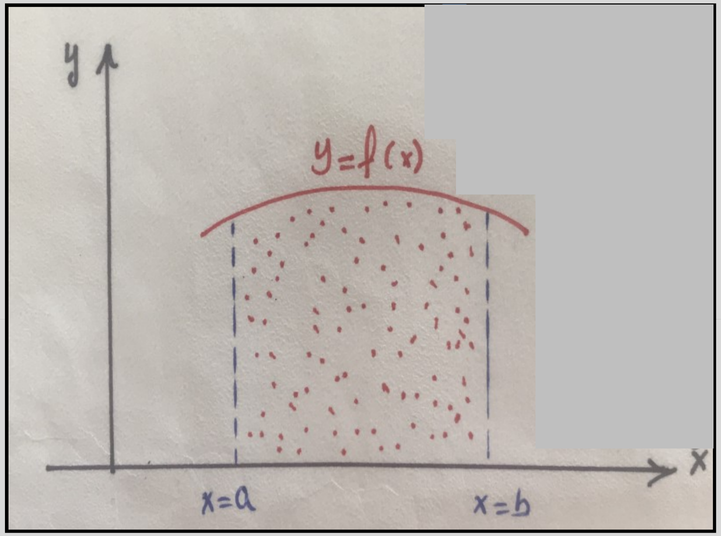
SAYISAL İNTEGRAL



Nümerik İntegral $$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

integralinin değerini yaklaşık olarak bulma işlemidir.

İntegralin sınırları olan a ve b sayıları sabit ve fonksiyon bu aralıkta sürekli ise integralin sonucu da sabit olup,

değeri y=f(x) eğrisinin altında ve x=a ile x=b doğruları arasında kalan alana eşittir.

TRAPEZ (YAMUKLAR) YÖNTEMİ

Bu yöntemde integral n sayıda dikdörtgen kullanılarak

$I = \sum hi * fi$ olarak hesaplanır.

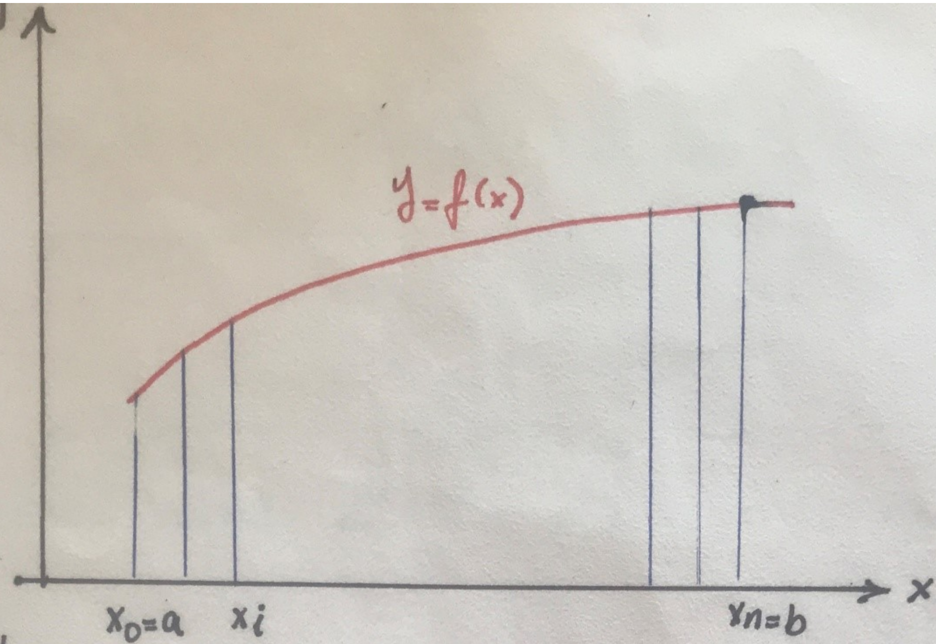
$fi \rightarrow f(xi)$

$hi \rightarrow$ i. dikdörtgenin genişliği

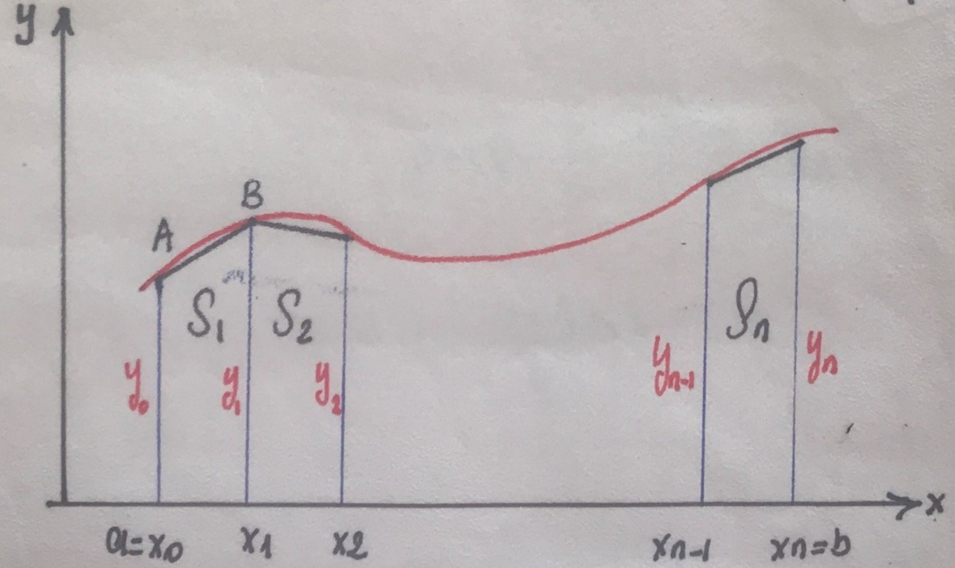
$hi = X_{i+1} - X_i$ olarak tanımlanır.

Eğer dikdörtgenlerin genişliği sabit ise;

$h = \frac{b-a}{n}$ olarak yazılabilir.



$I=\int_a^b f(x).dx$ integralinin değerini hesaplamak üzere $[a,b]$ kapalı aralığını n eşit parçaya ayıralım.



Her bölme noktasından (x_i) dik doğrular çıkarak diklerin $F(x)$ eğrisini kestiği noktaları birer doğru ile birleştirerek n tane yamuk elde edebiliriz. $x_0 \overset{\frown}{AB} x_1$ dik yamuğunun alanı

$S_1 = \frac{1}{2} h (y_0 + y_1)$ 'dir. Benzer şekilde ...

$S_2 = \frac{1}{2} h (y_1 + y_2)$

... .

$S_n = \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$ bulunur.

Toplam alan $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ olacağından;

$$S = \frac{1}{2} h (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h (y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h (y_2 + y_3) + \ldots + \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$

$$S = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$S = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

$$\boxed{S = h.\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]}$$

$a \to x_0$ $\quad$ $b \to x_n$ $\quad$ $h = \Delta x = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ kabul edersek.

$$S = \Delta x\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k.\Delta x)\right]$$ olur.

ÖRNEK .1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx. \qquad n=4$$

ÖRNEK .1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx. \qquad n=4$$

$$x_0 = 0 \qquad x_n = 1 \qquad h = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

ÖRNEK .1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx. \qquad n=4$$

$x_0=0 \quad x_n=1 \qquad h=\frac{1-0}{4}=0.25$

	x		$f(x)$
x_0	0	+0.25	1
x_1	0.25	+h	0.94118
x_2	0.5	+h	0.8
x_3	0.75	+h	0.64
x_4	1		0.5

$$S = 0.25 * \left[\frac{1+0.5}{2} + 0.9412 + 0.8 + 0.64 \right]$$

$$S = 0.78279$$

Bu fonksiyon için gerçek integral;

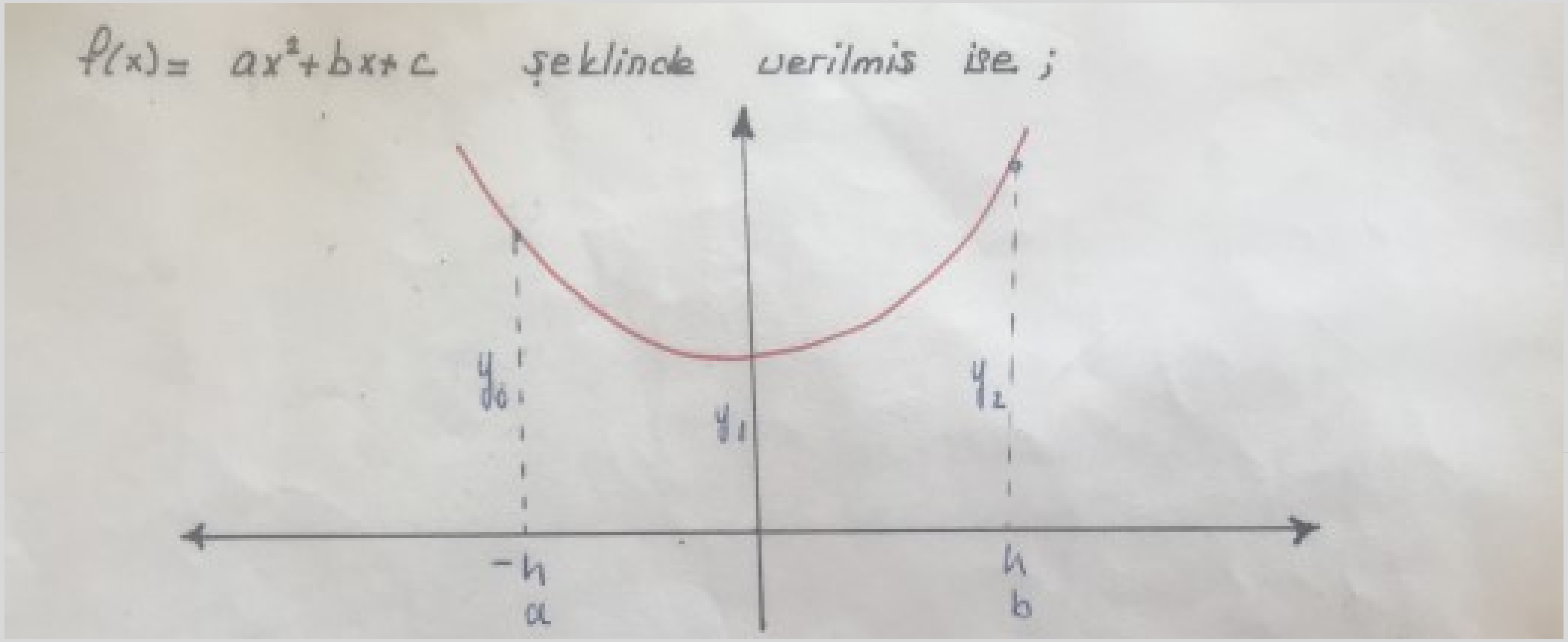
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = 45^\circ$$

$$I = \frac{\pi}{4} = 0.78539$$

Hata $= |0.78539 - 0.78279| = 0.0026$

$n=9$ alınsaydı. $I = 0.78488$ olurdu. $\rightarrow \underbrace{|0.78539 - 0.78488|}_{0.00051}$

SIMPSON YÖNTEMİ



$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c)dx$$

$$S = \int_a^b f(ax^2 + bx + c)dx$$

Analatik olarak incelersek;

$$S = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-h}^{h} = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left[-\frac{a}{3}h^3 + \frac{b}{2}h^2 - ch\right]$$

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Analatik olarak incelersek;

$$S = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-h}^{h} = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left[-\frac{a}{3}h^3 + \frac{b}{2}h^2 - ch\right]$$

$$S = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Denklemin katsayıları bilinmediğinden S eşitliğini y_0, y_1, y_2 cinsinden bulalım.

$$\left.\begin{array}{lll} x = -h & \text{için} & f(x) = y_0 = ah^2 - bh + c \\ x = 0 & \text{için} & f(x) = y_1 = c \\ x = h & \text{için} & f(x) = y_2 = ah^2 + bh + c \end{array}\right\} \text{buradan}$$

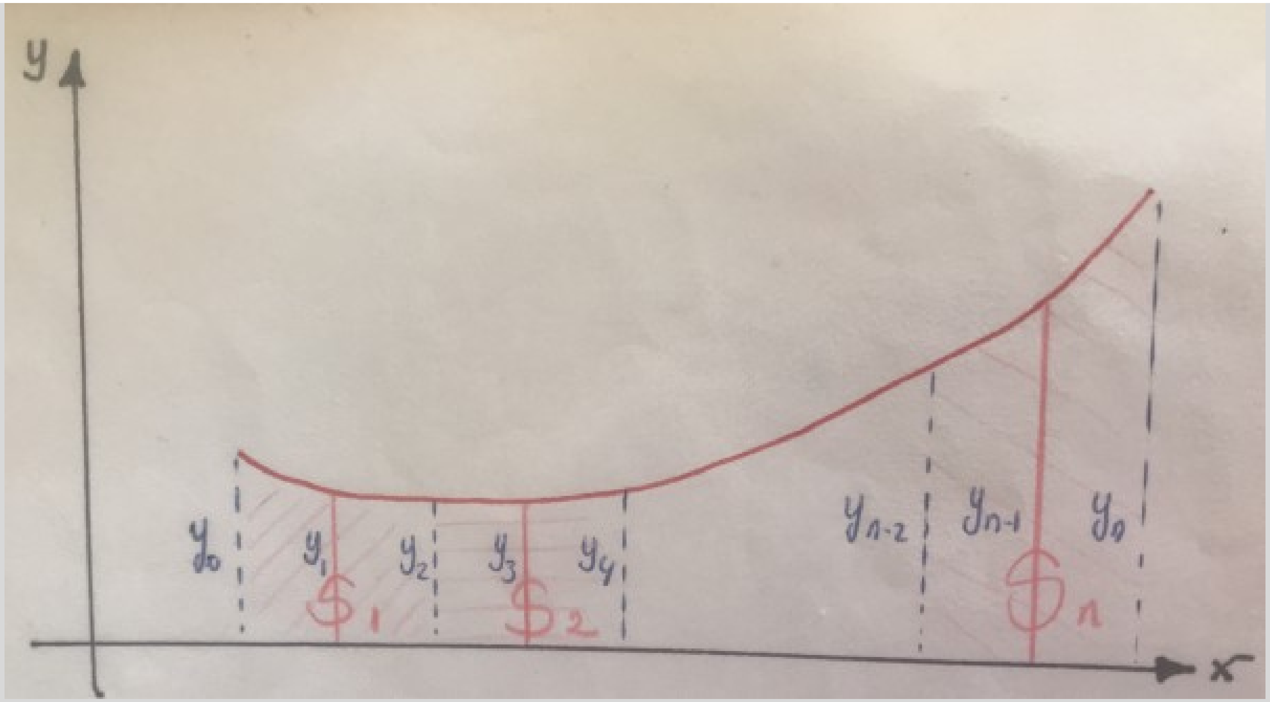
$$y_0 + y_2 = ah^2 - bh + c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 2c$$

$c = y_1$ olduğundan;

$$2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2 \Rightarrow 2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

$$S = h/3\,(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1) \Rightarrow$$

$$S = h/3(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



$$S_1 = h/3\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$S_2 = h/3\,(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$S_n = h/3\,(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

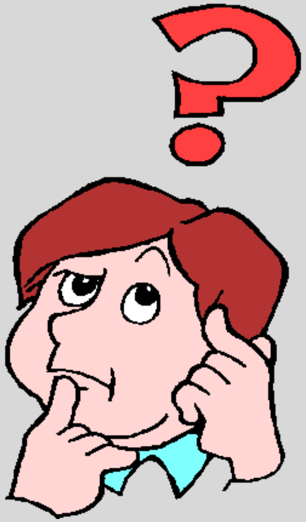
$S = \sum S_i$ toplamı aranılan integral denklemini

!! Simpson yönteminde çubuklar ikişer ikişer alındığından aralık sayısı çift olmalıdır.

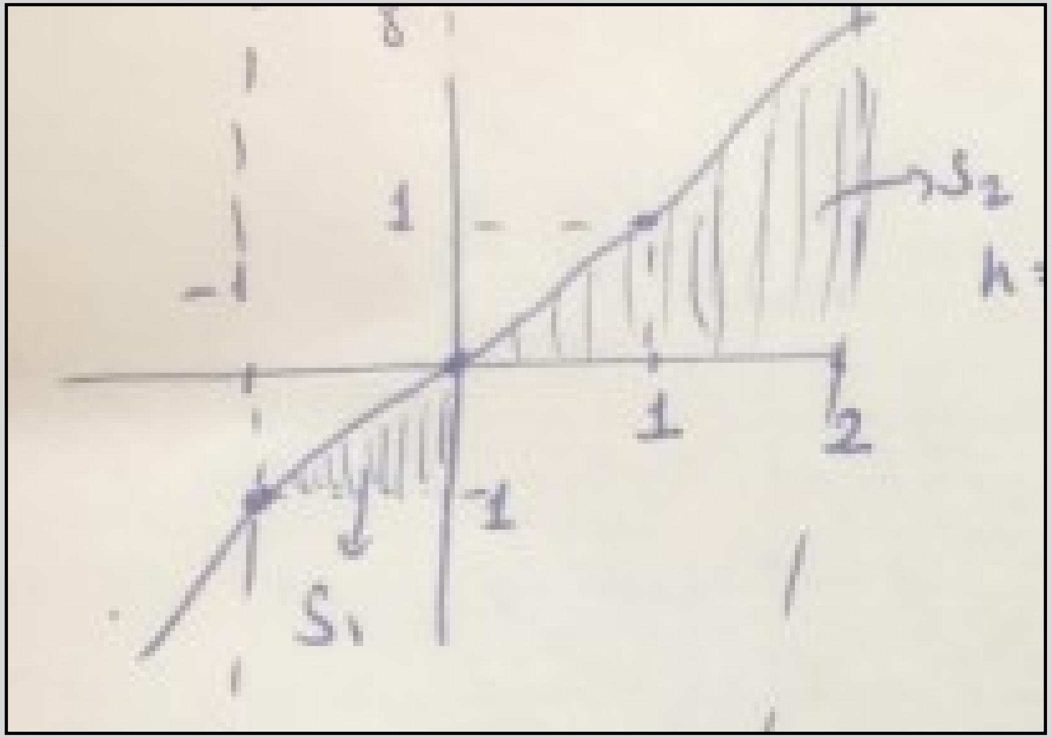
Simpson formülünde $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ alınarak. ($n \rightarrow$ çift)

$$S = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k.h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h) \right]$$

$$S = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + i * h) \right]$$



$y = x^3$ eğrisinin x=-1, x=2 ve Ox ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



$$S_1 = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

$n=4$

$h=0.25$

x	$f(x)$
-1	1
-0.75	0.4218
-0.5	0.125
-0.25	0.0156
0	0

$$S_2 = \int_0^2 x^3\,dx$$

$$h = \frac{2}{4} = 0.5$$

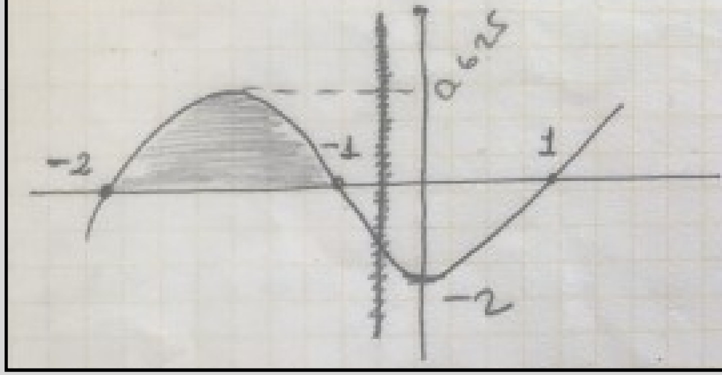
x	$f(x)$
0	0
0.5	0.125
1	1
1.5	3.375
2	8

$$S_1 = \frac{0.25}{3}\left[1+0+2\times0.125+4(0.4218+0.0156)\right] = 0.2499$$

$$S_2 = \frac{0.5}{3}\left[0+8+2+4(0.125+3.375)\right] = 4$$

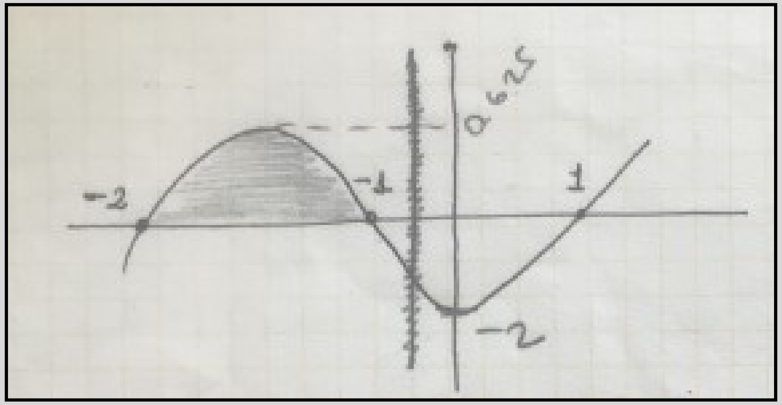
$$S = 4+0.2499 = 4.25\ br^2$$

$y = (x^2 - 1)(x+2)$ eğrisinin altında ve ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını bulunuz.



$$I = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)\,dx$$

$$I = \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_{-2}^{-1} = 0.41\,br^2$$



Trapez yöntemi ile hesapladığımızda

$n = 4$ kabul edelim

$$h = \frac{-1-(-2)}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

x	$f(x)$
-2	0
-1.75	0.5156
-1.50	0.625
-1.25	0.4218
-1	0

$$S_T = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$$

$$S_T = 0.25\left[\frac{(0+0)}{2} + 0.5156 + 0.625 + 0.4218\right] = 0.391\ br^2$$

$$\text{Hata} = 0.41 - 0.391 = 0.019\ br^2$$

$y = (x^2 - 1)(x+2)$ eğrisinin altında ve ox ekseninin üstünde kalan bölgenin alanını Simpson yöntemi ile bulunuz.

$$I = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)(x+2)\, dx \qquad a=-2 \quad b=-1 \quad n=4 \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{-1-(-2)}{4} = 0{,}25$$

x	$f(x)$
-2	0
-1.75	0.5156
-1.50	0.625
-1.25	0.4218
-1	0

$$S_s = h/3 \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{k=1,3,5}^{n-1} f(x_0 + k * h) + 2 \sum_{\ell=2,4,6}^{n-2} f(x_0 + \ell * h) \right]$$

$$S_s = \frac{0.25}{3}[(0+0) + 4 * (0.5156 - 0.4218) + 2 * 0.625] = 0.4166\ br^2$$

İki Katlı Integralin Sayısal Çözümü

$$\int_{2}^{3}\int_{x}^{2x^3} (x^2+y)\,dy\,dx$$

1.adım $\int_{2}^{3} g(x)\,dx$ $\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{4}=0.25$

x	$g(x)$
$x_0=2$	g_0
$x_1=2.25$	g_1
$x_2=2.5$	g_2
$x_3=2.75$	g_3
$x_4=3$	g_4

$x_0=2$ için

$2x^3 \to 16$

$$\int_{2}^{16} (x_0^2+y)\,dy \qquad (4+y)$$

$$h=\frac{16-2}{4}=\frac{14}{4}=3.5$$

y	$f(y)$
2	6
5.5	9.5
9	13
12.5	16.5
16	20

$$g_0=\frac{3.5}{3}\left[(6+20)+2*13+4*(9.5+16.5)\right]=182$$

$x_1 = 2.25$ için

$$\int_{2.25}^{22.78} (x_1^2 + y)\,dy$$

$$h = \frac{22.78 - 2.25}{4} = 5.13$$

5.06+y

y	$f(y)$
2.25	7.31
7.38	12.44
12.51	17.57
17.64	22.7
22.77	27.76

$$g_1 = \frac{5.13}{3}\left[(7.31 + 27.76) + 2 * 17.57 + 4 * (12.44 + 22.71)\right] = \underline{360.417}$$

$x_2 = 2.5$ için

6.25+y

y	$f(y)$
2.5	8.75
9.69	15.94
16.88	23.13
24.07	30.32
31.26	37.51

$$\int_{2.5}^{31.25} (x_2^2 + y)\,dy$$

$$h = \frac{31.25 - 2.5}{4} = 7.19$$

$$g_2 = \frac{7.19}{3}\left[(8.75 + 37.51) + 2 * 23.13 + 4 * (15.94 + 30.32)\right] = \underline{665.22}$$

$x_3 = 2.75$ için

$$\int_{2.75}^{41.59} (x_3^2 + y)\,dy \qquad h = \frac{41.59 - 2.75}{4} = 9.71$$

y	$f(y)$ $\rightarrow 7.56 + y$
2.75	10.31
12.46	20.02
22.17	29.73
31.88	39.44
41.59	49.15

$$g_3 = \frac{9.71}{3}\left[(10.31 + 49.15) + 2 * 29.73 + 4 * (20.02 + 39.44)\right] = 1154.7$$

$x_4 = 3$ için

$$\int_{3}^{54} (x_4^2 + y)\,dy \qquad h = \frac{54 - 3}{4} = 12.75$$

y	$f(y)$
3	12
15.75	24.75
28.5	37.5
41.25	50.25
54	63

$$g_4 = \frac{12.75}{3}\left[(12 + 63) + 2 * 37.5 + 4 * (24.75 + 50.25)\right] = 1912.5$$

$$S_s = \frac{h}{3}\left[\underbrace{g_0}_{182} + \underbrace{g_4}_{1912.5} + 4\left(\underbrace{g_1}_{360.417} + \underbrace{g_3}_{1154.7}\right) + 2 * \underbrace{g_2}_{665.22}\right] = 790.451$$

$$S_{analitik} = 790.55$$