Présentation du Projet de Chaînes de Markov

Ugo DEVOILLE & Zoé JOUBERT

Master 2 de Modélisation Statistique - Chaînes de Markov

10/11/2020

Table des matières

Sujet du Projet

Enoncé

Une foule composée de N personnes est répartie entre deux pièces A et B. On note N_A^n le nombre de personnes dans la pièce A à l'instant n, de sorte qu'il y a $N_B^n = N - N_A^n$ personnes dans la pièce B, et on note $Y_n = (N_A^n, N_B^n)$.
Deux capteurs associés à des caméras situées dans chacune des pièces tentent de compter le nombre de personnes dans chaque pièce: on suppose que chacune des personnes d'une pièce donnée à une probabilité $p \in]0,1[$ d'être prise en compte dans le comptage.
On suppose que les instants d'observations sont très peu espacés, de sorte qu'entre deux instants n et n+1, une seule personne piochée uniformément parmi les N personnes totale change de salle.

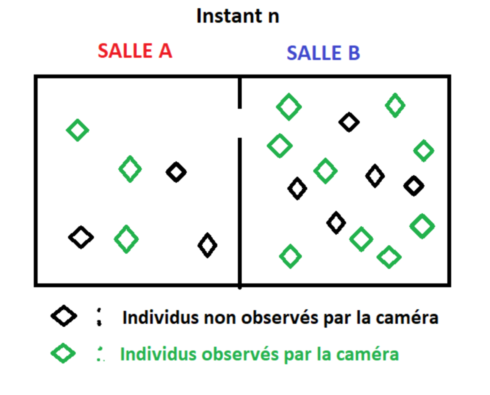
Schéma Introductif

- N=20

A l'instant n, on a :

- $Y_n = (6, 14)$
- $X_n = (3, 9)$

Schéma explicatif du modèle



Espaces d'états modélisés

Espace d'état de Y_n

$$E = \left\{(0,N) \times (1,N-1) \times \ldots \times (N-1,1) \times (N,0)\right\}.$$

$X_n = (M_A^n, M_B^n)$ nombre d'individus observés par les caméras en salle A et B

Espace d'état de X_n

$$O = \left\{(i,j) \in \{0,\ldots,N\}^2 \text{ tq } i+j \leq N\right\}$$

La matrice P

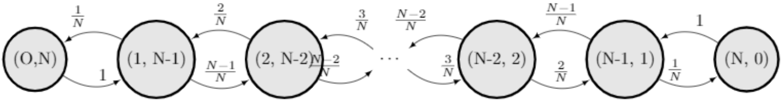


Figure 2: Graphe markovien de $Y_n = (N_A^n, N_B^n)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{2}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & N-1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & N & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation Scilab de P

Matrice P pour N=6

```
P  =

   0.          1.          0.          0.          0.          0.          0.
   0.1666667   0.          0.8333333   0.          0.          0.          0.
   0.          0.3333333   0.          0.6666667   0.          0.          0.
   0.          0.          0.5         0.          0.5         0.          0.
   0.          0.          0.          0.6666667   0.          0.3333333   0.
   0.          0.          0.          0.          0.8333333   0.          0.1666667
   0.          0.          0.          0.          0.          1.          0.
```

La matrice e

Définition

$$e = e(x|y) := P(X_n = x | Y_n = y), \quad x \in O, \; y \in E$$

$$P(X_n = x| \; Y_n = y) = P(X_n = (x_A, x_B)| \; Y_n = (y_A, y_B))$$
$$= P(M_A^n = x_A, \; M_B^n = x_B| \; N_A^n = y_A, \; N_B^n = y_B)$$
$$= P(B(N_A^n, p) = x_A, \; B(N_B^n, p) = x_B| \; N_A^n = y_A, \; N_B^n = y_B)$$
$$= P(B(y_A, p) = x_A, \; B(y_B, p) = x_B| \; N_A^n = y_A, \; N_B^n = y_B)$$
$$= \left(\binom{y_A}{x_A} p^{x_A} (1-p)^{y_A - x_A}\right)\left(\binom{y_B}{x_B} p^{x_B} (1-p)^{y_B - x_B}\right)$$

Représentation Scilab de e

e =

0.000061	0.000061	0.000061	0.000061
0.0012817	0.0010986	0.0009155	0.0007324
0.0115356	0.0082397	0.0054932	0.0032959
0.0576782	0.032959	0.0164795	0.0065918
0.1730347	0.0741577	0.0247192	0.0049438
0.3114624	0.0889893	0.0148315	0.
0.3114624	0.0444946	0.	0.
0.1334839	0.	0.	0.
0.	0.0001831	0.0003662	0.0005493
0.	0.0032959	0.0054932	0.0065918
0.	0.0247192	0.032959	0.0296631
0.	0.098877	0.098877	0.0593262
0.	0.2224731	0.1483154	0.0444946
0.	0.2669678	0.0889893	0.
0.	0.1334839	0.	0.
0.	0.	0.	0.

Figure 1: Matrice e pour N=3 et p=$\frac{3}{4}$

Fonction Alpha

But : Déterminer la probabilité d'une séquence $(X_n)_{n=0,\dots,L}$.

$$\alpha_1(y) = e(x_1|y)\pi(y)$$

$$\alpha_{k+1}(y) = e(x_{k+1}|y)\sum_{z\in E} P(z,y)\alpha_k(y)$$

Code Scilab

```
function ret=alpha(x, L)
    ret=0
    for y=1:N+1
        if L==1 then
            res=pi(y)*e(x(1),y)
        else
            res=0
            for i=1:N+1
                res=res+(delta(x, i, L-1)*P(i,y))
            end
            res=res*e(x(L),y)
        end
        ret=ret+res
    end
endfunction
```

On a alors :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_L = x_L) = \sum_{y\in E} \alpha_L(y)$$

Algorithme de Viterbi

But : Déterminer

$$(y_1^*, ..., y_L^*) = \underset{(y_1,...,y_L)\in E^L}{\text{argmax}} \; P(Y_1 = y_1, ..., Y_L = y_L | X_1 = x_1, ..., X_L = x_L)$$

.

$$\delta_{k+1}(y) = \max_{z\in E} \left[\delta_k(z) p(z,y)\right] \; e(x_{k+1}|y)$$

$$\delta_1(y) = \pi(y) \; e(x_1|y)$$

Code Scilab

```
function ret=delta(x, y, L)
    if L==1 then
        res=pi(y)*e(x(1),y)
    else
        for z=1:N+1
            u(z)=delta(x, z, L-1)*P(z,y)
        end
        res=max(u)*e(x(L),y)
    end
    ret=res
endfunction
```

Algorithme de Viterbi

$$\psi_{k+1}(y) = \psi_{k+1}(x,y) = \underset{z \in E}{\operatorname{argmax}} \left[\delta_k(z) p(z,y) \right]$$

Code Scilab

```
function res=psi(x, y, L)
    for z=1:N+1
        u(z)=delta(x, z, L-1)*P(z,y)
    end
    [a, res]=max(u)
endfunction
```

Algorithme de Viterbi

$$y_k^* = \psi_{k+1}(y_{k+1}^*), \quad k = 1, \ldots, L-1$$

$$y_L^* = \underset{y \in E}{\operatorname{argmax}} \, \delta_L(y)$$

Code Scilab

```
function res=yLet(x, L)
    if L==length(x) then
        for y=1:N+1
            u(y)=delta(x, y, L)
        end
        [a, b]=max(u)
    else
        b = psi(x,yLet(x, L+1), L+1)
    end
    res=b
endfunction

function res=yet(x)
    res=1:length(x)
    for k=1:length(x)
        res(k) = yLet(x, k)
    end
endfunction
```

Application de l'algorithme Forward

On va déterminer la probabilité de plusieurs séquences $(X_n)_{n=0,\dots,L}$ avec l'algorithme Forward que l'on a codé précédemment.

Cas N=10 :

- $p = \frac{4}{5}$:

$$x = \big((0,3),(0,2),(1,0),(0,0),(0,7),(0,1)\big)$$

$$\Longrightarrow \alpha_1(x) = 0.0001966, \alpha_2(x) = 9.026 \times 10^{-9}, \alpha_3(x) = 7.68 \times 10^{-15}.$$

- $p = \frac{1}{2}$:

$$x = \big((0,3),(0,2),(1,0),(0,0),(0,7),(0,1)\big)$$

$$\Longrightarrow \alpha_1(x) = 0.0292969, \alpha_2(x) = 0.0008017, \alpha_3(x) = 0.0000016,$$

$$\alpha_4(x) = 1.445 \times 10^{-9}.$$

Application de l'algorithme Forward

On peut aussi se placer dans un cadre plus réaliste avec un N plus grand et une probabilité p élevée d'être pris en compte dans le comptage.

Cas N=50 et $p = \frac{19}{20}$:

$$\big((25,24),(26,18),(25,22)\big)$$

$$\Longrightarrow \alpha_1(x) = 0.0040497, \alpha_2(x) = 0.0000017, \alpha_3(x) = 0.0000001.$$

Application de l'algorithme de Viterbi

Avec l'algorithme de Viterbi que l'on a codé et à partir d'une séquence observée $(X_n)_{n=0,\dots,L}$ de l'observation de la foule entre les instants 0 et L, on va prédire les nombres successifs de personnes présentes dans les pièces A et B entre les instants 0 et L.

⚠ Le choix de la séquence $(X_n)_{n=0,\dots,L}$ ne se fait pas au hasard. Certaines combinaisons sont mauvaises et ne donnent pas de bons résultats...

Illustration d'un mauvais choix de séquence $(X_n)_{n=0,\dots,L}$:

On prend ici N=10 et $p = \frac{4}{5}$,

$$x = \big((9,1),(10,0),(6,3),(5,4),(6,0),(5,0)\big)$$

$$\Longrightarrow y^* = \big((0,10),(0,10),(0,10),(0,10),(0,10),(0,10)\big).$$

Application de l'algorithme de Viterbi

- Cas N=10, $p = \frac{4}{5}$:

$$x = \big((9,1),(10,0),(9,1),(7,2),(4,1),(2,4)\big)$$

$$\Longrightarrow y^* = \big((9,1),(10,0),(9,1),(8,2),(7,3),(6,4)\big).$$

- Cas N=10, $p = \frac{1}{2}$:

$$x = \big((9,1),(10,0),(9,1),(7,2),(4,1),(2,4)\big)$$

$$\Longrightarrow y^* = \big((9,1),(10,0),(9,1),(8,2),(7,3),(6,4)\big).$$

- Cas N=5, $p = \frac{8}{10}$:

$$x = \big((2,3),(3,2),(0,1),(2,2),(2,3),(1,4)\big)$$

$$\Longrightarrow y^* = \big((2,3),(3,2),(2,3),(3,2),(2,3),(1,4)\big).$$

Application de l'algorithme de Viterbi

- Cas N=30, $p = \frac{9}{10}$:

$$x = \big((2,15),(2,18),(3,26),(3,18)\big) \Longrightarrow y^* = \big((2,28),(3,27),(4,26),(5,25)\big)$$

$$x = \big((17,13),(18,12),(18,5)\big) \Longrightarrow y^* = \big((17,13),(18,12),(19,11)\big).$$

- Cas N=50, $p = \frac{19}{20}$:

$$x = \big((25,24),(26,18),(25,22)\big) \Longrightarrow y^* = \big((26,24),(27,23),(26,24)\big).$$

Conclusion

- Modélisation difficile au premier abord (espaces d'état, matrices, etc)
- Implémentation des fonctions
- Applications : résultats concluants

$\Longrightarrow$ Projet intéressant et enrichissant.