Mini projets

Sujet 1, Groupes 1,2 : Mouvements de foule et Chaine de Markov cachée. Une foule composée de N personnes est répartie entre deux pièces A et B. On note N_A^n le nombre de personnes dans la pièce A à l'instant n, de sorte qu'il y a $N_B^n = N - N_A^n$ personnes dans la pièce B, et on note $X_n = (N_A^n, N_B^n)$. Deux capteurs associés à des caméras situées dans chacune des pièces tentent de compter le nombre de personnes dans chaque pièce: on suppose que chacune des personnes d'une pièce donnée a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être prise en compte dans le comptage. On suppose que les instants d'observations sont très peu espacés, de sorte qu'entre deux instants n et $n+1$, une seule personne piochée uniformément parmi les N personnes totale change de salle.

1. Décrire le modèle de chaine de Markov cachée associé.
2. Implémenter l'algorithme Forward et de Viterbi pour ce modèle de chaine de Markov cachée.
3. Déterminer la probabilité d'observer une certaine séquence $(x_n)_{n=0,\ldots,L}$.
4. A partir d'une séquence observée $(x_n)_{n=0,\ldots,L}$ de l'observation de la foule entre les instants 0 et L, prédire les nombres successifs de personnes présentes dans les pièces A et B entre les instants 0 et L.

Sujet 2, Groupes 3,4 : Réseaux et Chaine de Markov en temps continu. Des clients arrivent dans une file d'attente selon un processus de Poisson d'intensité λ. Les deux groupes traiteront les cas suivants (un seul cas (pas le même) par groupe):
Cas 1: La file sert chaque client pendant un temps suivant une $\mathcal{E}(\mu)$. Mais chaque client dans la file se duplique au bout d'un temps $\mathcal{E}(\delta)$ s'il n'a pas été servi.
Cas 2: La file sert chaque client pendant un temps suivant une $\mathcal{E}(\mu)$. Mais chaque client dans la file abandonne la file au bout d'un temps $\mathcal{E}(\delta)$ s'il n'a pas été servi, et se dirige vers une deuxième file servant les clients au bout d'un temps $\mathcal{E}(\gamma)$.

1. Décrire le modèle markovien associé.

2. Simuler des trajectoires et étudier qualitativement la stabilité du système en fonction des paramètres.

3. On accepte chaque client arrivant avec probabilité $p \in]0,1[$. On souhaite réduire la taille moyenne de la (des) file(s) en régime stationnaire tout en ayant une probabilité d'acceptation élevée. Proposer une fonction de coût répondant à cette problématique et déterminer la probabilité p^* optimale par simulation.

Sujet 3, Groupes 5,6 : Propagation d'épidémie. On considère une population finie constituée d'individus situés sur un sous ensemble de $\mathbb{Z}^2$. On considère que chaque individu est dans l'un des états suivants: Sain, Infecté, Immunisé. Un individu Infecté à l'instant n devient Sain avec probabilité $q \in]0,1[$ ou Immunisé avec probabilité $1-q$ à l'instant $n+1$. Un individu immunisé le reste indéfiniment. Une personne saine contamine chacun de ses plus proches voisins sur $\mathbb{Z}^2$ avec probabilité p, une personne contaminée devenant alors infectée.

1. Décrire le modèle markovien associé.

2. Simuler les états successifs du système. Déterminer qualitativement quelles sont les conditions d'extinction de la maladie en fonction du taux de contamination p (on définit l'extinction comme l'état où il ne reste plus que des Sains et des Immunisés).

3. Lorsqu'il y a extinction, étudier la répartition spatiale d'Immunisés dans la population.

Sujet 4, Groupes 7,8 : Mouvement de particules et agglomération. On considère N particules (éventuellement infini) situés sur $\mathbb{Z}^2$. A chaque instant, chaque particule reste sur place avec probabilité $1-p$ où se déplace vers l'un des quatre plus proches positions avec probabilité $p/4$, où $p \in]0,1[$. Lorsque deux particules se rencontrent, elles fusionnent en une seule particule. Le nombre total de particules décroît donc au cours du temps.

1. Décrire le modèle markovien associé.

2. Simuler les états successifs du système.

3. Estimer la loi du temps avant qu'il ne reste plus qu'une seule particule jointe à la position de cette particule, en fonction de p et des positions

initiales des N particules.

Organisation et délai. Chaque binôme m'enverra à la date convenue un rapport au format `pdf` (pas de fichier `doc`) qui fera moins de quinze pages, accompagné du code `Scilab`/`Matlab` (ou autre), par courriel. Une rapide soutenance de dix minutes d'exposés suivi de dix minutes de question aura lieu peu après m'avoir rendu les rapports. Le rapport et/ou la soutenance peuvent être en anglais.