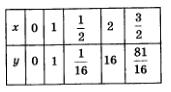
**Урок 10. Функция y = xⁿ**

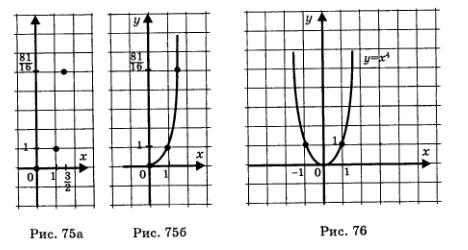
Функцию вида у = хn, где n = 1, 2, 3, 4, 5, ..., называют степенной функцией с натуральным показателем.  
Две степенные функции мы с вами уже изучили: у = х (т.е. у — х1) и у = х2. Этим перечень наших достижений исчерпывается, ибо, начиная с n = 3, мы о функции у = хn пока ничего не знаем. Как выглядят [графики функций](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97,_%D1%97%D1%85_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D0%BA%D0%B8_%D1%82%D0%B0_%D0%B2%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96" \o "Функції, їх графіки та властивості) у = х3,у = х4,у = х5,у = х6 и т.д.? Каковы свойства этих функций? Об этом и степенная пойдет речь в настоящем параграфе. Правда, в § 10 функция    одно свойство мы с вами предусмотрительно обсудили: доказали, что у = х4 — четная функция, а у = х3 — нечетная функция. И это, кстати, нам сейчас очень пригодится. Мы ведь знаем, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала [координат](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A8%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8B_%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D1%8B" \o "Шкалы и координаты). Значит, мы можем и для функции у = х4, и для функции у — х3 поступить так: рассмотреть эти функции на луче, построить их графики (на указанном луче). Затем, используя симметрию, построить график функции на всей числовой прямой и с помощью графика перечислить свойства функции по той схеме, которую мы выработали в предыдущих параграфах (добавив свойство четности).

1. Функция [IMG_256](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9122.jpg)  
Составим таблицу значений для этой функции:

[](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9123.jpg)  
Построим точки [IMG_258](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9124.jpg) на координатной [плоскости](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A3%D1%80%D0%BE%D0%BA_12._%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8._%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C" \o "Урок 12. Плоские поверхности. Плоскость) (рис. 75а); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 756).

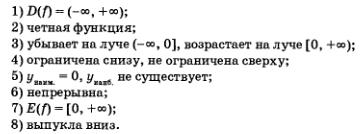
2. Функция у = х4

Рассмотрим график, изображенный на рис. 75б. Добавив к нему линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции у = x4 (рис. 76). Он похож на параболу (но параболой его не называют).

[](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9125.jpg)

Прежде чем перечислить свойства функции, заметим, что мы будем придерживаться того же порядка ходов, который использовали в § 9, с одной поправкой: свойству четности функции отведем вторую позицию.

Свойства функции у = х4:

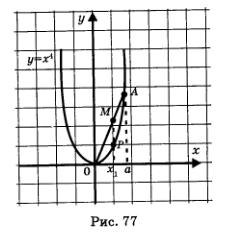
[](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9126.jpg)

Эти свойства мы прочитали по [графику](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D0%BA%D1%96%D0%B2_%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9_%D0%BC%D1%96%D0%B6_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8" \o "Приклади графіків залежностей між величинами), что, в общем-то, как мы уже подчеркивали выше, в математике не принято. Обычно поступают наоборот: исследуют свойства функции, а потом, опираясь на результаты проведенного исследования, строят ее график. В состоянии ли мы с вами уже теперь действовать так, как принято в математике? Пока еще не совсем. Из перечисленных выше восьми свойств очевидно первое (поскольку любое число х можно возвести в четвертую степень). В предыдущем параграфе доказано второе свойство. Можно доказать и третье: в самом деле, если [IMG_261](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9127.jpg) то, по свойству [числовых неравенств](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%97%D0%B0%D0%B2%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B4%D0%BE_%D1%83%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%83:_%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D1%96_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96._%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%96_%D0%B2%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96_%D1%87%D0%B9%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%85_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9._%D0%9F%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B5_%D0%B4%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D1%96_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9." \o "Завдання до уроку: Числові нерівності. Основні властивості чйслових нерівностей. Почленне додавання і множення нерівностей.),[IMG_262](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9128.jpg) а это и означает возрастание функции на луче [0, +оо) (см. определение 1 из § 9). Можно доказать четвертое свойство: для любого значения х справедливо неравенство х4 > 0, а это и означает ограниченность функции снизу (см. определение 3 из § 9). Очевидно пятое свойство. Что же не доказано, где мы вынуждены пока опираться на геометрическую интуицию? Не доказаны свойства 6, 7 и 8.

Впрочем, при желании можно дать некоторое пояснение (не доказательство) и свойству выпуклости функции вниз. Покажем, например, что на отрезке [0, +оо), где а > 0, график функции у = х4 расположен ниже отрезка ОА (рис. 77).

На интервале (0, а) возьмем произвольную точку хг и восставим из этой точки перпендикуляр к оси х до пересечения с графиком функции у = х4 (в точке Р) и с прямой ОА (в точке М) (рис. 77). Ордината точки Р равна х4, а чему равна ордината точки М? Давайте подсчитаем.

Прямая ОА проходит через начало координат, значит, ее [уравнение](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A1%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%8B_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9._%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D1%8F%D1%82%D0%B8%D1%8F" \o "Системы уравнений. Основные понятия) имеет вид у — kх. Эта прямая проходит через точку А(а; а4). Подставив   координаты точки А в уравнение у = kх, получим равенство а4 = ка. Значит, к = а3, т.е. уравнение прямой ОА таково: у = а3х.

[](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al9129.jpg)                             
Теперь ясно, что ордината точки М равна а3х2.

Итак, ордината точки Р равна [IMG_264](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al91210.jpg) , а ордината точки М равна а3хг Какое из этих чисел больше? Имеем 0 < х1 < а, значит, по свойствам числовых неравенств, х3 < а3 и далее [IMG_265](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al91211.jpg) Что означает последнее неравенство? То, что точка Р располагается ниже точки М. А отсюда можно сделать вывод: если провести произвольную прямую ОА, то окажется, что график функции у = х4 на [отрезке](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D1%96%D1%88%D0%BA%D0%B8_%D0%B4%D0%BB%D1%8F_%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%B8%D1%82%D0%BB%D0%B8%D0%B2%D0%B8%D1%85_%D0%B4%D0%BE_%D1%83%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%83_%C2%AB%D0%92%D0%B8%D0%BC%D1%96%D1%80%D1%8E%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D1%96_%D0%BF%D0%BE%D0%B1%D1%83%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%96%D0%B7%D0%BA%D1%96%D0%B2%C2%BB" \o "Фішки для допитливих до уроку «Вимірювання і побудова відрізків») [0, а] лежит ниже соответствующего участка прямой ОА.

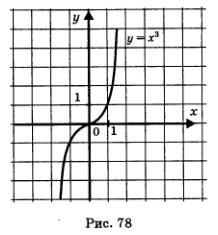
3.    Функция у — х2n

Речь идет о функциях у = х6, у = х8 и вообще о степенной функции счетным показателем степени. График любой такой функции похож на график функции у = х4 (рис. 76), только его ветви более круто направлены вверх.

Отметим еще, что кривая у = х2n касается оси х в точке (0; 0), т.е. одна ветвь кривой плавно переходит в другую, как бы прижимаясь к оси х.

4.    Функция у - х3

Заметим прежде всего, что у = х3 — нечетная функция, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. График функции [IMG_266](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al91212.jpg) в принципе выглядит так же, как график функции [IMG_267](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al91213.jpg) (рис. 756), нужно лишь учесть, что новая кривая чуть менее круто идет вверх и чуть дальше отстоит от оси х около начала координат. Добавив линию, симметричную построенной относительно начала координат, получим график функции у = х3 (рис. 78). Эту кривую называют кубической параболой.

[](https://edufuture.biz/index.php?title=%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Al91214.jpg)

Замечание.

Между прочим, это один из редких случаев, когда математики используют не очень удачный термин. Парабола — геометрическая фигура с определенными свойствами. Линия, изображенная на рис. 78, этими свойствами не обладает, поэтому лучше было бы придумать ей другое название, без использования термина «парабола» («кубическая парабола» — это что-то вроде «квадратной окружности»). Но термин «кубическая парабола» прижился в математике, придется и нам его использовать.

Отметим некоторые геометрические особенности кубической параболы у = х3. У нее есть центр симметрии — точка (0; 0), которая отделяет друг от друга две симметричные части кривой; эти симметричные части называют ветвями кубической параболы. Обратите внимание: когда одна ветвь кубической параболы переходит через начало координат в другую ветвь, то это происходит плавно, без излома.

Свойства функции у = х3:

1)D(f) = (-00,+00);  
2)    нечетная функция;  
3)    возрастает;  
4)    не ограничена ни снизу, ни сверху;  
5)    нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;  
6)    непрерывна;  
7)    Е(f) = (-оо, +00);  
8)    выпукла вверх при х < 0, выпукла вниз при х > 0.

5. Функция у = х2n+1

Речь идет о функциях у = х3, у — хb, у = х1 и вообще о степенной функции снечетным показателем степени (3, 5, 7, 9 и т.д.). График любой такой функции похож на график функции у — аx4 (рис. 78), только чем больше показатель, тем более круто направлены вверх (и соответственно вниз) ветви графика. Отметим еще, что кривая у = х2n+1 касается оси х в точке (0; 0).