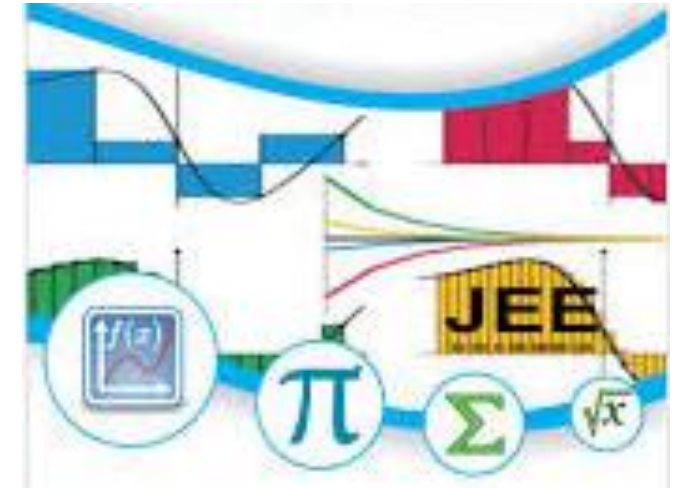




# SAYISAL ANALİZ



## KAYNAKLAR

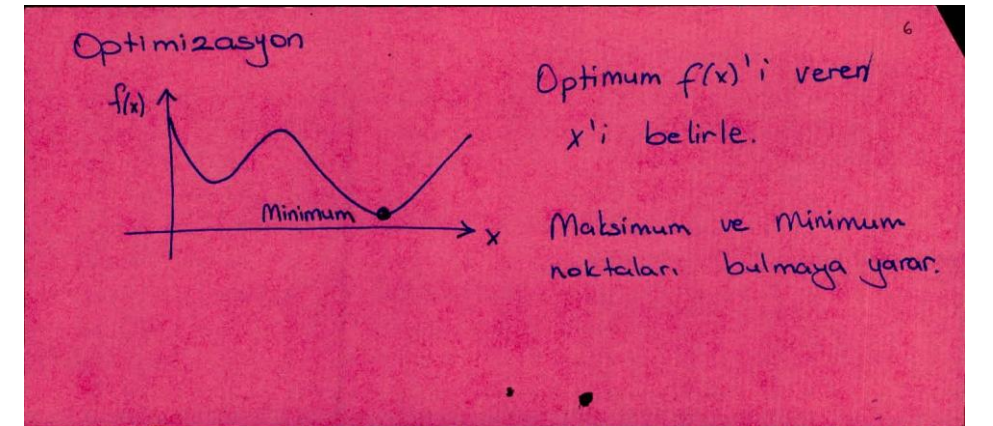
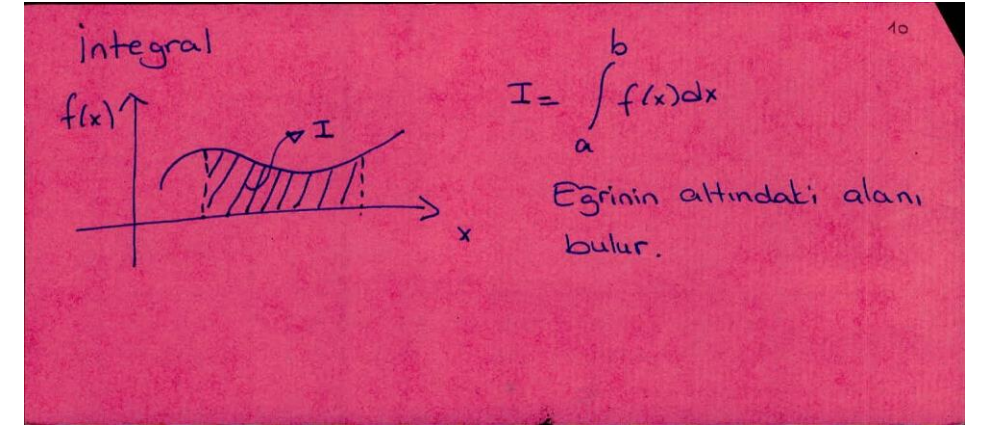
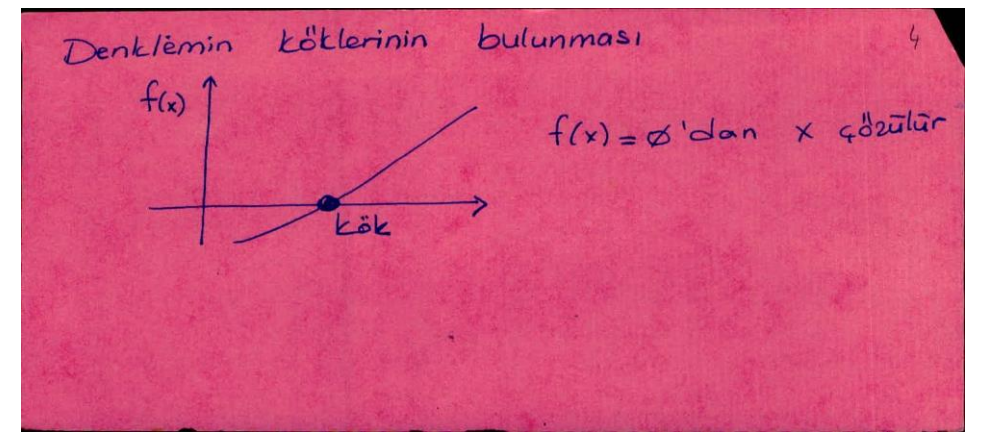
- Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering  
John H. Mathews, Prentice Hall
- Numerical Methods, Software and Analysis  
John R. Rice, Mc. Graw Hill

## Değerlendirme

- ✓ 2 adet Vize      %40
- ✓ Proje              %20 (sizden istenen yöntemler kodlanacak, son iki hafta projeler online olarak sunulacak)
- ✓ Final              %40

# KONULAR

- Sayısal Analiz Nedir?
- Nümerik Hesaplamalar ve Hatalar  
kesme, bağıl, mutlak, yuvarlama
- Doğrusal (Lineer) Olmayan Eşitliklerin Çözümü  
Kapalı Yöntemler
  - Grafik Yöntemi
  - Aralık Yarılama (Bisection)
  - Regula-Falsi (False Position / Yanlış Nokta)Açık Yöntemler
  - Newton-Raphson
  - Basit İterasyon
  - Sekant (Kiriş)
- Sayısal İntegral
  - Trapez (Yamuklar)
  - Simpson
  - Çift Katlı İntegraller
- Sayısal Türev



- Matrisler

Matris Tanımı, Alt / Üst Üçgen Matrisler / Birim / Köşegen / Bant Matris  
Matris Transpozesi, Determinant, Tersi (inverse) Alma

- Doğrusal Sistemlerin Çözümü

Dolaysız (Direct) Yöntemler

- Cramer
- Gauss Elimination Yöntemi
- Gauss Jordan Elimination Yöntemi
- Yoğunlaştırılmış Yok etme

(Compact Elimination): Cholesky yöntemi

Dolaylı (Indirect) Yöntemler

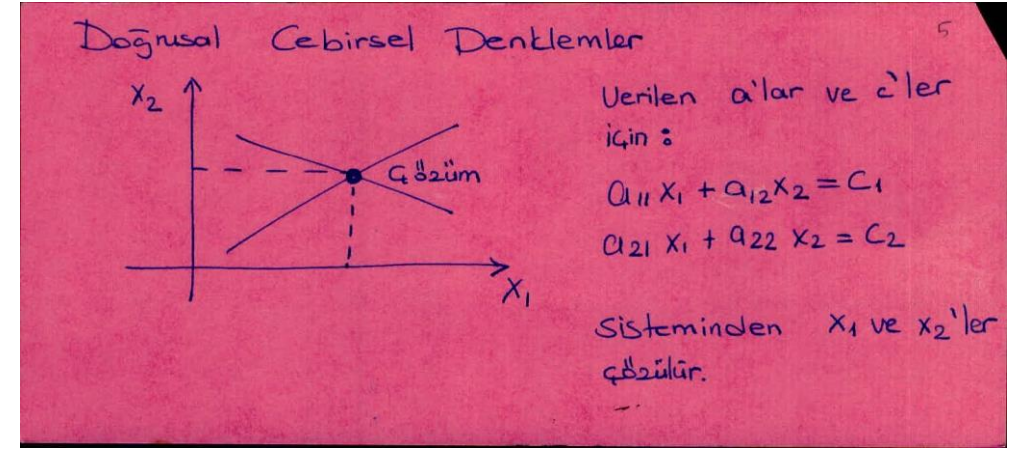
- Jacobi iterasyonu
- Gauss-Seidal

- Lineer Olmayan (2 ya da 3 değişkenli) Denklem Takımlarının Çözümü

- Taylor Serisi açılımı (kısmi türev) yaklaşımı

- Sonlu Farklar

- İleri / Geri / Merkezi Farklar,
- Birinci / İkinci / Üçüncü ... Dereceden İleri / Geri / Merkezi Farklar
- Sonlu Fark Tabloları (İleri / Geri / Merkezi Fark için)





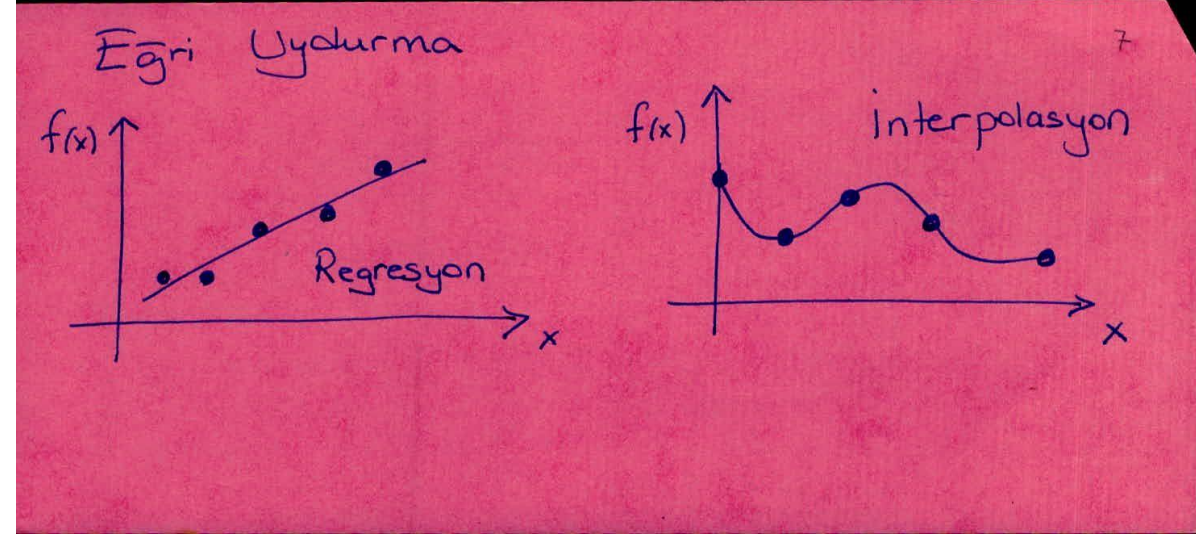
## • Eğri Uydurma

### Enterpolasyon

- Gregory-Newton Enterpolasyon Formülleri
- Lagrange Enterpolasyon Formülleri

### Regresyon: Sayısal Yaklaşım Yöntemleri

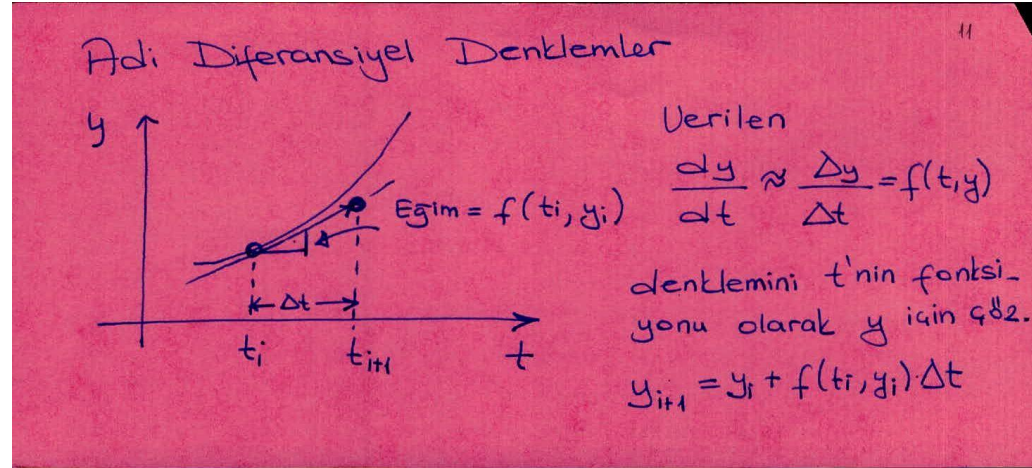
- En Küçük Kareler Yaklaşımı
- En Küçük Karelerde Polinom Yaklaşımı
- En Küçük Karelerde Lineer Olmayan Fonksiyonların Kullanımı (üstel modeller)
- En Küçük Karelerde Trigonometrik Fonksiyonların Kullanımı



**Enterpolasyon:** Hatasız veri noktalarının arasında kalan ara noktaları belirlemek için kullanılır. Tablo halinde verilen bilgiler için geçerlidir. Veri noktalarından doğrudan geçen bir eğri uydurmak ve bu eğriyi kullanarak ara değerleri tahmin etmektir.

**Regresyon :** Veriler ile ilgili belirgin bir hata söz konusu ise regresyon uygulanır. DeneySEL sonuçlar bu tipe girer. Veri noktalarının genel eğilimini gösteren ve herhangi bir noktadan özellikle geçmesi gerekmeyen tek bir eğri bulmaktır.

- Adi Diferansiyel



İki veya daha fazla farklı fonksiyonun türevini içeren iki veya daha fazla diferansiyel denklemin oluşturduğu sistemlerdir.

$$x' = 3x + y$$

$$y' = x - 3y$$

# Sayısal Analiz Nedir?

Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler ve bilgisayarın pratikte mühendisliğe uygunluğu birçok yönden mühendislik eğitimi etkilemiştir.

- ❖ Geniş çapta matematik problemlerinin ve mühendislik sistemlerinin çözümü için kullanılan metotlar topluluğudur.
- ❖ Fiziksel bir sistemin matematiksel gösterilimini sağlamaktır.
  - Güçlü problem çözme aracıdır.
  - Analitik yollardan çözülmesi imkansız olan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır.
  - Birçok probleme hazır programlarla yaklaşamaz, problemimizi çözecek programı kendimiz yazabiliriz.

Sayısal yöntemler, yüksek matematiği basit aritmetik işlemlere indirger.



Mühendislik problemlerinin çözümünde iki yol kullanılır.

Analitik (Teori) - Sonuçlar süreklidir  
Sayısal (DeneySEL) - Sonuçlar kesiklidir

Analitik	Sayısal
<ul style="list-style-type: none"><li>• Matematiksel fonksiyonlar olarak çözüm üretirler, daha sonra bu çözümler bazı veriler için sayısal değere dönüştürülür</li><li>• Karışık olmayan problemlerin çözümünde kullanılır</li><li>• Tek ve kesin bir sonuç elde edilir</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Analitik çözümü olmayan (karışık) problemlerin çözümünde kullanılır</li><li>• Sonuçlar daima sayısaldır</li><li>• Yaklaşık çözüme ulaşmak için iteratif bir çözüm kullanılır</li><li>• Yaklaşık bir çözüm üretirler, bu yaklaşık çözümlerin hassasiyeti adım sayısı artırılarak sağlanır</li><li>• Problemin çözümü yaklaşık olarak bulunduğunda hata analizi yapılır</li></ul>

Mühendislikte en fazla ihtiyaç duyulan bir fonksiyonun minimum veya maksimum noktasının bulunmasıdır. <sup>18</sup>

Analitik Yaklaşımda fonksiyonun türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y' = 2x - 3$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = 3/2 = 1.5$$

$$x = 1.5 \quad y = -0.25$$

Nümerik yaklaşımda ise  $x$ 'in belli aralık içinde olacağı tahmin edilir. <sup>19</sup>

$x$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$y$	0	-0.16	-0.24	-0.24	-0.16	0

$x = 1.5$

## Kısaca özetleyecek olursak

Analitik çözümü mümkün olmayan denklemlerin sayısal denemeler ile yaklaşık çözümlerinin bulunması işlemlerine **Sayısal Analiz** denir.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x=2 \quad x=1$$

Analitik çözümü mevcut

$$x^2 - 5x \cdot \cos x + e^x = 0$$

$$x=1 \text{ için } -1.23$$

$$x=0,5 \text{ için } -0,6$$

$$x=0 \text{ için } 1$$

$$\ln x + x^3 + \tan 2x = 0$$

?????

# Sayıların Gösterilimi

Base 10 (Decimal)

Base 2 (Binary)

Base 8 (Octal)

Base 16 (Hexadecimal)

## Anlamalı (Significant) Dijit

Örnek : 5S

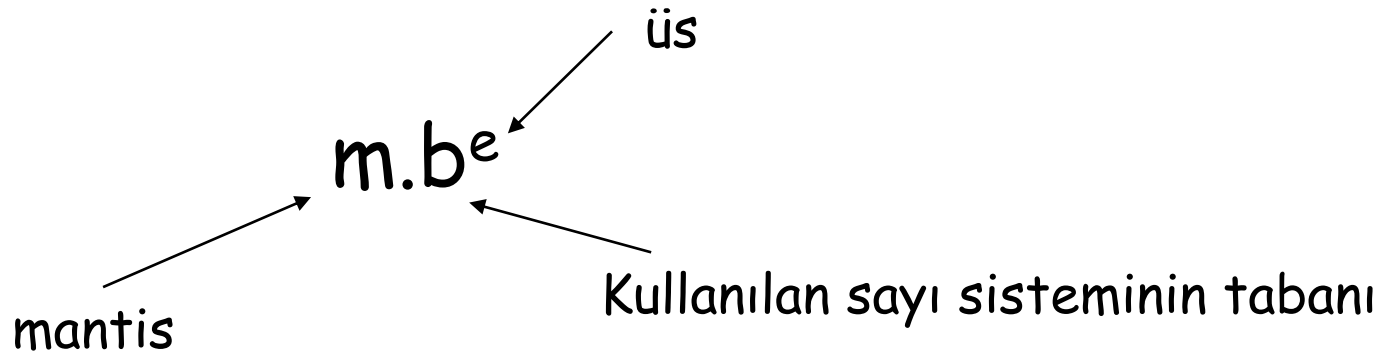
$$2/3 = 0,\overline{6} = 0,66667$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 = 1,4142$$

## Decimal Place (D)

Floating Point (significant = mantissa) (exponent)

işaret	İşaretli üs	mantis
--------	-------------	--------



$$156,78 \rightarrow 0,15678 * 10^3$$

$$67,42 \rightarrow 0,6742 * 10^2$$
$$6,742 * 10^1$$
$$0,06742 * 10^3$$

$$0,00125 \rightarrow 0,125 * 10^{-2}$$

$$-5,026 * 10^{-17}$$

$$-50,26 * 10^{-18}$$

$$-0,5026 * 10^{-16}$$



## Chopping (Round / Trunc)      Dijit Sayısını Azaltmak

$$\pi = 3,141592654$$

$$\begin{array}{l} \pi \text{ trunc to four decimal places (4D)} \rightarrow 3,1415 \\ \pi \text{ round to four decimal places (4D)} \rightarrow 3,1416 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \pi \text{ trunc to four decimal places (4D)} \rightarrow 3,1415 \\ \pi \text{ round to four decimal places (4D)} \rightarrow 3,1416 \end{array}} \right\} 5S$$

$$\text{Round\_off error} \quad 3,1415 - 3,1416 = -1 \cdot 10^{-4}$$

	trunc		round	
	3S	3D	3S	3D
34,78219				
3,478219				
0,3478219				
0,03478219				

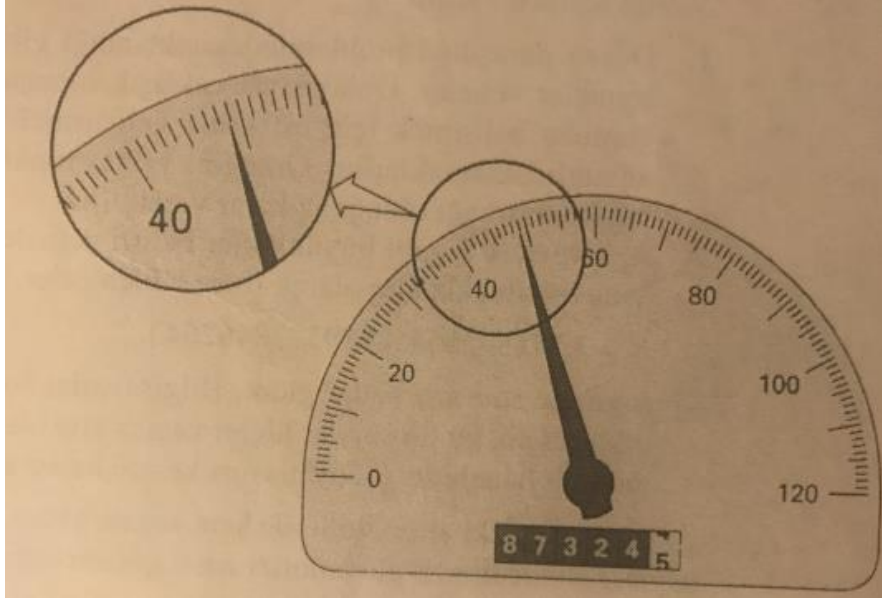
	trunc		round	
	3S	3D	3S	3D
34,78219	34,7	34,782	34,8	34,782
3,478219	3,47	3,478	3,48	3,478
0,3478219	0,347	0,347	0,348	0,348
0,03478219	0,034	0,034	0,035	0,035

**Örnek :** 12,35    0,080059    296,844    0,00519    sayılarının floating point olarak gösterilimi nedir ?

$12,35 \rightarrow 0,1235 * 10^2$    
  $0,080059 \rightarrow 0,080059 * 10^0$    
  $296,844 \rightarrow 0,296844 * 10^3$    
  $0,00519 \rightarrow 0,519 * 10^{-2}$

## Anlamalı Basamaklar

Bir hesapta sayı ile çalışıyorsak, bunun güvenle kullanılabileceğine dair garantimiz olmalıdır. Arabanın hız göstergesini örnek olarak verelim.



Cevap 49

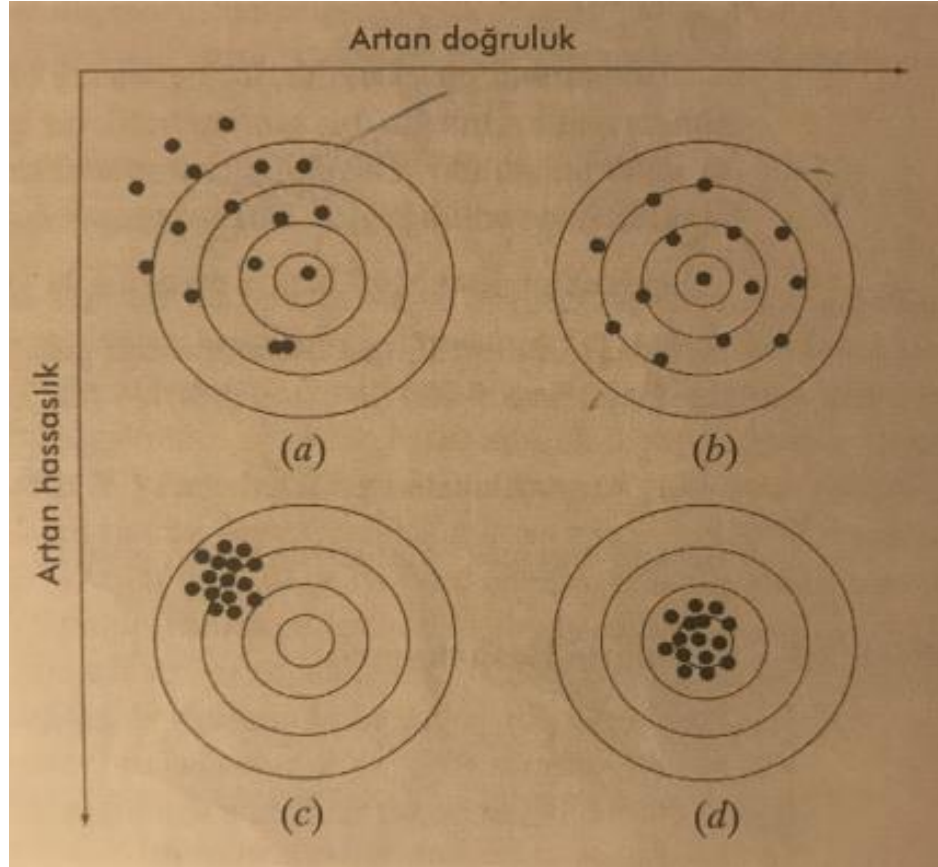
Noktadan sonrası ???

**Anlamalı Basamak** sayısal bir değerin güvenilirliğini resmen gösterebilmek için geliştirilmiştir. Bir sayının anlamlı basamakları güvenle kullanılacak olan basamaklardır.

# Doğruluk ve Hassaslık

**Doğruluk** : Hesaplanan veya ölçülen değerin gerçek değere ne kadar uyduğunu ifade eder.

**Hassaslık** : Hesaplanan veya ölçülen değerlerin kendi aralarında ne kadar uyumlu olduklarını ifade eder.



- (a) Yanlış ve Belirsiz
- (b) Doğru ve Belirsiz
- (c) Yanlış ve Hassas
- (d) Doğru ve Hassas

## Mistake (Yanlış) - Error (Hata) Fark Nedir ?

$$\text{Hata} \rightarrow X_g, X_h \rightarrow \text{error} = |X_g - X_h|$$

**Yanlış**  $\rightarrow$  62238, 62328      digitlerin yer değiştirmesi  
62238, 62338      tekrar eden digitlerin yanlış okunması  
tabloların satır ve sütunlarının yanlış okunması  
decimal point'in yanlış okunması



## Floating Point İşlemler

### Toplama ve Çıkarma

$$3,12 * 10^1 + 4,26 * 10^1 = 7,38 * 10^1 \rightarrow 0,738 * 10^2$$

### Çarpma

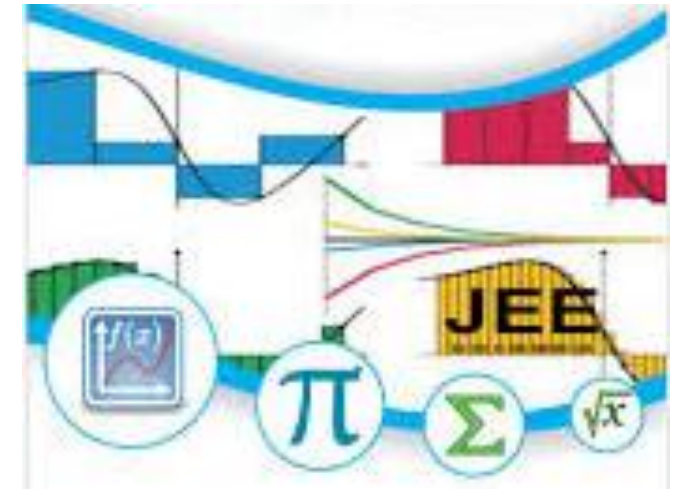
$$4,27 * 10^1 \times 3,68 * 10^2 = 15,7136 * 10^3 \rightarrow 0,157136 * 10^{-5}$$

### Bölme

$$4,27 * 10^1 / 3,68 * 10^2 = 1,1603 * 10^{-1} \rightarrow 0,11603$$



# HATA VE ÇEŞİTLERİ



## HATA KAVRAMI VE HATA GEŞİTLERİ (Error)

Hata = Gerçek değer - Hesaplanan değer

$$f(x) = x^2$$

$$x=5 \text{ için } f(5) = 5^2 = \boxed{25}$$

$$f(5) = 5^2 = \boxed{10}$$

$$\text{Hata} = 25 - 10 = 15$$

## Hata Çeşitleri



```
graph TD; A[Hata Çeşitleri] --> B[1. Hata çeşidi  
Kesme Hatası  
(Truncation Error)]; A --> C[2. Hata çeşidi  
Bağıl Hata  
(Relative Error)]; A --> D[3. Hata çeşidi  
Mutlak Hata  
(Absolute Error)]; A --> E[4. Hata çeşidi  
Yuvarlama Hatası  
(Rounding Error)];
```

1. Hata çeşidi  
Kesme Hatası  
(Truncation Error)

2. Hata çeşidi  
Bağıl Hata  
(Relative Error)

3. Hata çeşidi  
Mutlak Hata  
(Absolute Error)

4. Hata çeşidi  
Yuvarlama Hatası  
(Rounding Error)

## TAYLOR ve MACLAURIN SERİ AÇILIMLARI

$f(x) \rightarrow$  sonsuz  
defa  
türevlenebilir  
ise  $\rightarrow$  SERİ haline  
getiririz.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

$\rightarrow$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

$$f(x) = e^{2x}$$

$\rightarrow$

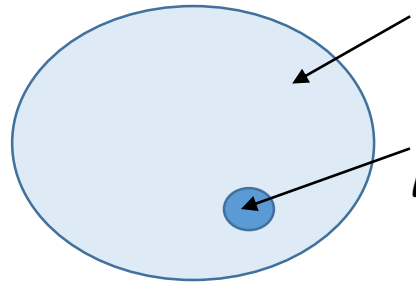
$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

Seri haline  
getirilebilir.

Bir fonksiyon, sonsuz defa türevlenebiliyorsa seri olarak açılabilir.  
Taylor ve Maclaurin seri açılımları elde edilebilir.





Taylor açılımı  $f(x)$  fonksiyonunun  $x=x_0$  noktasındaki seri açılımına Taylor

Maclaurin açılımı  $f(x)$  fonksiyonunun  $x=0$  noktasındaki seri açılımına Maclaurin

Taylor Açılımı :  $x=x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot (x-x_0)^3}{3!} + \dots$$

Maclaurin açılımı  $x=0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \dots$$

Soru:  $f(x) = e^x$  in  $x=1$  noktasında taylor açılımının ilk dört terimini yazınız.

1.terim :  $f(1) = e$

$$f'(x) = e^x$$

2.terim :  $f'(1) \cdot (x-1) = e(x-1)$

$$f''(x) = e^x$$

$$f'''(x) = e^x$$

3.terim :  $\frac{f''(1) \cdot (x-1)^2}{2!} = \frac{e(x-1)^2}{2}$

4.terim :  $\frac{f'''(1) \cdot (x-1)^3}{3!} = \frac{e \cdot (x-1)^3}{6}$

$$f(x) \approx e + e(x-1) + \frac{e \cdot (x-1)^2}{2} + \frac{e \cdot (x-1)^3}{6}$$

**Soru :**  $f(x) = \cos x$  fonksiyonunun Maclaurin açılımının sıfırdan farklı ilk 3 terimini bulunuz.

Maclaurin açılımı için  $x=0$  yapılmalıdır.

1.terim :  $f(0) = 1 //$

2.terim :  $f'(0) \cdot (x-0) = 0, x=0$

3.terim :  $\frac{f''(0) \cdot (x-0)^2}{2!} = \frac{-1 \cdot x^2}{2} = -\frac{x^2}{2} //$

4.terim :  $\frac{f'''(0) \cdot (x-0)^3}{3!} = \frac{0 \cdot x^3}{6} = 0$

5.terim :  $\frac{f^{(4)}(0) \cdot (x-0)^4}{4!} = \frac{1 \cdot x^4}{24} = \frac{x^4}{24}$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = +\sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

3.derece Taylor polinomu  $\longrightarrow x^3$ 'lye kadar açılım  
yapılca.

4.derece " "  $\longrightarrow x^4$  " " "

## Taylor ve Maclaurin Serilerini Bulma

### Taylor Seri Formülü

$f(x)$  = sonsuz defa  
türevlenebilen

$x = x_0$  noktasında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots$$



Maclaurin Seri formülü

$x=0$  da Taylor seri formülü

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

SORU:  $f(x) = e^x$  fonksiyonunun  $x=4$  noktasında taylor serisini bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(4)}{n!} \cdot (x-4)^n$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^4 \cdot (x-4)^n}{n!}$$

$$\longrightarrow f^n(4) = e^4$$

b) 2. dereceden Taylor polinomunu yazınız.  $n=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^2 \frac{e^4 (x-4)^n}{n!}$

$$e^x = P_2(x) = e^4 + e^4 \cdot (x-4) + \frac{e^4 \cdot (x-4)^2}{2}$$

Soru:  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $x=2$  noktasındaki Taylor serisini bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2) \cdot (x-2)^n}{n!}$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^{-n-1} \cdot (x-2)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (n=0) \quad (x^{-1}) = -x^{-2}$$

$$f'(x) = -x^{-2} \quad (n=1)$$

$$f''(x) = 2x^{-3} \quad (n=2)$$

$$f'''(x) = -6x^{-4} \quad (n=3) \quad (-1)^n$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot x^{-n-1} \cdot n! \quad (n=n)$$

Soru:  $f(x) = e^{2x}$  in maclurin serisi ~~aslı~~ nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\boxed{e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n!}} \quad \star$$

$$f(x) = e^{2x} \quad (n=0)$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad (n=1)$$

$$f''(x) = 4e^{2x} \quad (n=2)$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} \quad (n=n)$$

$$f^{(n)}(0) = 2^n$$

## Kesme Hatası

Bir değerin hesaplanabilmesi için sonsuz sayıda terim alınması gerekirken sonlu sayıda terim alınıyorsa oluşan hataya kesme hatası denir. Eklenen her yeni terim sonucu değiştirir ama bu değişim çok az olduğu için göz ardı edilir.

Taylor serisi, bir fonksiyonun herhangi bir  $x$  noktasındaki değerini, fonksiyonun ve türevlerinin o  $x$  noktasındaki değerleri cinsinden tahmin edilmesine olanak sağlar.

( $x=0$  daki)  
Taylor'dur.)

Soru:  $f(x) = \underline{e^x}$  in Maclaurin serisi açılımını yapınız.

1. terim:  $f(0) = 1$       2. terim:  $f'(0) \cdot x = x$       3. terim:  $\frac{1 \cdot x^2}{2!} = \frac{x^2}{2}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$



Ör:  $e^{1,5}$  değerini 3. dereceden maclurin seri açılımını yaparak hesaplayınız.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

Kesme Hatası

$$e^{1,5} \approx 1 + 1,5 + \frac{(1,5)^2}{2} + \frac{(1,5)^3}{6} = 2,5 + 1,125 + 0,5625 = \underline{4,1875}$$

$$\text{Kesme hatası} = \left( e^{1,5} \text{ un gercek değeri} \right) - \left( 3. \text{ dereceden maclurin açılımı ile hesaplanan değer} \right)$$

$$= 4,48168907 - 4,1875 = \boxed{0,29418907}$$

**Soru :** Verilen  $f(x)$  fonksiyonu  $x=0$  dan başlayarak ve  $h=1$  ( $x_{i+1}=x_i+h$ ) alarak  $f(1)$  değerini dördüncü dereceye kadar Taylor seri açılımını kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$f(x) = -0,1 x^4 - 0,15 x^3 - 0,5 x^2 - 0,25 x + 1,2$$

$$f(0) = 1,2 \quad f(1) = 0,2$$

$$f(1) \approx f(0) = 1,2$$

0.dereceden

$$f(1) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = 1,2 - 0,25 x$$

1.dereceden

$$f'(0) = -0,4x^3 - 0,45x^2 - x - 0,25 = -0,25$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = 1,2 - 0,25 x = 0,95$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + (f''(0) \cdot x^2)/2! = 1,2 - 0,25 x + \dots$$

2.dereceden

$$f''(0) = -1,2x^2 - 0,90x - 1 = -1$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0) \cdot x + (f''(0) \cdot x^2)/2! = 1,2 - 0,25 x - 0,5 x^2 = 0,45$$



$$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! = 1,2 - 0,25x - 0,5x^2 + \dots$$

3.dereceden

$$f'''(0) = -2,4x - 0,90 = -0,9$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! = 1,2 - 0,25x - 0,5x^2 - 0,15x^3 = 0,3$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! + (f^{(4)}(0)*x^4)/4! = 1,2 - 0,25x - 0,5x^2 - 0,15x^3 + \dots$$

4.dereceden

$$f^{(4)}(0) = -2,4 = -2,4$$

$$f(1) \approx f(0) + f'(0)*x + (f''(0)*x^2)/2! + (f'''(0)*x^3)/3! + (f^{(4)}(0)*x^4)/4! = 1,2 - 0,25x - 0,5x^2 - 0,15x^3 - 0,1x^4 = 0,2$$

Gerçek  $f(1) = 0,2$

Kesme hatalı  $f(1) = 0,2$

$$\text{Kesme Hatası} = 0,2 - 0,2 = 0$$

**Soru :**  $\cos(\pi/5)$  in değerini dördüncü dereceden Maclaurin seri açılımı ile hesaplayınız ve kesme hatasını bulunuz.

$$f(x) = \cos x \quad \text{ve } x=0 \text{ da}$$

$$\text{1. terim : } f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$\text{2. terim : } f'(0) \cdot (x-0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\text{Kesme hatası} = \text{gerçek değer} - \text{Seriden kesilerek elde edilen değer.}$$

$$= 0,809016994 - 0,809288 = -0,000271$$

$$\text{5. terim} \quad \frac{f^{(4)}(0) \cdot (x-0)^4}{4!} = \frac{x^4}{24}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &\approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24} = 1 - 0,197192 + 0,00648 \\ &= 0,809288 \end{aligned}$$

## BAGIL HATA (Relative Error)

Gerçek değer ve hesaplanan değer biliniyorsa:

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{\text{Gerçek değer} - \text{Hesaplanan değer}}{\text{Gerçek değer}}$$

Bağıl hatanın küçük olması hedeflenir

Ör:  $f(x) = x^3$  ,  $f(2) = 2^3 = 8$  gerçek değer. verilmiş olsun.  
 $f(2) = 2^3 = 6$  hesaplanan değer

$$\text{Bağıl hata} = \frac{8-6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow \%25 \text{ hata var.}$$

Soru:  $e$  sayısının yaklaşık değeri 2,718 olarak kullanılmaktadır.  
Bu yaklaşık değer hesabındaki bağıl hata nedir?

$$\text{Bağıl hata} = (e-2,718)/e = 1,036 \cdot 10^{-4}$$

Bağıl hatada hesaplanan değerin mertebesi önemlidir.  
1 cm lik bir hata, 100 m için önemsiz iken 10 cm için önemlidir.

**Soru :** Bir köprü ve perçinin uzunluklarını ölçmek ile görevlendirildiğinizi ve bunları sırası ile 9.999 cm ve 9 cm olarak ölçtüğünüzü kabul edin. Gerçek değerler de sırası ile 10.000 cm ve 10 cm ise, her iki durum için a) gecek hatayı ve b) bağıl hatayı yüzdesel olarak hesaplayınız.

a) Köprü için  $e_g = 10.000 - 9.999 = 1 \text{ cm}$   
Perçin için  $e_g = 10 - 9 = 1 \text{ cm}$

b) Köprü için  $e_b = (1 / 10.000) * 100 = \% 0,01$   
Perçin için  $e_b = (1 - 9) * 100 = \% 10$

## MUTLAK HATA (Absolute Error)

$$\text{Mutlak hata} = |\text{Bağıl Hata}|$$

\* Gerçek değer ile hesaplanan değer biliniyorsa;

$$\text{Mutlak hata} = \left| \frac{\text{Gerçek değer} - \text{Hesaplanan değer}}{\text{Gerçek değer}} \right|$$

Hatanın negatif olarak anılması bazıları tarafından hoş karşılanmaz. Bu sebeple mutlak değeri alınarak kullanılır.



Ör:  $f(x) = x^2 - 3x$  denklemini veriliyor.  $x=2$  değerini  
bu fonksiyona koyup hesaplayan biri sonucu  
10 buluyor. Bu işlemdeki mutlak hata nedir?

$$\text{gerçek değer} \Rightarrow f(2) = 4 - 6 = -2$$

$$\text{hesaplanandır} \Rightarrow f(2) = 10$$

$$\text{Mutlak hata} = \left| \frac{-2 - 10}{-2} \right| = \underline{\underline{6}}$$



## YUVARLAMA HATASI

(Rounding Error)

↓  
27, 35~~2~~54316  $\approx$  27,35

virgülden sonra 2 basamak istiyoruz.

27,35.

↑  
bu basamakdan  
önceki sayı  
5'ten küçükse  
5 değişmez aynı  
kalır.

27,36

↑  
bu basamakdan önceki  
sayı 5'e eşit ve büyükse  
yuvarlanmak istenen basamak  
1 artar.

**Yuvarlatma hatası = gerçek değer -  
yuvarlama sonucu değer =  
 $27,35254316 - 27,35 = 0,00254316$**

**Soru :** Verilen sayılar için virgülden sonra 3 basamak olarak yuvarlatma hatasını hesaplayınız.

$$1,352471 \cong$$

$$1,352$$

$$\text{Yuvarlama hatası} = 0,000471$$

$$2,0235846 \cong$$

$$2,024$$

$$\text{Yuvarlama hatası} = -0,0004154$$

$$35,1761203 \cong$$

$$35,176$$

$$\text{Yuvarlama hatası} = 0,0001203$$

Kaynaklar

([www.buders.com](http://www.buders.com))

Ders kitapları