

Taylor Series Expansion

Taylor's Theorem : Suppose f is continuous on the closed interval $[a, b]$ and has $n + 1$ continuous derivatives on the open interval (a, b) . If x and c are points in (a, b) , then

The Taylor series expansion of $f(x)$ about c :

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots$$

or

$$\text{Taylor Series} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c) (x-c)^k$$

If the series converge, we can write:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c) (x-c)^k$$



ChatGPT

Bu görsel, Taylor Serisi Genişlemesi ve Taylor Teoremi ile ilgili matematiksel bir açıklama içeriyor. Taylor Teoremi'ne göre, eğer bir f fonksiyonu kapalı $[a, b]$ aralığında sürekli ve açık (a, b) aralığında $n + 1$ türevlenebilirse, ve x ile c (a, b) aralığındaki noktalarsa, f fonksiyonunun c noktası etrafındaki Taylor serisi genişlemesi şu şekilde ifade edilir:

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \dots$$

veya genel olarak:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

Burada $f^{(k)}(c)$, f fonksiyonunun c noktasındaki k 'nci türevidir ve $k!$ k faktöriyelini ifade eder.

Eğer seri yakınsıyorsa, yani sonsuz terimlerinin toplamı bir sayıya yaklaşıyorsa, fonksiyonumuzu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

Bu serinin pratikteki kullanımı, karmaşık fonksiyonları, özellikle de trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonları, polinomlar kullanarak yaklaşık olarak hesaplamak içindir. Bu yaklaşım, matematikte ve mühendislikte birçok hesaplama ve analizde kullanılır.



Maclaurin Series

Maclaurin series is a special case of Taylor series with the center of expansion $c = 0$.

The Maclaurin series expansion of $f(x)$:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

If the series converge, we can write:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$



ChatGPT

Bu görsel, Maclaurin Serisi ile ilgili bilgi vermektedir. Maclaurin Serisi, Taylor Serisinin özel bir durumudur ve genişleme merkezi olarak $c = 0$ alınır. Yani, bir $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi, fonksiyonun $x = 0$ etrafında Taylor serisi genişlemesi olarak tanımlanır.

Maclaurin serisinin genişlemesi şu şekildedir:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Genel olarak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Burada $f^{(k)}(0)$, f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki k 'nci türevidir ve $k!$ k faktöriyelini gösterir.

Seri yakınsıyorsa, yani terimlerin sonsuz toplamı belirli bir sayıya yaklaşıyorsa, fonksiyonumuzu yukarıdaki gibi Maclaurin serisi kullanarak ifade edebiliriz. Bu seri, fonksiyonun $x = 0$ etrafındaki değerlerini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılır ve matematiksel analizde önemli bir araçtır.

What If we change the interval ?

If we change the interval so $x=x+h$ and $c=x$

The Taylor series expansion of $f(x+h)$ about $c=x$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \dots$$



ChatGPT

Görselde, Taylor serisinin bir değişken üzerindeki aralığın değiştirilmesi durumu ele alınıyor. Eğer x 'in değerine küçük bir h eklemesi yapılırsa ve genişleme $c = x$ etrafında yapılırsa, Taylor serisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Bu ifade, $f(x)$ fonksiyonunun x noktası etrafındaki serisini, x yerine $x + h$ kullanarak genişletiyor. Yani, x değerine küçük bir h artışı uygulandığında fonksiyonun değerinin nasıl değişeceğini serinin toplamı ile ifade ediyoruz. Her bir terim x noktasındaki türevlerle ve h 'nin artan kuvvetleriyle çarpılır ve faktöriyelle bölünür.

Bu genişletme, fonksiyonun lokal davranışını anlamak ve x noktasına yakın değerler için yaklaşık hesaplamalar yapmak için kullanılır. Özellikle, h 'nin küçük olduğu durumlarda, serinin ilk birkaç terimi genellikle fonksiyonun davranışını iyi bir yaklaşıklıkla verir.

Finite Differences for Derivation

Taylor expansion for $F(x+h)$

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x) + O(h^2)$$

Use only first two terms of the expansion

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) + \frac{O(h^2)}{h}$$

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Forward Difference Formula



ChatGPT

Görselde sonlu farklar kullanılarak türev hesaplama yöntemi anlatılmaktadır. Bir fonksiyonun $F(x)$ noktasındaki türevinin yaklaşık değerini bulmak için, h adım büyüklüğünde ileri bir nokta olan $F(x + h)$ kullanılır. Taylor serisi genişlemesi ile $F(x + h)$ şöyle ifade edilir:

$$F(x + h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

Eğer sadece ilk iki terimi kullanırsak ve yüksek mertebeden terimleri ($O(h^2)$) ihmal edersek:

$$F(x + h) - F(x) = hF'(x) + O(h^2)$$

Bu ifadede, $O(h^2)$ terimi h 'nin daha yüksek kuvvetlerini içeren terimlerin etkisini gösterir ve bu durumda ihmal edilir. Türevin yaklaşık değerini h ile bölerek elde ederiz:

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Bu formül, $F'(x)$, yani F fonksiyonunun x noktasındaki ilk türevinin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılır ve ileri fark formülü olarak bilinir. İleri fark formülü, özellikle sayısal türev hesaplamalarında ve bilgisayarla matematiksel modellemede kullanılır çünkü analitik olarak türev almak zor veya imkansız olan fonksiyonlar için pratik bir yaklaşım sunar.

— — —

Finite Differences for Derivation

Taylor expansion for $F(x-h)$

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

$$F(x) - F(x-h) = hF'(x) + O(h^2)$$

$$F'(x) = \frac{F(x) - F(x-h)}{h}$$

Backward Difference Formula



ChatGPT

Görsel, bir fonksiyonun türevini bulmak için kullanılan sonlu farklar yönteminin geriye doğru fark formülünü göstermektedir. Taylor serisi genişlemesi $F(x - h)$ için aşağıdaki gibi yapılır:

$$F(x - h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

Eğer serinin yalnızca ilk iki terimini alırsak ve daha yüksek mertebeden terimleri ($O(h^2)$) göz ardı edersek:

$$F(x) - F(x - h) = hF'(x) + O(h^2)$$

Bu durumda, $F(x)$ ve $F(x - h)$ arasındaki farkı h 'ye bölersek, F fonksiyonunun x noktasındaki türevinin yaklaşık değerini elde ederiz. Bu, geriye doğru fark formülü olarak adlandırılır ve şöyle ifade edilir:

$$F'(x) \approx \frac{F(x) - F(x - h)}{h}$$

Bu yöntem, $F(x)$ değerinin x noktasının biraz gerisindeki bir değerle karşılaştırılmasını içerir. İleri fark formülüne benzer şekilde, sayısal türev hesaplamalarında ve bilgisayarla matematiksel modellemede sıkça kullanılır. Geriye doğru fark formülü, özellikle x noktasının sağında değerler alınamadığında veya uygulanamadığında kullanışlıdır.

Finite Differences for Derivation

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x) + \dots$$

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \frac{h^3}{3!}F'''(x) + \dots$$

$$F(x+h) - F(x-h) = 2hF'(x) + 2\frac{h^3}{3!}F'''(x) + \dots$$

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = F'(x) + O(h^3)$$

$$F'(x) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

Central Difference Formula



ChatGPT

Görselde, merkezi fark formülü ile türevin nasıl hesaplanacağı gösterilmektedir. Bu yöntem, bir fonksiyonun x noktasındaki türevini bulmak için x 'in biraz öncesinde ve biraz sonrasında alınan fonksiyon değerlerinin farkını kullanır.

Taylor serisi genişlemesi kullanılarak $F(x + h)$ ve $F(x - h)$ ifadeleri yazılır:

- $F(x + h)$ için: $F(x + h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^3}{3!}F'''(x) + \dots$
- $F(x - h)$ için: $F(x - h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) - \frac{h^3}{3!}F'''(x) + \dots$

Bu iki ifade çıkarıldığında, h^2 ve daha yüksek mertebedeki terimler iptal olur ve geriye aşağıdaki ifade kalır:

$$F(x + h) - F(x - h) = 2hF'(x) + O(h^3)$$

Bu denklemde, $O(h^3)$ terimi h 'nin daha yüksek kuvvetlerini içeren terimlerin etkisini gösterir ve genellikle ihmal edilebilir. Denklemi $2h$ ile bölerek türevin yaklaşık değerini elde ederiz:

$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

Bu, merkezi fark formülü olarak bilinir ve x noktasında F fonksiyonunun türevinin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılır. İleri ve geri fark formüllerine kıyasla genellikle daha doğru sonuçlar verir çünkü hata terimleri h^3 mertebesinde, bu da adım büyüklüğü h küçüldükçe hata payının da küçülmesi anlamına gelir. Bu yöntem sayısal analizde ve türev hesaplamalarında sıkça kullanılır.

Example : Derivation of Forward Difference Formula

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

$$F(x-h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

+

$$F(x+h) + F(x-h) = 2F(x) + hF'(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x)$$

$$F(x+h) + F(x-h) = 2F(x) + \cancel{2} \frac{h^2}{\cancel{2}!}F''(x)$$

$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$



ChatGPT

Bu görsel, bir fonksiyonun ikinci türevini yaklaşık olarak hesaplamak için ileri fark formülünün türetilişini göstermektedir. Taylor serisi genişlemeleri kullanılarak iki ifade yazılır:

1. $F(x + h)$ için genişleme:

$$F(x + h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

2. $F(x - h)$ için genişleme:

$$F(x - h) = F(x) - hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

Bu iki genişlemeyi topladığınızda, $hF'(x)$ terimleri birbirini iptal eder ve geriye şu kalır:

$$F(x + h) + F(x - h) = 2F(x) + h^2F''(x) + O(h^4)$$

$O(h^4)$ terimi, h 'nin dördüncü ve daha yüksek mertebelerindeki terimleri ifade eder ve genellikle küçük h değerleri için ihmal edilir. Ardından, ikinci türev için çözüm yapılır:

$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Bu formül, F fonksiyonunun x noktasındaki ikinci türevinin ($F''(x)$) yaklaşık değerini verir ve ikinci dereceden merkezi fark formülü olarak bilinir. Bu formül, ikinci türevi analitik olarak hesaplamak zor olduğunda veya mümkün olmadığında kullanılır ve sayısal türev hesaplamalarında yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir.

Better approximations

By using Taylor expansions for $F(x+2h)$ and $F(x-2h)$, better approximations can be obtained:

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 4F(x+h) - 3F(x)}{2h} + O(h^2) \quad \text{Forward Difference Formula}$$

$$F'(x) = \frac{3F(x) - 4F(x-h) + F(x-2h)}{2h} + O(h^2) \quad \text{Backward Difference Formula}$$

$$F'(x) = \frac{-F(x+2h) + 8F(x+h) - 8F(x-h) + F(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad \text{Central Difference Formula}$$



ChatGPT

Görselde, bir fonksiyonun türevini hesaplamak için daha iyi yaklaşıklar elde etmek amacıyla kullanılan gelişmiş sonlu fark formülleri verilmiştir. Taylor serisi genişlemelerini $F(x + 2h)$ ve $F(x - 2h)$ için uygulayarak, farklı türev yaklaşımları elde edilir:

1. İleri Fark Formülü:

$$F''(x) = \frac{-F(x+2h)+4F(x+h)-3F(x)}{2h} + O(h^2)$$

Bu formül, fonksiyonun x noktasındaki türevinin yaklaşık değerini, x noktasından h ve $2h$ kadar ilerideki değerleri kullanarak hesaplar.

2. Geriye Fark Formülü:

$$F''(x) = \frac{3F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{2h} + O(h^2)$$

Bu formül, x noktasından h ve $2h$ kadar gerideki değerleri kullanarak fonksiyonun türevinin yaklaşık değerini hesaplar.

3. Merkezi Fark Formülü:

$$F''(x) = \frac{-F(x+2h)+8F(x+h)-8F(x-h)+F(x-2h)}{12h} + O(h^4)$$

Bu formül, hem x noktasının hem h kadar ilerisini hem de gerisini kullanarak türevin yaklaşık değerini hesaplar ve genellikle diğer iki formüle kıyasla daha yüksek bir yakınsaklık sunar.

Burada, h adım büyüklüğüdür ve $O(h^2)$, $O(h^4)$ gibi terimler hata terimlerini ifade eder. Bu hata terimleri, h 'nin belirli kuvvetlerine bağlı olarak tahmini bir hatayı gösterir ve genellikle küçük h değerleri için ihmal edilebilir. Bu formüller, sayısal türev hesaplamalarında kullanılır ve analitik türev almak zor veya imkansız olduğunda önemli hale gelir.

Example : Derivation of Forward Difference Formula

$$F(x+2h) = F(x) + 2hF'(x) + \frac{4h^2}{2!}F''(x) + \dots$$

$$* (-4) / \quad F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \dots \quad +$$

$$F(x+2h) - 4F(x+h) = F(x) - 4F(x) + 2hF'(x) - 4hF'(x) + \frac{4h^2}{2!}F''(x) - \frac{4h^2}{2!}F''(x)$$

$$F(x+2h) - 4F(x+h) = -3F(x) + 2hF'(x)$$

$$F'(x) = \frac{F(x+2h) - 4F(x+h) + 3F(x)}{2h}$$



ChatGPT

Görselde, bir fonksiyonun ilk türevini hesaplamak için ileri fark formülünün türetiliş süreci gösterilmektedir. Bu süreç, Taylor serisi genişlemelerini kullanarak $F(x + 2h)$ ve $F(x + h)$ için yapılan genişlemeleri birleştirerek ve sonuçları düzenleyerek türev yaklaşımını elde etmeyi içerir.

İşlem adımları şu şekildedir:

1. $F(x + 2h)$ için Taylor serisi genişlemesi yapılır:
$$F(x + 2h) = F(x) + 2hF'(x) + \frac{4h^2}{2!}F''(x) + \dots$$
2. $F(x + h)$ için Taylor serisi genişlemesi yapılır (ve bu ifade -4 ile çarpılır):
$$-4F(x + h) = -4F(x) - 4hF'(x) - \frac{4h^2}{2!}F''(x) + \dots$$
3. İki genişleme toplandığında, $F'(x)$ terimi dışında kalan terimler birbirini büyük oranda götürür. Sonuç olarak aşağıdaki ifade elde edilir:
$$F(x + 2h) - 4F(x + h) + 3F(x) = 2hF'(x) + O(h^2)$$

Bu denklemden $F'(x)$, yani F fonksiyonunun x noktasındaki türevi aşağıdaki gibi yaklaşık olarak çözülür:

$$F'(x) \approx \frac{F(x+2h) - 4F(x+h) + 3F(x)}{2h}$$

Bu, ileri fark formülü olarak bilinir ve h adım büyüklüğünün küçük olduğu durumlarda $F'(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki türevinin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılır. $O(h^2)$ terimi, adım büyüklüğünün karesine bağlı hata terimini ifade eder ve genellikle küçük adım büyüklükleri için ihmal edilebilir. Bu yöntem sayısal analizde ve bilgisayarla hesaplamalarda yaygın olarak kullanılır.

Second Derivatives

Similarly various approximations for second derivatives are possible :

$$F''(x) = \frac{F(x+2h) - 2F(x+h) + F(x)}{h^2} + O(h)$$

$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$F''(x) = \frac{-F(x+2h) + 16F(x+h) - 30F(x) + 16F(x-h) - F(x-2h)}{12h^2} + O(h^4)$$



ChatGPT

Görsel, bir fonksiyonun ikinci türevini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılan çeşitli sonlu fark formüllerini içermektedir. Bu formüller, belirli bir noktadaki türev değerlerinin sayısal olarak hesaplanmasında kullanılır ve genellikle analitik çözüm zor veya imkansız olduğunda tercih edilir.

Görselde üç farklı yaklaşım sunulmuştur:

1. İlk formül:

$$F''(x) = \frac{F(x+2h) - 2F(x+h) + F(x)}{h^2} + O(h)$$

Bu, fonksiyonun x noktasındaki ikinci türevini, x 'in h ve $2h$ kadar ilerisindeki değerler kullanarak hesaplar ve adım büyüklüğünün ilk kuvvetine bağlı bir hata terimi içerir.

2. İkinci formül:

$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Bu, merkezi fark formülüdür ve x noktasının hem h kadar ilerisini hem de h kadar gerisini kullanarak ikinci türevi hesaplar. Hata terimi h 'nin karesine bağlıdır.

3. Üçüncü formül:

$$F''(x) = \frac{-F(x+2h) + 16F(x+h) - 30F(x) + 16F(x-h) - F(x-2h)}{12h^2} + O(h^4)$$

Bu, daha karmaşık bir merkezi fark formülüdür ve x noktasının $2h$, h , $-h$ ve $-2h$ kadar ilerisinde ve gerisindeki değerleri kullanarak ikinci türevi hesaplar. Hata terimi h 'nin dördüncü kuvvetine bağlıdır ve bu nedenle adım büyüklüğü küçüldükçe daha doğru sonuçlar verir.

Bu formüller, sayısal türev hesaplamalarında ve özellikle mühendislik ve fizikteki sayısal analizlerde yaygın olarak kullanılır. Hata terimleri $O(h)$, $O(h^2)$, ve $O(h^4)$, yaklaşık değerlerin gerçek değerlerden ne kadar sapabileceğini gösterir ve genellikle küçük adım büyüklükleri için ihmal edilebilir.



Derivatives of Bivariate & Multivariate Functions

First Order Partial Derivatives

For functions with more variables, the partial derivatives can be approximated by grouping together all of the same variables and applying the univariate approximation for that group.

For example, if $F(x, y)$ is our function, then some first order partial derivative approximations are:

$$f_x(x, y) = \frac{F(x+h, y) - F(x-h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) = \frac{F(x, y+k) - F(x, y-k)}{2k}$$



ChatGPT

Görsel, birden fazla değişken içeren fonksiyonlar için birinci mertebeden kısmi türevlerin yaklaşık olarak nasıl hesaplanacağını gösteriyor. İki değişkenli bir $F(x, y)$ fonksiyonu için, x ve y değişkenlerine göre birinci mertebeden kısmi türevlerin merkezi fark formülleri şöyle ifade edilir:

1. x değişkenine göre kısmi türev için formül:

$$f_x(x, y) = \frac{F(x+h, y) - F(x-h, y)}{2h}$$

Bu formül, fonksiyonun x değişkenindeki değişiminin, x 'in bir miktar h kadar artırılıp azaltılmasıyla hesaplanan değerlerin farkının $2h$ ile bölünmesiyle elde edilir.

2. y değişkenine göre kısmi türev için formül:

$$f_y(x, y) = \frac{F(x, y+k) - F(x, y-k)}{2k}$$

Bu formül, fonksiyonun y değişkenindeki değişiminin, y 'nin bir miktar k kadar artırılıp azaltılmasıyla hesaplanan değerlerin farkının $2k$ ile bölünmesiyle elde edilir.

Her iki formül de sayısal türev hesaplamalarında kullanılır ve fonksiyonun belirli bir noktadaki eğimini veya değişim hızını yaklaşık olarak belirlemek için faydalıdır. Kısmi türevler, fonksiyonun her bir değişkenin kendi etkisi altında nasıl değiştiğini gösterir. Bu yöntemler, analitik çözümlerin zor veya mümkün olmadığı durumlarda kullanışlıdır.

Second Partial Derivatives

Following formulas can be verified by taking the limits $h \rightarrow 0$ and $k \rightarrow 0$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{F(x+h, y) - 2f(x, y) + F(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{F(x, y+k) - 2f(x, y) + F(x, y-k)}{k^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$



ChatGPT

Görselde, iki değişkenli bir fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerinin nasıl hesaplanacağı gösteriliyor. Bu türevler, fonksiyonun bir değişkene göre iki kez türev alınmasıyla elde edilen değerlerdir ve sayısal analizdeki yaklaşımlarla hesaplanabilirler.

1. x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türev:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{F(x+h, y) - 2F(x, y) + F(x-h, y)}{h^2}$$

Bu ifade, fonksiyonun x değişkenine göre iki kez türev alınmasını ve x değişkeninin h kadar artırılıp azaltıldığında elde edilen fonksiyon değerlerinin kullanılmasını içerir.

2. y değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türev:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{F(x, y+k) - 2F(x, y) + F(x, y-k)}{k^2}$$

Bu ifade, fonksiyonun y değişkenine göre iki kez türev alınmasını ve y değişkeninin k kadar artırılıp azaltıldığında elde edilen fonksiyon değerlerinin kullanılmasını içerir.

3. Karışık kısmi türev (x ve y değişkenlerine göre):

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$

Bu ifade, önce x sonra y değişkenine göre alınan türevleri ifade eder ve fonksiyonun hem x hem de y değişkenlerinin farklı kombinasyonlarındaki değişimlerini kullanır.

Bu formüller, kısmi türevlerin sayısal olarak yaklaşık değerlerini bulmak için kullanılır ve özellikle analitik çözümler elde edilemeyen durumlarda faydalıdır. h ve k , adım büyüklüklerini ifade eder ve genellikle küçük değerler için bu yaklaşımlar daha doğru sonuçlar verir.

The derivatives F_x, F_y, F_{xx} and F_{yy} just use the univariate approximation formulas.

The mixed derivative requires slightly more work. The important observation is that the approximation for F_{xy} is obtained by applying the **x-derivative approximation for F_x** , then applying the **y-derivative approximation** to the previous approximation.

1 - the x-derivative approximation for F_x :
$$f_x(x, y) = \frac{F(x+h, y) - F(x-h, y)}{2h}$$

2- the y-derivative approximation:
$$f_y(x, y) = \frac{F(x, y+k) - F(x, y-k)}{2k}$$

3- Apply the 2 nd formula to the 1st one:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$



ChatGPT

Görselde, iki değişkenli bir fonksiyon için kısmi türevlerin ve özellikle karışık kısmi türevin nasıl yaklaşık hesaplanacağı açıklanmaktadır.

1. İlk olarak x değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türevin yaklaşık değeri şöyle hesaplanır:

$$f_x(x, y) = \frac{F(x+h, y) - F(x-h, y)}{2h}$$

Bu, fonksiyonun x değişkenindeki değişim oranını x 'in h kadar arttırılıp azaltılmasıyla elde edilen değerler arasındaki farkın $2h$ ile bölünmesiyle hesaplar.

2. İkinci olarak y değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türevin yaklaşık değeri şöyle hesaplanır:

$$f_y(x, y) = \frac{F(x, y+k) - F(x, y-k)}{2k}$$

Bu da fonksiyonun y değişkenindeki değişim oranını y 'nin k kadar arttırılıp azaltılmasıyla elde edilen değerler arasındaki farkın $2k$ ile bölünmesiyle hesaplar.

3. Son olarak, karışık kısmi türev f_{xy} , yani x 'e göre alınan türevin y 'e göre türetilmesiyle hesaplanır ve formül şu şekildedir:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$

Bu, fonksiyonun x ve y değişkenlerindeki karşılıklı değişim oranını hesaplamak için x ve y 'nin h ve k kadar arttırılıp azaltılmasıyla elde edilen değerlerin bir kombinasyonunu kullanır.

Bu yöntemler, özellikle fonksiyonun analitik türevlerinin alınmasının zor veya imkansız olduğu durumlarda kullanılır ve sayısal türev hesaplamalarında yaygındır. Hata terimleri bu yaklaşımlarda genellikle ihmal edilir, çünkü h ve k küçük olduğunda sonuçlar genellikle yeterince doğrudur.

Second Partial Derivatives

Following formulas can be verified by taking the limits $h \rightarrow 0$ and $k \rightarrow 0$

To find the F_{xy} partial derivative first use the formula for F_x

Then apply the approximation for (f_y)

$$f_{xx}(x, y) = \frac{F(x+h, y) - 2f(x, y) + F(x-h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{F(x, y+k) - 2f(x, y) + F(x, y-k)}{k^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$



ChatGPT

Bu görsel, iki değişkenli bir fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplamak için kullanılan formülleri açıklamaktadır. Bu türevler, fonksiyonun bir değişkene göre iki kez türev alınmasıyla ve bu türevlerin bir arada nasıl kullanılacağıyla ilgilidir.

Görseldeki formüller şu şekilde:

1. x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türev:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{F(x+h, y) - 2F(x, y) + F(x-h, y)}{h^2}$$

Bu formül, x değişkeninin h kadar artırılıp azaltılmasıyla elde edilen fonksiyon değerleri arasındaki farkın, h^2 'ye bölünmesiyle x değişkenine göre ikinci türevi verir.

2. y değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türev:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{F(x, y+k) - 2F(x, y) + F(x, y-k)}{k^2}$$

Bu formül, y değişkeninin k kadar artırılıp azaltılmasıyla elde edilen fonksiyon değerleri arasındaki farkın, k^2 'ye bölünmesiyle y değişkenine göre ikinci türevi verir.

3. Karışık ikinci mertebeden kısmi türev (x ve y değişkenlerine göre):

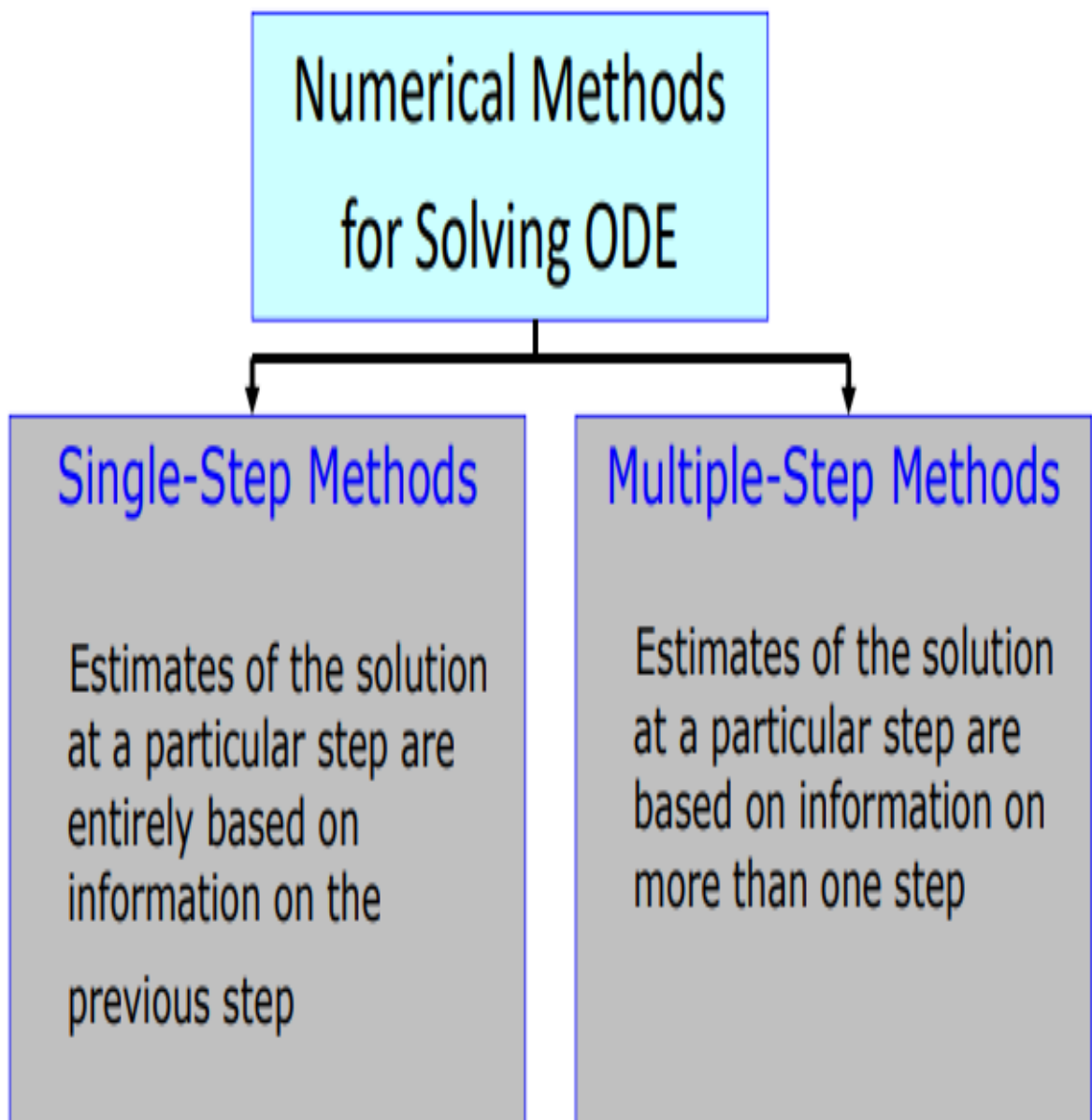
$$f_{xy}(x, y) = \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y-k) - F(x-h, y+k) + F(x-h, y-k)}{4hk}$$

Bu formül, x ve y değişkenlerinin her ikisinin de h ve k kadar artırılıp azaltılmasıyla elde edilen fonksiyon değerleri arasındaki farkın, $4hk$ 'ya bölünmesiyle karışık türevi verir.

Bu yaklaşımlar, h ve k değerlerinin sıfıra yaklaştığı limitlerde doğrulanabilir ve sayısal türev hesaplamalarında kullanılır. Analitik türevlerin elde edilemediği durumlarda, bu formüller yaklaşık değerler sağlamak için kullanışlı araçlardır.



Classification of the Methods





ChatGPT

Görselde, ODE (Ordinary Differential Equations - Sıradan Diferansiyel Denklemler) çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerin sınıflandırılması anlatılmaktadır. Bu sınıflandırmaya göre iki ana kategori vardır:

1. **Tek Adımlı Yöntemler (Single-Step Methods):** Bu yöntemlerde, bir sonraki adımdaki çözüm tahmini yalnızca önceki adımda elde edilen bilgiye dayanır. Bu kategoriye örnek olarak Euler Yöntemi ve Runge-Kutta Yöntemleri verilebilir. Bu yöntemler genellikle basit ve hızlıdır fakat bazen daha az doğru olabilirler.
2. **Çok Adımlı Yöntemler (Multiple-Step Methods):** Bu yöntemlerde, bir sonraki adımdaki çözüm tahmini için birden fazla önceki adımın bilgileri kullanılır. Bu kategoriye örnek olarak Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemleri dahildir. Bu yöntemler daha karmaşık olabilir fakat genellikle daha yüksek doğruluk sağlarlar çünkü geçmişteki birden fazla değeri dikkate alırlar.

Sayısal yöntemlerin seçimi, çözülecek olan diferansiyel denklemin özelliklerine ve istenen doğruluk seviyesine bağlı olarak yapılır.

Taylor Series Method

The problem to be solved is a first order ODE:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Estimates of the solution at different base points:

$$y(x_0 + h), y(x_0 + 2h), y(x_0 + 3h), \dots$$

are computed using the truncated Taylor series expansions.



ChatGPT

Görselde, birinci mertebeden bir sıradan diferansiyel denklem (ODE) çözmek için Taylor Serisi Yöntemi anlatılmaktadır. Bu yöntem, bir fonksiyonun ve onun türevlerinin bilindiği bir başlangıç noktasındaki değerlerini kullanarak, fonksiyonun diğer noktalardaki değerlerini tahmin etmeyi mümkün kılar.

Denklem şu şekildedir:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Burada $\frac{dy(x)}{dx}$ fonksiyonun x 'e göre türevidir, $f(x, y)$ verilen bir fonksiyondur ve $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşuludur. x_0 başlangıç noktasını ve y_0 ise bu noktadaki y değerini ifade eder.

Taylor Serisi Yöntemi ile çözümün farklı baz noktalarındaki tahminleri (örneğin $y(x_0 + h)$, $y(x_0 + 2h)$, $y(x_0 + 3h)$, . . .) kesik Taylor serisi genişlemeleri kullanılarak hesaplanır. Bu genişlemeler, fonksiyonun ve türevlerinin bilinen bir noktadaki değerlerinden yararlanarak, fonksiyonun bir adım sonraki (örneğin $x_0 + h$) değerini yaklaşık olarak bulmaya çalışır.

Yöntemin adımları genellikle şunları içerir:

1. Fonksiyonun türevini ve başlangıç koşulunu almak.
2. Taylor serisi kullanarak fonksiyonun başlangıç noktasına yakın noktalardaki değerlerini tahmin etmek.
3. İstenen noktaya kadar adımları tekrarlamak.

Bu yöntem, genellikle yüksek doğruluk gerektiren problemlerde ve fonksiyonun türevlerinin kolayca hesaplanabildiği durumlarda tercih edilir.

Taylor Series Expansion

Truncated Taylor Series Expansion

$$y(x_0 + h) \approx \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \bigg|_{x=x_0, y=y_0} \right)$$
$$\approx y(x_0) + h \frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0, y=y_0} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} \bigg|_{x=x_0, y=y_0} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} \bigg|_{x=x_0, y=y_0}$$

The n^{th} order Taylor series method uses the n^{th} order Truncated Taylor series expansion.



ChatGPT

Görselde, Taylor Serisi Yönteminin bir fonksiyonun kesik serisini kullanarak nasıl genişletileceği gösterilmektedir. Kesik Taylor Serisi, bir fonksiyonun bir nokta etrafında sonsuz serisinin yalnızca birkaç terimini alarak yapılan yaklaşıktır.

Formül şöyle ifade edilir:

$$y(x_0 + h) \approx \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

Bu ifade, y fonksiyonunun x_0 noktasından h uzaklıktaki değerinin tahmini için y 'nin x_0 noktasındaki türevlerinin kullanıldığı bir seri genişlemesidir. n 'inci dereceden bir kesik Taylor serisi, y 'nin x 'e göre n 'inci türevine kadar olan terimleri içerir ve her türev $k!$ (k faktöriyel) ile bölünerek ve h^k ile çarpılarak hesaplanır.

Örneğin, fonksiyonun x_0 noktasındaki ilk türevi $\frac{dy}{dx}$, ikinci türevi $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ve bu şekilde devam eder. Her türev $x = x_0, y = y_0$ noktasında değerlendirilir ve h 'nin uygun kuvvetiyle çarpılır.

Bu yöntem, sayısal çözümlerde fonksiyonun yakın noktalarındaki değerlerini tahmin etmek için kullanılır ve özellikle diferansiyel denklemlerin çözümlerini yaklaşık olarak bulmada etkilidir. Yöntem, n 'inci dereceden kesik Taylor serisini kullanarak n 'inci dereceden bir yaklaşım sağlar. Bu, genellikle yüksek dereceden türevlerin hesaplanabilir olduğu durumlarda kullanılır ve daha yüksek derecedeki kesik seriler, genellikle daha doğru sonuçlar verir. Ancak hesaplama karmaşıklığı da artar.

Euler Method

- First order Taylor series method is known as Euler Method.
- Only the constant term and linear term are used in the Euler method.
- The error due to the use of the truncated Taylor series is of order $O(h^2)$.



ChatGPT

Görselde Euler Yöntemi ile ilgili bilgiler verilmektedir:

- Birinci mertebeden Taylor serisi yöntemi olarak bilinen Euler Yöntemi, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kullanılan en basit yöntemlerden biridir.
- Euler Yöntemi'nde, yalnızca sabit terim (fonksiyonun kendisi) ve lineer terim (fonksiyonun birinci türevi) kullanılır. Bu, fonksiyonun mevcut değerini ve o noktadaki eğimini (türevini) kullanarak bir sonraki adımdaki değeri tahmin etmek anlamına gelir.
- Euler Yöntemi'nde hata, kesik Taylor serisinin kullanılmasından kaynaklanır ve bu hatanın büyüklüğü $O(h^2)$ mertebesinde dir. Burada h , adım büyüklüğünü ifade eder ve hata terimi, adım büyüklüğünün karesi ile orantılı olarak artar. Bu nedenle, adım büyüklüğü küçük olduğunda hata da küçük olur ancak adım büyüklüğü arttıkça hata da hızla artar.

Bu yöntem genellikle, daha karmaşık ve doğru yöntemler kullanmadan önce bir problem hakkında hızlı bir fikir edinmek ya da çok yüksek doğruluk gerektirmeyen durumlar için kullanışlıdır.

First Order Taylor Series Method

(Euler Method)

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} + O(h^2)$$

Notation :

$$x_n = x_0 + nh, \quad y_n = y(x_n),$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} = f(x_i, y_i)$$

Euler Method

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$



Görsel, birinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi olarak bilinen Euler Yöntemi'ni açıklamaktadır. Bu yöntemde, bir diferansiyel denklemin çözümü adım adım ilerleyerek yaklaşık olarak hesaplanır.

Formül şu şekildedir:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0, y=y_0} + O(h^2)$$

Burada:

- $y(x_0 + h)$ fonksiyonun x_0 noktasından h kadar ilerideki tahmini değeridir.
- $y(x_0)$ başlangıç değeri veya mevcut adımdaki değerdir.
- h adım büyüklüğünü ifade eder (örneğin, zaman aralığı).
- $\frac{dy}{dx}$ fonksiyonunun x_0, y_0 noktasındaki türevidir ve genellikle verilen diferansiyel denklemin sağ tarafı olan $f(x, y)$ fonksiyonu ile ifade edilir.
- $O(h^2)$ terimi hata terimini gösterir ve adım büyüklüğünün karesi ile orantılı olduğunu belirtir.

Notasyon şu şekildedir:

- $x_n = x_0 + nh$ n 'inci adımdaki x değeri.
- $y_n = y(x_n)$ n 'inci adımdaki y değeri.
- $\frac{dy}{dx}$ x_n, y_n noktasında hesaplanır ve bu değer $f(x_i, y_i)$ ile aynıdır.

Euler Yöntemi ile bir sonraki adımdaki y değeri şöyle hesaplanır:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Bu, mevcut adımdaki y değeri olan y_i 'ye, adım büyüklüğü h ile çarpılmış türevin değeri eklenerek bir sonraki adımdaki y değeri olan y_{i+1} bulunur. Bu yaklaşım, adım adım ilerleyerek diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmeyi sağlar. Ancak, büyük adım büyüklükleri kullanıldığında hata hızla artabilir. Bu nedenle, daha doğru sonuçlar elde etmek için genellikle küçük adım büyüklükleri tercih edilir.



Euler Method

Problem:

Given the first order ODE: $y'(x) = f(x, y)$

with the initial condition: $y_0 = y(x_0)$

Determine: $y_i = y(x_0 + ih)$ for $i = 1, 2, \dots$

Euler Method:

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots$$



ChatGPT

Görsel, Euler Yöntemi kullanılarak birinci mertebeden sıradan diferansiyel denklemlerin (ODE) sayısal olarak nasıl çözüleceğini açıklıyor. Yöntem şu adımları içerir:

1. Problemin tanımı:

- Birinci mertebeden bir ODE $\dot{y}(x) = f(x, y)$ verilmiştir.
- Başlangıç koşulu $y_0 = y(x_0)$ olarak tanımlanır.

2. Çözümün bulunması:

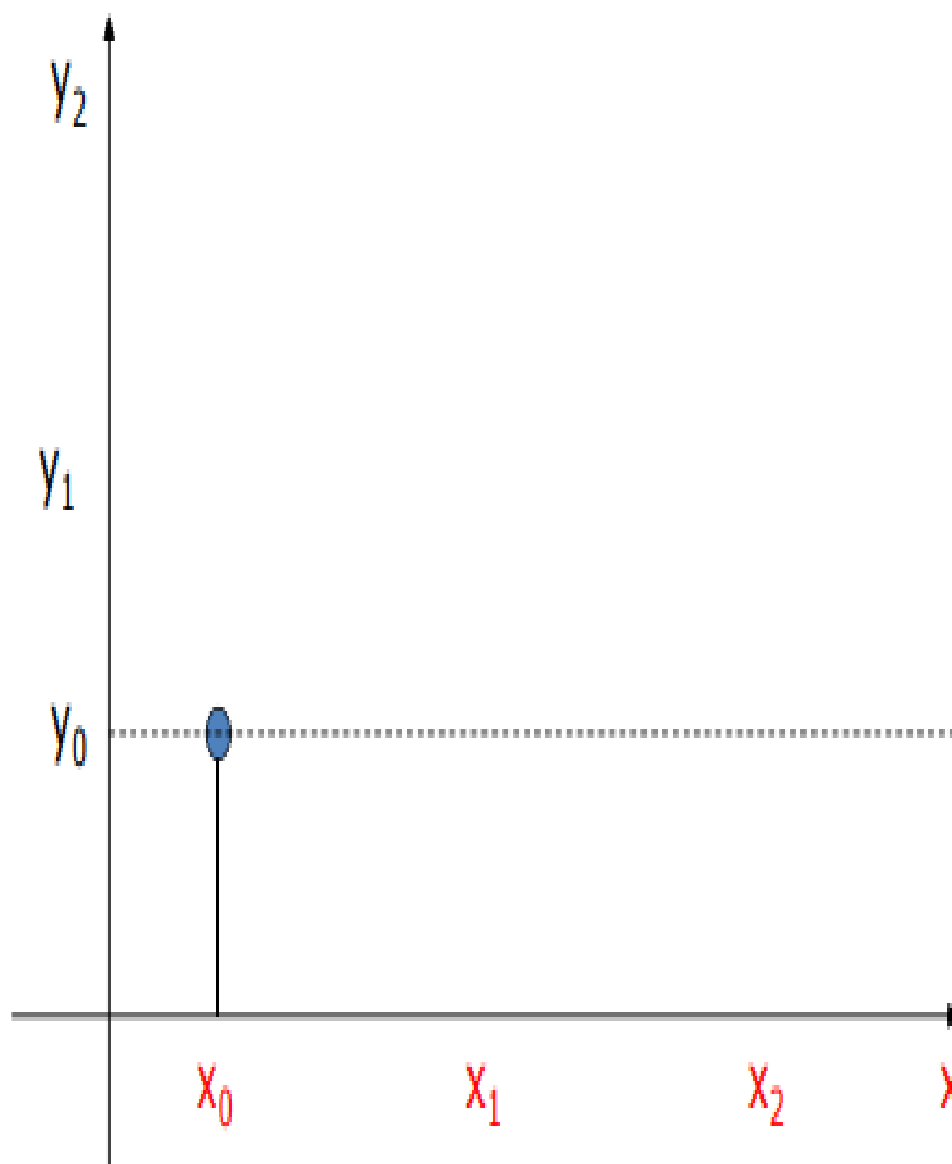
- $y_i = y(x_0 + ih)$ ifadesiyle, i 'nci adımdaki y değerini x_0 noktasından başlayarak h adım büyüklüğüyle i kez ilerleterek hesaplamak istiyoruz. Burada $i = 1, 2, \dots$ sırasıyla her adımı ifade eder.

3. Euler Yöntemi:

- İlk adımda $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değerini kullanırız.
- Ardından, her bir sonraki y değeri $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ formülüyle hesaplanır. Burada $f(x_i, y_i)$ diferansiyel denklemin sağ tarafıdır ve y_i mevcut adımdaki y değeri, x_i ise mevcut x değeridir.

Bu yöntem, y değerlerini adım adım hesaplamak için kullanılır ve her adım, önceki adımdan gelen bilgiyle, o adımdaki türev değeri kullanılarak belirlenir. Euler Yöntemi, özellikle basit ve hızlı olması nedeniyle birçok sayısal çözümlemede ilk tercih edilen yöntemdir. Ancak, adım büyüklüğü h 'nin seçimi önemlidir çünkü bu, yöntemin doğruluğunu ve hatasını etkiler. Genellikle küçük h değerleri, daha doğru sonuçlar üretir ancak daha fazla hesaplama gerektirir.

Interpretation of Euler Method





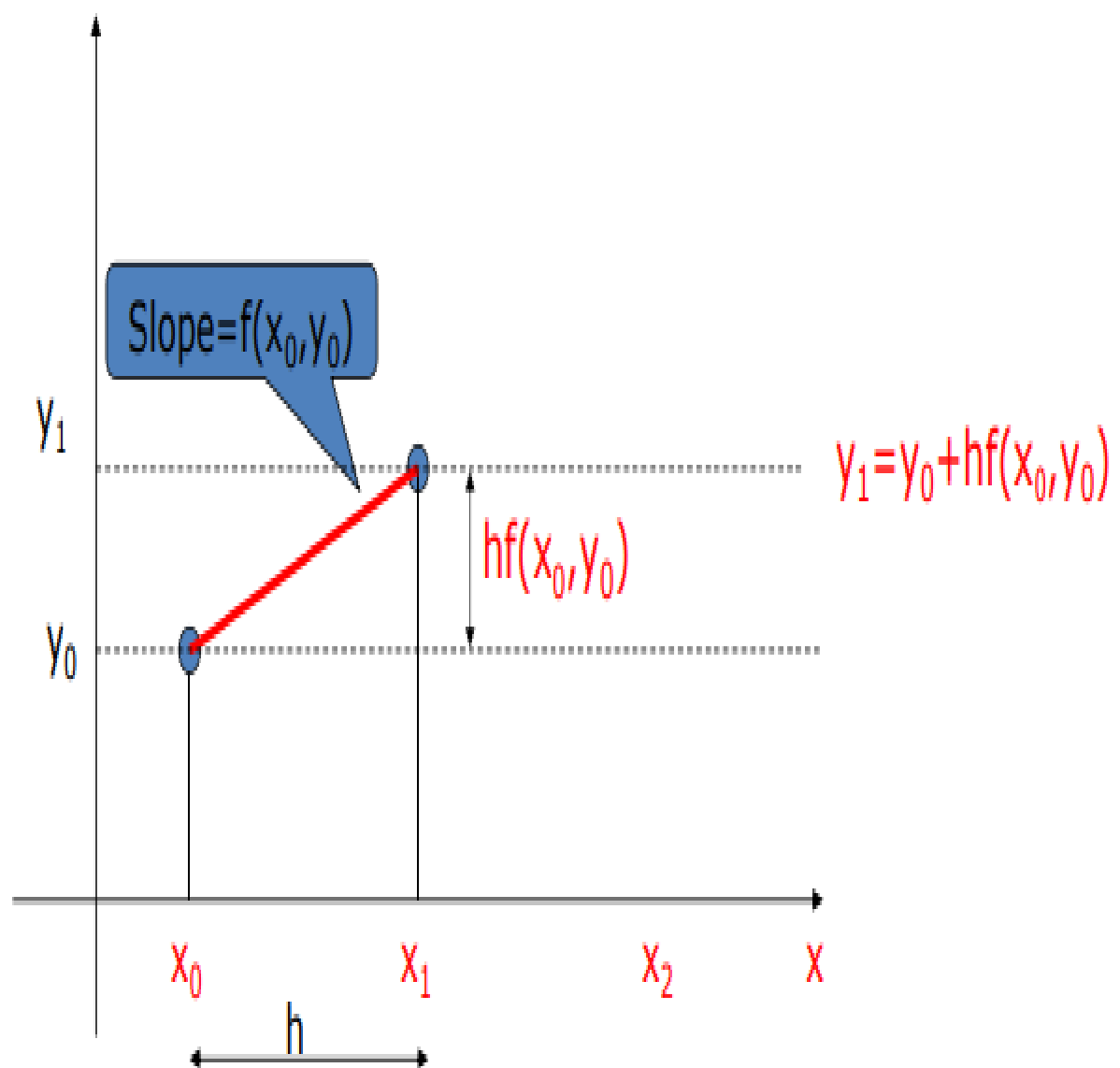
ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi'nin bir grafik üzerindeki yorumu gösterilmektedir. X ekseninde x_0, x_1, x_2, \dots gibi noktalar ve Y ekseninde ise bu noktalara karşılık gelen y_0, y_1, y_2, \dots değerleri yer almaktadır.

Başlangıç noktası x_0 ve bu noktadaki değer y_0 ile belirtilmiş ve buradan başlayarak, Euler Yöntemi ile bir sonraki adım x_1 için y değerinin nasıl hesaplanacağı gösterilmekte. x_0 noktasında, diferansiyel denklemin sağ tarafındaki fonksiyon $f(x_0, y_0)$ kullanılarak bu noktanın türevi hesaplanır ve bu türev değeri, y_0 'dan y_1 'e geçişte kullanılarak y_1 değeri bulunur.

Euler Yöntemi, bu süreci adım adım tekrar ederek, her bir x_i noktası için y_i değerlerini tahmin etmeyi sürdürür. Bu sayede, diferansiyel denklemin sayısal bir çözümü adım adım oluşturulmuş olur. Grafikteki noktalar ve çizgiler, bu adımların görsel bir temsidir. Her adımda, önceki y değerine, adım büyüklüğü ile çarpılmış türevin eklenmesiyle bir sonraki y değeri hesaplanır ve bu, eğimi kullanarak yeni bir y değerine ulaşılmasını sağlar. Ancak grafikte türevin nasıl uygulandığına dair bir gösterim yoktur; sadece y değerlerinin artışını ve x değerlerini görebiliriz.

Interpretation of Euler Method





ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi'nin grafiksel yorumu gösterilmektedir. Euler Yöntemi, bir diferansiyel denklemin sayısal çözümü için basit bir yöntemdir ve ilk dereceden Taylor serisi yaklaşımına dayanır.

Başlangıç noktası olan x_0 ve bu noktadaki y değeri y_0 verilmiştir. Bu noktada denklemin sağ tarafındaki $f(x_0, y_0)$ fonksiyon değeri, o noktadaki eğimi (slope) temsil eder. Euler Yöntemi, bu eğimi kullanarak bir sonraki adımda y değerinin ne olacağını tahmin eder.

x_0 'dan x_1 'e geçişte, y değerinin artışı h adım büyüklüğü ile $f(x_0, y_0)$ çarpılarak hesaplanır:

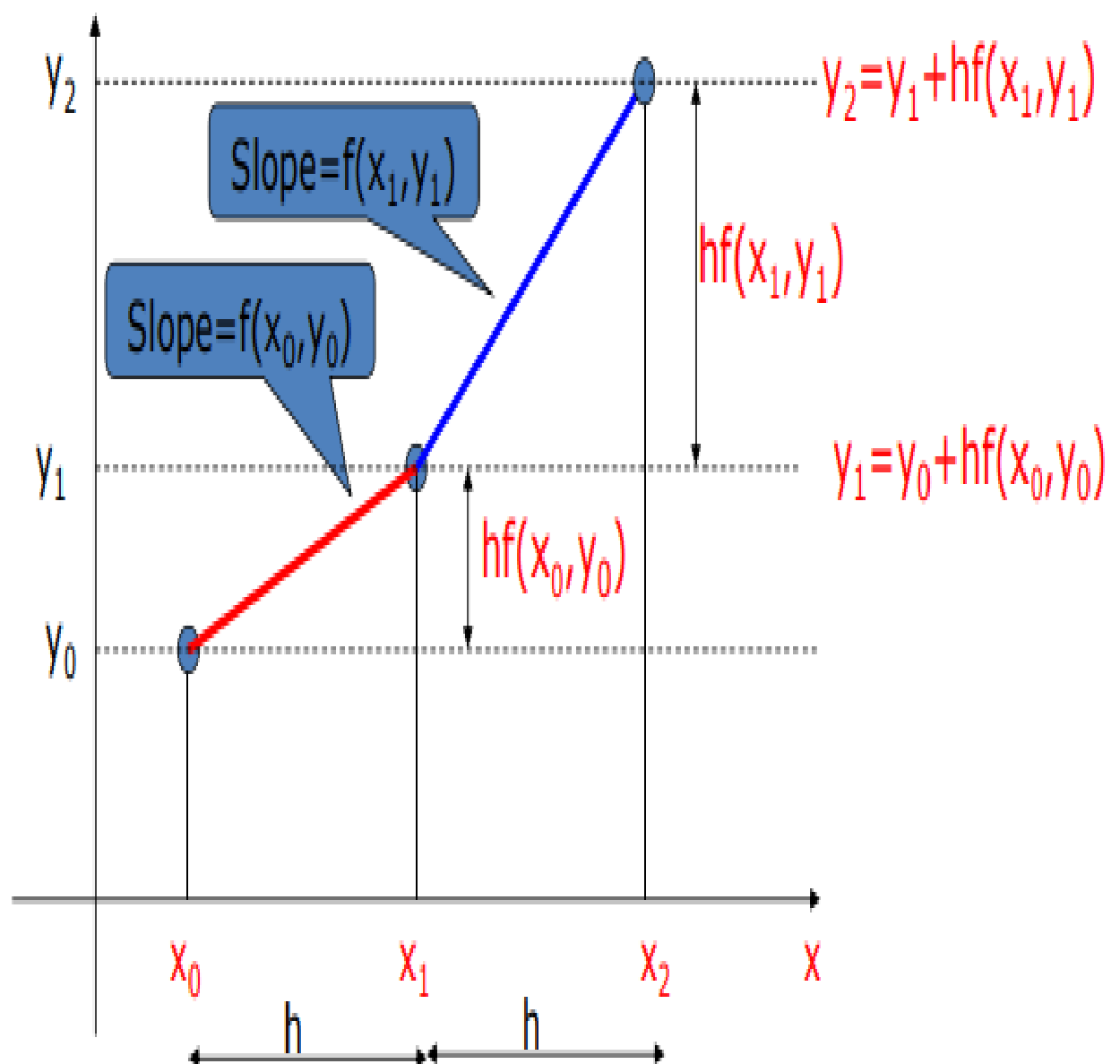
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Görselde, kırmızı çizgiyle gösterilen bu artış, y_0 'dan y_1 'e geçişi ifade eder ve bu yeni y değeri, x_0 'dan h kadar ileriye, yani x_1 'e taşınarak bulunur. Bu süreç, x_1, x_2, \dots noktaları için tekrarlanarak, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü adım adım oluşturulur.

Euler Yöntemi'nin temel avantajı basitliği ve kolay uygulanabilirliğidir. Ancak, adım büyüklüğü h çok büyük seçilirse, hata da büyüyebilir. Bu nedenle, genellikle küçük adım büyüklükleri kullanılır.



Interpretation of Euler Method





ChatGPT

Görselde Euler Yöntemi'nin bir adım sonrası için grafiksel yorumu gösterilmektedir. Euler Yöntemi, bir başlangıç noktasından y değerlerinin tahmin edilmesi için kullanılır. Bu yöntemde her adım, önceki adımın değeri ve türevine dayanarak hesaplanır.

- x_0, y_0 noktasından başlayarak, bu noktadaki eğim $f(x_0, y_0)$ kullanılarak y_0 'dan y_1 'e geçilir. Bu geçiş, y_0 değerine h adım büyüklüğü ile çarpılmış eğimin eklenmesiyle yapılır:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

- Daha sonra, x_1, y_1 noktasındaki eğim $f(x_1, y_1)$ kullanılarak y_1 'den y_2 'ye geçilir. Bu geçiş, y_1 değerine h adım büyüklüğü ile çarpılmış yeni eğimin eklenmesiyle yapılır:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

Kırmızı çizgi x_0 'dan x_1 'e olan ilk adımı temsil ederken, mavi çizgi x_1 'den x_2 'ye olan ikinci adımı temsil etmektedir. Her adımda, fonksiyonun eğimi (türevi) adım büyüklüğü ile çarpılır ve mevcut y değerine eklenir, böylece bir sonraki y değeri tahmin edilir. Bu yöntem, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini adım adım oluşturmak için kullanılır. Ancak, Euler Yöntemi'nin hatası her adımda artabilir, bu nedenle daha küçük adım büyüklükleri daha doğru sonuçlar verir.

Example 1

Use Euler method to solve the ODE:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2, \quad y(1) = -4$$

to determine $y(1.01)$, $y(1.02)$ and $y(1.03)$.



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak çözülmesi istenen bir diferansiyel denklem örneği verilmiştir. Verilen diferansiyel denklem ve başlangıç koşulu şu şekildedir:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$$

ve başlangıç koşulu:

$$y(1) = -4$$

Bu diferansiyel denklemin $y(1.01)$, $y(1.02)$, ve $y(1.03)$ değerlerini bulmamız istenmektedir. Adım büyüklüğümüz $h = 0.01$ olacak şekilde üç adım yaparak bu değerleri hesaplayacağız.

Euler Yöntemi, her adım için mevcut türev değerini kullanarak bir sonraki noktadaki değeri tahmin etmek için kullanılır. Her adım için formül şu şekildedir:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Bu durumda, $f(x, y) = 1 + x^2$ fonksiyonu ve $h = 0.01$ olacak. İlk adım için:

1. $x_0 = 1, y_0 = -4$
2. $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$
3. $y_1 = -4 + 0.01 \cdot (1 + 1^2)$
4. y_1 değerini hesapla ve $x_1 = x_0 + h$ ile birlikte kullanarak y_2 için tekrarla.
5. y_2 ve y_3 için de aynı işlemi tekrarla.

Bu işlemleri yaparak istenen değerleri bulabiliriz. Şimdi bu hesaplamaları yapalım.

Euler Yöntemi'ni kullanarak yapılan hesaplamalar sonucunda, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümleri şu şekildedir:

- $y(1.01) \approx -3.98$
- $y(1.02) \approx -3.9598$
- $y(1.03) \approx -3.9394$

Bu değerler, her adımda küçük bir hata içerir ve bu hata, adım büyüklüğünün karesiyle orantılı olarak artar (hatanın mertebesi $O(h^2)$ olduğu için). Bu nedenle, verilen değerler yalnızca yaklaşıktır. [↗]

- - -

Example 1

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

Euler Method

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$\text{Step1: } y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = -4 + 0.01(1 + (1)^2) = -3.98$$

$$\text{Step2: } y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = -3.98 + 0.01(1 + (1.01)^2) = -3.9598$$

$$\text{Step3: } y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = -3.9598 + 0.01(1 + (1.02)^2) = -3.9394$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak bir diferansiyel denklemin nasıl çözüleceği örnek adımlarla gösterilmektedir. Örnekte verilen diferansiyel denklem $f(x, y) = 1 + x^2$ şeklinde olup, başlangıç değerleri $x_0 = 1$, $y_0 = -4$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak belirlenmiştir.

Euler Yöntemi, bir sonraki y değerini bulmak için mevcut y değeriyle, mevcut x değerindeki fonksiyonun türevinin çarpımını ekleyerek çalışır.

İşlem adımları şöyledir:

Adım 1:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = -4 + 0.01 \cdot (1 + 1^2) = -3.98$$

Adım 2:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = -3.98 + 0.01 \cdot (1 + (1.01)^2) = -3.9598$$

Adım 3:

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = -3.9598 + 0.01 \cdot (1 + (1.02)^2) = -3.9394$$

Bu adımlar, fonksiyonun $x = 1.01$, $x = 1.02$ ve $x = 1.03$ noktalarındaki yaklaşık değerlerini sırasıyla y_1 , y_2 ve y_3 olarak hesaplamaktadır. Sonuçlar önceki hesaplamalarla uyumludur ve Euler Yöntemi'nin her adımda basit bir şekilde nasıl uygulanacağını göstermektedir.



Example 1

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

Summary of the result:

i	x_i	y_i
0	1.00	-4.00
1	1.01	-3.98
2	1.02	-3.9595
3	1.03	-3.9394



ChatGPT

Görsel, Euler Yöntemi ile çözülen bir diferansiyel denklemin özetlenmiş sonuçlarını içeren bir tabloyu göstermektedir. Denklem $f(x, y) = 1 + x^2$ şeklinde olup, başlangıç noktası $x_0 = 1$, başlangıç değeri $y_0 = -4$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak belirtilmiştir.

Tablo, denklemin adım adım nasıl çözüldüğünü göstermektedir. Her satır, x eksenini üzerindeki bir nokta x_i ve bu noktadaki tahmini y değeri y_i 'yi temsil etmektedir.

Tabloda yer alan değerler şunlardır:

- $i = 0$ için, $x_i = 1.00$ ve $y_i = -4.00$ (Başlangıç koşulu)
- $i = 1$ için, $x_i = 1.01$ ve $y_i = -3.98$
- $i = 2$ için, $x_i = 1.02$ ve $y_i = -3.9595$
- $i = 3$ için, $x_i = 1.03$ ve $y_i = -3.9394$

Bu değerler, Euler Yöntemi kullanılarak adım adım hesaplanmış ve y değerlerinin nasıl değiştiğini göstermektedir. Her adımda, fonksiyonun mevcut x ve y değerlerine bağlı türevi alınmış ve bu türev değeri h ile çarpılıp mevcut y değerine eklenmiştir, böylece bir sonraki y değeri bulunmuştur. Bu yöntem sayesinde, denklemin yaklaşık çözümü adım adım ilerleyerek elde edilmiştir.

Example 1

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

Comparison with true value:

i	x_i	y_i	True value of y_i
0	1.00	-4.00	-4.00
1	1.01	-3.98	-3.97990
2	1.02	-3.9595	-3.95959
3	1.03	-3.9394	-3.93909



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak hesaplanan değerlerin, gerçek değerlerle karşılaştırıldığı bir tablo yer almaktadır. Tablo, $f(x, y) = 1 + x^2$ diferansiyel denkleminin Euler Yöntemi ile çözümü için adım adım sonuçları ve bu sonuçların gerçek değerleri içermektedir. Başlangıç koşulları $x_0 = 1, y_0 = -4$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak belirlenmiştir.

Tablodaki sütunlar şunları gösterir:

- "i": Adım numarası.
- "xi": Her adımdaki x değeri.
- "yi": Euler Yöntemi ile hesaplanan y değeri.
- "True value of yi": y değerinin gerçek (analitik veya yüksek doğruluklu sayısal yöntemlerle hesaplanmış) değeri.

Tablo aşağıdaki bilgileri içermektedir:

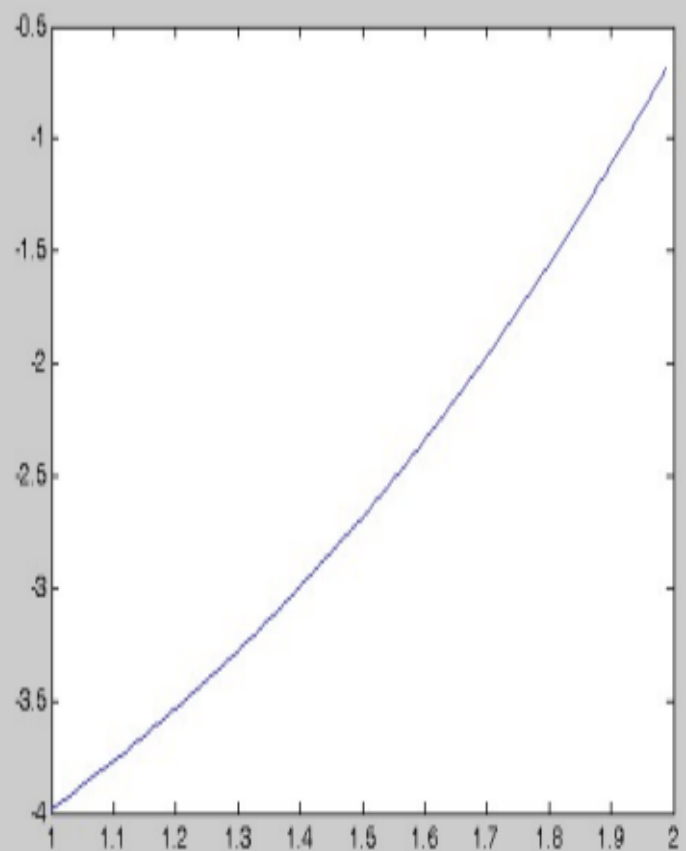
- İlk adımda ($i=0$), x ve y değerleri başlangıç koşullarıdır ve gerçek değerle eşittir: $x_0 = 1.00, y_0 = -4.00$.
- İkinci adımda ($i=1$), $x_1 = 1.01$, Euler Yöntemi ile hesaplanan y değeri $y_1 = -3.98$ ve gerçek değer yaklaşık -3.97990 .
- Üçüncü adımda ($i=2$), $x_2 = 1.02$, Euler Yöntemi ile hesaplanan y değeri $y_2 = -3.9595$ ve gerçek değer yaklaşık -3.95959 .
- Dördüncü adımda ($i=3$), $x_3 = 1.03$, Euler Yöntemi ile hesaplanan y değeri $y_3 = -3.9394$ ve gerçek değer yaklaşık -3.93909 .

Bu karşılaştırma, Euler Yöntemi'nin sonuçlarının gerçek değerlere oldukça yakın olduğunu ancak tam olarak eşleşmediğini göstermektedir. Adım büyüklüğünün küçük olması sayesinde, hesaplanan değerler gerçek değerlere oldukça yakındır, ancak Euler Yöntemi'nin doğası gereği her adımda bir miktar hata içerebilir. Bu hata, genellikle adım büyüklüğüyle doğru orantılıdır ve $O(h)$ mertebesinde oluşur.

Example 1

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

A graph of the
solution of the
ODE for
 $1 < x < 2$





ChatGPT

Görsel, $f(x, y) = 1 + x^2$ fonksiyonuna sahip birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin (ODE) sayısal çözümünün grafiğini içeriyor.

Başlangıç koşulları $x_0 = 1, y_0 = -4$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak verilmiş. Grafik, x ekseninde 1 ile 2 arasındaki değerler için denklemin çözümünü gösteriyor.

Euler Yöntemi kullanılarak çözümün sayısal değerleri hesaplanmış ve bu değerler grafik üzerinde bir eğri olarak çizilmiştir. Grafiğin eğimi x değerinin artmasıyla pozitif yönde değişiyor, bu da $f(x, y) = 1 + x^2$ fonksiyonunun doğasını yansıtıyor. Fonksiyonun pozitif eğimi, y değerlerinin x arttıkça azalmasına (negatif yönde ilerlemesine) neden oluyor. Grafikteki eğri, x değerleri büyüdükçe y değerlerinin nasıl değiştiğini gösteriyor ve bu değişim, başlangıç koşulundan ($y_0 = -4$) başlayarak adım adım Euler Yöntemi ile hesaplanan değerlerin birleştirilmesiyle oluşmuştur.



Types of Errors

- Local truncation error:

Error due to the use of truncated Taylor series to compute $x(t+h)$ in one step.

- Global Truncation error:

Accumulated truncation over many steps.

- Round off error:

Error due to finite number of bits used in representation of numbers. This error could be accumulated and magnified in succeeding steps.



ChatGPT

Görselde, sayısal hesaplamalarda karşılaşılabilecek hata türleri listelenmektedir. Bunlar:

1. **Yerel Kesme Hatası (Local truncation error):** Bir adımda, kesik Taylor serisi kullanılarak yapılan hesaplama kaynaklanan hatadır. Bu hata, Taylor serisinin daha yüksek mertebeden terimlerinin dikkate alınmamasından kaynaklanır.
2. **Küresel Kesme Hatası (Global Truncation error):** Birçok adım boyunca biriken kesme hatasıdır. Yerel kesme hatalarının her adımda birikmesiyle oluşur ve genellikle sayısal çözümün, gerçek çözümden ne kadar sapacağını gösterir.
3. **Yuvarlama Hatası (Round off error):** Sayıların bilgisayar tarafından sabit bir bit sayısı ile temsil edilmesinden kaynaklanan hata türüdür. Bu hata, sayısal hesaplamaların her adımında birikir ve takip eden adımlarda büyüyebilir.

Bu hatalar, sayısal yöntemlerin doğruluğunu ve kararlılığını etkileyen önemli faktörlerdir ve sayısal analizde bu hataların minimize edilmesi için çeşitli teknikler geliştirilmiştir.

Second Order Taylor Series Methods

$$\text{Given } \frac{dy(x)}{dx} = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0$$

Second order Taylor Series method

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + O(h^3)$$

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ needs to be derived analytically.



ChatGPT

Görselde, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemleri hakkında bilgi verilmektedir. Bu yöntem, verilen bir diferansiyel denklemi çözmek için kullanılır ve birinci mertebeden Euler Yönteminden daha yüksek bir doğruluk sağlar.

Verilen diferansiyel denklem ve başlangıç koşulu şu şekildedir:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y, x)$$

$$y(x_0) = y_0$$

İkinci mertebeden Taylor Serisi yöntemi ile y 'nin bir sonraki değeri (y_{i+1}) aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + O(h^3)$$

Burada:

- y_i mevcut adımdaki y değeridir.
- h adım büyüklüğünü ifade eder.
- $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ sırasıyla y 'nin birinci ve ikinci türevleridir.
- $O(h^3)$ terimi, hata terimini gösterir ve genellikle ihmal edilir.

Formüldeki $\frac{d^2y}{dx^2}$ teriminin analitik olarak türetilmesi gerekmektedir. Yani, $f(y, x)$ fonksiyonunun x ve y 'ye göre ikinci türevi alınmalı ve bu türev mevcut x_i ve y_i değerlerine göre değerlendirilmelidir.

Bu yöntem, adım büyüklüğü küçük olduğunda, diferansiyel denklemin çözümünün daha doğru bir yaklaşımını sağlar. Ancak hesaplaması, yüksek mertebeden türevlerin analitik olarak bulunmasını gerektirdiği için daha karmaşıktır.

Third Order Taylor Series Methods

$$\text{Given } \frac{dy(x)}{dx} = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0$$

Third order Taylor Series method

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + O(h^4)$$

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ and $\frac{d^3 y}{dx^3}$ need to be derived analytically.



ChatGPT

Görselde, üçüncü mertebeden Taylor Serisi Yöntemi açıklanmaktadır. Bu yöntem, verilen bir diferansiyel denklemin daha hassas bir sayısal çözümünü elde etmek için kullanılır.

Verilen diferansiyel denklem:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y, x)$$

ve başlangıç koşulu:

$$y(x_0) = y_0$$

Üçüncü mertebeden Taylor Serisi yöntemiyle, y 'nin bir sonraki değeri (y_{i+1}) şu şekilde hesaplanır:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + O(h^4)$$

Bu formülde:

- y_i mevcut adımdaki y değeridir.
- h adım büyüklüğünü ifade eder.
- $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ve $\frac{d^3y}{dx^3}$ sırasıyla y 'nin birinci, ikinci ve üçüncü türevleridir ve bu türevler x ve y 'ye bağlıdır.
- $O(h^4)$ terimi, hata terimini gösterir ve genellikle ihmal edilir.

Formülde yer alan $\frac{d^2y}{dx^2}$ ve $\frac{d^3y}{dx^3}$ türevleri analitik olarak türetilmelidir. Yani, $f(y, x)$ fonksiyonunun ikinci ve üçüncü türevleri alınmalı ve bu türevler mevcut x_i ve y_i değerlerine göre hesaplanmalıdır.

Üçüncü mertebeden Taylor Serisi Yöntemi, ikinci mertebeden yöntemle göre daha hassas sonuçlar verir, çünkü fonksiyonun daha yüksek mertebeden davranışlarını da dikkate alır. Ancak, bu yöntem daha karmaşık türev hesaplamaları gerektirdiği için hesaplama yükü de artmaktadır.

High Order Taylor Series Methods

$$\text{Given } \frac{dy(x)}{dx} = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0$$

n^{th} order Taylor Series method

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} + O(h^{n+1})$$

$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ need to be derived analytically.



ChatGPT

Görselde, yüksek mertebeden Taylor Serisi Yöntemleri açıklanmaktadır. Bu yöntemler, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kullanılan daha doğru ve hassas yöntemlerdir.

Verilen diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y, x)$$

Başlangıç koşulu ise $y(x_0) = y_0$ olarak belirtilmiştir.

n 'inci mertebeden Taylor Serisi yöntemi ile y 'nin bir sonraki değeri (y_{i+1}) aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + O(h^{n+1})$$

Bu formülde:

- y_i mevcut adımdaki y değeridir.
- h adım büyüklüğünü ifade eder.
- $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ sırasıyla y 'nin birinci dereceden n 'inci dereceye kadar türevleridir.
- $O(h^{n+1})$ terimi, hatanın büyüklüğünü ifade eder ve genellikle ihmal edilir.

Formülde yer alan türevlerin ($\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$) analitik olarak türetilmesi gerekmektedir. Yani, $f(y, x)$ fonksiyonunun x ve y 'ye bağlı türevleri alınmalı ve bu türevler mevcut x_i ve y_i değerlerine göre hesaplanmalıdır.

Yüksek mertebeden Taylor Serisi Yöntemleri, sayısal çözümün doğruluğunu artırmak için fonksiyonun daha yüksek dereceden davranışlarını dikkate alır. Ancak, bu yöntemler daha fazla hesaplama karmaşıklığına ve türev hesaplamalarının zorluğuna yol açar. Bu nedenle, genellikle belirli bir hata toleransı dahilinde en düşük gerekli mertebe kullanılır.

Higher Order Taylor Series Methods

- High order Taylor series methods are more accurate than Euler method.
- But, the 2nd, 3rd, and higher order derivatives need to be derived analytically which may not be easy.



ChatGPT

Görselde yüksek mertebeden Taylor Serisi Yöntemlerinin açıklaması yer alıyor:

- Yüksek mertebeden Taylor serisi yöntemleri, Euler yöntemine göre daha doğru sonuçlar üretir. Bu yöntemler, diferansiyel denklemin çözümünü hesaplarken daha yüksek mertebeden türevleri dikkate alarak daha hassas tahminler yaparlar.
- Ancak, ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevlerin analitik olarak türetilmesi gerekmektedir. Bu türevlerin elde edilmesi her zaman kolay olmayabilir ve bazı durumlarda oldukça karmaşık olabilir. Bu türevlerin hesaplanması, özellikle fonksiyon karmaşık olduğunda veya kapalı formda bir türev ifadesi bulmak zor olduğunda zorluk çıkarabilir.

Example 2

Second order Taylor Series Method

Use Second order Taylor Series method to solve:

$$\frac{dx}{dt} + 2x^2 + t = 1, \quad x(0) = 1, \quad \text{use } h = 0.01$$

What is: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$?



ChatGPT

Görselde, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi kullanılarak çözülmesi gereken bir diferansiyel denklem örneği verilmektedir. Denklem ve başlangıç koşulları şöyle ifade edilmiştir:

$$\frac{dx}{dt} + 2x^2 + t = 1, \quad x(0) = 1$$

ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak kullanılacaktır.

Sorulan soru ise bu diferansiyel denklemin ikinci türevinin $(\frac{d^2x(t)}{dt^2})$ ne olduğudur. İkinci mertebeden Taylor serisi yöntemiyle, $x(t)$ fonksiyonunun ikinci türevi gereklidir çünkü bu yöntemde bir sonraki adımı tahmin ederken hem ilk türev $(\frac{dx}{dt})$ hem de ikinci türev $(\frac{d^2x}{dt^2})$ kullanılır.

Bu ikinci türevi bulmak için, öncelikle verilen diferansiyel denklemin her iki tarafının türevini almak gerekiyor. Bu türev, $\frac{dx}{dt}$ fonksiyonunun türevi olarak ifade edilebilir ve bu sayede $\frac{d^2x}{dt^2}$ elde edilir. İşlemi yapalım:



Error analyzing



Example 2

Use Second order Taylor Series method to solve:

$$\frac{dx}{dt} + 2x^2 + t = 1, \quad x(0) = 1, \quad \text{use } h = 0.01$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2x^2 - t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 - 4x \frac{dx}{dt} - 1 = -4x(1 - 2x^2 - t) - 1$$

$$x_{i+1} = x_i + h(1 - 2x_i^2 - t_i) + \frac{h^2}{2}(-1 - 4x_i(1 - 2x_i^2 - t_i))$$



ChatGPT

Görselde, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi kullanarak verilen diferansiyel denklemin çözümü için yapılacak adımlar açıklanıyor.

Öncelikle, verilen diferansiyel denklem şöyledir:

$$\frac{dx}{dt} + 2x^2 + t = 1$$

Bu denklemi yeniden düzenleyerek, birinci mertebeden türev $\frac{dx}{dt}$ şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2x^2 - t$$

İkinci mertebeden türev $\frac{d^2x}{dt^2}$ ise, birinci türevin t ve x ile türetilmesi sonucu bulunur ve şu şekilde verilir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 - 4x \frac{dx}{dt} - 1 = -4x(1 - 2x^2 - t) - 1$$

Taylor Serisi Yöntemi kullanarak x değerinin bir sonraki adımdaki tahmini, mevcut değerler ve türevler kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

$$x_{i+1} = x_i + h(1 - 2x_i^2 - t_i) + \frac{h^2}{2}(-1 - 4x_i(1 - 2x_i^2 - t_i))$$

Bu formülde x_i ve t_i mevcut adımdaki x ve t değerlerini, h ise adım büyüklüğünü (bu örnekte $h = 0.01$) ifade eder. Yöntem, x değerinin zamanla nasıl değiştiğini adım adım hesaplamak için kullanılır.

Görselde verilen bu formülle, x 'in belirli bir t değeri için yaklaşık değeri bulunabilir. Bu yaklaşık değer, gerçek çözüme göre hata içerebilir, ancak adım büyüklüğü küçük tutulduğunda hata genellikle kabul edilebilir düzeyde olur.

Example 2

$$f(t, x) = 1 - 2x^2 - t, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad h = 0.01$$

$$x_{i+1} = x_i + h(1 - 2x_i^2 - t_i) + \frac{h^2}{2}(-1 - 4x_i(1 - 2x_i^2 - t_i))$$

Step1:

$$x_1 = 1 + 0.01(1 - 2(1)^2 - 0) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4(1)(1 - 2 - 0)) = 0.9901$$

Step2:

$$x_2 = 0.9901 + 0.01(1 - 2(0.9901)^2 - 0.01) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4(0.9901)(1 - 2(0.9901)^2 - 0.01)) = 0.9807$$

Step3:

$$x_3 = 0.9716$$



ChatGPT

Görselde, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi ile bir diferansiyel denklemin adım adım nasıl çözüleceği örneği verilmiştir. Denklem $f(t, x) = 1 - 2x^2 - t$, başlangıç koşulları $t_0 = 0, x_0 = 1$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak belirlenmiştir.

Her adım için x_{i+1} değeri şu formülle hesaplanır:

$$x_{i+1} = x_i + h(1 - 2x_i^2 - t_i) + \frac{h^2}{2}(-1 - 4x_i(1 - 2x_i^2 - t_i))$$

İlk üç adımda yapılan hesaplamalar:

Adım 1:

$$x_1 = x_0 + 0.01(1 - 2x_0^2 - t_0) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4x_0(1 - 2x_0^2 - t_0))$$

$$x_1 = 1 + 0.01(1 - 2(1)^2 - 0) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4(1)(1 - 2(1)^2 - 0))$$

$$x_1 = 0.9901$$

Adım 2:

$$x_2 = x_1 + 0.01(1 - 2x_1^2 - t_1) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4x_1(1 - 2x_1^2 - t_1))$$

$$x_2 = 0.9901 + 0.01(1 - 2(0.9901)^2 - 0.01) + \frac{(0.01)^2}{2}(-1 - 4(0.9901)(1 - 2(0.9901)^2 - 0.01))$$

$$x_2 = 0.9807$$

Adım 3:

$$x_3 = 0.9716$$

Bu hesaplamalar, verilen başlangıç değeri ve adım büyüklüğü ile, x değerinin zamana bağlı olarak nasıl değiştiğini yaklaşık olarak gösterir. Hesaplamalarda, her adımın sonucu bir sonraki adımın başlangıç noktası olarak kullanılır ve bu şekilde diferansiyel denklemin sayısal çözümü adım adım elde edilir.



Example 2

$$f(t, x) = 1 - 2x^2 - t, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad h = 0.01$$

Summary of the results:

i	t_i	x_i
0	0.00	1
1	0.01	0.9901
2	0.02	0.9807
3	0.03	0.9716



ChatGPT

Görselde, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi kullanılarak yapılan sayısal çözümün özeti bir tablo halinde verilmiştir. Verilen diferansiyel denklem $f(t, x) = 1 - 2x^2 - t$, başlangıç zamanı $t_0 = 0$, başlangıç konumu $x_0 = 1$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ şeklinde belirlenmiştir.

Tablo, zamanın farklı noktalarındaki (t_i) ve karşılık gelen x konumlarının (x_i) değerlerini göstermektedir:

- $i = 0$ için t zamanında, x değeri 1'dir (başlangıç koşulu).
- $i = 1$ için $t = 0.01$ zamanında, x değeri yaklaşık olarak 0.9901'dir.
- $i = 2$ için $t = 0.02$ zamanında, x değeri yaklaşık olarak 0.9807'dir.
- $i = 3$ için $t = 0.03$ zamanında, x değeri yaklaşık olarak 0.9716'dır.

Bu tablo, ikinci mertebeden Taylor Serisi Yöntemi kullanılarak hesaplanan x değerlerinin zaman içinde nasıl değiştiğini özetlemektedir. Her bir sonraki x_i değeri, önceki adımdan gelen x değeri ve türev bilgisi kullanılarak hesaplanmıştır. Bu sayısal yöntem, diferansiyel denklemin çözümünü adım adım yaklaşık olarak bulmamızı sağlar.



Programming Euler Method

Write a MATLAB program to implement Euler method to solve:

$$\frac{dv}{dt} = 1 - 2v^2 - t. \quad v(0) = 1$$

$$\text{for } t_i = 0.01i, \quad i = 1, 2, \dots, 100$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanarak MATLAB programlama ortamında çözülmesi istenen bir diferansiyel denklem örneği verilmiştir. Örneğin MATLAB programına dökümü için verilen bilgiler şunlardır:

- Diferansiyel denklem: $\frac{dv}{dt} = 1 - 2v^2 - t$
- Başlangıç koşulu: $v(0) = 1$
- Zaman aralıkları: $t_i = 0.01i$ ile i değeri 1'den 100'e kadar olan değerler için $v(t)$ hesaplanmalıdır.

Bu bilgilerle MATLAB'ta bir program yazmak istendiğinde, öncelikle bir zaman vektörü oluşturulur, başlangıç koşulu atanır ve her zaman adımı için Euler Yöntemi uygulanarak yeni v değerleri hesaplanır. MATLAB'da bu işlemler genellikle bir döngü içinde gerçekleştirilir. Örnek bir MATLAB kodu şöyle olabilir:

```
% Başlangıç koşulları
```

```
t0 = 0;
```

```
v0 = 1;
```

```
h = 0.01; % Adım büyüklüğü
```

```
% Zaman vektörünü oluştur
```

```
t = t0:h:t0+100*h;
```

```
% Sonuçları saklamak için bir vektör oluştur ve ilk değeri ata
```

```
v = zeros(1, length(t));
```

```
v(1) = v0;
```

```
% Euler yöntemini uygula
```

```
for i=1:(length(t)-1)
```

```
    dv_dt = 1 - 2*v(i)^2 - t(i);
```

```
    v(i+1) = v(i) + h*dv_dt;
```

```
end
```

```
% Sonuçları yazdır veya çizdir  
disp(v);  
plot(t, v);  
xlabel('Zaman (t)');  
ylabel('v(t)');  
title('Euler Yöntemi ile Diferansiyel Denklemin Çözümü');
```

Bu kod, verilen diferansiyel denklemin sayısal çözümünü adım adım hesaplar ve sonuçları bir vektörde saklar. Daha sonra bu sonuçları konsola yazdırabilir veya bir grafik üzerinde çizebilirsiniz. Her `for` döngüsü iterasyonunda, `v(i)`'nin yeni değeri önceki değere ve o anki türeğe bağlı olarak güncellenir. Bu işlem, belirlenen zaman aralığı boyunca tekrarlanır.



Programming Euler Method

```
f=inline('1-2*v^2-t','t','v')
```

```
h=0.01
```

```
t=0
```

```
v=1
```

```
T(1)=t;
```

```
V(1)=v;
```

```
for i=1:100
```

```
    v=v+h*f(t,v)
```

```
    t=t+h;
```

```
    T(i+1)=t;
```

```
    V(i+1)=v;
```

```
end
```



ChatGPT

Görselde, MATLAB'da Euler Yöntemi kullanarak bir diferansiyel denklemin nasıl programlanacağı gösterilmektedir. Verilen kod, belirli bir diferansiyel denklemin çözümünü adım adım hesaplamak için yazılmıştır. Kod şu adımlardan oluşmaktadır:

1. `'f'` fonksiyonu, `'inline'` komutu ile $1 - 2 * v^2 - t$ ifadesi olarak tanımlanmış. Bu, $\frac{dv}{dt}$ ifadesinin sağ tarafını temsil ediyor.
2. Adım büyüklüğü olarak `'h=0.01'` belirlenmiş.
3. Zaman `'t'` ve değişken `'v'` için başlangıç değerleri sırasıyla 0 ve 1 olarak atanmış.
4. Zaman `'t'` ve çözüm `'v'` için vektörler (`'T'` ve `'V'`) başlatılmış ve ilk elemanlarına başlangıç değerleri yerleştirilmiş.
5. `'for'` döngüsü, diferansiyel denklemin çözümünü 100 adım boyunca Euler Yöntemi ile hesaplamak üzere kurulmuş. Her adımda, önceki `'v'` değeri, `'h'` ile çarpılmış fonksiyonun değeri ile güncellenerek yeni `'v'` değeri hesaplanmış ve `'T'` ve `'V'` vektörlerine eklenmiş.

Verilen MATLAB kodunun Türkçeye çevirisi ve açıklaması şu şekildedir:

Programming Euler Method

```
f=inline('1-2*v^2-t','t','v')
```

Definition of the ODE

```
h=0.01
```

```
t=0
```

Initial condition

```
v=1
```

```
T(1)=t;
```

```
V(1)=v;
```

```
for i=1:100
```

Main loop

```
v=v+h*f(t,v)
```

Euler method

```
t=t+h;
```

```
T(i+1)=t;
```

Storing information

```
V(i+1)=v;
```

```
end
```



ChatGPT

Görselde MATLAB'da Euler Yöntemi'nin nasıl programlanacağını gösteren bir kod bloğu ve bu kod bloğunun bölümlerini açıklayan renkli etiketler yer almaktadır. Her etiket, kodun belirli bir bölümünü temsil etmektedir ve Türkçe açıklamaları şöyledir:

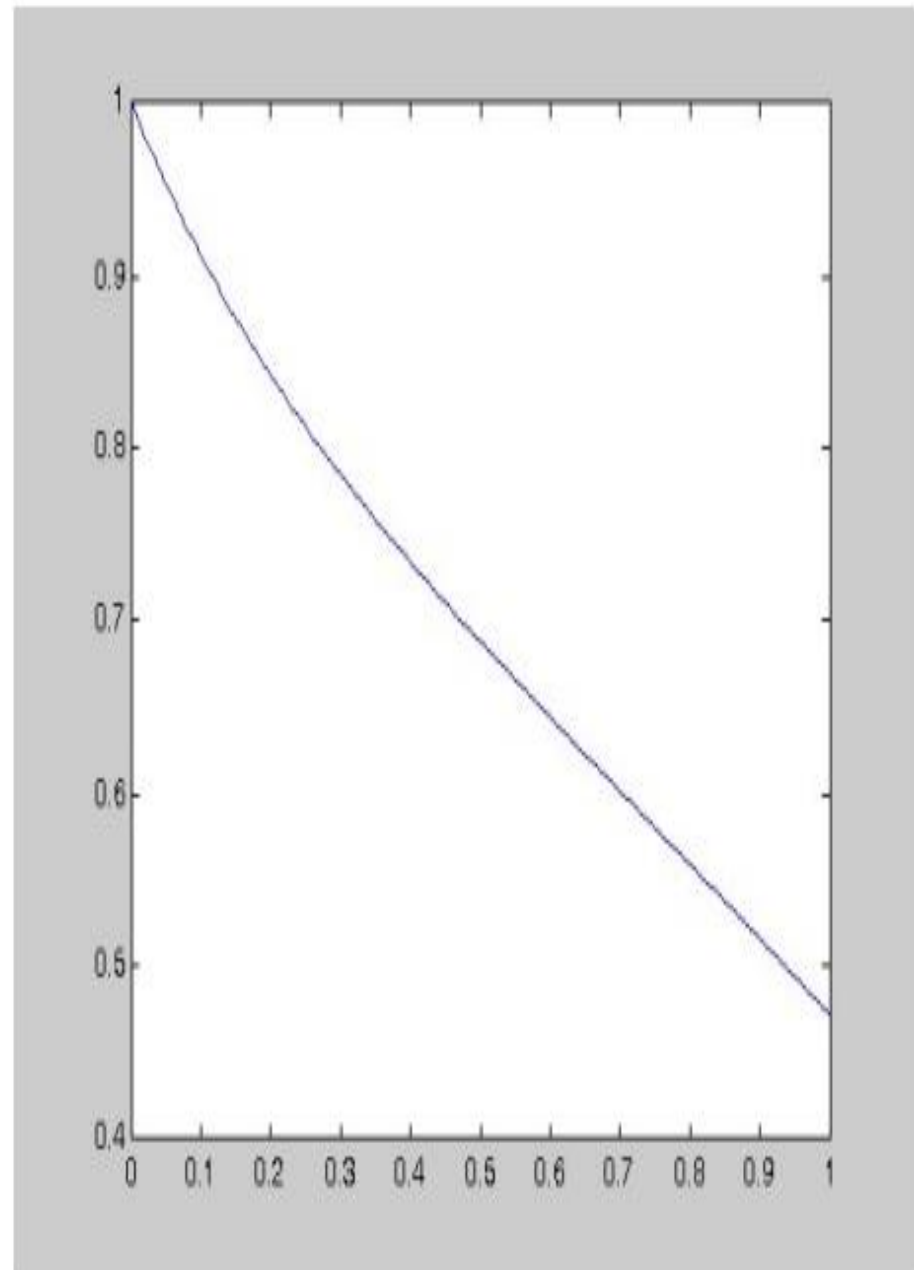
- **Tanım (Definition of the ODE):** Diferansiyel denklemin fonksiyonunu `f` olarak tanımlayan satır. `inline` fonksiyonu, `1-2*v^2-t` ifadesini `t` ve `v` bağımsız değişkenleri ile tanımlıyor.
- **Başlangıç Koşulu (Initial condition):** Başlangıç zamanı `t` ve başlangıç değeri `v` için atanan değerleri içerir. Bu örnekte başlangıç zamanı `0` ve başlangıç değeri `1` olarak belirlenmiştir.
- **Ana Döngü (Main loop):** `for` döngüsü, diferansiyel denklemin çözümünü belirli adım sayısı boyunca hesaplamak için kullanılır. Bu örnekte, 100 adım için döngü oluşturulmuştur.
- **Euler Metodu (Euler method):** Asıl hesaplama işleminin yapıldığı bölüm. Her iterasyonda, `v` değeri, `f(t,v)` fonksiyonu ile hesaplanan türev ile güncellenir ve `t` zamanı adım büyüklüğü `h` kadar arttırılır.
- **Bilgi Depolama (Storing information):** Hesaplanan her yeni `v` ve `t` değerinin, `V` ve `T` dizilerine sırasıyla kaydedildiği kısım. Bu sayede hesaplamaların tüm adımları kayıt altına alınır.

Yukarıdaki kod, belirli bir zaman aralığında verilen diferansiyel denklemin sayısal çözümünü hesaplamak için kullanılır ve sonuçlar `T` ve `V` dizilerinde saklanır. Bu diziler, zamanın ve çözümün nasıl değiştiğini görmek için kullanılabilir.

Programming Euler Method

Plot of the
solution

`plot(T,V)`





ChatGPT

Görsel, MATLAB'da Euler Yöntemi kullanılarak elde edilen bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünün grafiğini gösteriyor. Grafik, `plot(T,V)` komutu ile çizilmiş ve bu, `T` vektöründeki zaman değerlerine karşı `V` vektöründeki çözüm değerlerini temsil ediyor.

Grafikte yatay eksen zamanı (`T`) ve dikey eksen çözümü (`V`) temsil ediyor. Grafik, başlangıçta `V` değerinin 1 olduğunu ve zaman ilerledikçe `V` değerinin azaldığını gösteriyor. Bu, Euler Yöntemi kullanılarak yapılan sayısal çözümün adım adım nasıl geliştiğini görselleştirir.

`plot(T,V)` komutu, MATLAB'da `T` ve `V` vektörlerini kullanarak bir 2 boyutlu grafik çizer. Bu grafikte, her bir `T` değerine karşılık gelen `V` değeri bir nokta olarak çizilir ve MATLAB bu noktaları bir çizgiyle birleştirir. Bu şekilde, diferansiyel denklemin sayısal çözümünün grafik üzerindeki eğrisi elde edilir.



Example 1:

Find **$y(0.5)$** if **y** is the solution of IVP **$y' = -2x - y$** , **$y(0) = -1$** using Euler's method with step length **0.1**. Also find the error in the approximation.

Solution: **$f(x, y) = -2x - y$** ,

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = -1 + 0.1 * (-2*0 - (-1)) = -0.8999$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = -0.8999 + 0.1 * (-2*0.1 - (-0.8999)) = -0.8299$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = -0.8299 + 0.1 * (-2*0.2 - (-0.8299)) = -0.7869$$

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = -0.7869 + 0.1 * (-2*0.3 - (-0.7869)) = -0.7683$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = -0.7683 + 0.1 * (-2*0.4 - (-0.7683)) = -0.7715$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak çözülen bir başlangıç değer problemi (IVP) ve bu çözümde adım adım yapılan hesaplamalar yer alıyor. Problem şu diferansiyel denklem ve başlangıç koşulu ile tanımlanmış:

$$y' = -2x \cdot y, \quad y(0) = -1$$

Adım uzunluğu $h = 0.1$ olarak belirlenmiş ve bu adım uzunluğu kullanılarak $y(0.5)$ değerinin Euler Yöntemi ile nasıl bulunacağı gösterilmiştir. Ayrıca, yaklaşık çözümdeki hatanın ne olduğunu bulmak da istenmiştir.

Hesaplama şu adımları takip ediyor:

1. Fonksiyon $f(x, y)$ olarak belirlenmiş: $f(x, y) = -2x \cdot y$
2. İlk adım için, y_1 hesaplanmış:
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = -1 + 0.1 \cdot (-2 \cdot 0 \cdot (-1)) = -0.8999$$
3. İkinci adım için, y_2 hesaplanmış:
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = -0.8999 + 0.1 \cdot (-2 \cdot 0.1 \cdot (-0.8999)) = -0.8299$$
4. Benzer şekilde, y_3 , y_4 ve y_5 değerleri sırasıyla hesaplanmış.

Sonuç olarak, y_5 değeri yaklaşık olarak -0.7715 bulunmuş. Bu değer, $t = 0.5$ anındaki yaklaşık çözümü temsil eder. Görselde ayrıca, bu yaklaşık değerdeki hata da sorgulanmakta, ancak hata hesaplaması verilmemektedir. Hata hesaplaması için, Euler Yöntemi ile bulunan yaklaşık çözüm değeri ile analitik çözüm veya daha yüksek doğruluklu bir sayısal yöntemle hesaplanan değer arasındaki fark kullanılır.

Example 2:

Use Eulers method to solve for $y[0.1]$ from $y' = x + y + xy$, $y(0) = 1$ with $h = 0.01$ also estimate how small h would need to obtain four-decimal accuracy.

Solution : $f(x, y) = x + y + xy$,

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1.0 + .01*(0 + 1 + 0*1) = 1.01$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.01 + .01*(0.01 + 1.01 + 0.01*1.01) = 1.02$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1.02 + .01*(0.02 + 1.02 + 0.02*1.02) = 1.031$$

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = 1.031 + .01*(0.03 + 1.031 + 0.03*1.031) = 1.042$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = 1.042 + .01*(0.04 + 1.042 + 0.04*1.042) = 1.053$$

$$y_6 = y_5 + h f(x_5, y_5) = 1.053 + .01*(0.05 + 1.053 + 0.05*1.053) = 1.065$$

$$y_7 = y_6 + h f(x_6, y_6) = 1.065 + .01*(0.06 + 1.065 + 0.06*1.065) = 1.076$$

$$y_8 = y_7 + h f(x_7, y_7) = 1.076 + .01*(0.07 + 1.076 + 0.07*1.076) = 1.089$$

$$y_9 = y_8 + h f(x_8, y_8) = 1.089 + .01*(0.08 + 1.089 + 0.08*1.089) = 1.101$$

$$y_{10} = y_9 + h f(x_9, y_9) = 1.101 + .01*(0.09 + 1.101 + 0.09*1.101) = 1.114$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü adım adım nasıl bulacağınızı gösteren bir örnek bulunuyor. Örnekte, verilen diferansiyel denklem $y' = x + y \cdot xy$, başlangıç koşulu $y(0) = 1$ ve adım büyüklüğü $h = 0.01$ olarak belirtilmiştir. Bu adım büyüklüğü kullanılarak, $y(0.1)$ değerinin dört ondalık basamak hassasiyeti ile nasıl hesaplanacağı sorulmaktadır.

Çözüm adımları şu şekildedir:

1. Fonksiyon $f(x, y)$ belirlenmiş: $f(x, y) = x + y \cdot xy$
2. İlk adım için y_1 hesaplanmış:
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$
$$y_1 = 1.0 + 0.01 \cdot (0 + 1 \cdot 0) = 1.01$$
3. İkinci adım için y_2 hesaplanmış:
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$
$$y_2 = 1.01 + 0.01 \cdot (0.01 + 1.01 \cdot 0.01) = 1.02$$
4. Bu işlem y_{10} değerini bulana kadar devam ettirilmiş.

Son adımda, y_{10} değeri yaklaşık olarak 1.114 olarak hesaplanmış. Bu değer, $t = 0.1$ zamanında y için Euler Yöntemi ile bulunan yaklaşık çözümü ifade eder.

Dört ondalık basamak hassasiyeti elde etmek için, h adım büyüklüğünün daha da küçültülmesi gerekebilir. Bu örnekte h zaten 0.01 olarak belirlenmiş, ancak daha küçük bir h değeri kullanılarak daha hassas bir sonuç elde edilebilir. Bu hassasiyetin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek için, çözümün analitik veya daha yüksek doğruluklu bir sayısal yöntemle elde edilen değeriyle karşılaştırılması gerekir.



Example 3:

Solve the differential equation $y' = x/y$, $y(0)=1$ by Euler's method to get $y(1)$. Use the step lengths $h = 0.1$ and 0.2 and compare the results with the analytical solution ($y^2 = 1 + x^2$)

Solution: $f(x, y) = x/y$,

with $h = 0.1$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1.0 + 0.1*0.0/1.0 = 1.00$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.1*0.1/1.0 = 1.01$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1.01 + 0.1*0.2/1.01 = 1.0298$$

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = 1.0298 + 0.1*0.3/1.0298 = 1.0589$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = 1.0589 + 0.1*0.4/1.0589 = 1.0967$$

$$y_6 = y_5 + h f(x_5, y_5) = 1.0967 + 0.1*0.5/1.0967 = 1.1423$$

$$y_7 = y_6 + h f(x_6, y_6) = 1.1423 + 0.1*0.6/1.1423 = 1.1948$$

$$y_8 = y_7 + h f(x_7, y_7) = 1.1948 + 0.1*0.7/1.1948 = 1.2534$$

$$y_9 = y_8 + h f(x_8, y_8) = 1.2534 + 0.1*0.8/1.2534 = 1.3172$$

$$y_{10} = y_9 + h f(x_9, y_9) = 1.3172 + 0.1*0.9/1.3172 = 1.3855$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanarak bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etme örneği verilmiştir. Diferansiyel denklem $y' = x/y$, başlangıç koşulu $y(0) = 1$ olarak belirtilmiş ve $y(1)$ değerini bulmak istenmektedir. İki farklı adım büyüklüğü $h = 0.1$ ve $h = 0.2$ kullanılarak çözüm yapılmış ve sonuçlar analitik çözüm $y^2 = 1 + x^2$ ile karşılaştırılması istenmiştir.

$h = 0.1$ adım büyüklüğü için yapılan hesaplamalar şunlardır:

1. $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0 + 0.1 \cdot (0/1.0) = 1.00$
2. $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.1 \cdot (0.1/1.0) = 1.01$
3. $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1.01 + 0.1 \cdot (0.2/1.01) = 1.0298$
- ...
4. $y_{10} = y_9 + h \cdot f(x_9, y_9) = 1.3172 + 0.1 \cdot (0.9/1.3172) = 1.3855$

Bu işlem, x değerinin artması ile y değerinin nasıl değiştiğini adım adım hesaplamak için kullanılır. Her adımda y değeri güncellenirken, x değeri de h kadar artırılır. Hesaplanan y değerleri, analitik çözümle karşılaştırıldığında, adım büyüklüğünün küçülmesi ile sonuçların analitik çözüme daha yakın olduğu görülür. Bu karşılaştırma, sayısal yöntemin doğruluğunu değerlendirmek için yapılır.



with $h = 0.2$

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1.0 + 0.2 * 0.0 / 1.0 = 1.0$$

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.2 * 0.2 / 1.0 = 1.0400$$

$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1.0400 + 0.2 * 0.4 / 1.0400 = 1.1169$$

$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3) = 1.1169 + 0.2 * 0.6 / 1.1169 = 1.2243$$

$$y_5 = y_4 + h f(x_4, y_4) = 1.2243 + 0.2 * 0.8 / 1.2243 = 1.3550$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi'nin daha büyük bir adım büyüklüğü olan $h = 0.2$ ile uygulandığı ve bu yöntemle elde edilen yaklaşık y değerlerinin adım adım nasıl hesaplandığı gösterilmektedir. İşlem adımları şu şekildedir:

1. İlk olarak, y_1 değeri başlangıç koşulu ve fonksiyon $f(x, y) = x/y$ kullanılarak hesaplanmış ve 1.0 olarak bulunmuş.
2. Daha sonra, ikinci y değeri y_2 hesaplanmış ve 1.0 olarak bulunmuş.
3. Üçüncü adımda y_3 , ve devamındaki adımlarda y_4 ve y_5 sırasıyla hesaplanmıştır.

Adım adım yapılan hesaplamalar şu şekildedir:

- $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.2 \cdot (0.2/1.0) = 1.0400$
- $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1.0400 + 0.2 \cdot (0.4/1.0400) = 1.1169$
- $y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1.1169 + 0.2 \cdot (0.6/1.1169) = 1.2243$
- $y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 1.2243 + 0.2 \cdot (0.8/1.2243) = 1.3550$

Bu işlem, verilen diferansiyel denklemin sayısal çözümünü adım adım bulmak için kullanılmaktadır. Euler Yöntemi, her adımda mevcut y değerini ve fonksiyonun x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı anlık değişim oranını kullanarak yeni bir y değeri hesaplar. Her yeni y değeri, bir önceki adımda elde edilen y değeri üzerine, adım büyüklüğü ile çarpılmış türevin eklenmesiyle bulunur.

Comparison of numerical and analytical solutions

x	Numerical Solution		Analytical solution
	h = 0.1	h = 0.2	
0.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.0		1.0050
0.2	1.01	1.0	1.0198
0.3	1.0298		1.0440
0.4	1.0589	1.0400	1.0770
0.5	1.0967		1.1180
0.6	1.1423	1.1169	1.1662
0.7	1.1948		1.2207
0.8	1.2534	1.2243	1.2806
0.9	1.3172		1.3454
1.0	1.3855	1.3550	1.4142



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin sayısal ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması yer almaktadır. Sayısal çözüm, iki farklı adım büyüklüğü için Euler Yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır: $h = 0.1$ ve $h = 0.2$. Her bir adım büyüklüğü için sayısal çözüm değerleri tablo halinde verilmiş ve bunlar, analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Tablo şu bilgileri içeriyor:

- Sol sütun (x), diferansiyel denklemin bağımsız değişkeninin değerlerini göstermektedir.
- Orta sütunlar ($h = 0.1$ ve $h = 0.2$), Euler Yöntemi ile hesaplanan sayısal çözüm değerlerini göstermektedir.
- Sağ sütun (Analitik çözüm), diferansiyel denklemin analitik çözümünün değerlerini göstermektedir.

Analitik çözüm, denklemin kesin matematiksel çözümünü temsil ederken, sayısal çözüm, belirli bir algoritma kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Tablodan, adım büyüklüğü küçüldükçe ($h = 0.1$), sayısal çözümün analitik çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. Örneğin, $x = 1.0$ için $h = 0.1$ kullanıldığında sayısal çözüm 1.3855 iken, analitik çözüm 1.4142'dir. $h = 0.2$ için sayısal çözüm daha az doğru olan 1.3550'dir.

Bu karşılaştırma, sayısal yöntemlerin doğruluğunu değerlendirmek ve farklı adım büyüklüklerinin sonuçlar üzerindeki etkisini anlamak için yapılmaktadır.

Euler's Method

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(0) = y_0$$

$$\text{Slope} = \frac{\text{Rise}}{\text{Run}}$$

$$= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$= f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

$$= y_0 + f(x_0, y_0)h$$

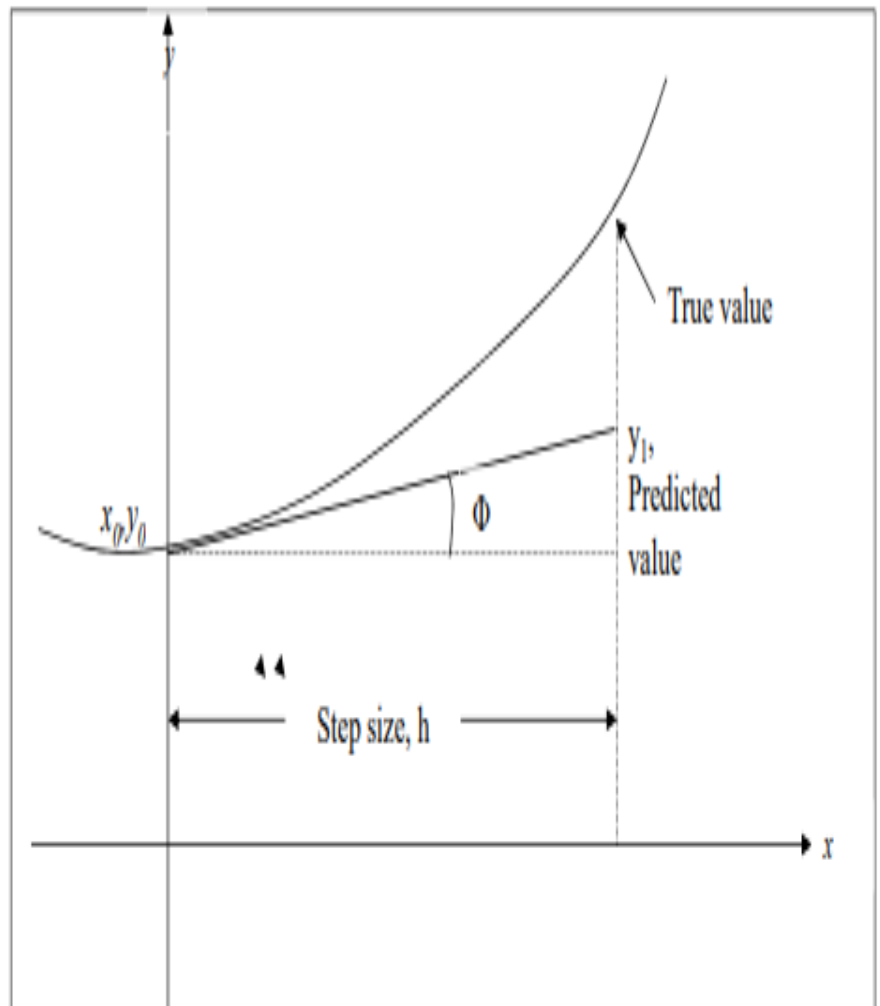


Figure 1 Graphical interpretation of the first step of Euler's method



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi'nin ilk adımının grafiksel yorumu sunulmuştur. Euler Yöntemi, bir diferansiyel denklemin sayısal çözümü için kullanılan bir yöntemdir.

Euler Yöntemi şu adımları izler:

1. Diferansiyel denklem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ olarak ifade edilir. Başlangıç koşulu $y(0) = y_0$ olarak verilir.
2. Eğim (Slope), fonksiyonun türevi $f(x_0, y_0)$ ile hesaplanır. Bu, y_1 'in y_0 'dan ne kadar "yükseldiğini" (Rise) ve x_1 'in x_0 'dan ne kadar "ilerlediğini" (Run) gösterir.
3. Yeni y değeri, mevcut y değerine (y_0), eğim ile adım büyüklüğü h 'nin çarpımının eklenmesiyle hesaplanır. Matematiksel ifade şöyle olur:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \times (x_1 - x_0)$$
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \times h$$

Görseldeki grafikte, bu işlem gösterilmektedir. x_0, y_0 noktasından başlayarak, $f(x_0, y_0)$ eğimi kullanılarak çizilen doğru, bir sonraki x değerine kadar uzatılır. Bu doğru üzerindeki nokta (y_1), Euler Yöntemiyle tahmin edilen yeni y değeridir. Bu tahmin edilen değer, gerçek değerden farklı olabilir, ki bu da grafikte "True value" olarak gösterilen gerçek fonksiyon değeri ile "Predicted value" olarak gösterilen Euler Yöntemi ile tahmin edilen değer arasındaki farktır.

Euler Yöntemi, basit ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için genellikle ilk adım olarak kullanılır ve çözümün doğruluğu adım büyüklüğü h 'nin küçültülmesiyle arttırılabilir.

Euler's Method

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

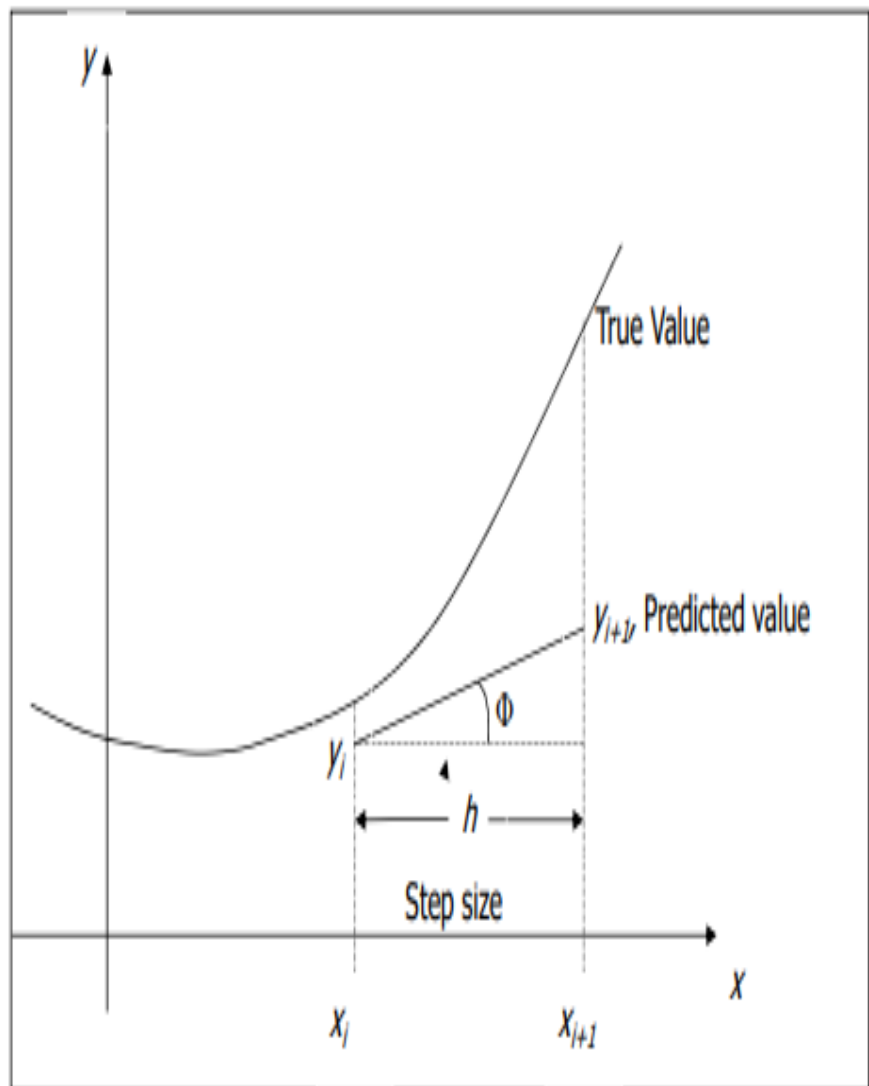


Figure 2 General graphical interpretation of Euler's method



ChatGPT

Görselde Euler Yöntemi'nin genel bir grafiksel yorumu yer almaktadır. Euler Yöntemi, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan bir yöntemdir ve temelde bir noktada bilinen eğimi kullanarak bir sonraki noktanın değerini tahmin etmeye dayanır.

Formül şu şekildedir:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Burada h adım büyüklüğüdür ve $x_{i+1} - x_i$ farkı kadar alınır. Yani her adımda, x eksenı boyunca h kadar ilerlenir ve bu süreçte y değeri, mevcut eğim $f(x_i, y_i)$ ve adım büyüklüğü h ile güncellenir.

Grafikte, x_i noktasında bulunan y_i değerinden başlayarak, bu noktanın eğimi kullanılarak bir sonraki x_{i+1} noktasına ulaşılır. Bu ulaşılan noktadaki y_{i+1} değeri, Euler Yöntemi ile tahmin edilen değerdir. Gerçek değer (True Value) ile tahmin edilen değer (Predicted Value) arasındaki fark, Euler Yöntemi'nin doğruluğunu ve adım büyüklüğünün önemini gösterir. Daha küçük adım büyüklükleri, genellikle daha doğru sonuçlar üretir fakat hesaplama maliyeti daha yüksektir.

Genel olarak bu yöntem, diferansiyel denklemin çözüm eğrisinin yalnızca başlangıç noktasında bilinen eğimini kullanarak, adım adım ilerleyerek çözümü yaklaşık olarak inşa eder.

Euler's Method

Write the first order differential equation in the form of

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Example

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x}, y(0) = 5$$

is rewritten as

$$\frac{dy}{dx} = 1.3e^{-x} - 2y, y(0) = 5$$

In this case

$$f(x, y) = 1.3e^{-x} - 2y$$



ChatGPT

Görselde, birinci mertebe diferansiyel denklemin Euler Yöntemi ile nasıl ifade edileceği ve bu yöntemin bir örneği gösterilmektedir. Euler Yöntemi, bir diferansiyel denklemin sayısal çözümü için kullanılır ve genel formül şöyle ifade edilir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Bu formüllerde, $\frac{dy}{dx}$ diferansiyel denklemin türevini, $f(x, y)$ ise türev fonksiyonunu, y_{i+1} ve y_i ise sırasıyla bir sonraki ve mevcut y değerlerini, h ise adım büyüklüğünü temsil eder.

Verilen örnekte, bir diferansiyel denklem şu şekilde verilmiş:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1.3e^{-x}$$

Başlangıç koşulu olarak $y(0) = 5$ belirlenmiş.

Bu denklem, Euler Yöntemi'nin kullanılabilmesi için yeniden düzenlenmiş ve türev fonksiyonu $f(x, y)$ aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$f(x, y) = 1.3e^{-x} - 2y$$

Bu ifade, Euler Yöntemi'nin uygulanabilmesi için y' yani $\frac{dy}{dx}$ 'nin yalnız başına bir tarafta olması gerektiğini gösterir. Böylece, y değerinin nasıl değiştiğini belirleyen fonksiyon, x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı olarak ifade edilir. Bu fonksiyon, Euler Yöntemi'nde y değerinin bir sonraki adımdaki tahmini için kullanılır.

Example

A ball at 1200K is allowed to cool down in air at an ambient temperature of 300K. Assuming heat is lost only due to radiation, the differential equation for the temperature of the ball is given by

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12} (\theta^4 - 81 \times 10^8), \theta(0) = 1200 K$$

Find the temperature at $t = 480$ seconds using Euler's method. Assume a step size of $h = 240$ seconds.



ChatGPT

Görselde, bir topun havada serbestçe soğumasıyla ilgili bir fizik problemi ve bu problemin çözümü için kullanılacak olan Euler Yöntemi'ne ait bir diferansiyel denklem yer almaktadır. Topun başlangıç sıcaklığı 1200K olarak verilmiş ve çevre sıcaklığı 300K'dir. Isının yalnızca radyasyon yoluyla kaybedildiği varsayılarak, topun sıcaklığını belirleyen diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}(\Theta^4 - 81 \times 10^8)$$
$$\Theta(0) = 1200K$$

Burada $\Theta(t)$ topun sıcaklığını, t zamanı, ve $\frac{d\Theta}{dt}$ ise sıcaklığın zamanla değişim hızını temsil eder. İstenen, topun $t = 480$ saniyede sıcaklığını Euler Yöntemi kullanarak bulmaktır. Adım büyüklüğü olarak $h = 240$ saniye alınmıştır.

Euler Yöntemi ile bu sıcaklık değerini bulmak için, verilen adım büyüklüğü kullanılarak her adımda topun sıcaklığı güncellenir:

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i + (-2.2067 \times 10^{-12}(\Theta_i^4 - 81 \times 10^8)) h$$

Bu işlem, başlangıç sıcaklığından başlayarak, istenen zaman aralığına kadar belirli aralıklarla tekrarlanır. Her adımda, Θ_i mevcut sıcaklık değeri ve Θ_{i+1} bir sonraki adımda hesaplanacak olan sıcaklık değeridir. Bu yöntemle, topun sıcaklığının zamanla nasıl değiştiği yaklaşık olarak hesaplanabilir.



Solution

Step 1:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12} (\theta^4 - 81 \times 10^8)$$

$$f(t, \theta) = -2.2067 \times 10^{-12} (\theta^4 - 81 \times 10^8)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + f(t_i, \theta_i)h$$

$$\theta_1 = \theta_0 + f(t_0, \theta_0)h$$

$$= 1200 + f(0, 1200)240$$

$$= 1200 + (-2.2067 \times 10^{-12} (1200^4 - 81 \times 10^8))240$$

$$= 1200 + (-4.5579)240$$

$$= 106.09K$$

θ_1 is the approximate temperature at $t = t_1 = t_0 + h = 0 + 240 = 240$

$$\theta(240) \approx \theta_1 = 106.09K$$



ChatGPT

Görselde, bir topun sıcaklığının zamanla nasıl değiştiğini modelleyen bir diferansiyel denklemin Euler Yöntemi kullanılarak sayısal olarak nasıl çözüleceği anlatılmaktadır.

Adım adım yapılan çözüm aşağıdaki gibidir:

1. Adım:

- Diferansiyel denklemin türevi: $\frac{d\Theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}(\Theta^4 - 81 \times 10^8)$
- Türev fonksiyonu: $f(t, \Theta) = -2.2067 \times 10^{-12}(\Theta^4 - 81 \times 10^8)$
- Euler formülü ile bir sonraki adımdaki sıcaklık değeri: $\Theta_{i+1} = \Theta_i + f(t_i, \Theta_i)h$
- Başlangıç sıcaklığı Θ_0 ve adım büyüklüğü h ile başlangıç zamanı t_0 verilmiştir.
- İlk adım için Θ_1 değeri hesaplanmıştır: $\Theta_1 = 1200 + f(0, 1200)240$
- $f(0, 1200)$ fonksiyonunun değeri hesaplandıktan sonra Θ_1 için yaklaşık değer 106.09K bulunmuştur.

Bu, Euler Yöntemi kullanılarak elde edilen ilk adımdaki yaklaşık sıcaklık değeridir ve $t = 240$ saniyede topun sıcaklığının $\Theta(240) \approx \Theta_1 = 106.09K$ olduğunu gösterir.

Bu örnek, sayısal yöntemlerin basit bir adımla nasıl uygulanacağını göstermektedir.

Ancak, daha hassas bir sonuç için genellikle çok sayıda küçük adım kullanılması gerekir.



Solution Cont

Step 2: For $i=1$, $t_1=240$, $\theta_1=106.09$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_1 + f(t_1, \theta_1)h \\ &= 106.09 + f(240, 106.09)240 \\ &= 106.09 + (-2.2067 \times 10^{-12}(106.09^4 - 81 \times 10^8))240 \\ &= 106.09 + (0.017595)240 \\ &= 110.32K\end{aligned}$$

θ_2 is the approximate temperature at $t=t_2=t_1+h=240+240=480$

$$\theta(480) \approx \theta_2 = 110.32K$$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi ile diferansiyel denklem çözümünün devam eden ikinci adımı gösterilmektedir. İlk adımda 240 saniye sonunda sıcaklık 106.09K olarak bulunmuştu. İkinci adım, bu sıcaklık değerini kullanarak bir sonraki adımda sıcaklığı hesaplamaktadır.

1. Adım şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

- İndeks $i = 1$ için, zaman $t_1 = 240$ saniye ve sıcaklık $\Theta_1 = 106.09\text{K}$ 'dir.
- İkinci sıcaklık değeri Θ_2 , bir önceki sıcaklık değeri ve türev fonksiyonunun çarpımı olan $f(t_1, \Theta_1)h$ ile hesaplanır:
$$\Theta_2 = \Theta_1 + f(t_1, \Theta_1)h$$
$$\Theta_2 = 106.09 + f(240, 106.09)240$$
- Türev fonksiyonu $f(t, \Theta)$, verilen diferansiyel denkleme göre hesaplanır ve $f(240, 106.09)$ değeri bulunur:
$$f(240, 106.09) = -2.2067 \times 10^{-12}((106.09)^4 - 81 \times 10^8)$$
- Bu değer hesaplandıktan sonra Θ_2 için sonuç 110.32K olarak bulunur.

Bu, topun sıcaklığının yaklaşık olarak 480 saniye sonunda $\Theta(480) \approx \Theta_2 = 110.32\text{K}$ olacağını gösterir. Euler Yöntemi, her adımda sıcaklığın son değerini kullanarak bir sonraki zaman adımındaki sıcaklığı tahmin eder. Bu örnek, sayısal çözüm yöntemlerinin adım adım nasıl uygulandığını açıklamaktadır.

Solution Cont

The exact solution of the ordinary differential equation is given by the solution of a non-linear equation as

$$0.92593 \ln \frac{\theta - 300}{\theta + 300} - 1.8519 \tan^{-1}(0.00333\theta) = -0.22067 \times 10^{-3} t - 2.9282$$

The solution to this nonlinear equation at $t=480$ seconds is

$$\theta(480) = 647.57K$$



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin analitik (kesin) çözümü ifade edilmiştir. Bu analitik çözüm, verilen bir zaman t anındaki sıcaklığı Θ hesaplamak için kullanılır.

Analitik çözüm formülü şu şekildedir:

$$0.92593 \ln \left(\frac{\Theta - 300}{\Theta + 300} \right) - 1.8519 \tan^{-1}(0.003330\Theta) = -0.22067 \times 10^{-3}t^2 - 2.9282$$

Bu formül, verilen zaman $t = 480$ saniyede sıcaklığı Θ bulmak için kullanılmış ve $\Theta(480)$ yaklaşık olarak 647.57K olarak hesaplanmıştır.

Bu analitik çözüm, genellikle diferansiyel denklemin kesin bir sonucunu temsil eder ve sayısal yöntemlerle elde edilen sonuçlar bu kesin değerle karşılaştırılarak sayısal çözümün doğruluğu değerlendirilir. Euler Yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler, bu kesin değere ne kadar yakın olduğuna bağlı olarak daha az veya daha çok doğru olarak kabul edilir. Bu örnekte, Euler Yöntemi ile elde edilen sonuçlar, analitik çözümle karşılaştırıldığında oldukça farklı çıkabilir, çünkü Euler Yöntemi, özellikle büyük adım boyutlarıyla ve uzun zaman aralıklarında daha az doğru sonuçlar üretebilir.

Comparison of Exact and Numerical Solutions

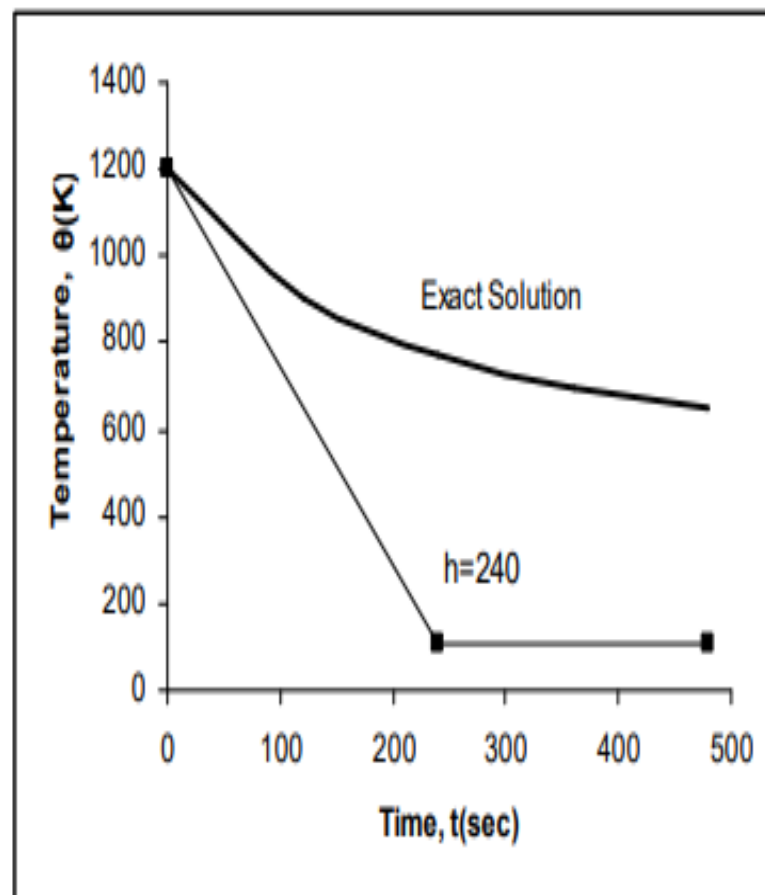


Figure 3. Comparing exact and Euler's method



ChatGPT

Görselde, bir diferansiyel denklemin analitik (kesin) çözümü ile Euler Yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal çözümün karşılaştırması yer almaktadır. Zamanın fonksiyonu olarak topun sıcaklığının nasıl değiştiğini gösteren bir grafik sunulmuş.

Grafikte "Exact Solution" eğrisi, diferansiyel denklemin analitik çözümünü temsil ederken, "h=240" ile gösterilen kare işaretleri Euler Yöntemi ile 240 saniyelik adım büyüklükleri kullanılarak elde edilen sayısal çözüm değerlerini göstermektedir. Analitik çözüm, sürekli ve pürüzsüz bir eğri olarak görülürken, Euler Yöntemi ile elde edilen değerler adımlı ve merdiven şeklinde bir eğri oluşturur.

Grafikten görülebileceği üzere, sayısal çözümün adımları, analitik çözüm eğrisinin altında kalmaktadır. Bu, kullanılan adım büyüklüğü ile Euler Yöntemi'nin belirli zaman aralıklarında analitik çözümden daha düşük sıcaklık değerleri verdiğini gösterir. Genel olarak, sayısal çözümün analitik çözümden sapması, sayısal yöntemin hata payını ve belirli bir problem için sayısal yöntemin uygunluğunu değerlendirmek adına önemlidir. Euler Yöntemi genellikle daha küçük adım büyüklükleri ile daha doğru sonuçlar üretir, ancak bu örnekte, 240 saniyelik büyük bir adım büyüklüğü kullanıldığı için, sayısal çözümün kesin çözümden önemli ölçüde sapması beklenir.

Effect of step size

Table 1. Temperature at 480 seconds as a function of step size, h

Step, h	$\theta(480)$	E_t	$ \epsilon_t \%$
480	-987.81	1635.4	252.54
240	110.32	537.26	82.964
120	546.77	100.80	15.566
60	614.97	32.607	5.0352
30	632.77	14.806	2.2864

$$\theta(480) = 647.57K \quad (\text{exact})$$



ChatGPT

Görselde, adım büyüklüğünün (h), Euler Yöntemi ile hesaplanan sıcaklık üzerindeki etkisini gösteren bir tablo yer almaktadır. Tabloda 480 saniyede farklı adım büyüklüklerine karşılık gelen sıcaklık değerleri ($\Theta(480)$), gerçek sıcaklık değeri ile karşılaştırılarak hesaplanan mutlak hata (E_t) ve yüzdesel hata ($|e_t|\%$) verilmiştir. Gerçek sıcaklık ($\Theta(480)$) 647.57K olarak belirtilmiştir (kesin değer).

Tablodaki sütunlar şu bilgileri içermektedir:

- "Step, h": Adım büyüklüğünü (saniye cinsinden) gösterir.
- " $\Theta(480)$ ": Euler Yöntemi ile hesaplanan 480 saniyedeki sıcaklık değeridir.
- " E_t ": Gerçek değer ile hesaplanan değer arasındaki mutlak hatayı gösterir.
- " $|e_t|\%$ ": Hesaplanan değer gerçek değere göre yüzdesel hatasını gösterir.

Tablo, adım büyüklüğü azaldıkça (h azaldıkça), Euler Yöntemi ile hesaplanan sıcaklık değerlerinin gerçek değere daha yakın olduğunu ve hata yüzdelerinin düştüğünü göstermektedir. Örneğin, adım büyüklüğü $h=480$ saniye olduğunda yüzdesel hata %252.54 iken, $h=30$ saniye olduğunda yüzdesel hata %2.2864'e düşmektedir. Bu, küçük adım büyüklüklerinin kullanılmasının, hesaplanan değerlerin doğruluğunu önemli ölçüde artırabileceğini gösterir. Ancak, küçük adım büyüklüklerinin kullanımı hesaplama yükünü artırabilir.



Comparison with exact results

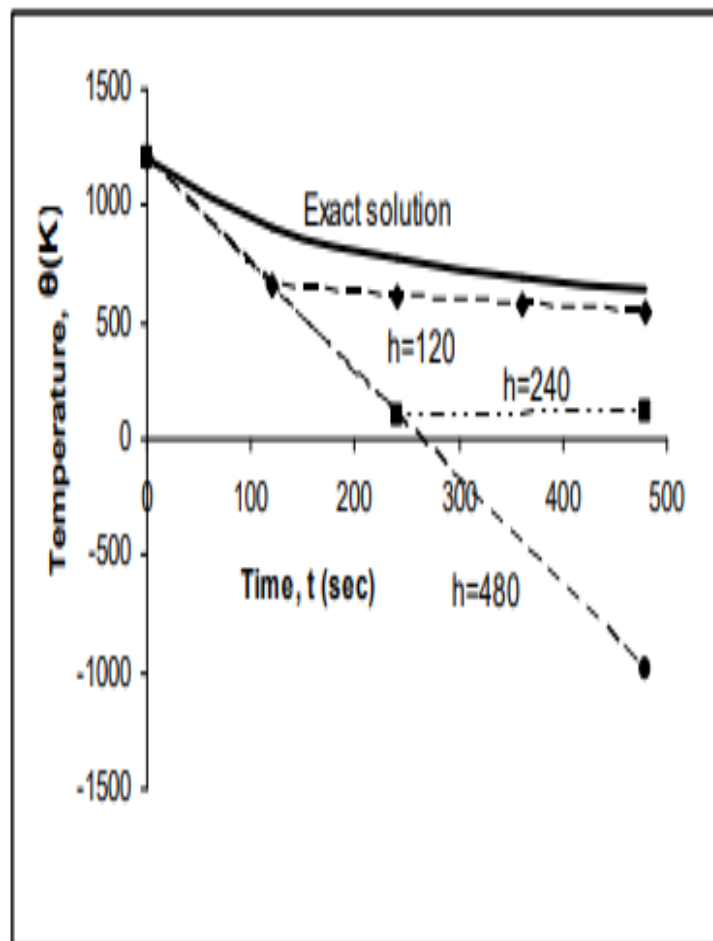


Figure 4. Comparison of Euler's method with exact solution for different step sizes



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal çözüm değerlerinin, farklı adım büyüklükleri için analitik (kesin) çözümle karşılaştırılması yer almaktadır. Grafikte zamanın fonksiyonu olarak sıcaklık değişimi gösterilmektedir.

- "Exact solution" (Kesin çözüm): Analitik çözümü temsil eden sürekli çizgi.
- "h=120", "h=240", "h=480": Euler Yöntemi ile belirtilen adım büyüklüklerine göre hesaplanan sıcaklık değerlerini temsil eden kesikli çizgiler.

Grafikten görüldüğü üzere, adım büyüklüğü ne kadar küçük olursa (örneğin $h=120$), sayısal çözümün kesin çözüme o kadar yaklaştığı görülüyor. $h=480$ olan adım büyüklüğüyle hesaplanan değerler, gerçek çözümünden daha uzakta ve bu durumda sayısal çözüm oldukça yüksek hatalar içeriyor. Adım büyüklüğü azaldıkça (örneğin $h=120$ ve $h=240$), sayısal çözümün analitik çözüme yakınsadığı ve hatanın azaldığı görülmekte. Bu da Euler Yöntemi'nin adım büyüklüğüne duyarlılığını ve daha küçük adım büyüklüklerinin kullanılması gerektiğini gösteriyor. Ancak grafikte, $h=480$ saniye için sayısal çözümün fiziksel olarak mümkün olmayan negatif sıcaklık değerlerine ulaştığını da gözlemliyoruz ki bu, Euler Yöntemi'nin büyük adım büyüklükleri için ne kadar hatalı olabileceğini gösteren bir işarettir.



Effects of step size on Euler's Method

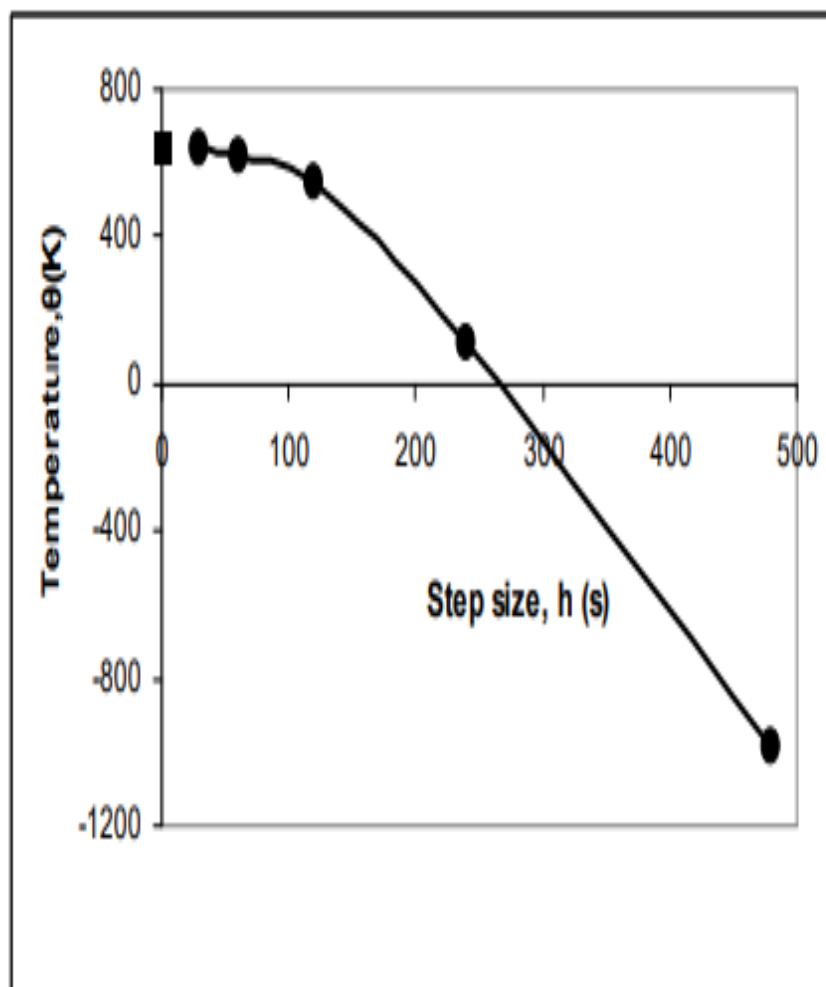


Figure 5. Effect of step size in Euler's method.



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi kullanılarak hesaplanan sıcaklık değerlerinin adım büyüklüğüne (h) göre nasıl değiştiğini gösteren bir grafik bulunmaktadır. Grafikte, adım büyüklüğünün artmasıyla hesaplanan sıcaklık değerlerinin nasıl düştüğü gösterilmektedir.

- Yatay eksen (Step size, h (s)): Adım büyüklüğünü saniye cinsinden gösterir.
- Dikey eksen (Temperature (K)): Hesaplanan sıcaklık değerlerini Kelvin cinsinden gösterir.

Grafikteki noktalar, farklı adım büyüklüklerinde Euler Yöntemi ile hesaplanan sıcaklık değerlerini temsil etmektedir. Noktalar, adım büyüklüğünün arttıkça (sağa doğru ilerledikçe) hesaplanan sıcaklık değerlerinin düştüğünü ve hatta negatif değerlere ulaştığını göstermektedir. Bu, büyük adım büyüklüklerinin kullanımının hesaplamalarda büyük hatalara yol açabileceğini ve fiziksel olarak mantıklı olmayan sonuçlar üretebileceğini gösterir. Adım büyüklüğünün küçültülmesi (örneğin 100 saniyeye düşürülmesi), hesaplanan değerlerin gerçek değere daha yakın olmasını sağlayacak ve daha güvenilir sonuçlar elde edilmesine yardımcı olacaktır.

Errors in Euler's Method

It can be seen that Euler's method has large errors. This can be illustrated using Taylor series.

$$y_{i+1} = y_i + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x_i, y_i} (x_{i+1} - x_i)^3 + \dots$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f''(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots$$

As you can see the first two terms of the Taylor series

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad \text{are the Euler's method.}$$

The true error in the approximation is given by

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \dots$$

ChatGPT

Bu görsel, Euler Yöntemi'ndeki hataları ve bu hataların Taylor serisi yardımıyla nasıl açıklanabileceğini gösteren bir açıklama içermektedir.

Euler Yöntemi, bir fonksiyonun Taylor serisinin sadece ilk terimini (yani fonksiyonun kendisi ve birinci türevini) kullanarak bir sonraki adımdaki değeri tahmin etmek için kullanılır. Görselde, bir diferansiyel denklemin çözümü için bir sonraki adımda (y_{i+1}) tahmin edilen değerin, mevcut adımdaki değer (y_i) ve mevcut adımda fonksiyonun türevi ($f(x_i, y_i)$) ile adım büyüklüğü (h) çarpımının toplanmasıyla elde edildiği açıklanmaktadır.

Gerçek hata, Taylor serisinin yüksek mertebeden türevlerinin ($\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$) ihmal edilmesinden kaynaklanır ve Euler Yöntemi'nin yalnızca ilk iki terimi ($y + f(x, y)h$) kullandığı için bu terimlerin hatalarını içerir. Görseldeki formülde bu hataların nasıl hesaplanacağı verilmiştir:

$$E_t = \frac{f''(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \dots$$

Burada E_t , yaklaşık değer ile gerçek değer arasındaki toplam hatadır ve bu hata, adım büyüklüğünün karesi, küpü vb. ile orantılı olarak artar. Bu nedenle, adım büyüklüğü küçüldükçe, hata da azalır. Ancak adım büyüklüğü çok büyük olduğunda, ihmal edilen yüksek dereceden terimler önemli hatalara yol açabilir. Bu görseldeki açıklama, Euler Yöntemi'nin neden büyük adım büyüklüklerinde hatalı sonuçlar verebileceğini matematiksel olarak göstermektedir.

Euler Method

Problem

$$\dot{y}(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Euler Method

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

for $i = 1, 2, \dots$

Local Truncation Error $O(h^2)$

Global Truncation Error $O(h)$



ChatGPT

Görselde, Euler Yöntemi ve bu yöntemdeki hata türleri anlatılmaktadır.

Euler Yöntemi, birinci mertebe diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Yöntem, başlangıç değeri $y(x_0) = y_0$ verilen bir diferansiyel denklemin $y' = f(x, y)$ çözümünü adım adım yaklaşık olarak bulmayı sağlar. Her adımda, mevcut y_i değerine, o noktadaki türev değeri olan $f(x_i, y_i)$ ile adım büyüklüğü h 'nın çarpımı eklenir ve bir sonraki y değeri elde edilir.

Yöntemin temel adımları şöyledir:

- $y_0 = y(x_0)$: Başlangıç koşulu, başlangıç y değeri.
- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$: İlerleme formülü, i 'nci adımdan $i + 1$ 'inci adıma geçişte kullanılır.

Yöntemdeki hatalar iki kategoriye ayrılır:

- Yerel Kesme Hatası (Local Truncation Error): Her adımda yapılan yaklaşım hatası, adım büyüklüğünün karesi ile orantılıdır ($O(h^2)$).
- Küresel Kesme Hatası (Global Truncation Error): Tüm adımlar boyunca biriken toplam hata, adım büyüklüğü ile orantılıdır ($O(h)$).

Euler Yöntemi basit ve hızlı olmasına rağmen, büyük adım büyüklüklerinde veya hassas çözümler gerektiren problemlerde yüksek hata paylarına sahip olabilir. Bu nedenle, daha küçük adım büyüklükleri tercih edilebilir, fakat bu durumda daha fazla hesaplama gerekecektir.

Other Methods

Problem to be solved is a first order ODE:

$$\dot{y}(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- The methods have the general form:

$$y_{i+1} = y_i + h \phi$$

- For the case of Euler: $\phi = f(x_i, y_i)$
- Different forms of ϕ will be used for the Midpoint and Heun's Methods.



ChatGPT

Görsel, Euler Yöntemi dışında kullanılabilecek diğer sayısal çözüm yöntemlerini ve bunların genel formüllerini açıklamaktadır.

Birinci mertebe bir ordinari diferansiyel denklem (ODE) çözülecektir: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, ve başlangıç koşulu $y(x_0) = y_0$ olarak verilmiştir.

Sunulan yöntemlerin genel formu şu şekildedir:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi$$

Burada:

- y_{i+1} : İleri adımda aranan y değeri.
- y_i : Mevcut adımdaki y değeri.
- h : Adım büyüklüğü.
- ϕ : İlgili yöntemle göre değişen fonksiyonun yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılan terimdir.

Euler Yöntemi için $\phi = f(x_i, y_i)$ şeklindedir, yani mevcut adımdaki türevin değeri kullanılır.

Ancak, Ortalama Nokta (Midpoint) ve Heun Yöntemleri gibi diğer yöntemlerde ϕ terimi farklı formüller kullanılarak hesaplanır. Bu yöntemler, farklı tahminler veya adım içi değerlendirmeler yoluyla y 'nin bir sonraki değerini hesaplamak için farklı yaklaşımlar sunarlar. Bu yöntemler genellikle Euler Yöntemi'nden daha doğru sonuçlar verirler, çünkü ϕ hesaplamasında daha fazla bilgiyi hesaba katarlar ve bu sayede yerel hata düşürülür.