

Uma Introdução à Programação Linear

PET Matemática

Abel Soares Siqueira

Departamento de Matemática - UFPR, Curitiba/PR

23 de Abril de 2017

1 Introdução

- História
- Background Matemático
- Exemplo

2 Resolvendo

- Condições de otimalidade
- O Método Simplex
- Pontos Interiores

3 Variáveis Inteiras

- Diferenças
- Por que é difícil agora?
- Graficamente

4 Problemas Clássicos

- O problema de designação
- Designação
- Caixeiro Viajante
- Empacotamento
- Fluxos em Rede

5 Conclusões

- 1939 - Leonid Kantorovich desenvolve o problema pensando em reduzir gastos do exército americano na Segunda Guerra Mundial;
- 1939 - T. C. Koopmans descreve problemas clássicos de economia como problemas de programação linear;
- 1941 - Frank Lauren Hitchcock desenvolve pensando em problemas de transporte;
- 1946 - George B. Dantzig desenvolve pensando em problemas de planejamento para a força aérea americana;
 - Criação do Simplex;
 - Problema de designação: 70 pessoas para 70 tarefas;
- 1979 - Leonid Khachiyan provou resolução em tempo polinomial;
- 1984 - Narendra Karmarkar introduz o Método de Pontos Interiores.

Programação Linear depende essencialmente de duas “disciplinas”:

- **Cálculo II:** Funções de várias variáveis, máximo e mínimo, multiplicadores de Lagrange;
- **Álgebra Linear:** Sistemas lineares, subespaços vetoriais; produto interno;

Programação Linear

- Otimização: Maximizar lucro, minimizar gasto;
- Relações lineares: O dobro de um produto vale/custa o dobro do preço;
- Contínuo: Frações são permitidas;

Exemplo

Alice e Bob trabalham fazendo pulseiras e colares. Cada pulseira usa 20 miçangas, 40 cm de fio, e leva 1h para fazer. Cada colar usa 50 miçangas, 90 cm de fio e leva 2h para fazer. Cada pulseira pode ser vendida por R\$ 15 numa demanda semanal de 15 pulseiras. Acima disso, baixando o preço para R\$ 12, eles conseguem vender o resto das pulseiras. Cada colar pode ser vendido por R\$ 40 numa demanda semanal de 12 colares. Acima disso, baixando o preço para R\$ 25, eles conseguem vender o resto dos colares. O preço da miçanga é R\$ 2 o pacote com 100, e eles já dispõem de 300 miçangas. O preço do fio é R\$ 1,50 por metro, e eles já dispõem de 5 metros. Se cada um tem 40h semanais de trabalho, encontre o planejamento deles de modo a maximizar o lucro na venda de suas artes.

Exemplo

	Pulseira	Colar
Miçangas (u)	20	50
Fio (m)	0.4	0.9
Tempo (h)	1	2
Demanda	15	12
Venda na demanda (R\$)	15	40
Venda pós demanda (R\$)	12	25

	Preço (R\$)	Estoque
Miçanga (pac)	2.00	3
Fio (m)	1.50	5

Exemplo

Consideramos as seguintes variáveis

- x_1 : Quantidade de pulseiras produzidas até a demanda;
- x_2 : Quantidade de colares produzidos até a demanda;
- x_1^+ : Quantidade de pulseiras produzidas além da demanda;
- x_2^+ : Quantidade de colares produzidos além da demanda;
- y_1 : Quantidade de pacotes de miçangas compradas;
- y_2 : Quantidade de metros de fio comprados;

Exemplo

- Maximizar

$$15x_1 + 40x_2 + 12x_1^+ + 25x_2^+ - 2y_1 - 1,5y_2$$

- Restrição de tempo

$$x_1 + x_1^+ + 2x_2 + 2x_2^+ \leq 2 \times 40$$

- Restrições de uso de produto

$$20(x_1 + x_1^+) + 50(x_2 + x_2^+) \leq 300 + 100y_1$$

$$0,4(x_1 + x_1^+) + 0,9(x_2 + x_2^+) \leq 5 + 1,5y_2$$

- Restrições de demanda e positividade

$$0 \leq x_1 \leq 15, \quad 0 \leq x_2 \leq 12, \quad x_1^+ \geq 0, \quad x_2^+ \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Exemplo

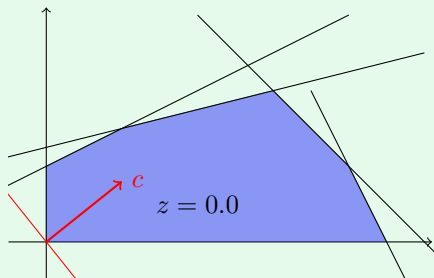
- Modelamos e colocamos em software para resolver;
- Alice e Bob devem produzir 15 pulseiras e 32.5 colares, levando um total de 80 h de trabalho, tendo que comprar 16,25 pacotes de miçangas e 20,167 metros de fio.
- Seu lucro nessas condições será de R\$ 1154,75.

Todo problema de **PL** pode ser escrito como

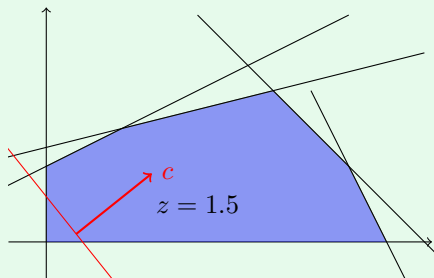
$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x = \langle c, x \rangle = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

onde c é chamado de **vetor de custos**, A é uma matriz m por n dita **matriz de coeficientes**, com $m < n$ e b um vetor de m posições.

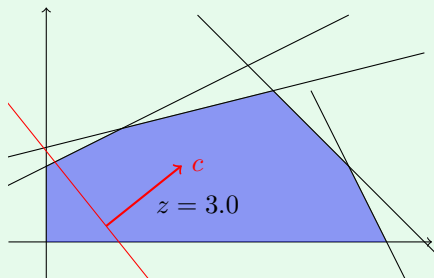
Geometria



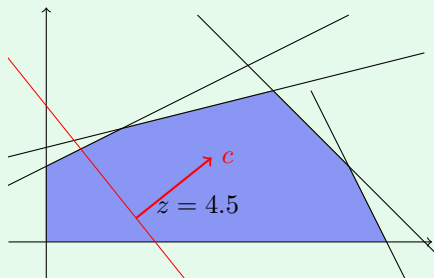
Geometria



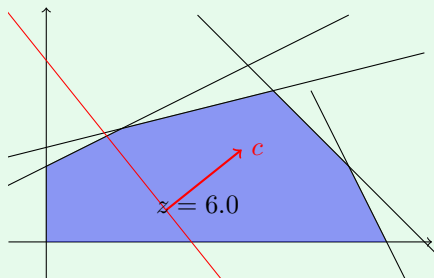
Geometria



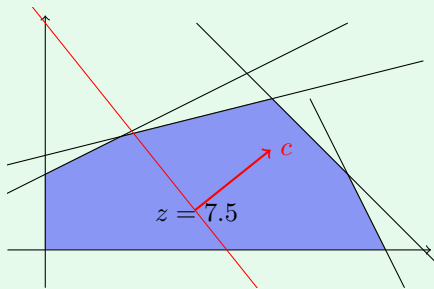
Geometria



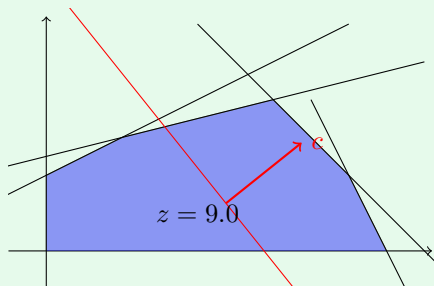
Geometria



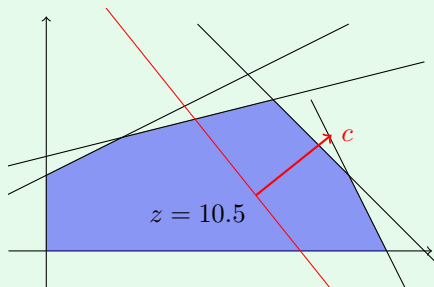
Geometria



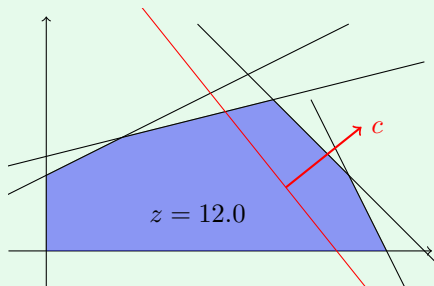
Geometria



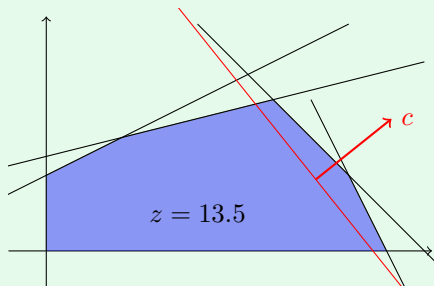
Geometria



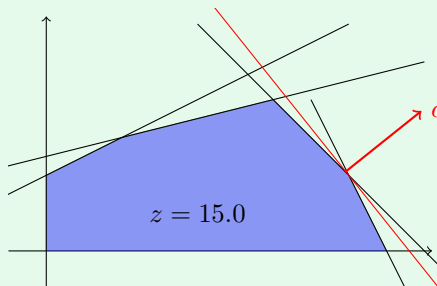
Geometria



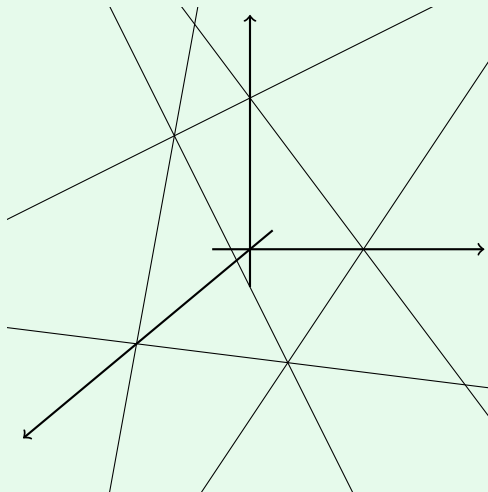
Geometria



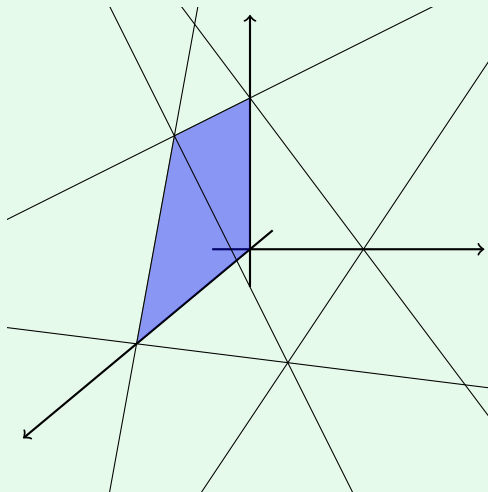
Geometria



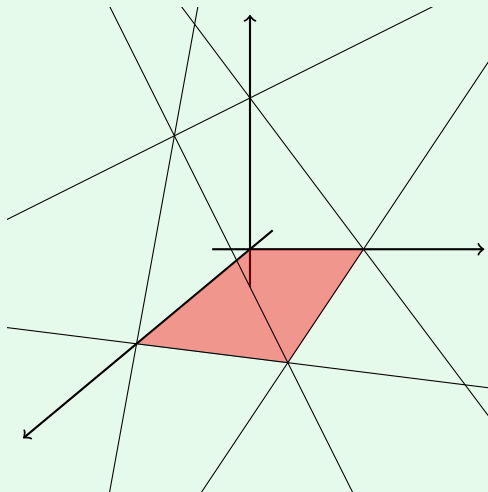
Geometria



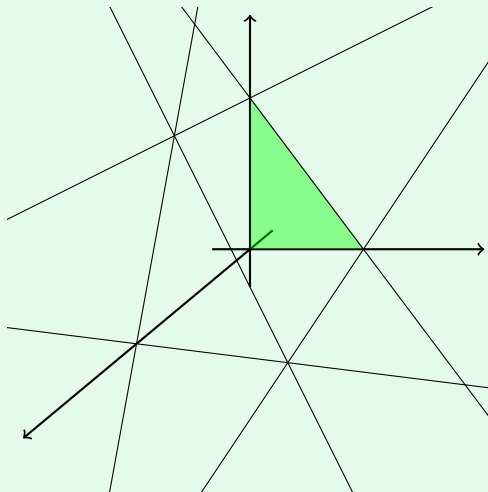
Geometria



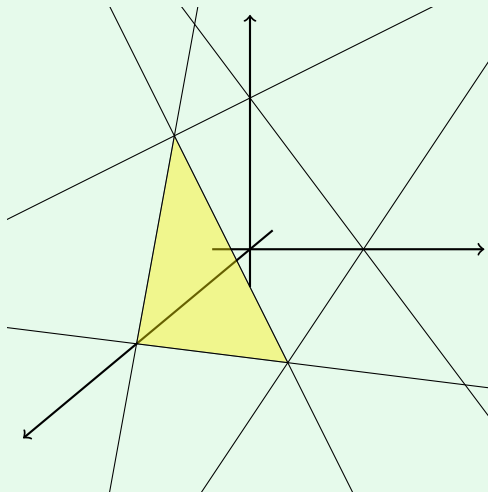
Geometria



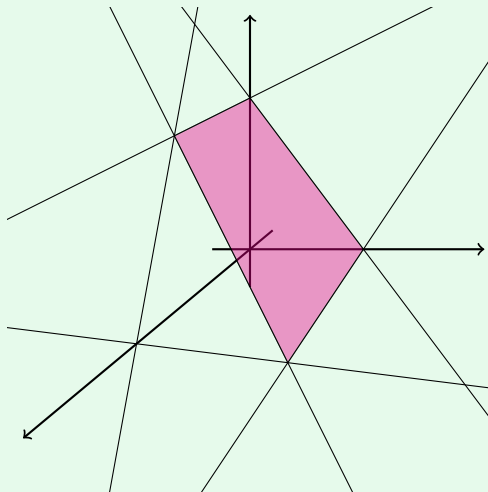
Geometria



Geometria



Geometria



Condições de otimalidade

Para o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

um ponto x é solução se, e somente se, existem λ e s tais que

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T \lambda + s &= c, \\ x^T s &= 0, \\ x, s &\geq 0. \end{aligned}$$

O Método Simplex

- O ponto ótimo é um vértice: $n - m$ variáveis nulas;
- Se estiver num vértice e não for o ótimo, pode-se aumentar o valor de alguma variável atualmente nula de modo a melhorar o objetivo;
- Conforme essa variável aumenta de valor, outras diminuem. Quando alguma outra passar a ser 0, estamos em outro vértice;
- Se estiver no vértice ótimo, é possível identificá-lo;

O Método Simplex

$$A = [B \ N], \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix}$$

O Método Simplex

$$A = [B \ N], \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix}$$

$$Ax = b,$$

$$A^T \lambda + s = c,$$

$$x^T s = 0,$$

$$x, s \geq 0.$$

O Método Simplex

$$A = [B \ N], \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix}$$

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

$$B^T \lambda + s_B = c_B,$$

$$N^T \lambda + s_N = c_N,$$

$$x_B^T s_B + x_N^T s_N = 0,$$

$$x_B, x_N, s_B, s_N \geq 0.$$

O Método Simplex

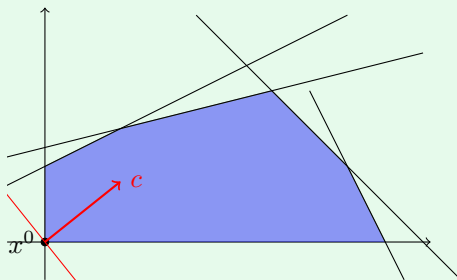
$$A = [B \ N], \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 0 \\ s_N \end{bmatrix}$$

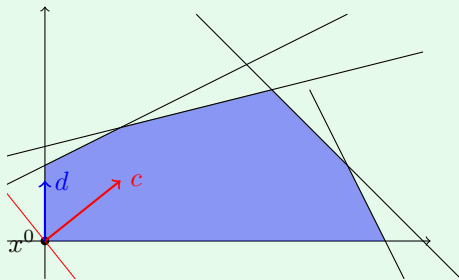
$$Bx_B = b,$$

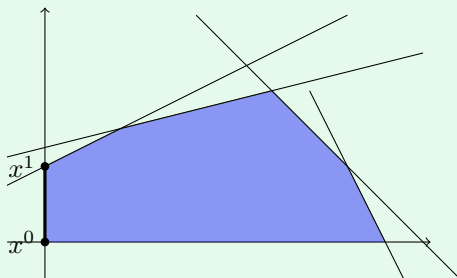
$$B^T \lambda = c_B,$$

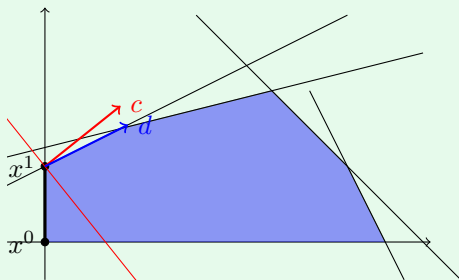
$$s_N = c_N - N^T \lambda,$$

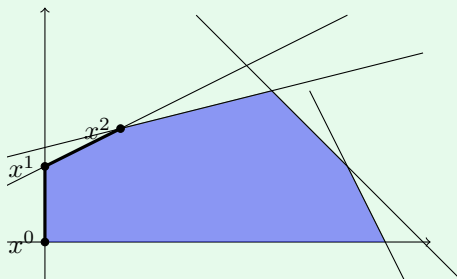
$$x_B, s_N \geq 0.$$

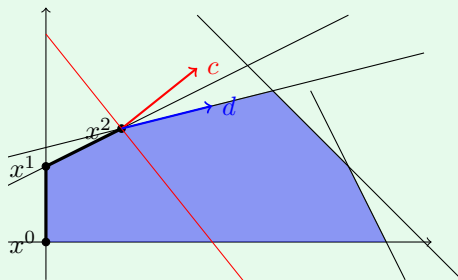


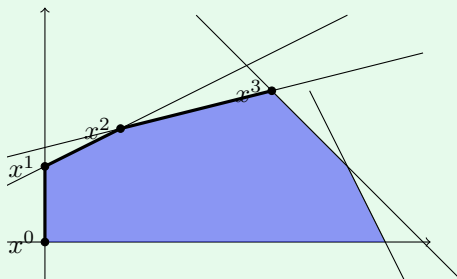


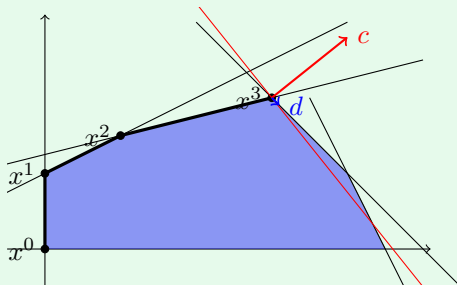


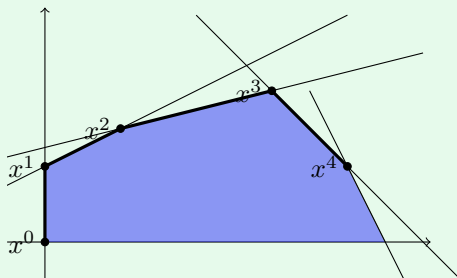


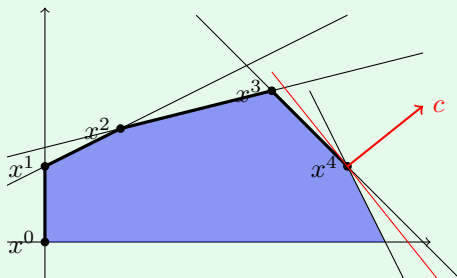




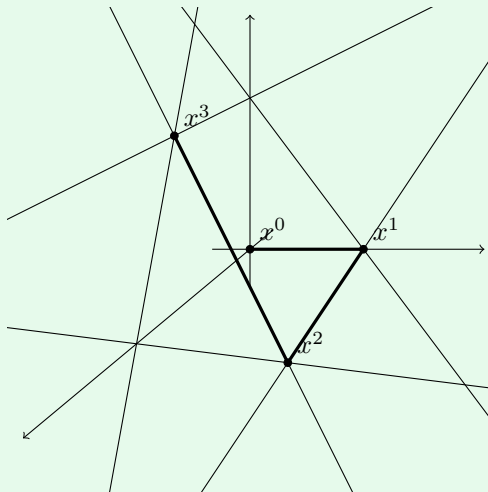








Geometria



Pontos Interiores

- Abordagem completamente diferente;
- As desigualdades viram barreiras;
- Menos iterações;
- Iterações mais caras;

Pontos Interiores

$$Ax = b,$$

$$A^T \lambda + s = c,$$

$$Xs = 0,$$

$$x, s \geq 0.$$

Pontos Interiores

$$Ax = b,$$

$$A^T \lambda + s = c,$$

$$Xs = \mu e,$$

$$x, s > 0.$$

Pontos Interiores

Método de Newton

$$F(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} A^T \lambda + s - c \\ Ax - b \\ Xs - \mu e \end{bmatrix} = 0.$$

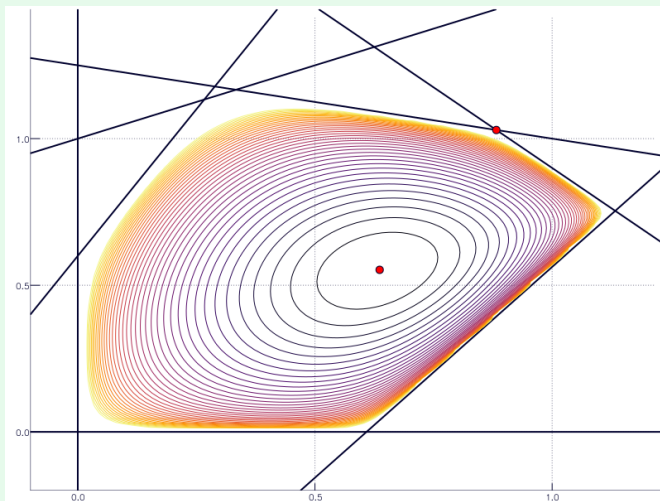
$$J(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix}$$

Pontos Interiores: outra visão

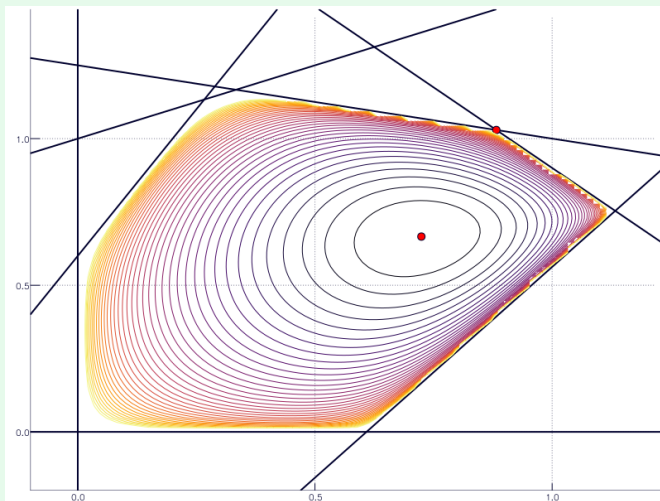
$$\min \quad \varphi(x; \mu) = c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j$$

sujeito a $Ax = b$

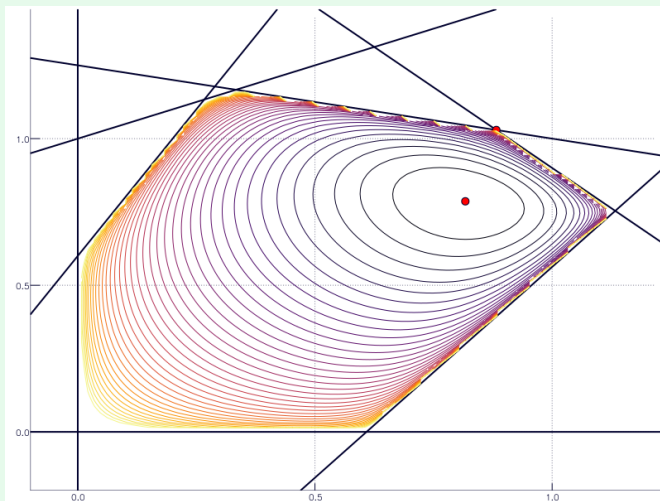
Pontos Interiores



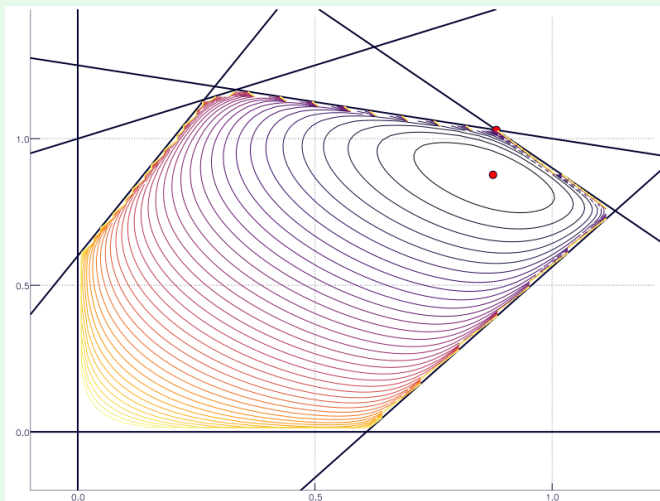
Pontos Interiores



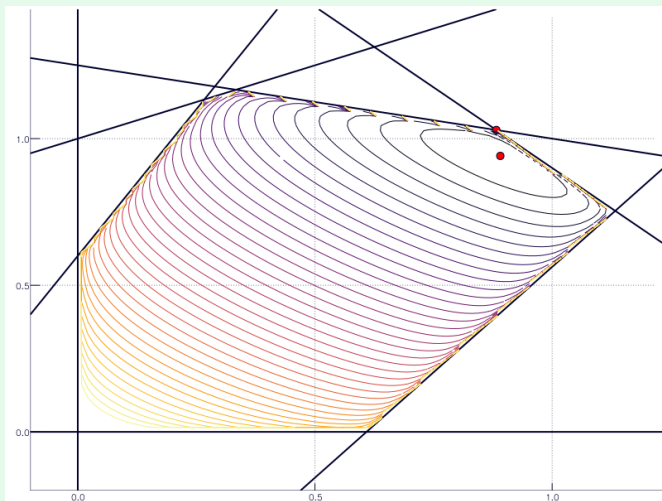
Pontos Interiores



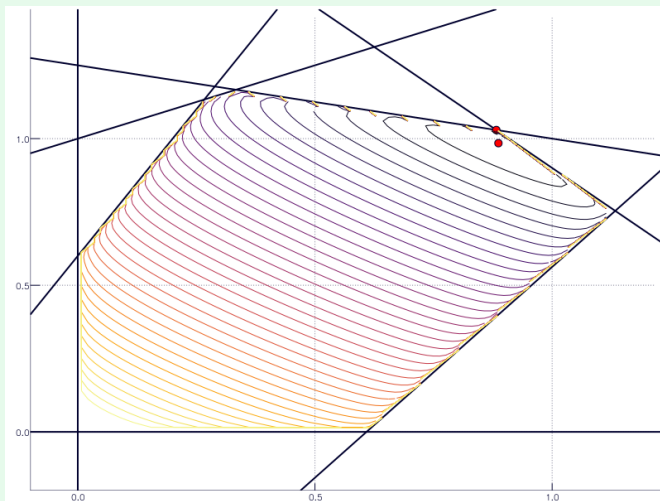
Pontos Interiores



Pontos Interiores



Pontos Interiores

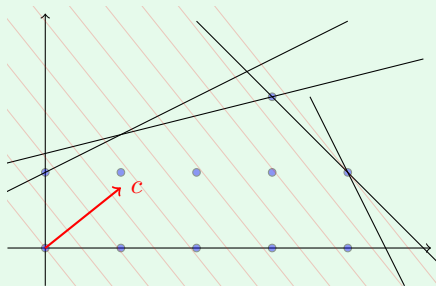


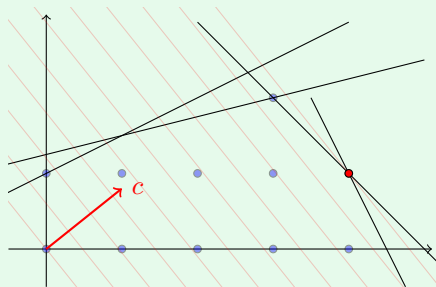
Variáveis Inteiras

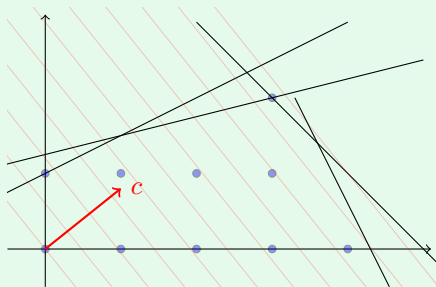
- Muitos problemas acabam caindo em variáveis inteiras;
- Não existe meia pessoa, ou meia tarefa, por exemplo;
- A modelagem é muito mais real;
- A resolução é muito mais difícil;

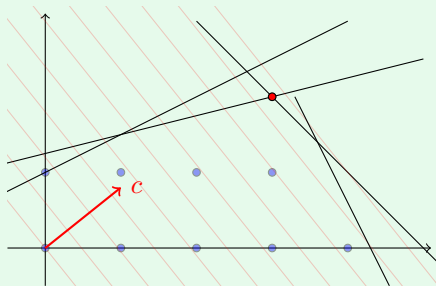
Alice e Bob novamente

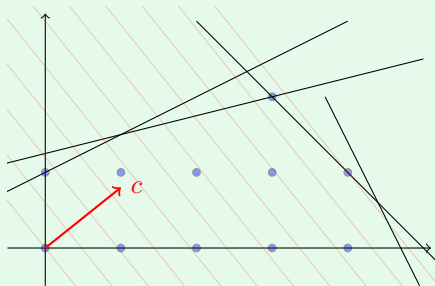
- Alice e Bob devem produzir 15 pulseiras e 32.5 colares, levando um total de 80 h de trabalho, tendo que comprar 16,25 pacotes de miçangas e 20,167 metros de fio.
- Se adicionarmos a restrição de que as variáveis devem ser inteiras a solução muda para: 20 pulseiras e 30 colares, 80 h de trabalho, tendo que comprar 16 pacotes de miçangas, e 20 metros de fio.
- Seu lucro nessas condições será de R\$ 1153,00.

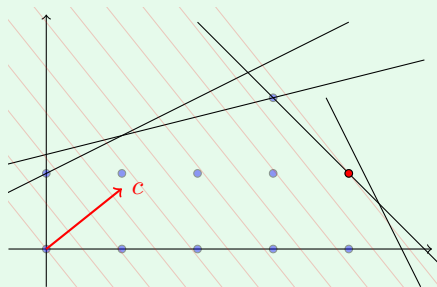


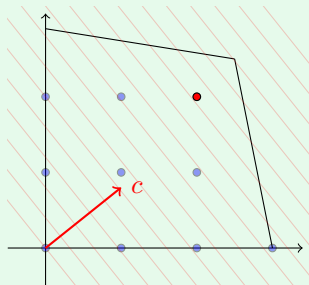


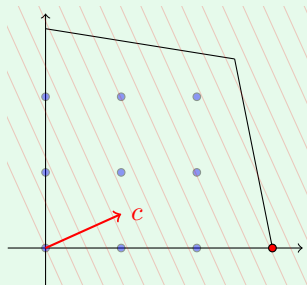








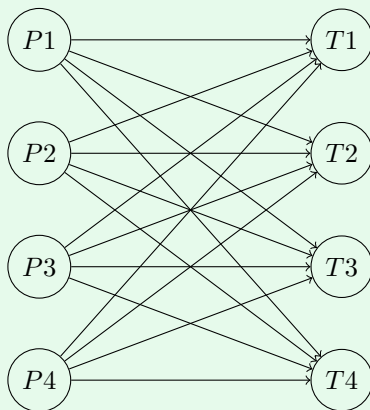




Ração de Gado

- Um quilo é formado por uma soma de frações de ingredientes;
- Cada ingredientes tem custos diferentes e porcentagens diferentes de vitaminas, nutrientes, etc.;
- A ração deve ter quantidades mínimas e máximas de vitaminas, nutrientes, etc.;
- Minimizar o custo do quilo.

Designação

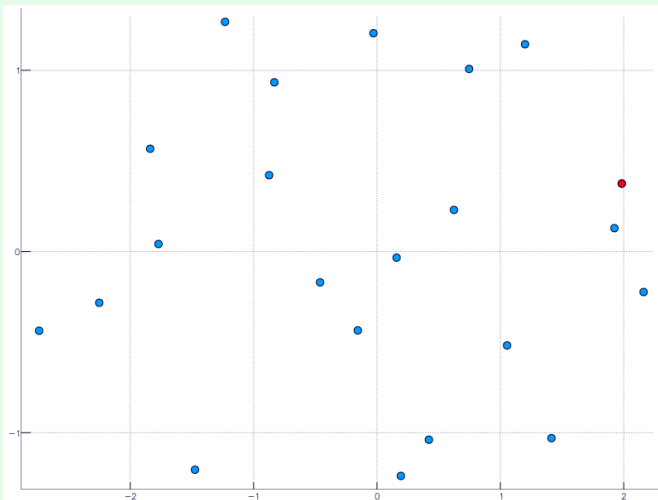


- Trabalhadores em tarefas;
- Tarefas em máquinas distintas;

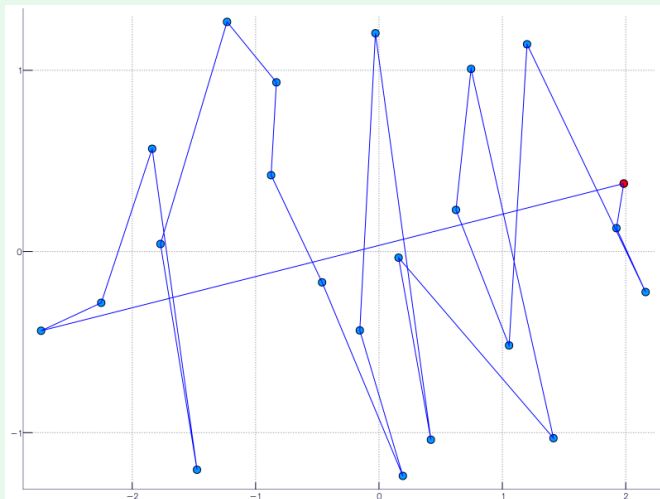
Caixeiro Viajante

- Lista de lugares para visitar;
- Distâncias (ou similar) entre os lugares é mensurável;
- A solução de pegar o mais próximo não funciona (sempre).

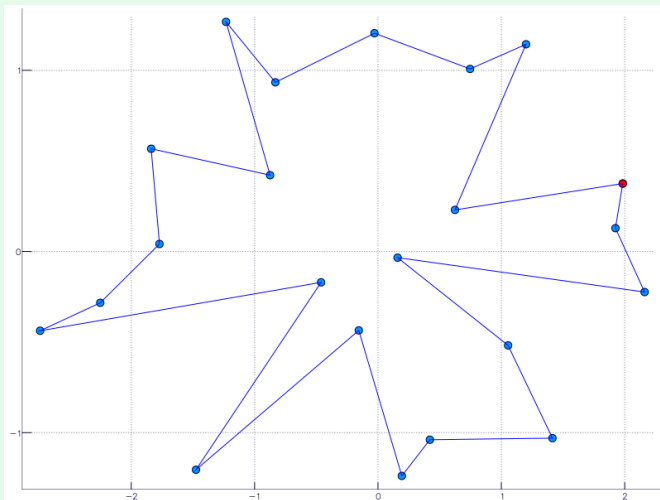
Caixeiro Viajante



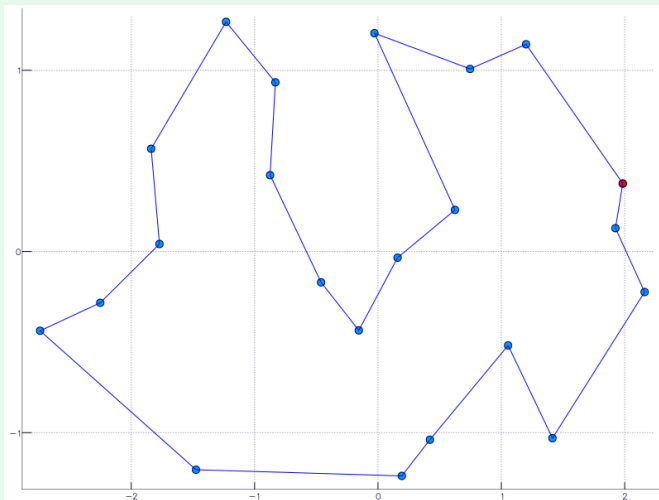
Caixeiro Viajante



Caixeiro Viajante



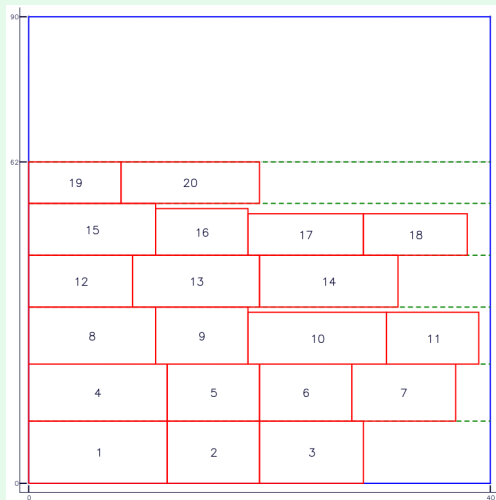
Caixeiro Viajante



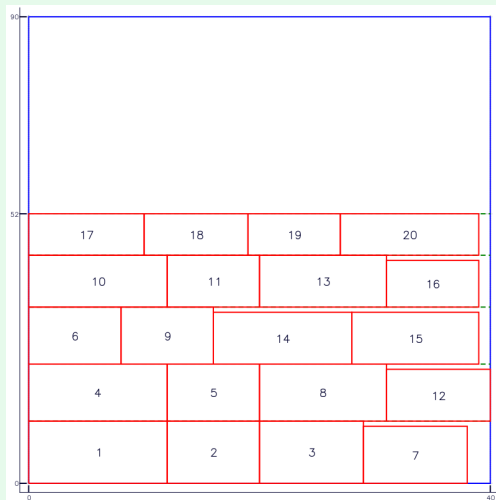
Empacotamento

- Colocar vários objetos num recipiente;
- Múltiplos problemas
 - O máximo de pacotes num recipiente;
 - Quantos recipientes são necessários para todos os pacotes;
 - Empacotamento baseado na ordem que os pacotes serão retirados;
 - Empilhamento para que as caixas não caiam após removidas.

Empacotamento



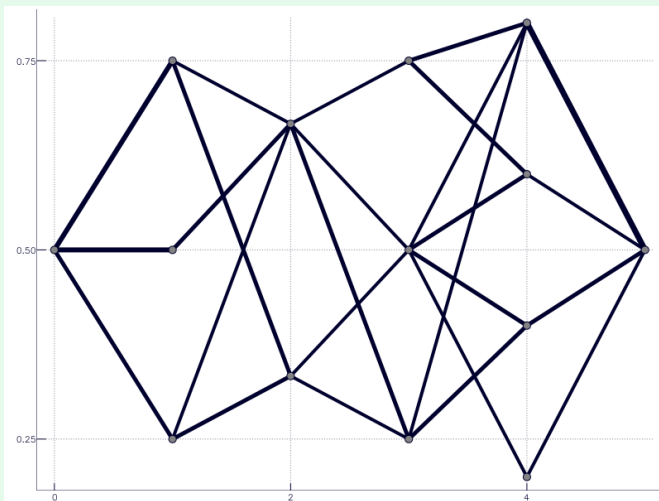
Empacotamento



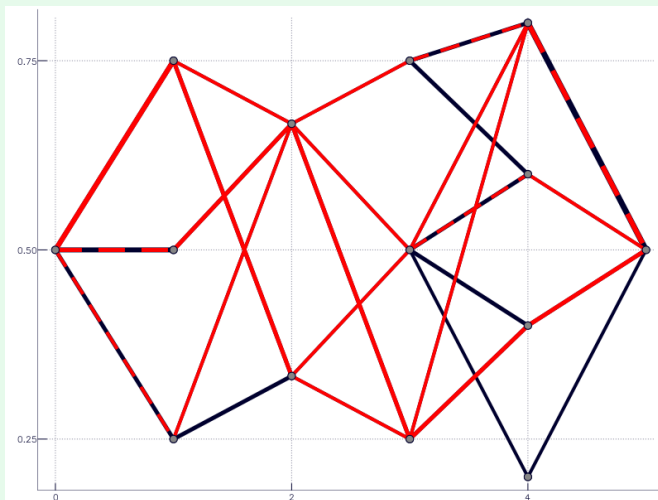
Fluxos em Rede

- Pacotes, energia, líquidos, etc;
- Capacidades limitadas;
- Maximizar o fluxo;
- Corte mínimo;

Fluxos em Rede



Fluxos em Rede



Conclusões

- Programação Linear e Inteira é uma área bastante abrangente;
- É uma área com bastante teoria;
- É uma área com bastante aplicação;
- É uma área com bastante programação;

Obrigado



Esta apresentação está licenciada com uma Licença Creative Commons
Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional.