**Урок 27. Характеристическое свойство арифметической прогрессии**

Напомним, что арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

(*an*) – арифметическая прогрессия, если для любого натурального *n*

*an* + 1 = *an* + *d*, где *d* – некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна *d*:

*d* = *an* + 1 – *an*.

Число *d* называют разностью арифметической прогрессии.

Зная первый член и разность, можно найти любой член арифметической прогрессии по его номеру. Это позволяет сделать формула *n*-го члена:

*an* = *a*1 + (*n* – 1)*d*.

Свойство арифметической прогрессии.

1) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:



2) Верно и обратное утверждение: если в последовательности каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то последовательность является арифметической прогрессией.

Пусть в последовательности (*an*) для любого n ≥ 2 верно

.

Тогда







Действительно, последнее равенство означает, что разность между последующим и предыдущим членами последовательности остаётся постоянной. Значит, эта последовательность является арифметической прогрессией.

Таким образом, мы получили, что последовательность является арифметической прогрессией **тогда и только тогда**, когда каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов. Это свойство арифметической прогрессии называется её характеристическим свойством. Возможно, именно это свойство члена прогрессии быть **средним арифметическим** своих соседей и дало название прогрессии – **арифметическая** прогрессия.

Решим задачу.

(*bn*) – арифметическая прогрессия, *b*3 = 8; *b*5 = –4. Нужно найти *b*4.

По характеристическому свойству арифметической прогрессии её четвёртый член равен среднему арифметическому третьего и пятого членов:



Можно доказать, что любой член арифметической прогрессии, равен не только среднему арифметическому своих непосредственных соседей, но и среднему арифметическому членов прогрессии, находящихся от него на одинаковом расстоянии.

Например, 10-й член арифметической прогрессии (*an*) равен среднему арифметическому 9-го и 11-го членов, а также 8-го и 12-го, 7-го и 13-го, … 1-го и 19-го:



Решим задачу.

Пусть (*cn*) – арифметическая прогрессия, *c*23 = –27, *c*45 = –93. Какой член арифметической прогрессии равен полусумме чисел –27 и –93?

Заметим, что точно посередине между 23-м и 45-м членами арифметической прогрессии находится 34-й её член:



Поэтому он равен их среднему арифметическому, то есть полусумме:



Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида

*an* = *kn* + *b*, где *k* и *b* – некоторые числа.

Действительно, если (*an*) – арифметическая прогрессия, то

*an* = *a*1 + (*n* – 1)*d*;

*an* = *a*1 + *nd* – *d*;

*an* = *dn* + (*a*1 – *d*);

*k* = *d*; *b* = *a*1 – *d*.

Верно и обратное: пусть последовательность задана формулой вида *an* = *kn*+ *b*, где *k* и *b* – некоторые числа. Тогда

*an* + 1 – *an* = *k*(*n* + 1) + *b* – (*kn* + *b*) = *kn* + *k* + *b* – *kn* – *b* = *k*.

Поэтому данная последовательность является арифметической прогрессией с разностью *k*.