kurullar
Kenarlar = Çakışan akademisyenler
Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekildeki gibi olsun.



$$X(G)=4$$

Kromatik Polinomlar

Bir G grafının kromatik polinomu $P(G)$, G grafını minimum k renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağıının sayısını verir.

Deletion Contraction Method

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \setminus e)$$

kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri
birleştirme

Kromatik Polinomu bilinen graflar

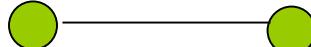
x



Noktasal Graf

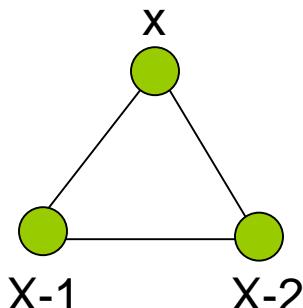
x

x-1



Çizgisel Graf

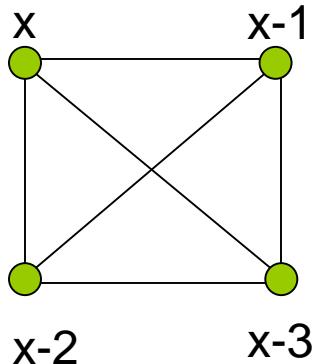
$$U \text{ graflı} \longrightarrow U_n = x(x-1)^{n-1}$$



Z Grafi veya K Grafi

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

Örnek



K grafi olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

$$\begin{aligned}K_4 &= x(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\&= (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) \\&= 1x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x\end{aligned}$$

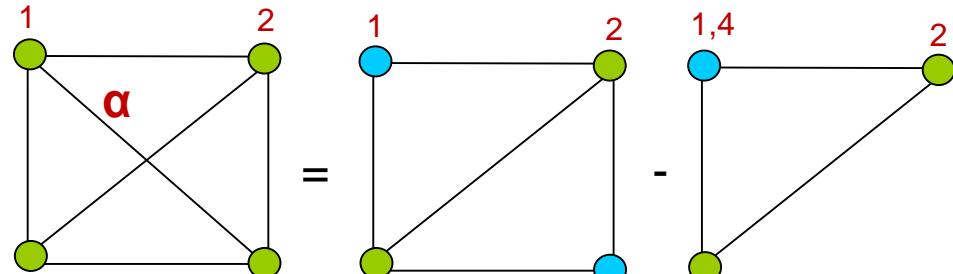
x=1 için değeri 0
x=2 için değeri 0
x=3 için değeri 0
x=4 için değeri 24

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 6 \\ 1 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

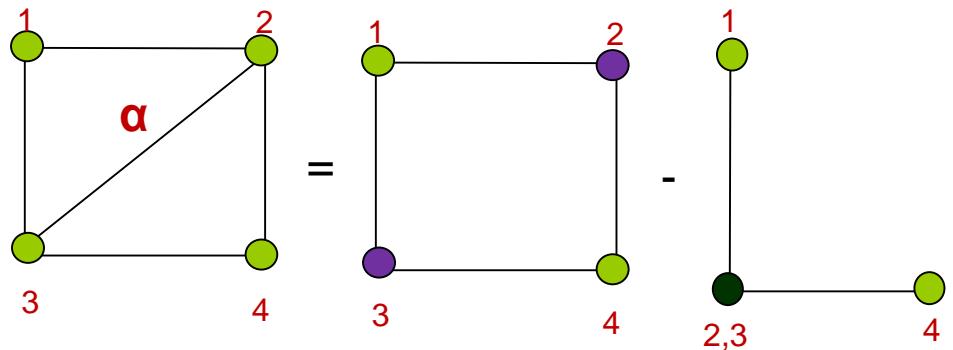
$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 6 \\ 1 \ 5 \ 6 \\ + \\ \hline 1 \ 6 \ 11 \ 6 \end{array}$$

4 farklı renk ile 24 farklı şekilde boyanır

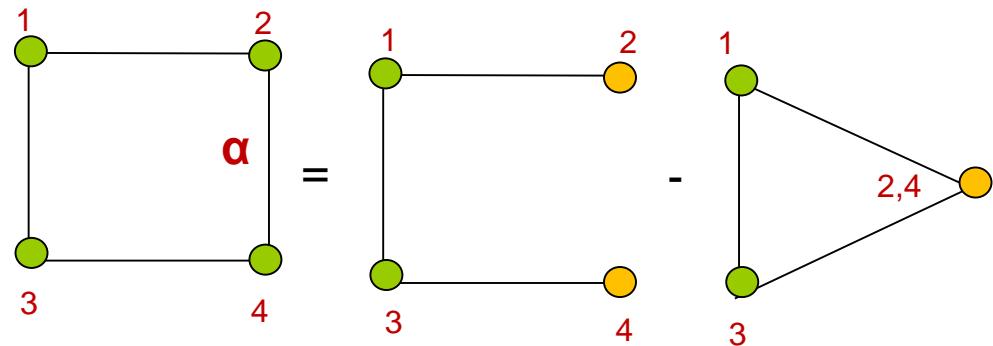
Örnek



$$\begin{aligned} &= x(x-1)(x^2-4x+4) - x(x-1)(x-2) \\ &\quad x(x-1)(x^2-4x+4-x+2) \\ &\quad x(x-1)(x^2-5x+6) \\ &\quad x^4-6x^3+11x^2-6x \end{aligned}$$

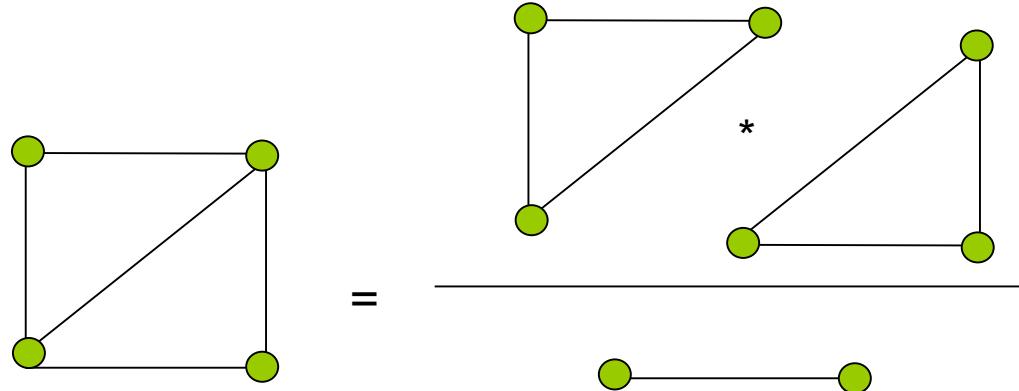


$$\begin{aligned} &= x(x-1)(x^2-3x+3) - x(x-1)^2 \\ &\quad x(x-1)(x^2-3x+3-x+1) \\ &\quad x(x-1)(x^2-4x+4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) \\ &\quad x(x-1)[(x-1)^2-(x-2)] \\ &\quad x(x-1)(x^2-3x+3) \end{aligned}$$

Eğer, iki graf birbirinden **Noktasal** veya **Çizgisel** bir graf ile ayrılıyorsa...



$$\begin{array}{r} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 \\ & 1 & 4 & 4 \\ + & \hline & 1 & 5 & 8 & 4 \end{array}$$

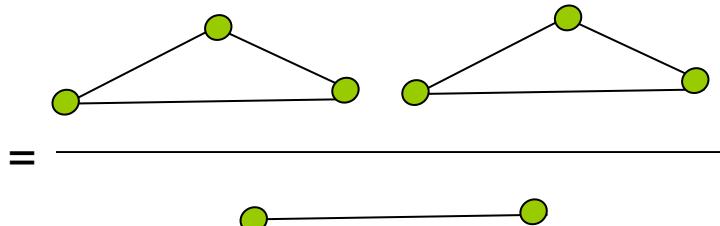
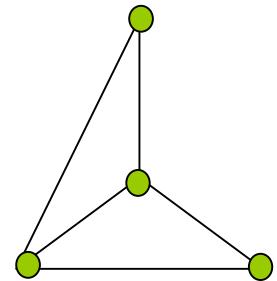
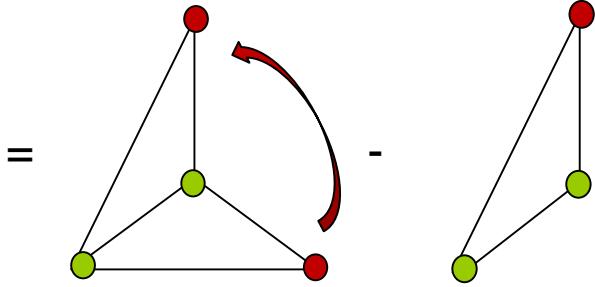
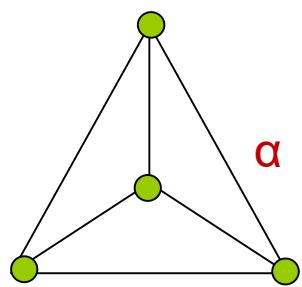
$$\begin{aligned} & x^2 (x-1)^2 (x-2)^2 \\ = & \frac{x (x-1)}{(x-1)^2 (x-2)^2} = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 4) \\ & = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x \end{aligned}$$

3 renk ile boyanır
3 * 2 * 1 = 6 değişik şekilde

Kurallar

- 1) a_1 her zaman **1** olmalıdır
- 2) Polinomun derecesi grafın düğüm sayısını verir
- 3) Terimlerin katsayılarının toplamı **0** olur
- 4) Polinomun katsayılarının işaretleri **+**, **-** diye gider
- 5) Polinomda sabit terim olmaz

Örnek



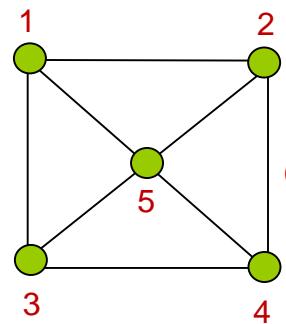
$$= \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x (x-1)}$$

$$\begin{aligned} &= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2) \\ &\quad x(x-1)(x-2)[(x-2)-1] \\ &\quad x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\quad (x^2-x)(x^2-5x+6) \\ &\quad x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \end{aligned}$$

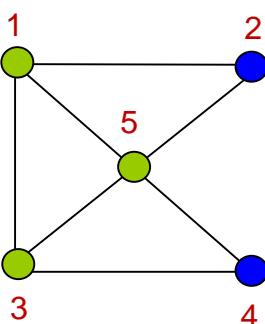
K_4 grafi 4 renk ile 24 farklı şekilde boyanır

Örnek

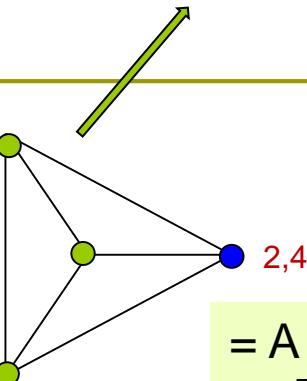
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$



=

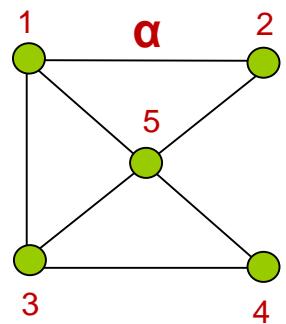


-

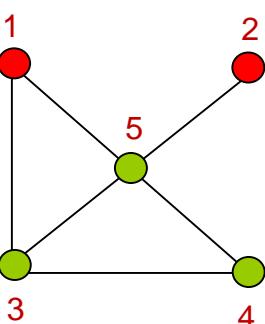


$$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)$$

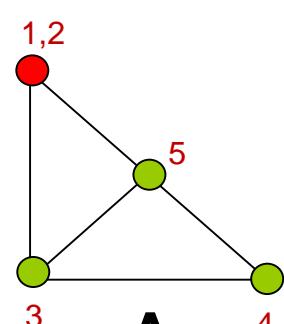
$$x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x$$



=



-

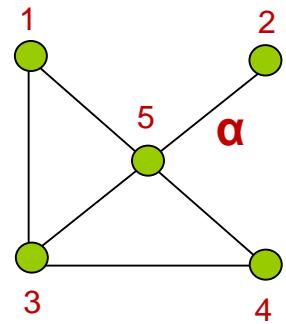


$$= A(x-1) - A$$

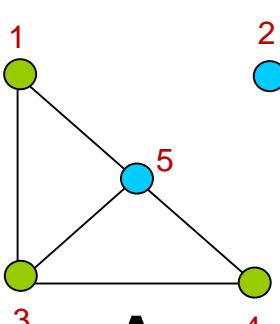
$$Ax - A - A$$

$$Ax - 2A$$

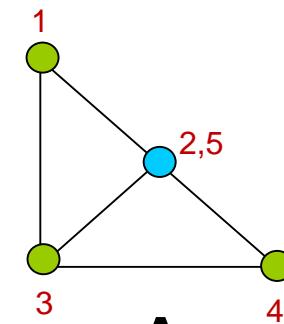
$$A(x-2)$$



=

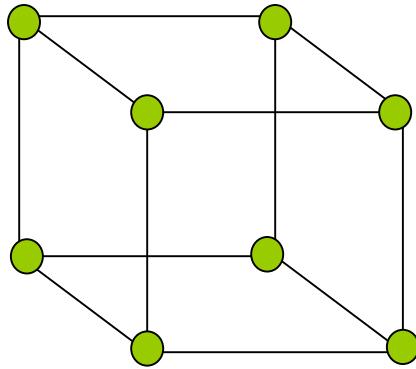


-



$$= A(x-1)$$

Örnek



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208x^5 + 325x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131x$$