DERIVATIVOS

V@R - Valor em Risco

Vinicio Almeida
vinicio.almeida@ufrn.br

A questão central no V@R

”Qual é o nível de perda que estamos x% confiantes que não será excedido em n dias úteis?”

V@R e o capital regulatório

- Reguladores pelo mundo utilizam o V@R como referência para exigência de manutenção de capital por parte dos bancos
- Um exemplo é capital para fazer frente a risco de mercado fazendo uma variável k multiplicar o V@R de 10 dias a 99%, onde k é pelo menos 3,0.

V@R vs. C-V@R

- V@R é o nível de perda que não será excedido com uma probabilidade especificada
- C-V@R (ou queda esperada, expected shortfall) é a perda esperada dado que a perda é maior que o nível do V@R
- Embora o C-V@R seja teoricamente mais atraente, não é usado em larga escala

Vantagens do V@R

- Captura um aspecto importante do risco em um número único
- É fácil de entender
- Faz uma pergunta simples: ”O quão ruim as coisas podem ficar?”

Horizonte temporal

Ao invés de calcular o V@R de 10 dias com 99% de confiança, uma prática é calcular o V@R de 1 dia, 99% e assumir que

$V@R10dias = \sqrt{10} * V@R1dia$

Isso é verdade quando as mudanças na carteira em dias sucessivos vêm de distribuições normais independentes e idênticas

Simulação histórica

- Crie uma base de dados de movimentos diários em todas as variáveis de mercado
- A primeira tentativa (ensaio, trial) de simulação assume que as mudanças percentuais em todas as variáveis de mercado são como no primeiro dia
- A segunda tentativa de simulação assume que as mudanças percentuais em todas as variáveis de mercado são como no segundo dia
- e assim por diante

Simulação histórica - especificação

- Suponha que usemos m dias de dados históricos
- Faça v_i ser o valor de uma variável no dia i
- Há m-1 ensaios (trials) de simulação
- O ensaio de número i assume que o valor da variável de mercado amanhã (em m+1) é: $v_m(\frac{v_i}{v_{i-1}})$

Método paramétrico (model building approach)

- a principal alternativa à simulação histórica é fazer suposições sobre as distribuições de probabilidade dos retornos das variáveis de mercado e calcular a distribuição de probabilidade da mudança do valor de uma carteira de forma analítica
- Também conhecido como model building approach, não deve ser confundido com método de covariância, embora se utilize também de variâncias-covariâncias

Volatilidades diárias

Em precificação de opções, medimos a volatilidade ”por ano”

No cálculo de V@R, medimos a volatilidade ”por dia”

$\sigma_{dia} = \frac{\sigma_{ano}}{\sqrt{252}}$

Estritamente falando, devemos definir σ_{dia} como o desvio padrão do retorno em capitalização contínua em um dia

Na prática, assumimos que é o desvio padrão da mudança percentual em um dia

Exemplo com Microsoft

- Temos uma posição que vale \$ 10 milhões em ações da Microsoft
- A volatilidade de Microsoft é 2% por dia (32% por ano)
- Façamos n = 10 e x = 99
- o desvio padrão da mudança na carteira em um dia é \$200.000
- O desvio padrão da mudança em 10 dias é $200.000\sqrt{10} = 632.456$
- Assumimos que a mudança esperada no valor da carteira é zero (ok para períodos curtos)
- Assumimos que mudança no valor da carteira tenha distribuição normal
- Usa-se NORMSINV do Excel, $N^{-1}(0,01) = -2,326$ (1% de chance da variável chegar em patamar inferior a 2,326 desvios padrão.
- V@R de um dia, 99% = 2,326*200.000 = 465.300
- V@R de 10 dias, 99%$= 465.300 * \sqrt{10} = 1.471.300$

Exemplo com AT&T

- Considere uma posição de \$ 5 milhões em AT&T
- A volatilidade diária de AT&T é 1% (aproximadamente 16% ao ano)
- O desvio padrão por 10 dias é $50.000\sqrt{10} = 158.114$
- O V@R é $158.114 * 2,33 = 368,405$

Carteira - o caso de dois ativos

Agora considere uma carteira consistindo de Microsoft e AT&T

Suponha que a correlação entre seus retornos seja 0,3

O desvio padrão da carteira será

$$\sigma_{M+A} = \sqrt{X_M^2\sigma_M^2 + X_A^2\sigma_A^2 + 2X_MX_A\sigma_M\sigma_A\rho}$$

Neste exemplo, $\sigma_M = 200.000$, $\sigma_A = 50.000$ e $\rho = 0,3$. O desvio padrão da mudança no valor da carteira em um dia é, portanto, 110.114

V@R da carteira

- O V@R de 10 dias, 99% da carteira é $110.114 * \sqrt{10} * 2,33 = 811.332$
- Qual o tamanho do benefício da diversificação?
- Qual o efeito incremental da posição de AT&T no V@R?

O modelo linear

Supomos que

- A mudança diária no valor de uma carteira é linearmente relacionada aos retornos diários de variáveis de mercado
- Os retornos de variáveis de mercado têm distribuição normal

$\Delta C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$

$\sigma_C^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$

$\sigma_C^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n0} \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$

onde σ_i é a volatilidade da variável i e σ_C é o desvio padrão da carteira

Lidando com taxas de juros - mapeando fluxo de caixa

- Escolhemos como variáveis de mercado preços de títulos de dívida com maturidades padrão (1ano, 2anos, 5anos, 7anos, 10anos, 30anos)
- Suponha que a taxa de 5anos seja 6% , que a taxa de 7anos seja 7% e que receberemos um fluxo de caixa de \$ 10.000 em 6,5 anos
- As volatilidades por dia dos títulos de 5anos e 7anos são, respectivamente, 0,50% e 0,58%
- Interpolamos entre as taxas de 5anos e de 7anos e chegamos à taxa de 6,5anos = 6,75%
- O valor presente de \$ 10.000 é $10.000/1,0675^{6,5} = 6,540$

Continuando e exemplo

- Agora interpolamos entre as volatilidades de 5anos e 7anos e chegamos à volatilidade de 0,56% para 6,5 anos
- Alocamos α do valor presente no título de 5anos e $(1-\alpha)$ do valor presente no título de 7anos
- Suponha que a correlação entre os movimentos dos títulos de 5anos e de 7anos seja 0,6
- Igualando as variâncias:

$$0,56^2 = 0,5^2\alpha^2 + 0,58^2(1-\alpha)^2 + 2*0,6*0,5*0,58*\alpha(1-\alpha)$$

O que dá $\alpha = 0,074$

Finalizando o exemplo

O valor de 6.540, recebidos em 6,5 anos

$6.540 * 0,074 = 484$

em 5 anos e por

$6.540 * 0,926 = 6.056$

em 7 anos

Esse mapeamento de fluxo de caixa preserva valor e variância

Quando o modelo linear pode ser utilizado

- Carteira de ações
- Carteira de títulos de renda fixa
- Contrato a termo (forward) de moeda estrangeira
- Swap de taxa de juros

O modelo linear e opções

Considere uma carteira de opções que tenham como ativo subjacente uma ação. Defina

$\delta = \frac{\Delta C}{\Delta S}$ e $\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$

Aproximando $\Delta C = \delta \Delta S = S \delta \Delta x$

Similarmente, quando há vários ativos subjacentes
$\Delta C = \sum_{i=1} S_i \delta_i \Delta x_i$

onde δ_i é o delta da carteira em relação ao ativo i

Novo exemplo

Considere um investimento em opções de Microsoft e AT&T. Suponha que os preços das ações sejam 120 e 30, respectivamente, e que os deltas da carteira em relação aos preços das duas ações sejam 1,000 e 20,000, respectivamente

Aproximando

$$\Delta C = 120 * 1,000 \Delta x_1 + 30 * 20,000 \Delta x_2$$

Onde Δx_1 e Δx_2 são as mudanças percentuais nos preços das duas ações

Sobre assimetria das distribuições

O modelo linear falha em capturar a assimetria na distribuição de probabilidade do valor da carteira

Modelo quadrático

Para uma carteira que dependa de apenas o preço de uma ação, é aproximadamente verdade que $\Delta C = \delta \Delta S + 1/2\gamma(\Delta S)^2$

O que fica como $\Delta C = S\delta\Delta x + 1/2S^2\gamma(\Delta x)^2$

Com muita variáveis de mercado, temos uma expressão na forma

$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}S_iS_j\gamma_{ij}\Delta x_i\Delta x_j$

onde $\delta_i = \frac{\partial P}{\partial S_i}$ e $\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i S_j}$

Certamente não tão simples como trabalhar com o modelo linear

Simulação de Monte Carlo

Para calcular o V@R usando simulação de Monte Carlo, precisamos

1. Avaliar a carteira hoje
2. Amostrar uma vez das distribuições multivariadas de Δx_i
3. Usar Δx_i para determinar as variáveis de mercado ao final de um dia
4. Reavaliar a carteira ao final do dia
5. Calcular ΔC
6. Repetir diversas vezes para construir uma distribuição de probabilidade para ΔC
7. V@R será o quantil apropriado para a distribuição vezes a raiz quadrada de n. Por exemplo, com 1.000 ensaios, o primeiro percentil é o décimo pior caso

Para acelerar, pode-se utilizar a aproximação quadrática para calcular ΔC

Comparativo de abordagens

- O modelo paramétrico supõe distribuição normal das variáveis de mercado. Ele tende a dar resultados piores para carteiras com baixo delta
- A abordagem de simulação histórica deixa os dados históricos determinarem as distribuições, mas é computacionalmente mais lenta

Teste de stress

Envolve testar o quão bem a carteira se comporta sob alguns dos eventos mais extremos em termos de movimentação de mercado vistos nos últimos 10 a 20 anos

Back-testing

- Testa o quão bem as estimativas de V@R teriam se comportado no passado
- Poderíamos fazer a questão: Com que frequência a perda de 10 dias foi maior que o V@R de 10 dias a 99%?

PCA para taxas de juros

- O primeiro fator é uma mudança aproximada paralela (83,1% da variação explicada)
- O segundo fator é um giro (10% da variação explicada)
- O terceiro fator é uma curvatura (2,8% da variação explicada)

Usando PCA para calcular V@R

Exemplo: Sensibilidade de uma carteira a taxas ($m)

1ano	2anos	3anos	4anos	5anos
+10	+4	-8	Dado -7	Dado +2

A sensibilidade para o primeiro fator é(ver tabela):
$10 * 0,32 + 4 * 0,35 - 8 * 0,36 - 7 * 0,36 + 2 * 0,36 = -0,08$
Similarmente, a sensibilidade ao segundo fator = -4,40

Aproximando, $\Delta C = -0,08 f_1 - 4,40 f_2$, com f_1, f_2 independentes

O desvio padrão de ΔC é (ver tabela):
$\sqrt{0,08^2 * 17,49^2 + 4,40^2 * 6,05^2} = 26,66$

O V@R de 1 dia, 99% é $26,66 * 2,33 = 62,12$