Un'introduzione al calcolo integrale

Simone Ugolini

1 Introduzione

Sia f una funzione continua su un intervallo $[a, b]$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definiamo integrale della funzione f sull'intervallo $[a, b]$, e lo denotiamo con

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

l'area *con segno* della regione del piano delimitata dal grafico della funzione f, dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ e dall'asse delle ascisse. Se la funzione f di cui vogliamo calcolare l'integrale è abbastanza semplice, possiamo direttamente calcolare l'integrale applicando la definizione. Ad esempio,

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

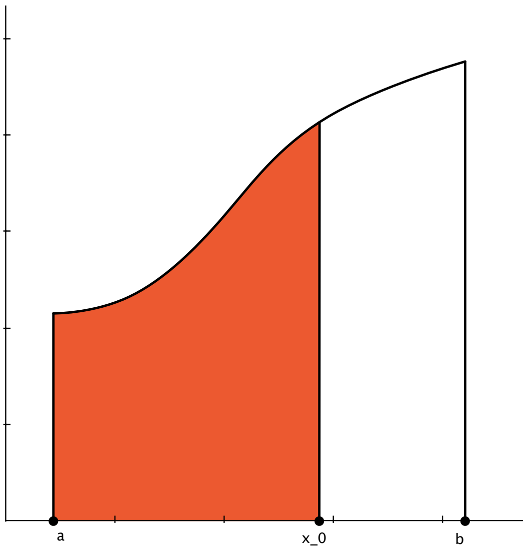
in quanto sto calcolando l'area di un triangolo, la cui base e altezza sono lunghe 1. Inoltre

$$\int_{-1}^2 x\, dx = \frac{3}{2},$$

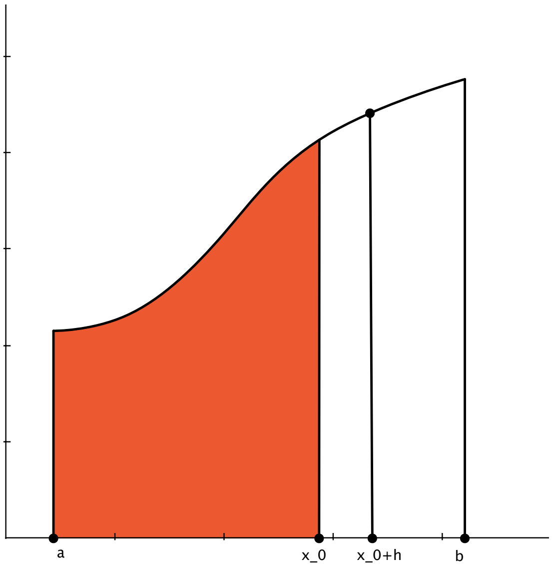
perché l'integrale appena scritto è la somma delle aree *con segno* di un triangolo che sta tutto sopra l'asse delle x avente area (intesa in senso geometrico) uguale a 2 e di un triangolo sotto l'asse delle x avente area (ancora in senso geometrico) uguale a $\frac{1}{2}$. Perciò, l'integrale è dato dalla differenza fra 2 e $\frac{1}{2}$.

Più in generale, se f non è una funzione semplice come x, potremmo avere dei problemi nel calcolare l'integrale. Per questo dobbiamo introdurre delle tecniche di integrazione appropriate.

Sia dunque f una funzione continua definita su un intervallo $[a, b]$. Per ogni $t \in [a, b]$ definiamo con $A(t)$ l'area della regione delimitata dal grafico della funzione, dalle rette verticali $x = a$ e $x = t$ e dall'asse delle x. Per un fissato $x_0 \in]a, b[$ l'area $A(x_0)$ è evidenziata in rosso.



Prendiamo ora un altro punto $x_0 + h \in]x_0, b]$.



Poiché la funzione f è continua su $[x_0, x_0 + h]$, per il teorema di Weierstraß $f(x)$ assume minimo globale m_h e massimo globale M_h al variare di $x \in [x_0, x_0 + h]$. Da un confronto di aree si deduce che

$$m_h \cdot h \leq [A(x_0 + h) - A(x_0)] \leq M_h \cdot h.$$

Quindi

$$m_h \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq M_h.$$

Passando al limite in tutti i membri delle disuguaglianze, per h che tende a 0, otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0).$$

La funzione area è dunque un'antiderivata della funzione f in tutti i punti interni dell'intervallo su cui la funzione f è definita, ovvero $A'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a,b[$. Ciò implica in particolare che $A(x)$ è continua in $]a,b[$. Inoltre, per ragioni geometriche, ci si può convincere che $A(x)$ è pure continua a destra in a e continua a sinistra in b, ovvero

$$\lim_{x\to a^+} A(x) = A(a) = 0, \qquad \lim_{x\to b^-} A(x) = A(b) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Sia ora $F(x)$ un'altra funzione derivabile in $]a,b[$ e continua in $[a,b]$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a,b[$. Allora,

$$F'(x) = A'(x) = f(x), \text{per ogni } x \in]a,b[,$$

ovvero $[F-A]'(x) = 0$, per ogni $x \in]a,b[$.

Per il teorema della derivata nulla, esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = A(x) + C,$$

per ogni $x \in [a,b]$.

Ora, essendo $F(a) = A(a) + C$ e $A(a) = 0$, segue che $F(a) = C$. Inoltre, poiché $F(b) = A(b) + C$, segue che $F(b) = A(b) + F(a)$.

Quindi, l'area sottesa dal grafico di f fra a e b è

$$A(b) = F(b) - F(a).$$

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema.

Teorema 1.1 (T. fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo $[a,b]$. Sia poi $F(x)$ una sua antiderivata, ovvero una funzione continua su $[a,b]$ e tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a,b[$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$