Ek.3.Çözümlü Örnekler

Örnek:(2,11),(3,14),(5,21),(6,23),(7,27) ve (8,34) noktaları için f(x)=Ax+B en küçük kareler doğrusunu ve ortalama,etkin,maksimum hatayı bulun.

Çözüm:

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k.y_k$
1	2	11	4	22
2	3	14	9	42
3	5	21	25	105
4	6	23	36	138
5	7	27	49	189
6	8	34	64	272
+	31	130	187	768

6/ 187A + 31B = 768

-31/ 31A + 6B = 130 $\longrightarrow$ $B = \dfrac{130 - 31A}{6}$

1122A + 186B = 4608

-961A - 186B = -4030

161A = 578

A = 3,590 $\longrightarrow$ $B = \dfrac{130 - 31(3{,}59)}{6} = 3{,}118$

$f(x) = Ax_k + B \longrightarrow f(x) = 3{,}59x_k + 3{,}118$

$f(x_k)$	y_k	$\lvert e_k \rvert$	e_k^2
3,59.2 + 3,118 = 10,298	11	0,702	0,492
3,59.3 + 3,118 = 13,888	14	0,112	0,012
3,59.5 + 3,118 = 21,068	21	0,068	0,004
3,59.6 + 3,118 = 24,658	23	1,658	2,748
3,59.7 + 3,118 = 28,248	27	1,248	1,557
3,59.8 + 3,118 = 31,838	34	2,162	4,674
	+	5,95	9,487

$$E_\infty(f) = \max\lvert e_k \rvert = 2{,}162$$

$$E_1(f) = \frac{1}{6}.\sum \lvert e_k \rvert = \frac{5{,}95}{6} = 0{,}991$$

$$E_2(f) = \sqrt{\frac{1}{6}\sum e_k^2} = \sqrt{\frac{9{,}487}{6}} = 1{,}257$$

Örnek: $\int_2^8 Lnx.dx$ integralini h=1seçerek yamuk ve simpson yöntemiyle bulunuz..

Çözüm:

x	2	3	4	5	6	7	8
$y = \ln x$	0,693	1,098	1,386	1,609	1,791	1,945	2,079

$\Delta x = 1$

Yamuk Metodu:

$$A \cong \Delta x\left(\frac{y_1 + y_7}{2} + y_2 + y_3 + ... + y_6\right) \cong \Delta x\left(\frac{0{,}693 + 2{,}079}{2} + 1{,}098 + 1{,}386 + ... + 1{,}945\right) = 1{,}386 + 7{,}829 = 9{,}215br^2$$

Simpson Metodu:

$$A \cong \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + y_7) = \frac{1}{3}(0{,}693 + 2{,}079 + 4(1{,}098 + 1{,}609 + 1{,}945) + 2(1{,}386 + 1{,}791))$$

$$A \cong \frac{1}{3}(2{,}772 + 18{,}608 + 6{,}354) = \frac{27{,}734}{3} = 9{,}244br^2$$

Örnek: A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörleri nedir.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)] + 1[(0-0)] + 0 = 0 \\ &= (2-\lambda)[2-2\lambda-\lambda+\lambda^2] = 0 \\ &= 2\lambda^2 - 6\lambda + 4 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \end{aligned}$$

	1	-5	8	4
1		1	-4	4
	1	-4	4	0

$\lambda = 1$ için sağlanır (Çarpanlardan biri bu nedenle $(\lambda - 1)$'dir.)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2$$

$\lambda = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2$$
$$x_3 = 0$$
$$4x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{2,3} = 2$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$$
$$4x_1 = x_3$$

$$x^{(2)} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Örnek:44,69,96,125,156,192,224,261,300,341,384 okunuşunda hatalı terimi bulup hatayı düzeltiniz.

Çözüm:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
44				
	25			
69		2		
	27		0	
96		2		0
	29		0	
125		2		3
	31		3	
156		5		-12
	36		-9	
192		-4		18
	32		9	
224		5		-12
	37		-3	
261		2		3
	39		0	
300		2		0
	41		0	
341		2		
	43			
384				

$\alpha = 3$

Doğru Terim = 192 - 3 = 189

Özdeğer ve Özvektörler

(A)$_{nxn}$ 'lik bir kare matris ve **X** , n-boyutlu bir vektör olsun. **Y=AX** , n- boyutlu uzaydan kendi içine bir lineer dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Biz; **AX=λIX** şartını sağlayan X vektörleri kompleks sayılardan ibarettir.

Tanım.3.11: A bir kare matris olmak üzere;

AX=λIX özelliğindeki sıfır olmayan **X** vektörüne **özvektör** (A'nın), **λ** değerine de A'nın **özdeğeri** denir.**(A-λI)X=0** denkleminin aşikar çözümden başka çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart **det (A-λI)=0** olmasıdır.Özdeğer problemlerini çözmek için bir metot yukarıdaki determinanttan λ özdeğerinin bulunarak her bir özdeğere karşı gelen özvektörleri belirlemektir.Bu nedenle yukarıdaki determinant açıldığında n. dereceden bir polinom elde edilir ki bu polinoma **karakteristik polinom** denir. Bundan dolayı A matrisinin en çok n tane özdeğeri olur.

Örnek.8: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz?

Çözüm: det(A- λI)=0

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0$$

denkleminden λ=1 , λ=3 , λ=4 olur.

⇒ λ=1 için; $2x_1 - x_2 = 0$

$-x_1+x_2-x_3=0$

$-x_2 + 2x_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 &= x_2 \\ 2x_3 &= x_2 \end{aligned}\right\} \quad x_2=a \qquad x^{(1)}=(a,2a,a)=a(1,2,1)$$

⇒ λ=3 için; $x^{(2)}=(b,0,-b)=b(1,0,-1)$

⇒ λ=4 için; $x^{(3)}=c(1,-1,1)$

$$\det[V_1,V_2,V_3]=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 0 & -c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = -6abc$$

2.3.1. A matrisinin tanımlılığı: nxn'lik bir A matrisinin tanımlılığını belirlemek için aşağıdaki test uygulanır.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$ olsun. A'nın uzanan alt matrisleri ;

$A_1=[a_{11}]$; $A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, Aj=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jj} \end{bmatrix}, \ldots An\begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & a_{2n} \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır.

2x2 jxj nxn

Bu matrislerin determinantlarının hepsi pozitif ise A matrisi pozitif tanımlıdır .Yani;

i. $\forall i$ **için det $A_i>0$ ise A pozitif tanımlıdır.**

ii. $\forall i$ **için $(-1)^i$det $A_i>0$ ise A negatif tanımlıdır.**

iii. **Diğer durumlarda tanımsızdır .Nokta büküm noktasıdır.**

2.3.2. Konveks,Konkav Fonksiyonunun Hessian Matrisi ile Tayini (D'escartes kuralı)

det $(A-\lambda I)=0$ ifadesi $P(\lambda)=0$ şeklinde λ 'ya bağlı bir polinom olup;

p(λ)'daki işaret değişikliği sayısı δ (**pozitif kök sayısı**)

p(-λ)'daki işaret değişikliği sayısı δ ' (**negatif kök sayısı**)

ile tanımlanır ve sabit noktanın kimliği ilefonksiyonun konkav yada konveksliği kolayca belirlenir.

Örnek : $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ fonksiyonun ekstremumlarını ve konveks yada konkavlığını inceleyiniz

1)Gerek şart: $\nabla f(x)=0$ olmalıdır

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0$$

Buradan; $x_1=1/2$, $x_2=2/3$, $x_3=4/3$ olduğu görülür . $x_0=(1/2,2/3,4/3)$ sabit noktadır.

2)Yeter şart:Bu fonksiyona ait Hessian matrisini oluşturalım

$$Hf(x_0)=\begin{bmatrix} f_{x1fx1} & f_{x1x2} & f_{x1x3} \\ f_{x2x1} & f_{x2x2} & f_{x2x3} \\ f_{x3x1} & f_{x3x2} & f_{x3x3} \end{bmatrix} \text{ ise } Hf(x_0)=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$H_1=[-2]$ olduğundan det $H_1=-2$

$H_2=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ olduğundan det $H_2=4$

$H_3\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ olduğundan det $H_3=-6$

$H_f(x)$ negatif tanımlıdır $x_0=(1/2,2/3,4/3)$ maksimum noktadır

Not:yeter şart için II. Metot şu şekildedir.

$$\text{Det }(H-I\lambda)=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ve buradan;}$$

p(λ)=(-2-λ)[(-2-λ)^2-1]=0 ise p(λ) $= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6 = 0$ olur.

p(-λ) $= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ 'dır (3 tane negatif kök vardır , fonksiyon konkavdır yani x_0 noktası maksimum noktasıdır)

Örnek : f(x,y)=x^2-4xy+y^2 fonksiyonunun ekstremumlarını ve konveks yada konkavlığını inceleyin.

Çözüm:

1)Gerek şart: $\nabla f(x) = 0$ olmalıdır

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$=2x-4y=0 , $\dfrac{\partial f}{\partial y}$=-4x+2y=0

Buradan; x=0, y=0 olduğu görülür. x_0=(0,0) sabit noktadır.

2)Yeter şart: Hf(x_0)=$\begin{bmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

H_1=[2] ise det H_1=2>0

H_2=$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ise det H_2 = -12<0

H $_f$ tanımsız olduğundan f fonksiyonu ne konveks nede konkavdır, $x_0$büküm noktasıdır.

2. yol : det (H-λI) = 0

$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ - $\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

p(λ)=(2-λ)^2-16= $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$

p(-λ) $= \lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$ λ 'ların bir kısmı pozitif bir kısmı negatif olduğundan büküm noktasıdır.

Örnek: f(x,y,z)=4x^2-6y^2-2xy+3xz-2y-4yz+1 fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz

Çözüm:Gerek Şart: $\nabla f(x) = 0$ olmalıdır.Buna göre;

f_x=8x-2y+3z=0

f_y=-12y-2x-4z-2=0

f_z=3x-4y=0 olup buradan x_0(-6/7,-9/14,13/7) bulunur.

Yeter şart : f_{xx}=-2 ,f_{xy}=3 ,f_{yy}=-12 ,f_{yz}=-4 ,f_{zz}=0 olup Hessian matrisi;

$$H = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -2 & -12 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{elde edilir.}$$

1.test : det [8] = 8 >0 ve det $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -12 \end{bmatrix} = -100 < 0$ (H_f(x) tanımsız , x_0 büküm noktası , fonksiyon ne konveks ne de konkavdır)

2.test : det (A-λI) = 0

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -2 & -12 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 8-\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -12-\lambda & -4 \\ 3 & -4 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$ ise buradan şu bulunur;

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 67\lambda + 28 = 0 \Rightarrow p(-\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 67\lambda + 28 = 0$$

üç negatif kök varsa negatif tanımlı , 3 pozitif kök varsa pozitif tanımlı bunun dışında tanımsızdır.

Örnek:(-1,10) (0,9) (1,7) (2,5) (3,4) (5,0) (4,3) (6,-1) noktalarının en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k.y_k$
0	-1	10	1	-10
1	0	9	0	0
2	1	7	1	7
3	2	5	4	10
4	3	4	9	12
5	4	3	16	12
6	5	0	25	0
7	6	-1	36	-6
	20	37	92	25

$20A + 8B = 37$

92A+20B=25

20A+8B=37

y=-1,6x+8,6

y=Ax+B

$$\left(\sum_{k=1}^{8} x_k^{\,2}\right)A + \left(\sum_{k=1}^{8} x_k\right)B = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

$$92A + 20B = 25$$

$$\left(\sum_{k=1}^{8} x_k\right)A + NB = \sum_{k=1}^{N} y_k$$

Örnek.1:(-1,10)(0,9)(1,7)(2,5)(3,4)(4,3)(5,0) ve (6,-1) noktalarına karşılık gelen f(x)=8,6-1,6x lineer yaklaşımı için $E_1(f)$,$E_2(f)$, $E_\infty(f)$ hatalarını bulunuz.

Çözüm:

x_k	Y_k	$f(x_k)=8,6-1,6x_k$	$\lvert e_k\rvert$	$\lvert e^2_k\rvert$
-1	10	10,2	0,2	0,04
0	9	8,6	0,4	0,16
1	7	7	0	0,00
2	5	5,4	0,4	0,16
3	4	3,8	0,2	0,04
4	3	2,2	0,8	0,64
5	0	8,6	0,6	0,36
6	-1	-1	0	0
			2,6	1,4

$E_\infty(f)=\max|f(x_k)- y_k|$

$E_\infty(f)=\max|0,2;0,4;0,4;0,2;0,1;6|$

$E_\infty(f)=0,8$

$$E_1(f)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-y_k\right|=\frac{1}{8}\cdot 2,6=0,325$$

$$E_2(f)=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|f(x_k)-y_k\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}1,40\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1,4}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=0,41833$$

4.4.3.Lagrange İnterpolasyon Polinom Hatası

$f(x)-P_n(x)=R_n(x)$

$$|R_n(x)|\le M_{n+1}(\alpha;\beta)\,\frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1}(\alpha;\beta)=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

α ve β sırasıyla x_m ve x gibi (n+2) tane noktalanır büyüğü ve küçüğüdür.

Örnek.3:

x	2	3	4
y	0,6931	1,0986	1,3863

x düğüm noktasına karşılık f(x)=lnx fonksiyonunun değerleri bulunmuş bu fonksiyonun;

a) Lagrange interpolasyon hatasını bulunuz.

b) x=2,5 interpolasyon hatasını bulunuz.

Çözüm:

a) $a_0+a_1x+a_2x^2$

$$P_2(x)=0,6931.\frac{(x-3).(x-4)}{(2-3).(2-4)}+1,0986.\frac{(x-2).(x-4)}{(3-2).(3-4)}+1,3863.\frac{(x-2).(x-3)}{(4-2).(4-3)}$$

$P_2(x)= a_0+a_1x+a_2x^2$

b) $R_2(2,5)=?$

$$|R_2(2,5)|\le M_{2+1}(2;4)\,\frac{|A_3(2,5)|}{3!}$$

α β düğümler için en küçük ve en büyük değer.

$$|R_2(2,5)|\le M_3(2;4)\,\frac{|A_3(2,5)|}{3!}$$

x değeri 2,5 x_0,x_1,x_2 düğüm noktalar A_3 değeri (-) bulunmaz..

$$A_{n+1}x=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)........(x-x_3)$$
$$A_3(2,5)=|(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)|=0,375$$

$$|R_2(2,5)|\le\frac{1}{4}\cdot\frac{0,375}{3!}=0,0156$$

4.5.Newton İnterpolasyon Polinomlar

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi eşit aralıklı noktalarına karşın $y_0=f(x_0) \ldots y_n=f(x_n)$ değerlerinin bilindiğini varsayalım bu n+1 noktadan n. dereceden bir polinom;

$P_n(x)=a_0+a_1.(x-x_0)+\ldots+a_n.(x-x_0).(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ ifade etmeye çalışacağız.

Öyle ki bu polinomda

$P_n(x_0)=y_0$; $P_n(x_1)=y_1; \ldots; P_n(x_n)=y_n$ ‘dir.

Bu değerler * ifadesinde yerine yazılırsa bilinmeyen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ katsayıları hesaplanabilir.

$P_n(x_0)=a_0 \Rightarrow a_0=y_0$

$P_n(x_1)=a_0+a_1(x-x_0)$

Newton interpolasyon polinomu sadece eşit aralıklı olduğu zaman kullanılabilir.

$x_1-x_0=x_2-x_1=\ldots=x_n-x_{n-1}=h$

$$P_n(x_1)=a_0+a_1\underbrace{(x-x_0)}_{h}$$

$y_1=y_0+a_1.h$

$$\frac{y_r \cdot y_0}{h}=a_1$$

$$y_1-y_0=\Delta y_0$$

$$a_0=y_0$$

$$a_1=\frac{\Delta y_0}{h}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} \quad (h=0,1,2,\ldots)$$

Herhangi bir x değerine interpolasyon hatası

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!} \quad (\alpha \le x \le \beta)$$

$$M_{n+1}(\alpha;\beta)=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Hata=Gerçek Değer-Hesaplanan Değer

Örnek.4: X’in 2,3,4,5 değerlerine karşılık fonksiyonun f(x)=lnx değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

a) Newton interpolasyon polinomu bulunuz.

b) X=3,5 için interpolasyon polinom katsayısını bulunuz.

x	2	3	4	5
y	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094

Çözüm:

a)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	0,6931			
3	1,0986	0,4055		
4	1,3863	0,2867	-0,1178	
5	1,6094	0,2231	-0,0646	0,05321

Bu tabloda a_n değerlerini yazabilmek için;

$P_3(x)=a_0+a_1.(x-x_0) + a_2.(x-x_0).(x-x_1) + a_3.(x-x_0).(x-x_1)(x-x_2)$

$a_0=y_0=0,6931$ $h=1$

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0,4055}{1} = 0,4055$$

$$a_1 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} = \frac{-0,1178}{2!}$$

$$a_2 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} = \frac{-0,0932}{3!}$$

$$P_3(x) = 0,6931 + 0,4055(x-2) + \frac{0,1178}{2}(x-2)(x-3) + \frac{0,0532}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$

b)

$$|R_n(x)| \le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{|A_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

$$|R_3(3,5)| \le M_4(2;5)\frac{|A_4(3,5)|}{(4)!}$$

$$M_4(2;5) = \max|f'''(x)|$$

$$(\ln x)''' = \frac{3}{x^4} = \frac{3}{8}$$

$A_4(3,5)=((3,5-2).....(3,5-6))00,5625$

$$|R_3(3,5)| \le \frac{3}{8}\cdot\frac{0,5625}{(4)!} = 0,0088$$

Hata=Gerçek Değer-Hesaplanan Değer

=ln3,5-P_3(3,5)=-0,0024

Hata bulunan interpolasyon hatasından daha küçüktür.