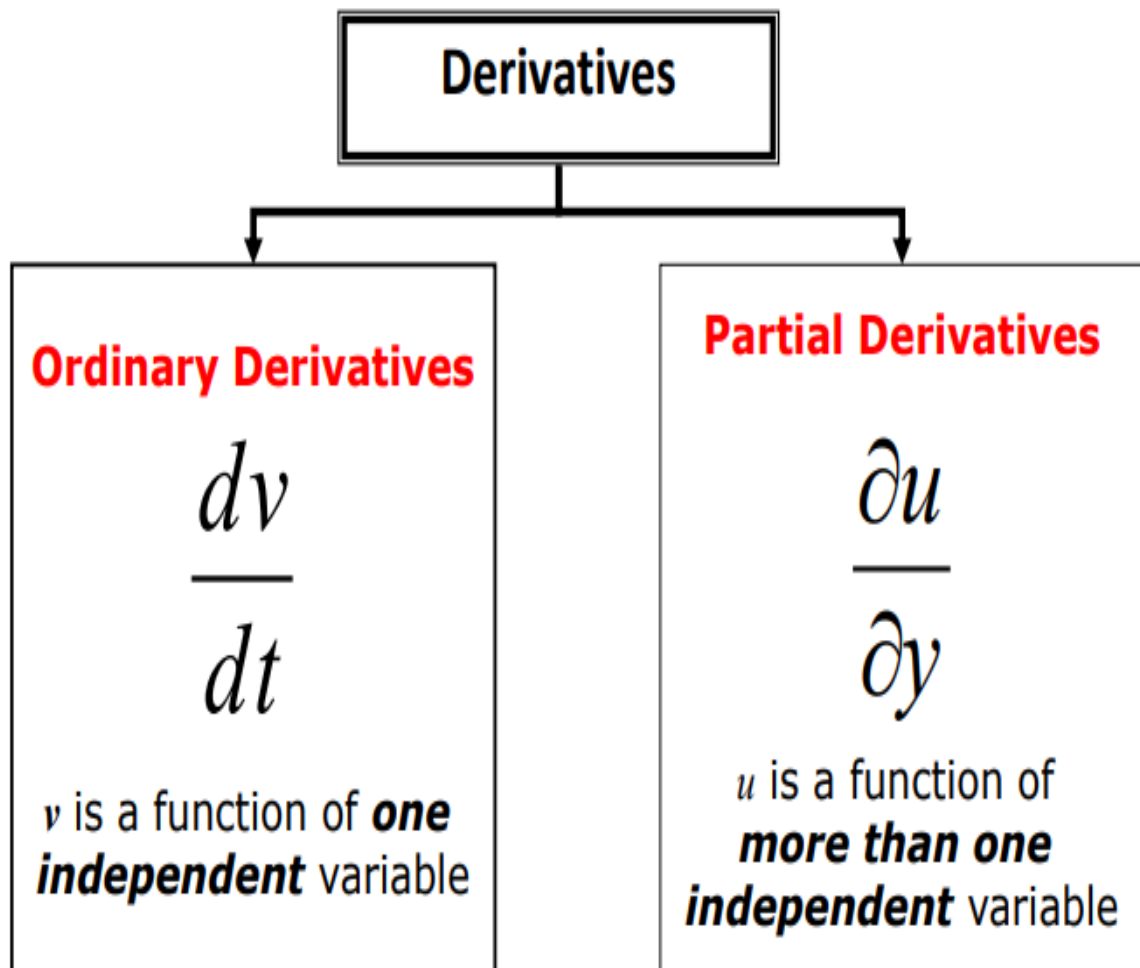


Derivatives





ChatGPT

Bu görsel, türev kavramını iki ana kategoriye ayırmaktadır: "Ordinary Derivatives" (Sıradan Türevler) ve "Partial Derivatives" (Kısmi Türevler).

Ordinary Derivatives (Sıradan Türevler):

- Bu, "v" değişkeninin zamanın bir fonksiyonu olduğu durumda zamanla değişim oranını ifade eder.
- Gösterimi $\frac{dv}{dt}$ şeklindedir.
- "v" sadece bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyondur.

Partial Derivatives (Kısmi Türevler):

- "u" değişkeninin, birden fazla bağımsız değişkene bağlı olduğu durumda, bu değişkenlerden birine göre türevidir.
- Gösterimi $\frac{\partial u}{\partial y}$ şeklindedir.
- "u", birden fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyondur.

Bu iki türev türü, matematikte farklı türde fonksiyonların nasıl değiştiğini anlamak için kullanılır. Sıradan türev genellikle tek bir değişkenli fonksiyonlar için kullanılırken, kısmi türev çok değişkenli fonksiyonlar için kullanılır.

Differential Equations

Differential Equations

```
graph TD; A[Differential Equations] --> B[Ordinary Differential Equations]; A --> C[Partial Differential Equations];
```

Ordinary Differential Equations

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6tv = 1$$

involve one or more
Ordinary derivatives of
unknown functions

Partial Differential Equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

involve one or more
partial derivatives of
unknown functions



ChatGPT

Bu görsel diferansiyel denklemleri iki türe ayırmaktadır: "Ordinary Differential Equations" (Sıradan Diferansiyel Denklemler) ve "Partial Differential Equations" (Kısmi Diferansiyel Denklemler).

Ordinary Differential Equations (Sıradan Diferansiyel Denklemler):

- Bu, bilinmeyen bir fonksiyonun sıradan türevlerini içeren denklemlerdir.
- Gösterilen örnekte, $\frac{d^2v}{dt^2} + 6tv = 1$ şeklinde bir ikinci dereceden sıradan diferansiyel denklemdir.
- Bu denklemde v , zamanın t bir fonksiyonudur ve denklem, v 'nin zamanla nasıl değiştiğini tanımlar.

Partial Differential Equations (Kısmi Diferansiyel Denklemler):

- Bu, bilinmeyen bir fonksiyonun kısmi türevlerini içeren denklemlerdir.
- Gösterilen örnekte, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ şeklinde bir kısmi diferansiyel denklemdir.
- Burada u , hem x hem de y 'ye bağlı bir fonksiyondur ve denklem, u 'nun bu iki bağımsız değişkenle nasıl değiştiğini tanımlar.

Her iki tür diferansiyel denklem de matematikte, fizikte ve mühendislikte, değişkenlerin nasıl değiştiğini anlamak için kullanılır. Sıradan diferansiyel denklemler genellikle tek bir değişkenli durumlar için kullanılırken, kısmi diferansiyel denklemler çok değişkenli durumları modellemek için kullanılır.

Ordinary Differential Equations

- Ordinary Differential Equations (ODEs) involve one or more **ordinary derivatives of unknown functions with respect to one independent variable**

Examples:

$$\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$$

x(t): unknown function

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

t: independent variable



ChatGPT

Bu görsel "Ordinary Differential Equations" (Sıradan Diferansiyel Denklemler) hakkında bilgi vermektedir ve iki örnek içermektedir:

1. İlk denklem $\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$ şeklindedir. Bu denklemde $v(t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur ve t bağımsız değişkendir. Denklem, $v(t)$ 'nin t 'ye göre türevinin, kendisi ile çarpılan -1 ve e üzeri t 'nin toplamı olduğunu ifade eder.
2. İkinci denklem ise $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$ şeklindedir. Burada da $x(t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur ve t bağımsız değişkendir. Bu ikinci dereceden diferansiyel denklem, $x(t)$ 'nin ikinci türevinin, ilk türevinin 5 katının çıkarılması ve $x(t)$ 'nin 2 katının eklenmesi ile $\cos(t)$ 'ye eşit olduğunu gösterir.

Sıradan diferansiyel denklemler, bir fonksiyonun bağımsız değişkenine göre türevlerini içerir ve bu türevler genellikle fonksiyonun nasıl değiştiğini veya zamanla nasıl evrildiğini modellemek için kullanılır. Bu tür denklemler matematikte, fizikte ve mühendislikte yaygın olarak karşımıza çıkar.

Example of ODE: Model of Falling Parachutist

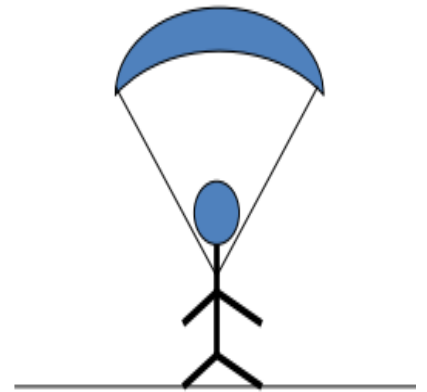
□ The velocity of a falling parachutist is given by:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

M : mass

c : drag coefficient

v : velocity





ChatGPT

Bu görselde, serbest düşen bir paraşütçünün hızını modelleyen bir Sıradan Diferansiyel Denklem (ODE) örneği verilmiştir. Paraşütçünün hızı (v), zaman (t) ile değişim oranını aşağıdaki denklemle ifade eder:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

Burada:

- M : paraşütçünün kütlesini,
- c : sürüklenme katsayısını (hava direncini),
- v : paraşütçünün hızını temsil eder.

Denklem, paraşütçünün hızının zamanla nasıl değiştiğini gösterir.

Gravitasyonun sabit bir ivmesi olan 9.8 m/s^2 (dünya üzerindeki ortalama yerçekimi ivmesi) ile düşmeye başlayan paraşütçü, hava direnci nedeniyle zamanla daha yavaş bir düşüş hızına ulaşır. $\frac{c}{M}v$ terimi, hava direncinin hız üzerindeki etkisini gösterir ve bu etki hızla orantılı olarak artar. Bu denklem, paraşütçünün nihai hızının (terminal hız), hava direnci ve yerçekimi kuvveti arasındaki dengeye bağlı olarak belirlendiğini ifade eder.

Model of Falling Parachutist

Drag force : $F_d = cv$

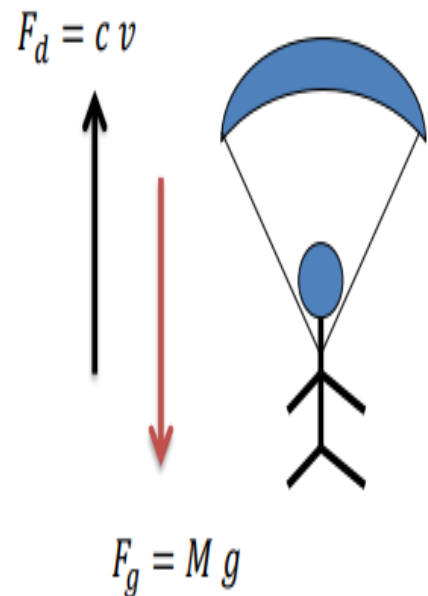
Gravity force: $F_g = Mg$

Acceleration: $a = \frac{dv}{dt}$

Net Force: $F = Ma$ or $F = F_g - F_d$

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - cv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{M}v$$



Bu görselde, serbest düşen bir paraşütçünün hareketini açıklayan fiziksel bir model gösterilmektedir:

- **Sürüklenme Kuvveti (Drag force):** $F_d = cv$

Bu, paraşütçünün hızıyla doğru orantılı olan ve hava direncinden kaynaklanan kuvvettir. c sürüklenme katsayısını ve v hızı temsil eder.

- **Yerçekimi Kuvveti (Gravity force):** $F_g = Mg$

Bu, paraşütçünün kütlesi ile yerçekimi ivmesinin çarpımı olan kuvvettir. M kütleyi ve g yerçekimi ivmesini (genellikle 9.8 m/s^2 olarak kabul edilir) temsil eder.

- **İvme (Acceleration):** $a = \frac{dv}{dt}$

Paraşütçünün hızındaki zamanla değişim oranıdır.

- **Net Kuvvet (Net Force):** $F = Ma$ ya da $F = F_g - F_d$

Paraşütçünün üzerindeki net kuvvet, yerçekimi kuvveti ile sürüklenme kuvvetinin farkıdır.

Denklemler, paraşütçünün düşerken üzerindeki net kuvvetin yerçekimi kuvveti ile sürüklenme kuvveti arasındaki dengeye bağlı olduğunu ifade eder. Hızının zamanla nasıl değişeceğini bulmak için sürüklenme kuvvetinin yerçekimi kuvvetinden çıkarılmasıyla elde edilen net kuvveti, paraşütçünün kütlesiyle çarparak ivme elde edilir:

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - cv$$

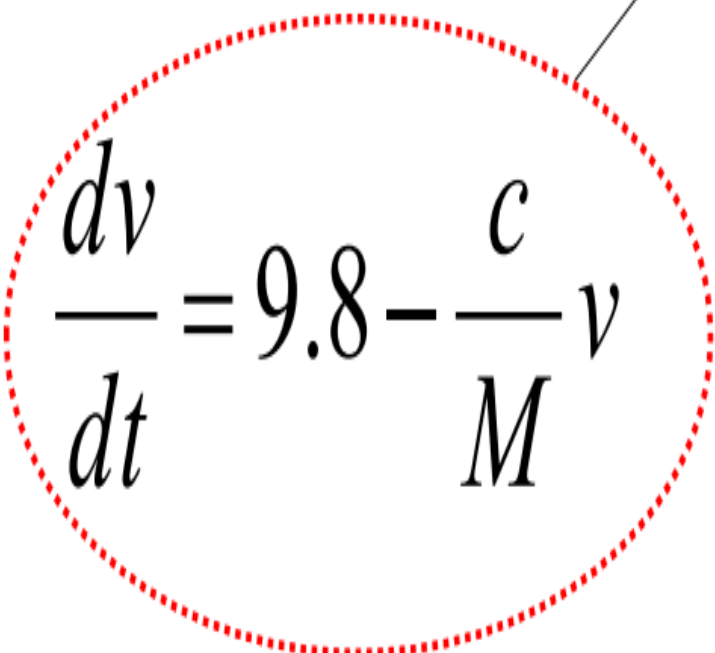
Bu denklem, aşağıdaki Sıradan Diferansiyel Denkleme (ODE) düzenlenebilir:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{M}v$$

Bu denklem, paraşütçünün hızının zamanla nasıl değişeceğini modellemek için kullanılır. Hızı başlangıçta artar, ancak sürüklenme kuvveti arttıkça hızın artış hızı azalır ve sonunda sabit bir terminal hıza ulaşır. Terminal hız, net kuvvetin sıfır olduğu hızdır, yani yerçekimi kuvveti ile sürüklenme kuvveti birbirini dengeler.

Definitions

Ordinary
differential
equation


$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$



ChatGPT

Görselde gösterilen ifade, bir Sıradan Diferansiyel Denklem (Ordinary Differential Equation - ODE) örneğidir. Bu denklem şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

Bu denklemde:

- $\frac{dv}{dt}$ ifadesi, hızın zamanla değişim oranını (yani ivmeyi) gösterir.
- 9.8 sayısı, yerçekimi ivmesini temsil eder ve genellikle dünyadaki değeri m/s^2 cinsinden bu şekildedir.
- c , sürüklenme katsayısını gösterir ve hava direncinin etkisini temsil eder.
- M , paraşütçünün kütesini ifade eder.
- v , paraşütçünün anlık hızını gösterir.

Denklem, bir paraşütçünün hızının, yerçekimi tarafından ivmelendirilmesi ve hava direnci tarafından yavaşlatılmasının etkileşimi altında zamanla nasıl değiştiğini açıklar. Yerçekimi ivmesi sabit bir katkı sağlarken, hava direnci hıza bağlı olarak değişir ve hız arttıkça direnç de artar. Bu denklem, paraşütçünün hızının zamanla nasıl bir terminal hıza doğru yakınsayacağını gösterir.

Definitions (Cont.)

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

(Dependent variable)
unknown
function to be
determined



ChatGPT

Görselde verilen matematiksel ifade, bir Sıradan Diferansiyel Denklemi (ODE) tanımlamaktadır ve bu denklemin çözümü için bilinmeyen bir fonksiyonu (bağımlı değişkeni) bulmayı hedefler. İfade şöyledir:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

- $\frac{dv}{dt}$, hızın zamanla değişim oranını yani ivmeyi ifade eder.
- v hızdır ve bu denklemde bulunması gereken bilinmeyen fonksiyondur (bağımlı değişken).
- 9.8, yerçekimi ivmesinin değerini (m/s² cinsinden) temsil eder.
- c , sürüklenme katsayısıdır ve hava direncinin etkisini ifade eder.
- M , cismin kütlesini temsil eder.

Bu denklem, paraşütçünün hızının zaman içinde nasıl değiştiğini, yerçekimi ve hava direnci kuvvetlerinin etkileşimi altında modellemek için kullanılır. Bulunması gereken $v(t)$ fonksiyonu, paraşütçünün zamanla hızının nasıl değişeceğini ifade edecektir.

Definitions (Cont.)

$$\frac{d v}{d t} = 9.8 - \frac{c}{M} v$$

(independent variable)
the variable with respect to which
other variables are differentiated



ChatGPT

Görselde verilen matematiksel ifade, bir diferansiyel denklemin parçasını göstermektedir ve şöyle okunabilir:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M}v$$

- dv/dt , hız v 'nin zaman t ile nasıl değiştiğini gösterir. Bu, ivme olarak da bilinir.
- t , bağımsız değişkendir ve diğer değişkenlerin (bu durumda hızın) ona göre türetildiği değişkendir.
- 9.8, yerçekimi ivmesinin değeridir ve genellikle metre cinsinden saniye başına saniye başına (m/s^2) olarak ifade edilir.
- c , sürüklenme katsayısıdır ve hava direncinin etkisini gösterir.
- M , nesnenin kütlesidir ve burada paraşütçünün kütlesini temsil eder.
- v , paraşütçünün anlık hızını ifade eder.

Denklem, paraşütçünün hızının, yerçekimi ivmesi ve hava direnci arasındaki etkileşimle zaman içinde nasıl değiştiğini matematiksel olarak ifade eder. Hava direnci, hız arttıkça artar ve yerçekimi ivmesi ile denge noktasına ulaşana kadar hızın artmasını yavaşlatır. Bu denge noktası, hızın daha fazla artmadığı ve sabit bir değerde kaldığı terminal hıza karşılık gelir.

Order of a Differential Equation

- The number of the highest derivative in a differential equation. A differential equation of order 1 is called first order, order 2 second order, etc.

Example: The differential equation $y'' + xy' - x^3y = \sin x$ is second order since the highest derivative is y'' or the second derivative.



ChatGPT

Görselde bir diferansiyel denklemin derecesiyle ilgili bir açıklama yer almaktadır.

Diferansiyel denklemin derecesi, denklemin içerdiği en yüksek türevin derecesine göre belirlenir. Eğer denklem birinci mertebeden bir türev içeriyorsa bu birinci dereceden denklem olarak adlandırılır, eğer ikinci mertebeden bir türev içeriyorsa bu ikinci dereceden denklem olarak adlandırılır ve bu böyle devam eder.

Verilen örnekte, $y'' + xy' - x^3y = \sin(x)$ şeklinde bir diferansiyel denklem gösterilmekte ve bu denklemin ikinci dereceden olduğu belirtilmektedir. Bunun nedeni, denklemin içerdiği en yüksek türevin ikinci mertebeden (yani y'' , y fonksiyonunun ikinci türevi) olmasıdır. Bu tür denklemler genellikle daha karmaşık sistemleri modellemekte kullanılır ve çözümleri birinci dereceden denklemlere göre daha zor olabilir.

Order of a Differential Equation

The **order** of an ordinary differential equation is the order of the highest order derivative.

Examples:

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

First order ODE

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

Second order ODE

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1$$

Second order ODE



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin derecesinin, denklemdaki en yüksek mertebeden türevin derecesi olduğu açıklanmaktadır. Burada üç farklı diferansiyel denklem örneği verilmiş ve her birinin derecesi belirtilmiştir:

1. İlk denklem $\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$ birinci dereceden bir ODE'dir (Ordinary Differential Equation), çünkü içerdiği en yüksek türev birinci mertebededir.
2. İkinci denklem $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$ ikinci dereceden bir ODE'dir, çünkü içerdiği en yüksek türev ikinci mertebededir.
3. Üçüncü denklem $\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1$ de ikinci dereceden bir ODE'dir.

Burada ikinci mertebeden türevin küpü alınmış olsa da, denklemin derecesi türevin alındığı mertebe ile belirlenir ve bu da ikinci mertebededir.

Diferansiyel denklemlerin derecesi, denklemin çözümünün karmaşıklığını ve gerektirdiği matematiksel yöntemleri etkiler. Birinci dereceden denklemler genellikle daha basit çözümlere sahipken, ikinci ve daha yüksek dereceden denklemler daha karmaşık çözüm yöntemleri gerektirebilir.

Solution of a Differential Equation

A **solution** to a differential equation is a function that satisfies the equation.

Example:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

Solution $x(t) = e^{-t}$

Proof:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = -e^{-t} + e^{-t} = 0$$



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin çözümüne ilişkin bir örnek verilmiştir. Diferansiyel denklemin bir çözümü, o denklemi sağlayan bir fonksiyondur. Yani, denkleme yerine koyduğunuzda, denklemin sol ve sağ tarafının eşit olduğu bir fonksiyondur.

Örnekte verilen diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

Bu denklemin çözümü olarak sunulan fonksiyon $x(t) = e^{-t}$ 'dir. Çözümün doğruluğunu kanıtlamak için, önerilen çözüm fonksiyonun türevi alınır ve orijinal diferansiyel denkleme yerine konur. Türevi alındığında:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}$$

Bu türev ve orijinal fonksiyon $x(t) = e^{-t}$ orijinal diferansiyel denkleme yerine konulduğunda:

$$-e^{-t} + e^{-t} = 0$$

Bu ifade sıfıra eşit olduğu için, önerilen fonksiyonun denklemini sağladığı doğrulanmış olur ve bu fonksiyonun denklemin bir çözümü olduğu kanıtlanmış olur.

Linear and non-linear

Both ordinary and partial differential equations are broadly classified as **linear** and **nonlinear**.

A differential equation is linear if the unknown function and its derivatives appear to the power 1 (products of the unknown function and its derivatives are not allowed) and nonlinear otherwise.

The characteristic property of linear equations is that their solutions form an affine subspace of an appropriate function space, which results in much more developed theory of linear differential equations. **Homogeneous linear** differential equations are a further subclass for which the space of solutions is a linear subspace i.e. the sum of any set of solutions or multiples of solutions is also a solution. The coefficients of the unknown function and its derivatives in a linear differential equation are allowed to be (known) functions of the independent variable or variables; if these coefficients are constants then one speaks of a **constant coefficient linear differential equation**.



ChatGPT

Görselde, diferansiyel denklemlerin lineer ve nonlinear olmak üzere iki ana kategoriye ayrıldığı açıklanmaktadır:

- Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin sadece birinci dereceden üslerle (yani fonksiyonun ve türevlerinin çarpımları olmadan) olduğu zaman **lineer** olarak kabul edilir. Eğer denklemin içerisinde bilinmeyen fonksiyonun ya da onun türevlerinin kuvvetleri, çarpımları varsa veya fonksiyonun kendisiyle veya türevleriyle çarpılmışsa, denklem **nonlinear** olarak kabul edilir.
- Lineer denklemlerin karakteristik bir özelliği, çözümlerinin uygun bir fonksiyon uzayının afin altuzayını oluşturmasıdır. Bu, lineer diferansiyel denklemlerin teorisinin çok daha gelişmiş olmasına neden olur.
- **Homojen lineer diferansiyel denklemler**, çözüm uzayının bir lineer altuzay olduğu ve çözüm kümesinin herhangi bir toplamının veya çözümlerin katlarının da bir çözüm olduğu bir alt sınıftır.
- Lineer diferansiyel denklemlerde, bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken veya değişkenlerin bilinen fonksiyonları olabilir. Eğer bu katsayılar sabitse, bu durumda **sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem** denir.

Özetle, lineer denklemler genellikle daha basit ve çözümleri üzerinde daha fazla teorik yapıya sahipken, nonlinear denklemler daha karmaşık yapılar sergiler ve çözümleri genellikle daha zordur.



Linear and Affine Function

- $f(x)=2x$ is linear and affine.
- $f(x)=2x+3$ is affine but not linear



ChatGPT

Görselde iki farklı fonksiyon tipi tanımlanmaktadır: Lineer ve afin fonksiyonlar.

- $f(x) = 2x$ ifadesi hem lineer hem de afin bir fonksiyondur. Lineer fonksiyonlar, orijinden geçen ve sabit bir eğime sahip doğru grafiklerine karşılık gelir. $f(x) = 2x$ fonksiyonu, orijinden geçen ve eğimi 2 olan bir doğruyu temsil eder.
- $f(x) = 2x + 3$ ifadesi ise afin bir fonksiyondur ancak lineer değildir. Afin fonksiyonlar, lineer fonksiyonlara sabit bir terim eklenerek elde edilir. Bu sabit terim, fonksiyonun grafikte y eksenini kestiği noktayı (y-intercept) belirler. $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu, eğimi 2 olan ve y eksenini 3 noktasında kesen bir doğruyu temsil eder. Lineer olmamasının sebebi, orijinden geçmemesidir.

Bu iki fonksiyon arasındaki temel fark, lineer fonksiyonların her zaman orijinden geçmesi ve afin fonksiyonların ise orijinden geçmeyebilmesidir. Afin fonksiyonlar, lineer terimin yanı sıra bir sabit terim de içerirler.



You

Linear and Non-linear

There are very few methods of solving nonlinear differential equations exactly; those that are known typically depend on the equation having particular [symmetries](#).

Nonlinear differential equations can exhibit very complicated behavior over extended time intervals, characteristic of [chaos](#). Even the fundamental questions of existence, uniqueness, and extendability of solutions for nonlinear differential equations, and well-posedness of initial and boundary value problems for nonlinear PDEs are hard problems.

However, if the differential equation is a correctly formulated representation of a meaningful physical process, then one expects it to have a solution.

Linear differential equations frequently appear as [approximations](#) to nonlinear equations. These approximations are only valid under restricted conditions.



ChatGPT

Görselde lineer ve nonlinear diferansiyel denklemler arasındaki farklardan bahsedilmekte ve nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümüne dair bazı açıklamalar yapılmaktadır:

- Nonlinear diferansiyel denklemleri tam olarak çözmek için çok az yöntem vardır ve bilinen yöntemler genellikle denklemin belirli simetrilere sahip olmasına bağlıdır.
- Nonlinear diferansiyel denklemler, uzun zaman aralıklarında oldukça karmaşık davranışlar sergileyebilir ve kaosu özelliklerini gösterebilir. Nonlinear diferansiyel denklemler için varlık, teklik, çözümlerin genişletilebilirliği gibi temel sorunlar ve nonlinear kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin iyi tanımlanmış olması zor problemlerdir.
- Eğer bir diferansiyel denklem, anlamlı bir fiziksel sürecin doğru bir şekilde formüle edilmiş bir temsili ise, bu denklemin bir çözümünün olması beklenir.
- Lineer diferansiyel denklemler, nonlinear denklemlere yaklaşık çözümler olarak sıkça karşımıza çıkar. Bu yaklaşımlar yalnızca belirli kısıtlı koşullar altında geçerlidir.

Bu açıklamalar, nonlinear denklemlerin karmaşıklığına ve çözüm zorluklarına, lineer denklemlerin ise daha basit yapısına ve bazı durumlarda nonlinear denklemlerin yaklaşık çözümleri olarak kullanılabilmesine dikkat çekmektedir. Lineer denklemler genellikle daha iyi anlaşılmış ve çözümü daha kolaydır, ancak gerçek dünya problemlerini modellemek için her zaman yeterli olmayabilirler. Nonlinear denklemler daha gerçekçi modeller sunabilir, fakat analitik çözümleri bulmak genellikle daha zordur.

Linear and Non-linear

A **linear differential equation** is any differential equation that can be written in the following form:

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

If a differential equation cannot be written in this form, then it is called **a non-linear differential equation.**



ChatGPT

Görselde, lineer ve nonlinear diferansiyel denklemlerin tanımları verilmektedir:

- Bir **lineer diferansiyel denklem**, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin, bağımsız değişkenin fonksiyonları olan katsayılarla çarpıldığı ve bunların toplandığı bir denklem şeklinde yazılabilir. Bu tür denklemler genel formda şöyle ifade edilir:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

Burada $y^{(n)}$ bilinmeyen fonksiyonun n 'inci türevidir, $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ bağımsız değişken t 'nin bilinen fonksiyonlarıdır ve $g(t)$ bağımsız değişkenin bir fonksiyonudur.

- Eğer bir diferansiyel denklem bu formda yazılamıyorsa, yani eğer bilinmeyen fonksiyon veya onun türevleri kuvvetler halinde, çarpımlar halinde ya da başka nonlinear terimler içeriyorsa, bu tür denklemler **nonlinear diferansiyel denklem** olarak adlandırılır.

Lineer diferansiyel denklemler genellikle çözümleri bakımından daha basit yapıya sahipken, nonlinear diferansiyel denklemler daha karmaşık yapılar sergileyebilir ve genellikle analitik çözümleri daha zordur veya mümkün olmayabilir.

Linear ODE

An ODE is linear if the unknown function and its derivatives appear to power one.

No product of the unknown function and/or its derivatives

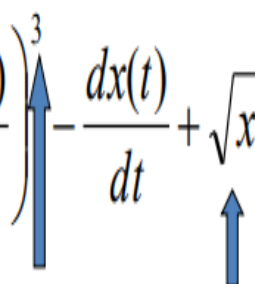
Examples:

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

Linear ODE

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2t^2x(t) = \cos(t)$$

Linear ODE

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 1$$


Non-linear ODE



ChatGPT

Görselde, bir ODE'nin (Ordinary Differential Equation - Sıradan Diferansiyel Denklem) ne zaman lineer olduğu açıklanmaktadır ve bazı örnekler verilmektedir:

- Bir ODE, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri sadece birinci derece üslere sahipse (yani kuvvetleri bir olan ve bilinmeyen fonksiyon veya türevlerinin çarpımını içermeyen) lineerdir.

Örneklere göre:

- $\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$ denklemi lineer bir ODE'dir çünkü bilinmeyen fonksiyon ve türevleri çarpılmadan ve yalnızca birinci kuvvetlerde yer almaktadır.
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2t^2x(t) = \cos(t)$ denklemi de lineer bir ODE'dir çünkü yine bilinmeyen fonksiyon ve türevleri arasında çarpım yoktur ve her bir terim birinci derecedendir.
- $\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 1$ denklemi ise nonlinear bir ODE'dir çünkü ikinci türevin kuvveti alınmış ve bilinmeyen fonksiyonun karekökü gibi nonlinear terimler içermektedir.

Lineer ODE'ler genellikle daha basit çözüm yöntemlerine sahiptir ve superpozisyon prensibi gibi bazı güçlü matematiksel özellikler gösterir. Nonlinear ODE'ler ise daha karmaşık yapıya sahiptir ve çözümleri daha zor olabilir, bazen kaotik davranışlar sergileyebilirler.

Nonlinear ODE

Examples of nonlinear ODE :

$$\frac{dx(t)}{dt} - \cos(x(t)) = 1$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} x(t) = 2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| + x(t) = 1$$



ChatGPT

Görselde, nonlinear ODE (Sıradan Diferansiyel Denklem) örnekleri gösterilmektedir:

1. $\frac{dx(t)}{dt} - \cos(x(t)) = 1$: Bu denklem, bilinmeyen fonksiyonun kosinüsü içerdiği için nonlineerdir.
2. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt}x(t) = 2$: Bu denklemde bilinmeyen fonksiyonun türevi ile fonksiyonun kendisi çarpıldığı için nonlineerdir.
3. $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 1$: Bu denklem aslında lineer bir denklemdir çünkü her terim fonksiyonun veya onun türevlerinin birinci derecesini içerir ve aralarında çarpım yoktur. Ancak görselde bu denklemin nonlinear olduğu belirtilmiş, bu bir hata olabilir veya denklemin nonlinear bir parçası görselde gösterilmemiş olabilir.



Solutions of Ordinary Differential Equations

$$x(t) = \cos(2t)$$

is a solution to the ODE

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

Is it unique?

All functions of the form $x(t) = \cos(2t + c)$
(where c is a real constant) are solutions.



ChatGPT

Görsel, sıradan diferansiyel denklemlerin (ODE - Ordinary Differential Equations) çözümleri hakkında bilgi veriyor:

- $x(t) = \cos(2t)$ fonksiyonu, $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.
- Daha sonra, çözümün benzersiz olup olmadığı sorusu soruluyor.
- Cevap olarak, $x(t) = \cos(2t + c)$ formunda olan tüm fonksiyonlar (burada c gerçekte bir sabittir) bu ODE'nin çözümleri olarak verilmiştir.

Bu durum, ODE'nin birden fazla çözümü olduğunu ve bu çözümlerin bir faz kaydırması (c) içerdiğini gösterir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri genellikle başlangıç koşullarına bağlıdır ve bu örnekte, c sabiti, farklı başlangıç koşullarını temsil eder. Bu tür bir sabit, çözüm kümesine bir derece özgürlük katmakta ve denklemin genel çözümünü oluşturmaktadır.

Uniqueness of a Solution

In order to uniquely specify a solution to an n^{th} order differential equation we need n conditions.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

Second order ODE

$$x(0) = a$$

$$\dot{x}(0) = b$$

Two conditions are needed to uniquely specify the solution



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin çözümünün benzersizliği ile ilgili bir açıklama yer almaktadır:

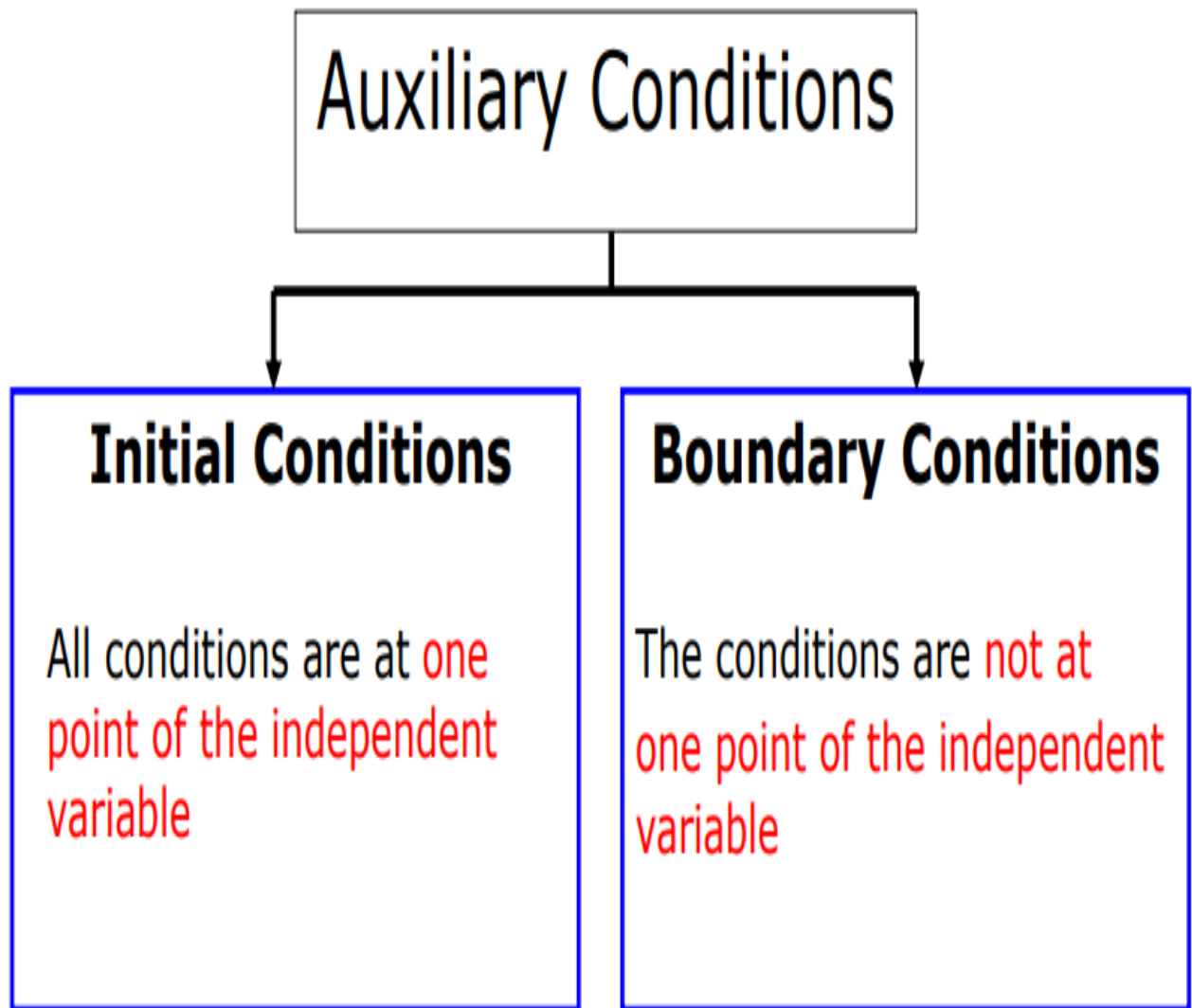
- Bir n 'inci dereceden diferansiyel denklemin çözümünü benzersiz olarak belirlemek için n adet koşulun belirlenmesi gerektiği ifade edilmektedir.

Örneğin:

- $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$ ikinci dereceden bir ODE'dir (Ordinary Differential Equation - Sıradan Diferansiyel Denklemler).
- Bu denklemin çözümünü benzersiz kılmak için iki adet başlangıç koşulu gerekmektedir: $x(0) = a$ ve $\dot{x}(0) = b$. Burada $x(0)$ fonksiyonun $t = 0$ anındaki değerini, $\dot{x}(0)$ ise fonksiyonun $t = 0$ anındaki türevinin değerini ifade eder.

Görseldeki açıklama, bir diferansiyel denklemin çözümünün sadece denklemin kendisiyle değil, aynı zamanda belirli başlangıç veya sınır koşulları ile birlikte ele alındığında tam olarak tanımlanabileceğini belirtmektedir. Bu, özellikle fizik ve mühendislikteki problemlerde önemlidir, çünkü başlangıç koşulları, sistemin başlangıç durumunu yansıtır ve denklemin çözümünü etkiler.

Auxiliary Conditions





Görsel, diferansiyel denklemlerle ilgili yardımcı koşulların iki ana türünü açıklıyor: başlangıç koşulları ve sınır koşulları.

- **Başlangıç Koşulları (Initial Conditions):** Bunlar, bağımsız değişkenin (genellikle zaman) belirli bir noktasında (tipik olarak başlangıç noktası) sistemin durumunu tanımlayan koşullardır. Örneğin, bir nesnenin başlangıçtaki konumu ve hızı gibi.
- **Sınır Koşulları (Boundary Conditions):** Bunlar, bağımsız değişkenin birden fazla noktasında veya belirli bir aralıkta uygulanan koşullardır. Örneğin, bir çubuğun iki ucunda sıcaklık veya bir tel üzerindeki gerilim gibi. Sınır koşulları, genellikle bir fiziksel sistemin sınırları boyunca uygulanan kısıtlamaları ifade eder.

Yardımcı koşullar, diferansiyel denklemlerin benzersiz çözümlerini bulmak için gereklidir. Başlangıç koşulları genellikle başlangıç değer problemlerinde (initial value problems), sınır koşulları ise sınır değer problemlerinde (boundary value problems) kullanılır.

Boundary-Value and Initial value Problems

Initial-Value Problems

- The auxiliary conditions are at **one point of the independent variable**

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2.5$$

same

Boundary-Value Problems

The auxiliary conditions are **not at one point of the independent variable**

More difficult to solve than initial value problems

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, x(2) = 1.5$$

different



ChatGPT

Görselde, başlangıç değer problemleri ile sınır değer problemleri arasındaki farklar anlatılmaktadır:

- **Başlangıç Değer Problemleri (Initial-Value Problems):** Yardımcı koşullar, bağımsız değişkenin (genellikle zaman) tek bir noktasında verilir. Görselde, diferansiyel denklem $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$ şeklinde verilmiş ve bu denklemin başlangıç değerleri $x(0) = 1$ ve $\dot{x}(0) = 2.5$ olarak belirtilmiştir.
- **Sınır Değer Problemleri (Boundary-Value Problems):** Yardımcı koşullar, bağımsız değişkenin birden fazla noktasında verilir. Aynı diferansiyel denklem için sınır değerleri $x(0) = 1$ ve $x(2) = 1.5$ şeklinde iki farklı noktada verilmiştir.

Görselde vurgulanan, başlangıç değer problemlerinin genellikle sınır değer problemlerine göre daha kolay çözüldüğüdür. Sınır değer problemleri, çözümün belirli bir aralıktaki birden fazla noktaya uygun olmasını gerektirdiği için genellikle daha karmaşıktır.

Classification of ODEs

ODEs can be classified in different ways:

- Order
 - First order ODE
 - Second order ODE
 - N^{th} order ODE
- Linearity
 - Linear ODE
 - Nonlinear ODE
- Auxiliary conditions
 - Initial value problems
 - Boundary value problems



ChatGPT

Görselde, sıradan diferansiyel denklemlerin (ODE'ler - Ordinary Differential Equations) nasıl sınıflandırılabileceği açıklanmaktadır:

- **Derece (Order):** ODE'ler, içerdikleri en yüksek türevin mertebesine göre sınıflandırılır. Birinci dereceden ODE'ler bir türev içerir, ikinci dereceden ODE'ler iki türev içerir, n 'inci dereceden ODE'ler ise n türev içerir.
- **Lineerlik (Linearity):** ODE'ler, lineer veya nonlinear olmak üzere iki kategoriye ayrılabilir. Lineer ODE'ler, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin lineer kombinasyonları şeklinde ifade edilebilirken, nonlinear ODE'ler, bilinmeyen fonksiyonun veya onun türevlerinin kuvvetlerini, çarpımlarını veya diğer nonlinear işlemlerini içerir.
- **Yardımcı Koşullar (Auxiliary Conditions):** ODE'lerin çözümleri, belirli yardımcı koşullar altında incelenir. Başlangıç değer problemleri, bağımsız değişkenin tek bir noktasındaki değerlerle (genellikle zamanın başlangıç anındaki durumla) ilgiliyken; sınır değer problemleri, bağımsız değişkenin farklı noktalarındaki değerlerle (genellikle fiziksel bir sistemin sınırlarıyla) ilgili koşulları içerir.

Analytical Solutions

- Analytical Solutions to ODEs are available for linear ODEs and special classes of nonlinear differential equations.



ChatGPT

Görselde, sıradan diferansiyel denklemlerin (ODE'ler - Ordinary Differential Equations) analitik çözümleri hakkında bilgi verilmektedir:

Analitik çözümler, ODE'ler için lineer ODE'ler ve nonlinear diferansiyel denklemlerin özel sınıfları dahilinde mevcuttur. Bu, çözümün kapalı formda bir ifade ya da fonksiyonlar dizisi olarak açıkça yazılabileceği anlamına gelir. Lineer ODE'ler genellikle belirli çözüm teknikleri kullanılarak çözülebilirken, nonlinear ODE'lerin çözümü daha karmaşık olabilir ve sadece belirli tipteki nonlinear denklemler için analitik çözümler mevcuttur.

Numerical Solutions

- Numerical methods are used to obtain a graph or a table of the unknown function.
- Most of the Numerical methods used to solve ODEs are based directly (or indirectly) on the truncated Taylor series expansion.



ChatGPT

Görselde sayısal çözümler hakkında bilgi verilmektedir:

- Sayısal yöntemler, bilinmeyen bir fonksiyonun grafiğini veya tablosunu elde etmek için kullanılır. Bu yöntemler, diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri bulunamadığında veya çok karmaşık olduğunda tercih edilir.
- ODE'leri çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerin çoğu, doğrudan veya dolaylı olarak kesikli (truncated) Taylor serisi genişletmesine dayanır. Taylor serisi genişletmesi, bir fonksiyonun belirli bir noktadaki değerlerini ve türevlerini kullanarak fonksiyonun yaklaşık değerlerini hesaplamak için kullanılır. Bu seriler, fonksiyonun daha yüksek dereceden türevlerini ihmal ederek kesilir ve bu sayede hesaplama işlemi basitleştirilir.

Separable Differential Equations

A separable differential equation can be expressed as the product of a function of x and a function of y .

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad h(y) \neq 0$$

Example:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Multiply both sides by dx and divide both sides by y^2 to separate the variables. (Assume y^2 is never zero.)

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx$$

$$y^{-2} dy = 2x \, dx$$



ChatGPT

Görselde, ayrılabilir diferansiyel denklemler hakkında bilgi verilmektedir:

- Ayrılabilir bir diferansiyel denklem, x 'in bir fonksiyonu ile y 'nin bir fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilebilir. Yani $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ şeklinde yazılabilir ve burada $h(y) \neq 0$ olmalıdır.

Örneğin:

- Verilen örnek denklem $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ olarak ifade edilmiştir.
- Denklemi çözmek için her iki taraf da dx ile çarpılır ve y^2 ile bölünür, böylece değişkenler ayrılır. Bu işlem y^2 'nin hiçbir zaman sıfır olmadığı varsayımı altında yapılır.
- Yapılan işlemler sonucunda $\frac{dy}{y^2} = 2xdx$ elde edilir.
- Bu işlem, değişkenleri ayırtırmakta ve integral alma işlemini mümkün kılmaktadır. Daha sonra her iki tarafın integrali alınarak denklemin çözümü bulunabilir.

Separable Differential Equations

A separable differential equation can be expressed as the product of a function of x and a function of y .

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad h(y) \neq 0$$

Example:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx$$

$$y^{-2} dy = 2x \, dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int 2x \, dx$$

$$-y^{-1} + C_1 = x^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$-\frac{1}{x^2 + C} = y$$

Combined
constants of
integration

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$





ChatGPT

Görselde, ayrılabilir diferansiyel denklemler ve bu tür denklemlerin çözüm süreci anlatılmaktadır:

- Ayrılabilir bir diferansiyel denklem, x 'in bir fonksiyonu ile y 'nin bir fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu denklemler $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ formunda yazılır ve $h(y) \neq 0$ olmalıdır.

Örnek olarak verilen denklem ve çözüm adımları şunlardır:

1. Verilen diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$
2. Değişkenleri ayırma: $\frac{dy}{y^2} = 2xdx$
3. Her iki tarafın integralini alma: $\int y^{-2}dy = \int 2xdx$
4. İntegralleri hesaplama ve sabitleri ekleme: $-y^{-1} + C_1 = x^2 + C_2$
5. Sabitleri birleştirme: $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ (Burada C_1 ve C_2 birleştirilerek tek bir sabit C haline getirilmiştir.)
6. Son çözüm: $y = -\frac{1}{x^2+C}$

Bu adımlar, verilen ayrılabilir diferansiyel denklemin genel çözümünü sağlar. Elde edilen y fonksiyonu, başlangıç koşulları veya sınır koşulları ile birlikte kullanılarak spesifik bir çözüme ulaşılabilir.

Family of solutions (general solution) of a differential equation

Example

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \int y dy = \int x dx$$

$$y^2 = x^2 + C$$

The picture on the right shows some solutions to the above differential equation.

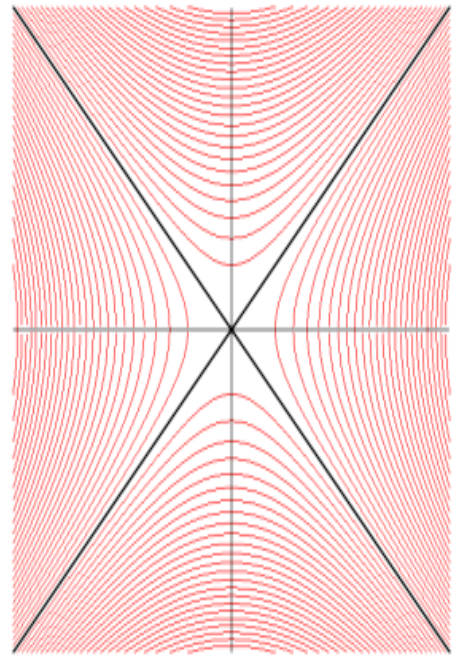
The straight lines

$$y = x \text{ and } y = -x$$

are special solutions.

A unique solution curve goes through any point of the plane different from the origin.

The special solutions $y = x$ and $y = -x$ go both through the origin.





ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin genel çözümünü ve bu çözümün ailesini gösteren bir örnek yer alıyor:

- Verilen diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
- Bu denklemin ayrılabilir olduğunu ve ayrılabilir denklemlerin çözümünün integral alarak yapılabileceğini belirtiyor.
- İntegrasyon sonucu $y^2 = x^2 + C$ elde edilmiş, burada C bir sabittir ve denklemin genel çözümünü ifade eder.

Görselde sağ tarafta, bu diferansiyel denklemin bazı çözümlerini gösteren bir grafik bulunuyor. Bu grafikte, her bir eğri C sabitinin farklı değerleri için denklemin bir çözümüdür. Ayrıca, $y = x$ ve $y = -x$ doğruları özel çözümler olarak belirtilmiş ve bu doğruların orijinden geçtiği vurgulanmış.

Diğer bir deyişle, verilen diferansiyel denklemin genel çözümü bir aile oluşturur ve bu ailedeki her bir eğri, başlangıç koşullarına bağlı olarak farklı bir C sabiti ile elde edilen özel bir çözümü temsil eder. Grafikteki eğriler, bu genel çözüm ailesinin farklı üyelerini temsil eder ve orijinden geçmeyen herhangi bir nokta için benzersiz bir çözüm eğrisi vardır.





Initial conditions

- In many physical problems we need to find the particular solution that satisfies a condition of the form $y(x_0)=y_0$. This is called an **initial condition**, and the problem of finding a solution of the differential equation that satisfies the initial condition is called an **initial-value problem**.
- *Example (cont.):* Find a solution to $y^2 = x^2 + C$ satisfying the initial condition $y(0) = 2$.

$$2^2 = 0^2 + C$$

$$C = 4$$

$$y^2 = x^2 + 4$$



ChatGPT

Görselde, diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ve bunların nasıl kullanıldığı hakkında bilgi verilmektedir:

- Fiziksel problemlerde genellikle belirli bir başlangıç koşulunu sağlayan özel bir çözüm bulunması gerekmektedir. Bu koşul, genellikle $y(x_0) = y_0$ şeklinde ifade edilen bir başlangıç koşuludur.
- Bir diferansiyel denklemin başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulma problemine başlangıç değer problemi denir.

Örnek olarak devam eden soruda, $y^2 = x^2 + C$ genel çözümünün $y(0) = 2$ başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümü bulunması istenmiştir.

- $y(0) = 2$ koşulu $y^2 = x^2 + C$ denkleminde yerine konulduğunda, C sabiti $2^2 = 0^2 + C$ denkleminden $C = 4$ olarak bulunur.
- Dolayısıyla, başlangıç koşulunu sağlayan özel çözüm $y^2 = x^2 + 4$ olacaktır. Bu, verilen başlangıç koşulu için diferansiyel denklemin spesifik bir çözümüdür.

Example:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y^2)e^{x^2} \leftarrow \text{Separable differential equation}$$

$$\frac{1}{1+y^2} dy = 2x e^{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 2x e^{x^2} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int e^u du$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^u + C_2$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^{x^2} + C_2$$

$$\tan^{-1} y = e^{x^2} + C \leftarrow \text{Combined constants of integration}$$



ChatGPT

Görselde, ayrılabilir bir diferansiyel denklemin çözüm adımları verilmiştir:

- Verilen diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y^2)e^{x^2}$
- Bu denklemi çözmek için, değişkenler ayrılır: $\frac{1}{1+y^2} dy = 2xe^{x^2} dx$
- İntegrasyon için hazırlık yapılır: $u = x^2$ ve $du = 2xdx$ olacak şekilde değişken değiştirme yapılır.
- Her iki tarafın integrali alınır: $\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int e^u du$
- İntegraller çözülür: $\tan^{-1}(y) + C_1 = e^u + C_2$
- Değişken değiştirme geri alınarak u yerine x^2 konulur: $\tan^{-1}(y) + C_1 = e^{x^2} + C_2$
- Son olarak, sabitler birleştirilir: $\tan^{-1}(y) = e^{x^2} + C$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

Görselde, her adımda yapılan işlemler ve matematiksel geçişler açıkça gösterilmiştir.

Burada C_1 ve C_2 , integrasyon sırasında ortaya çıkan entegrasyon sabitleridir ve son adımda bu iki sabit birleştirilerek tek bir sabit C olarak yazılmıştır. Bu, denklemin genel çözümüdür ve belirli bir başlangıç koşulu verildiğinde bu genel çözüm içinden özel bir çözüm bulunabilir.

Example (cont.):

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y^2)e^{x^2}$$

⋮

$$\tan^{-1} y = e^{x^2} + C \quad \leftarrow \text{We now have } y \text{ as an implicit function of } X.$$

$$\tan(\tan^{-1} y) = \tan(e^{x^2} + C) \quad \text{We can find } y \text{ as an explicit function of } X \text{ by taking the tangent of both sides.}$$

$$y = \tan(e^{x^2} + C)$$



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin çözüm sürecinin devamı ve bu çözümün y 'nin x cinsinden açık fonksiyonu olarak ifade edilmesi anlatılıyor:

- Öncelikle, $\tan^{-1}(y) = e^{x^2} + C$ denklemi ile y 'nin x 'e bağlı olarak dolaylı (implicit) fonksiyonu elde edilmiş.
- Ardından, her iki tarafın tanjantı alınarak y 'yi x cinsinden açık (explicit) bir fonksiyon olarak ifade etmek için işlem yapılmış: $\tan(\tan^{-1}(y)) = \tan(e^{x^2} + C)$
- Tanjant ve ters tanjant fonksiyonları birbirinin tersi olduğu için bu işlem, y 'yi izole etmeyi sağlar ve sonuç olarak $y = \tan(e^{x^2} + C)$ elde edilir.

Bu adımlar, diferansiyel denklemin y 'nin x 'e bağlı açık fonksiyonunu bulmak için kullanılır ve bu fonksiyon, denklemin spesifik bir çözümünü temsil eder. C sabiti, başlangıç koşulları verilerek belirlenebilir ve böylece belirli bir çözüm elde edilir.

Law of natural growth or decay

□ A population of living creatures normally increases at a rate that is proportional to the current level of the population. □ Other things that increase or decrease at a rate proportional to the amount present include radioactive material and money in an interest-bearing account.

□ If the rate of change is proportional to the amount present, the change can be modeled by:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$



ChatGPT

Görselde doğal büyüme veya çürüme kanunu açıklanmaktadır:

- Canlı popülasyonları genellikle, mevcut popülasyon seviyesine orantılı bir oranda artış gösterir. Aynı şekilde, radyoaktif madde ve faiz getiren bir hesaptaki para gibi diğer şeyler de, mevcut miktarına orantılı bir oranda artış ya da azalış gösterebilir.
- Eğer bir değişimin oranı, mevcut miktarla orantılıysa, bu değişim $\frac{dy}{dt} = ky$ şeklinde modellenenebilir. Burada $\frac{dy}{dt}$ değişim oranını, y mevcut miktarı, ve k orantılılık sabitini temsil eder.

Bu tür bir diferansiyel denklem, özellikle biyoloji, kimya ve ekonomi gibi alanlarda sıkça karşımıza çıkar ve üstel büyüme veya çürüme modellerini ifade eder.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

□ Rate of change is proportional to the amount present. This equation is the Analytical Model.

$$\frac{1}{y} dy = k dt$$

Divide both sides by y .

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

Integrate both sides. $\longrightarrow \ln|y| = kt + C$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+C}$$

Exponentiate both sides.

$$|y| = e^C \cdot e^{kt} \longrightarrow y = \pm e^C e^{kt}$$

$\pm e^C$ is a constant value which can be represented as **A**

$$y = Ae^{kt}$$

Analytical Solution for the Model



ChatGPT

Görselde, orantılı bir değişim oranına sahip bir diferansiyel denklemin analitik çözümü adım adım gösterilmektedir:

- Diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dt} = ky$. Bu denklem, y 'nin t 'ye göre değişim oranının, y 'nin kendisi ile orantılı olduğunu ifade eder ve analitik bir modeldir.
- Değişkenleri ayırmak için her iki taraf da y 'ye bölünür: $\frac{1}{y} dy = k dt$.
- Her iki tarafın integrali alınır: $\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$.
- İntegrallerin çözümü: $\ln |y| = kt + C$.
- Her iki tarafın da üssü alınarak denklemin eşitliği geri dönüştürülür: $e^{\ln |y|} = e^{kt+C}$.
- Eşitliğin basitleştirilmesi: $|y| = e^C \cdot e^{kt}$.
- e^C bir sabit olduğundan, bu $\pm A$ olarak ifade edilebilir ve y için genel çözüm $y = Ae^{kt}$ şeklinde yazılır.

Burada A , başlangıç koşuluna göre belirlenen bir sabittir ve bu çözüm, orijinal diferansiyel denklemin analitik çözümüdür. Bu formül, nüfus büyümesi, radyoaktif bozunma ve faiz hesaplamaları gibi birçok farklı alanlarda uygulanabilir.

Logistic Growth Model

Real-life populations do not increase forever. There is some limiting factor such as food or living space.

There is a maximum population, or carrying capacity, M .

A more realistic model is the **logistic growth model** where growth rate is proportional to both the size of the population (y) and the amount by which y falls short of the maximal size ($M-y$). Then we have the equation:

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

Analytical solution to this differential equation :

$$y = \frac{y_0 M}{y_0 + (M - y_0)e^{-kMt}}, \quad \text{where } y_0 = y(0)$$



ChatGPT

Görselde, lojistik büyüme modeli ve bu modelin analitik çözümü anlatılmaktadır:

- Gerçek hayattaki popülasyonlar sonsuza kadar artmaz. Genellikle gıda veya yaşam alanı gibi sınırlayıcı faktörler vardır.
- Popülasyonun bir maksimum büyüklüğü veya taşıma kapasitesi, M ile ifade edilir.
- Lojistik büyüme modeli, daha gerçekçi bir modeldir ve büyüme oranı, popülasyonun büyüklüğü y ile maksimum büyüklükten ne kadar eksik olduğu $(M - y)$ ile orantılıdır. Bu durumda diferansiyel denklem: $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$ şeklinde yazılır.
- Bu diferansiyel denklemin analitik çözümü: $y = \frac{y_0 M}{y_0 + (M - y_0)e^{-kMt}}$ şeklindedir, burada y_0 başlangıçtaki popülasyon büyüklüğünü, yani $y(0)$ 'ı ifade eder.

Bu formül, popülasyonun zaman içinde nasıl değişeceğini modellemek için kullanılır ve belirli bir zaman t ve başlangıç popülasyonu y_0 verildiğinde popülasyonun tahmini büyüklüğünü hesaplamak için kullanılabilir. Taşıma kapasitesi M ulaşıldıkça, büyüme oranı azalır ve popülasyon büyüklüğü M 'ye yakınsar.

Example - Mixing Problems

A tank has pure water flowing into it at 10 liter/min.

The contents of the tank are kept thoroughly mixed, and the contents flow out at 10 liter/min. Initially, the tank contains 10 kg of salt in 100 liter of water.

How much salt will be in the tank

- (a) after t minutes;
- (b) after 30 minutes?



ChatGPT

Görselde, bir karışım problemi örneği verilmekte ve bu problemde belirli bir zaman sonra tanktaki tuz miktarının nasıl hesaplanacağı sorulmaktadır:

- Bir tanka dakikada 10 litre saf su akmaktadır.
- Tanktaki içerik sürekli olarak karıştırılmakta ve içerik dakikada 10 litre akış hızıyla tanktan çıkmaktadır.
- Başlangıçta, tank 100 litre su içinde 10 kg tuz bulundurmaktadır.
- Sorularlar:
 - (a) t dakika sonra tanktaki tuz miktarı ne kadar olacaktır?
 - (b) 30 dakika sonra tanktaki tuz miktarı ne kadar olacaktır?

Bu tür bir problem, genellikle bir diferansiyel denklem ile modellenebilir ve tuzun konsantrasyonunun nasıl değiştiğini analiz etmek için çözülebilir.

OR

You

We are interested in the **amount of salt** at any **time** --

S – amount of salt - is the dependent variable – unknown function to be determined
 t - time - independent variable

To study such a question, we consider **the rate of change of the amount of salt in the tank** : $\frac{dS}{dt}$

If we can create an equation relating $\frac{dS}{dt}$ to S and t , then we will have a differential equation which we can, ideally, solve to determine the relationship between S and t .

To describe $\frac{dS}{dt}$, we can use the concept of concentration (the amount of salt per unit of volume of water).

In this example, **the inflow and outflow rates are the same**, so **the volume of liquid in the tank stays constant at 100 liter**.

Hence, we can describe **the concentration of salt in the tank** by :

$$\text{Concentration of salt} = \frac{S}{100} \text{ kg/liter}$$



ChatGPT

Görsel, bir tanktaki tuz miktarının zamanla nasıl değiştiğini modelleyen bir karışım problemine ilişkin açıklamalar içermektedir:

- Belirli bir zamanda tanktaki tuz miktarı (S) ile ilgileniyoruz. Burada S , bağımlı değişken olarak tanımlanmış ve belirlenmesi gereken bir fonksiyondur. t , zamanı ifade eden bağımsız değişkendir.
- Bu tür bir sorunu incelemek için, tanktaki tuz miktarının değişim oranını ($\frac{dS}{dt}$) ele alıyoruz.
- Eğer S ve t arasında bir denklem oluşturabilirsek, ideal olarak bu diferansiyel denklemin çözümünü S ve t arasındaki ilişkiyi belirlemek için kullanabiliriz.
- $\frac{dS}{dt}$ ifadesini tanımlamak için, konsantrasyon kavramını kullanabiliriz; yani su birim hacmi başına tuz miktarı.
- Bu örnekte, tanka giren ve çıkan su miktarları eşit olduğu için, tankın hacmi sürekli 100 litre olarak kalır.
- Bu durumda, tanktaki tuz konsantrasyonunu $\frac{S}{100}$ kg/litre olarak ifade edebiliriz.

Bu açıklamalar, tanktaki tuz miktarının zaman içinde nasıl değişeceğini anlamak için bir başlangıç noktası sağlar. Bu bilgiler, diferansiyel denklemin kurulması ve çözülmesi için gereklidir.

Since mixture leaves the tank at the rate of 10 liter/min, salt is leaving the tank at the rate of $\frac{S}{100} (10 \text{ liter/min}) = \frac{S}{10}$

Salt leaves the tank so; the rate of change is $k = -\frac{1}{10}$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{10}$$

The model of decay in the amount of salt

$$\int \frac{dS}{S} = -\int \frac{1}{10} dt \rightarrow \ln|S| = -\frac{1}{10}t + C \rightarrow S = Ce^{-\frac{1}{10}t}$$

We eliminated the absolute value symbol
due to the fact that $S \geq 0$

This is the implicit
solution of the ODE



ChatGPT

Görselde, tanktan tuzun çıkış hızının nasıl modelleyeceğine dair bir açıklama yer almaktadır:

- Karışım, tanktan dakikada 10 litre oranında akmaktadır ve bu akış hızıyla, tanktan çıkan tuz miktarı $\frac{S}{100}$ (10 litre/dakika) = $\frac{S}{10}$ olur.
- Tuzun tanktan çıkış hızı, tanktaki tuz miktarının değişim oranını belirler, bu da $k = -\frac{1}{10}$ orantılılık sabitiyle $\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{10}$ şeklinde ifade edilir. Bu denklem, tanktaki tuz miktarının azalmasını modelleyen bir diferansiyel denklemdir.
- Bu diferansiyel denklemi çözmek için tuz miktarı S üzerinden integral alınır ve zaman t üzerinden de integral alınır: $\int \frac{dS}{S} = -\int \frac{1}{10} dt$.
- İntegrallerin sonucu $\ln |S| = -\frac{t}{10} + C$ olur.
- Mutlak değer sembolü, S değerinin her zaman pozitif olacağı gerçeği göz önünde bulundurularak kaldırılır.
- Sonuç olarak, $S = Ce^{-\frac{t}{10}}$ elde edilir. Burada C başlangıç koşuluna bağlı bir sabittir ve bu denklem, diferansiyel denklemin dolaylı (implicit) çözümüdür.

For an **explicit solution** we will use the **initial value** provided :

Since $S = 10$ when $t = 0$, we can find that $C = 10$

(a) After t minutes, the amount of salt in the tank will be:

$$S = 10e^{-\frac{1}{10}t}$$

Now, this is the **explicit solution** of the ODE

We can see from this that as t goes to infinity, the amount of salt in the tank goes to zero.

(b) After 30 minutes, the amount of salt in the tank will be:

$$S = 10e^{-\frac{1}{10}30} = 10e^{-3} = 0,497870 \text{ kg}$$



ChatGPT

Görselde, bir tanktaki tuz miktarının zamanla nasıl azaldığını gösteren bir örnek problem çözümü yer almaktadır:

- İlk koşul olarak, $t = 0$ olduğunda $S = 10$ kg tuzun tankta olduğu verilmiştir. Bu bilgi kullanılarak sabit $C = 10$ bulunmuştur.
- (a) Kısım için, t dakika sonraki tuz miktarı $S = 10e^{-\frac{1}{10}t}$ formülü ile hesaplanabilir. Bu ifade, diferansiyel denklemin açık çözümüdür.
- Gözlem yaparak, t sonsuza gittiğinde, tanktaki tuz miktarının sıfıra gideceğini söyleyebiliriz.
- (b) Kısım için, 30 dakika sonra tanktaki tuz miktarı $S = 10e^{-\frac{1}{10} \cdot 30} = 10e^{-3}$ olarak hesaplanır ve bunun sonucu yaklaşık 0,497870 kg tuz olduğu bulunur.

Bu hesaplamalar, tanktan tuzun sürekli olarak çıktığı ve tuz miktarının zamanla eksponansiyel bir oranda azaldığı bir karışım probleminin tipik bir örneğidir.

Exercise for Home-1

A tank has pure water flowing into it at 10 liter/min. The contents of the tank are kept thoroughly mixed, and the contents flow out at 10 l/min. Salt is added to the tank at the rate of 0.1 kg/min. Initially, the tank contains 10 kg of salt in 100 liter of water.

How much salt is in the tank after 30 minutes?

Clue : The setup is very similar the previous example. The only difference is the addition of 0.1 kg/min of salt to the tank. So modify your differential equation to take this into account.



ChatGPT

Görselde, bir karışım probleminin ev ödevi olarak tanımlandığı görülmektedir:

- Bir tanka dakikada 10 litre saf su akıyor. Tank içeriği sürekli karıştırılıyor ve içerik dakikada 10 litre akış hızıyla dışarı akıyor. Tanka aynı zamanda dakikada 0.1 kg tuz ekleniyor. Başlangıçta tank 100 litre su içinde 10 kg tuz içeriyor. 30 dakika sonra tanktaki tuz miktarı ne kadar olacak?

İpucu olarak, kurulumun önceki örneğe çok benzer olduğu ancak farkın, tanka dakikada 0.1 kg tuz eklenmesi olduğu belirtilmiş. Bu nedenle, diferansiyel denklemin bu yeni durumu hesaba katacak şekilde değiştirilmesi gerekiyor.

Bu problemin çözümü için önceki örnekte kullanılan diferansiyel denklem, tuzun tanka giriş hızını da hesaba katacak şekilde modifiye edilmelidir. Ardından, bu yeni diferansiyel denklemin çözümü 30 dakika sonraki tuz miktarını verir. Bu tür problemler genellikle mühendislik ve çevre bilimlerinde karşılaşılan gerçek dünya senaryolarını modellemek için kullanılır.



Exercise for Home-2

A tank has pure water flowing into it at 12 liter/min. The contents of the tank are kept thoroughly mixed, and the contents flow out at 10 liter/min.

Initially, the tank contains 10 kg of salt in 100 liter of water.

How much salt will be in the tank

- (a) after t minutes;
- (b) after 30 minutes?

Clue: The inflow rate is greater than the outflow rate. As a result, the volume is not constant.

Using the initial conditions and the flow rates, we can say that the volume V of liquid in the tank is $V = 100 + 2t$

The concentration of salt after t minutes is $\frac{S}{V}$



ChatGPT

Görselde verilen problem, bir tanka giren ve çıkan sıvı akış hızları arasındaki farkı dikkate alarak tanktaki tuz miktarını bulmayı amaçlayan bir karışım problemidir:

- Tankta dakikada 12 litre saf su girişi olmakta ve içerik dakikada 10 litre olarak tanktan çıkmaktadır. Yani tanka her dakika net 2 litre su eklenmektedir.
- Tank başlangıçta 100 litre su içinde 10 kg tuz içermektedir.
- Tanktaki tuz miktarı, t dakika sonra ve özellikle 30 dakika sonra ne kadar olacağı sorulmaktadır.

İpucu olarak, giriş akış hızının çıkış akış hızından daha fazla olduğu ve bu nedenle tanktaki sıvı hacminin sabit olmadığı belirtilmiştir. İlk koşulları ve akış hızlarını kullanarak, tanktaki sıvı hacminin $V = 100 + 2t$ olduğu ifade edilmiştir. Tuzun konsantrasyonu, t dakika sonra $\frac{S}{V}$ olarak hesaplanacaktır.

Bu problemi çözmek için, tanktaki tuz miktarının değişim oranını modelleyen bir diferansiyel denklem kurulur ve bu denklem, verilen akış hızları ve tanktaki sıvı hacim artışı göz önünde bulundurularak çözülür.



