

**SAYISAL TÜREV**

# TÜREV NEDİR ?

- Mühendislikte bir çok yasa ve genelleştirme, fiziksel dünyada karşılıkları olan değişimlerin tahmin edilmesi esasına dayanmaktadır.
- Newton'un ikinci yasası temel bir örnek olup, bir cismin hızı, konumunun zamana göre değişimiyle ilgilenmektedir

$$V = \frac{dX}{dt}$$

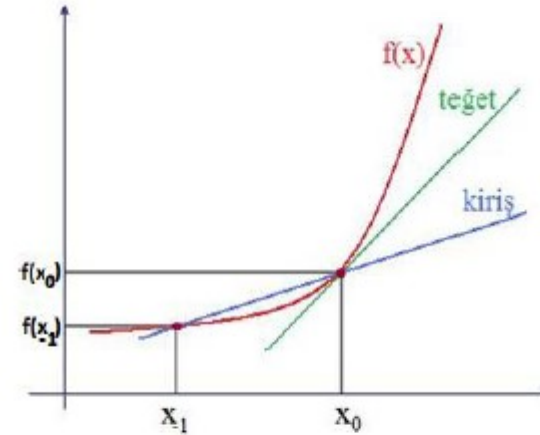
- Isı geçişleri, sıcaklık farkındaki değişime bağlı olarak ifade edilir.
- Bir bobinin uçlarındaki gerilim farkı, üzerinden geçen akımın değişimine göre bir kondansatörün üzerinden geçen akım ise uçları arasındaki gerilim değişimi göre ifade edilir.

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

- ❑ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ❑ Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
- ❑ Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir **x** noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle **x** noktasındaki teğetin eğimi olarak görülebilir.

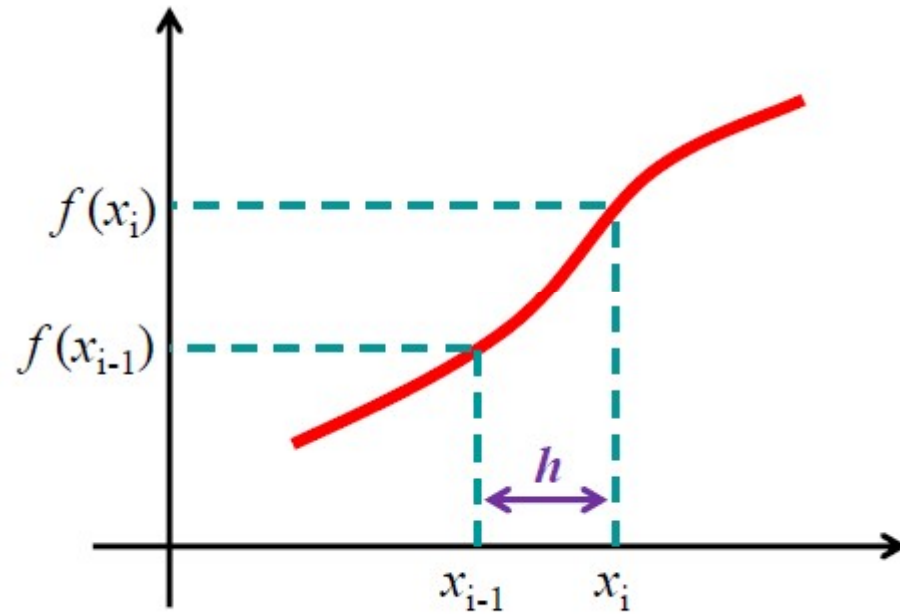
$$f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- ❑ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

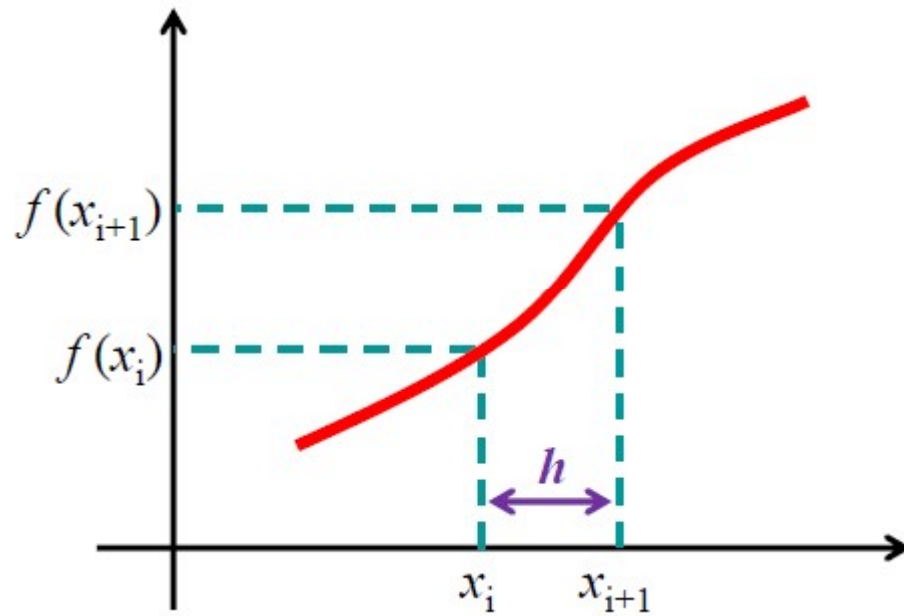
# Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

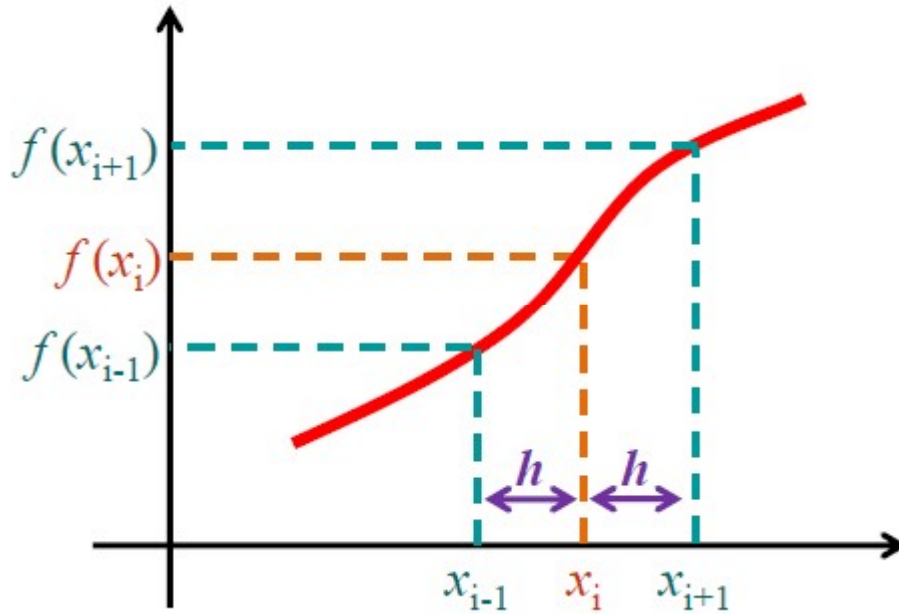
# İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

# Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



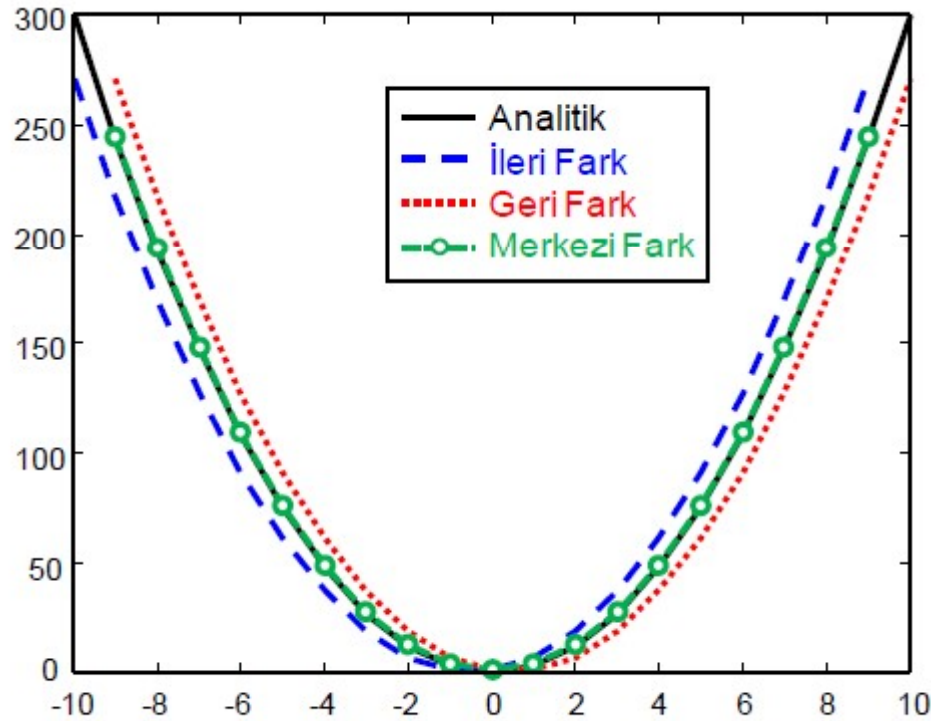
$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

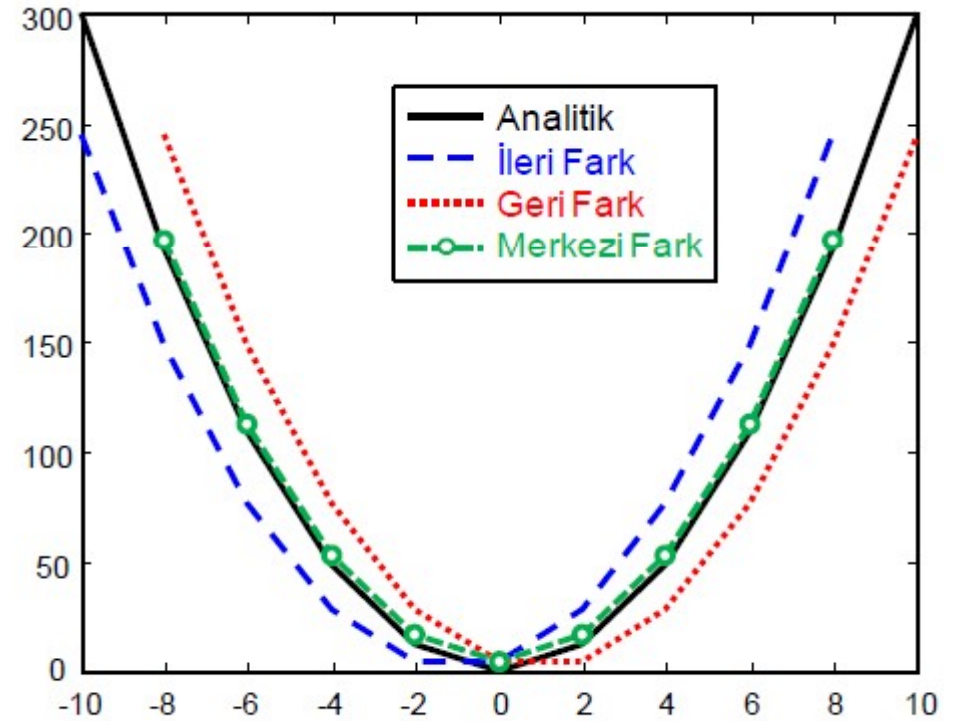
# Sayısal Türev Çeşitlerinde Adım Aralığı

$$f(x) = x^3$$

$h = 0.1$



$h = 2$







❑  $f(x) = e^x$  fonksiyonunun  $x = 1$  noktasındaki türevini  $h = 0.2$  kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

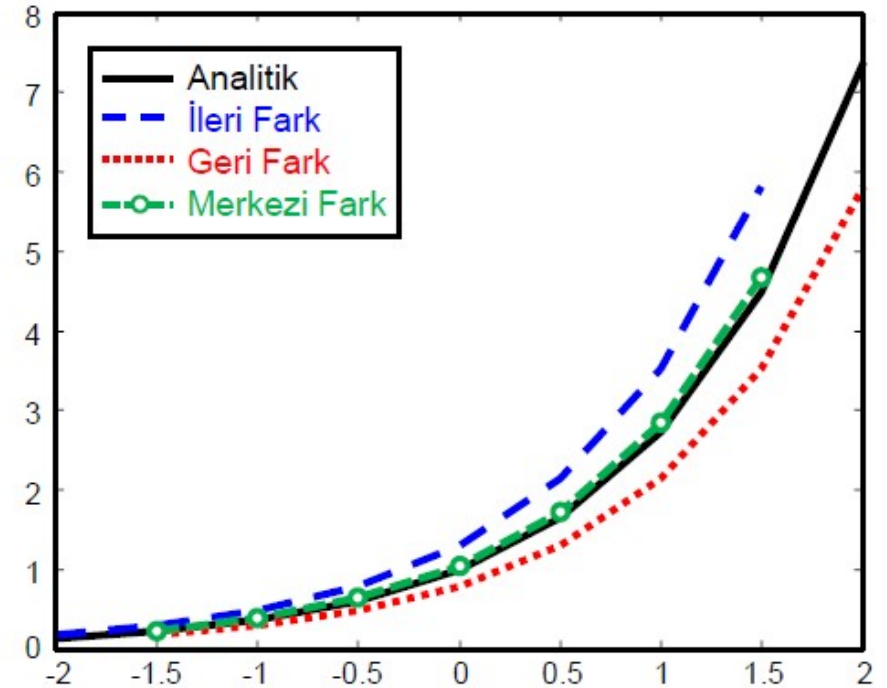
❑ **Çözüm:**

❑ Geri farklar

❑ İleri farklar

❑ Merkezi farklar

❑ Analitik Çözüm



$$f(x) = e^x$$

2.7183



İleri Fark ile  $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{e^{1.1} - e^1}{0.1} = \underline{\underline{2.86}}$$

Geri Fark ile  $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{\Delta x}$

$$y'(x_0) = \frac{f(1) - f(1-0.1)}{0.1} = \frac{e^1 - e^{0.9}}{0.1} = \underline{\underline{2.59}}$$



Merkezi Fark ile  $y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x} = \frac{e^{1.1} - e^{0.9}}{0.2} = \underline{\underline{2.72}}$

Analitik:  $y = e^x$   $y' = e^x$   $y' = e^1 = 2.72$  (merkezi farka yakın)



- ☐  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun  $x = 1$  noktasındaki türevini  $h = 0.1$  kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?
- ☐ **Çözüm:**
  - ☐ Geri farklar
  - ☐ İleri farklar
  - ☐ Merkezi farklar
  - ☐ Analitik Çözüm



# Taylor Serisi İle Sayısal Türev

- ❑ Bir  $f(x)$  fonksiyonun  $x_i$  noktasındaki türevi  $f'(x_i)$  Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- ❑ Bir fonksiyonun  $x_i + \Delta x$  civarındaki değeri  $x_i$  civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- ❑ Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki  $\Delta x$ ' in mertebesine eşit olur.
- ❑ Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

## Taylor Serisi Kullanarak Birinci Türev Tespiti

- $f(x)$  fonksiyonun  $x_i+h$  civarındaki ve  $x_i+2h$  civarındaki değerlerini  $f(x_i)$  nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp,  $f'(x_i)$  yi çekelim.

$$-4 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

---

$$-4 f(x_i + h) = -4 f(x_i) - 4h.f'(x_i) - 2h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

---

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} [-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile

$$\Rightarrow f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$



## Taylor Serisi Kullanarak İkinci Türev Tespiti

- $f(x)$  fonksiyonun  $x_i+h$  civarındaki ve  $x_i+2h$  civarındaki değerlerini  $f(x_i)$  nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp,  $f''(x_i)$  yi çekelim.

$$-2 \quad f(x_i + h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

---

$$-2f(x_i + h) = -2f(x_i) - 2h.f'(x_i) - h^2 f''(x_i)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2h.f'(x_i) + 2h^2 f''(x_i)$$

+

---

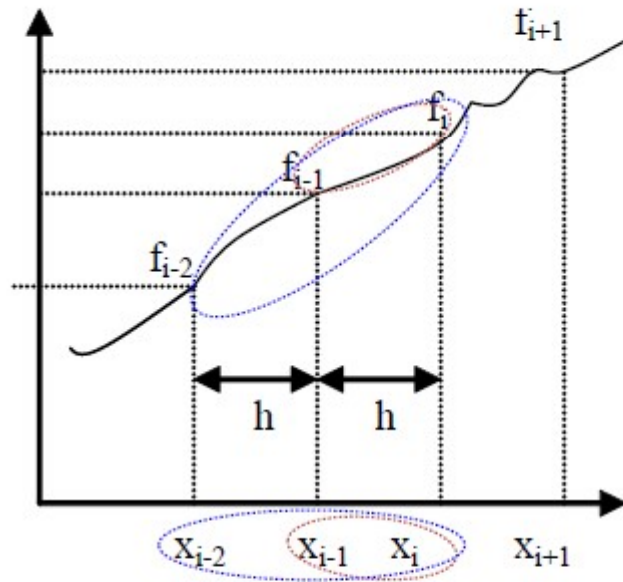
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)]$$

Taylor serisi; ileri fark formülü ile  $\Rightarrow$

$$f_i'' = \frac{1}{h^2} [f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}]$$

## Taylor Serisi İle Geri Fark Yöntemi

- ❑ İleri fark yöntemindeki işlemler  $f(x)$  fonksiyonun  $x_i-h$  civarındaki ve  $x_i-2h$  civarındaki değerlerini  $f(x_i)$  nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp,  $f'(x_i)$  yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi; geri fark formülü ile ➡

$$f'_i = \frac{1}{2h} [3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}]$$



# Homework

## 1

- Taylor serisinin 3. dereceden kuvvetlerine göre açılarak ileri fark yönteminin 3 noktalı türev yaklaşımlarının aşağıdaki gibi olduğunu ispatlayınız.

$$f'_i = \frac{1}{6h} [-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}]$$

$$f''_i = \frac{1}{h^2} [2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}]$$

$$f'''_i = \frac{1}{h^3} [-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}]$$

# Homework

## 2

❑ **Örnek:**  $f(x)=2x^2+1$  fonksiyonunun  $x=2$  yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız.  $h=0.1$  ve analitik çözüm  $f'(2)=8$

❑ **Çözüm:**

❑ Basit ileri farkla çözüm

❑ Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm

$$f'_i = \frac{1}{2h} [-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}]$$

## KAYNAKLAR

- Cüneyt BAYILMIŞ, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Mehmet YILDIRIM, Sayısal Analiz Ders Notları, Kocaeli Üniversitesi
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, “*MATLAB ile Meslek Matematiği*”, Seçkin Yayıncılık
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi