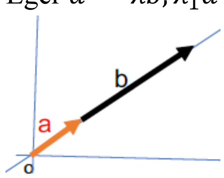
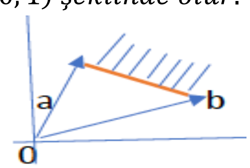
ENM 523 – Matematiksel Optimizasyona Giriş

Konveks Analiz

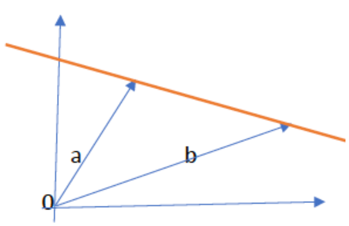
- Konveks analiz, konveks kümeleri ve fonksiyonları inceleyen bir matematik konusudur. Temel kavramlar
  - Afin Kümeler
    - Tanım: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X \; ve \; \forall \lambda \in E$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ ise X kümesine afin küme denir.
    - $\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \,|\lambda \in E\}$ kümesine x_1 ve x_2 noktalarından geçen doğru denir.
    - Böylece Afin küme, kümenin keyfi 2 noktasından geçen doğruyu içeriyor.
      - Böş küme ve E^n afin kümelerdir.
      - Tek bir noktadan oluşan kümeler de afin kümelerdir.
    - $X_1, X_2, \ldots, X_p \subset E^n \; afin \; kümeler, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in E \; olsun.$ O zaman
      - $X = \bigcap_{i=1}^{p} X_i \; afin \; kümedir.$
      - $X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i \; afin \; kümedir.$
    - Burada $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i : \; x_i \in X_i, \; i = 1, 2, \ldots, p\right\}$
    - Örnek: a ve b vektörleri verilsin. Böyle ki, $\lambda a + (1-\lambda)b \; olsun.$
      - Eğer $a = \lambda b, \lambda_1 a + \lambda_2 b \,, \lambda_1, \lambda_2 \in R \; ise$



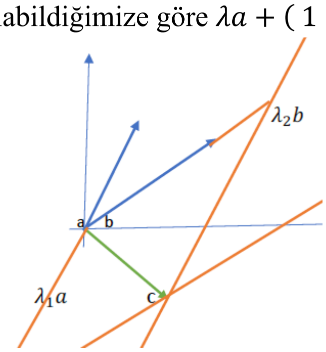
      - $a \neq \lambda b \; ise, o \; zaman \; \lambda_1 a + \lambda_2 b \; ifadesini \; inceleyelim$:
        - $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \; olsun. Bu \; durumda \; konveks \; kombinasyon$: $\lambda_1 = 1 - \lambda_2, \lambda_2 \in (0, 1) \; şeklinde \; olur.$



      - $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in R \; olsun. Bu \; durumda \; Afin \; kombinasyon \; aşağıdaki \; şeklinde \; olur$:



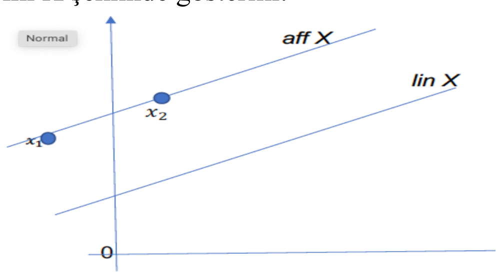
      - $\lambda_1, \lambda_2 \in R \; ve \; R^2 = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b : \; \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$ ise bu durum tüm uzayı kaplayacaktır. Yani, herhangi bir c vektörü aldığımızda bunu kolaylıkla görebiliriz. Bunu gösterelim: Bir c vektörü alalım ve c'den a'ya ve b'ye paraleller çizelim. Burada a ve b'nin $\lambda_1 \; ve \; \lambda_2$ kadar değiştiğini görebiliyoruz. C vektörünü farklı yönlerde alabildiğimize göre $\lambda a + (1-\lambda)b$ ifadesi (afin kümesi) tüm uzayı kaplayacaktır.



    - Teorem: $X \subset E^n$ afin küme olsun. O zaman,

- $\forall x_0 \in X$ için $L = X - x_0$ alt uzaydır, ayrıca L, x_0'ın seçilmesinden bağımsızdır. $\forall x_0, \bar{x}_0 \in X$ için $L = X - x_0 = X - \bar{x}_0$
- Öyle bir $m \times n$ boyutlu A matrisi ve $b \in E^n$ vektörü var ki, $X = \{x \in E^n : Ax = b\}$
  - Sonuç: Her afin $X \subset E^n$ kümesi kapalı kümedir, ayrıca $X = E^n$. $X \subset E^n$ ve $x_o \in E^n$ için $X + x_0 = \{x + x_0 : x \in X\}$ kümesine X'in x_0 kayma kümesi denir. Afin kümesinin kayma kümesi de afindir.
  - Eğer $X_1, X_2 \subset E^n$ afin kümeleri ve $x_0 \in E^n$ vektörü için $X_1 = X_2 + x_0$ ise X_1 X_2'ye paraleldir denir.

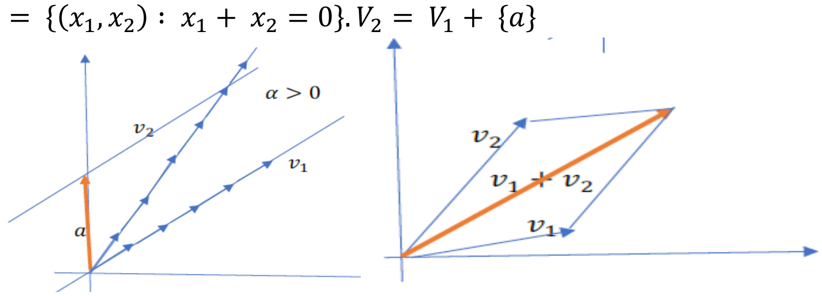
- Tanım: $x_1, x_2, \dots, x_p \in E^n$ noktaları verilsin. $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ eşitliğini sağlayan $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ vekötürüne $x_1, x_2, \dots, x_p$ vektörlerinin **afin kombinasyonu** denir.
- Teorem: Afin kümenin noktalarının her afin kombinasyonu bu kümeye dahildir.
- Tanım: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. X kümesini kapsayan tüm afin kümelerinin kesişimine X'in **afin kabuğu** denir ve **aff X** şeklinde gösterilir. Aff X, X kümesini içeren en küçük afin kümedir. Eğer $X \subset X^*$ ve X^* afin küme ise $aff\ X \subset X^*$
- Teorem: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. Bu durumda aff X, X kümesinin elemanlarının tüm mümkün afin kombinasyonları kümesine eşittir. $aff\ X = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i : x_i \in X, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \forall p\right\}$
- Tanım: $T : E^n \to E^m$ operatörü verilsin. Eğer her $\lambda \in E$, her $x, \bar{x} \in E^n$ için $T(\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(\bar{x})$ sağlanıyorsa, o zaman T'ye **afin operatör** denir.
- Teorem: Her afin $T : E^n \to E^m$ operatörü $Tx = Ax + y$ şeklinde gösterilebilir. Burada $A : E^n \to E^m$ lineer operatör ve $y \in E^m$'dir. Bu durumun tersi de doğrudur. Yani, $A : E^n \to E^m$ lineer operatörü ve $y \in E^m$ bir eleman ise, o zaman $Tx = Ax + y$ ile belirlenen $T : E^n \to E^m$ operatörü afindir.
- Tanım: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. X'in afin kabuğuna paralel olan alt uzaya, X kümesine **paralel alt uzay** denir ve **lin X** şeklinde gösterilir.



- Tanıma göre $lin\ X = aff\ X - x_0, \forall x \in X$ lin X alt uzayı, X kümesine paralel olan tek alt uzaydır.
- Lemma: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. O zaman
  - Her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 - x_2 \in lin\ X$.
  - $0 \in X$ ise $lin\ X = aff\ X$
  - Eğer $x \in X$ ve $l_1, l_2 \in lin\ X$ ise her $\lambda_1, \lambda_2 \in E$ için $x + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \in aff\ X$

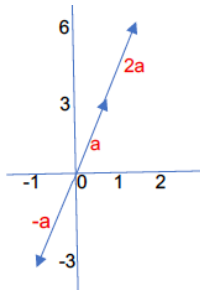
Konveks Kümeler

- Tanım: V bir küme olsun. Eğer $\forall v_1, v_2 \in V$ için $v_1 + v_2 \in V$ ve $\forall v_1 \in V$ ve $a \in E$ için $av_1 \in V$ ise V kümesine bir **vektör uzayı** denir.
- Örnek: $V_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$. $V_2 = V_1 + \{a\}$



- $\{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ bu bir alt uzaydır. $\{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ bu bir alt uzay değildir.

- <u>Tanım:</u> $S \subset E^n, a, b \in R^n$ $olsun. O\ zaman$ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; a + b = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}; a.b = a^T b =$ $(a_1, a_2, \dots, a_n). \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ $(skalar\ çarpım)$

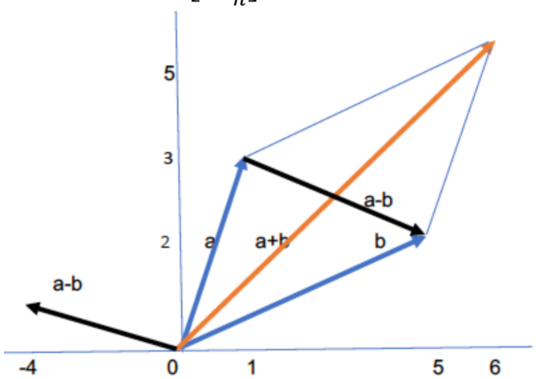


- 2 vektörün toplamını 2 boyutlu uzayda gösterelim:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; a + b = \begin{bmatrix} 1+5 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}; a - b = \begin{bmatrix} 1-5 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

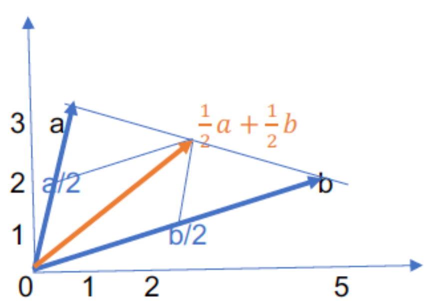
- Eğer $\lambda \in R$ herhangi bir sayı ise, o zaman

$$\lambda a = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}; \lambda = 2\ ise, o\ zaman\ 2a = 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}; \lambda = -1\ ise, o\ zaman - 1a = -a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$



- Vektörün uzunluğu: $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$; $\|a\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
- <u>Tanım:</u> $\lambda\ sayısı\ \lambda \in [0,1] ise \implies \lambda a + (1 - \lambda) b$ ifadesine a ve b vektörlerinin **konveks birleşimi** (combinasyonu) denir. Eğer $\lambda = \frac{1}{2}$ $ise,$ a ve b vektörlerinin konveks birleşimi: $\frac{a+b}{2}$ şeklinde olur. $\lambda = \frac{1}{3}$ $ise, a\ ve\ b\ vektörlerinin\ konveks\ birleşimi: \frac{a}{3} + \frac{2b}{3}\ şeklinde\ oluyor.$

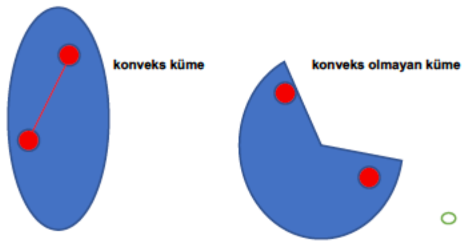
$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\lambda = \frac{1}{2}$ ise,



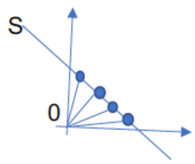
- Biz a ve b noktalarının birleştiren doğru parçası dendiğinde, bunu başlangıcı orijinde sonu [a, b] üzerinde olan vektör olarak algılayacağız.
- <u>Tanım:</u> $S \subset E^n$ $bir\ küme\ olsun.$ Eğer S kümesi herhangi iki vektörün yanı sıra bu vektörlerin konveks birleşimini de içerirse, bu kümeye **konveks küme** denir.

Başka değimle: $X \subset E^n$ $kümesi\ verilsin. Eğer\ \forall x_1, x_2 \in X\ ve\ \forall \lambda \in [0,1]\ için\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X\ ise\ X'e\ konveks\ küme\ denir.$

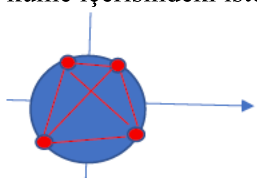
- Dolayısı ile konveks kümeyi içeren istenilen 2 noktanın doğrusal birleşimi (yani, istenilen 2 noktasını birleştiren doğru parçası) kümenin içerisinde kalıyor. Aksi hadle küme konveks değildir.



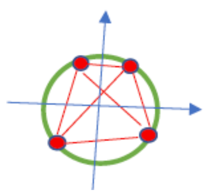
- Örnek: $S = \{(x,y) \in R^2 : x + y = 1\}$ $kümesinin\ konveks\ küme\ olup\ olmadığını\ araştırın.$
    - S kümesi bir doğruyu ifade ettiği için konveks kümedir. Yani, doğru üzerindeki istenilen 2 noktanın birleşimi, o doğru üzerinde olacağı için S kümesi konvekstir.



- Örnek: $S = \{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ $kümesi\ konveks\ küme\ mi?$
    - Bu küme konvekstir. Çünkü verilen küme geometrik olarak çember ve çemberin iç kısmını kapsıyor. Bu durumda küme içerisindeki istenilen 2 noktanın birleşimi küme içerisinde kalıyor.



- Örnek: $S = \{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ $kümesi\ konveks\ küme\ mi?$
    - Bu küme konveks değildir. Çünkü verilen küme geometrik olarak çemberi ifade ediyor. Bu durumda çember üzerinden istenilen 2 noktayı birleştiren doğru parçası çember üzerinde yer almaz.



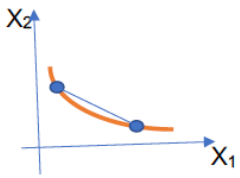
- Örnek: $S = \{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ $kümesinin\ konveks\ olduğunu\ gösteriniz.$
    - $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in S\ ve\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in S\ olsun, o\ zaman\ \forall \lambda \in [0,1]\ için\ \begin{bmatrix} \lambda a_1 + (1-\lambda)b_1 \\ \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2 \end{bmatrix} \in S\ olduğunu\ gösterelim.$

$$
\begin{aligned}
S = \{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} &= \{[\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1]^2 + [\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2]^2 \leq 1\} \\
&= \lambda^2 a_1^2 + (1-\lambda)^2 b_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)a_1 b_1 + \lambda^2 a_2^2 + (1-\lambda)^2 b_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)a_2 b_2 \\
&= \lambda^2(a_1^2 + a_2^2) + (1-\lambda)^2(b_1^2 + b_2^2) + \lambda(1-\lambda)[2a_1 b_1 + 2a_2 b_2] \\
&\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) \\
&= [\lambda + (1-\lambda)]^2 = 1
\end{aligned}
$$

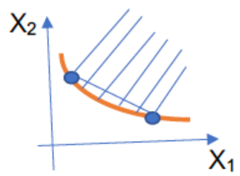
Bu ise $\{[\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1]^2 + [\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2]^2 \leq 1\}$ $demektir. Yani\ S = \{(x_1,x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}\ kümesi\ konvekstir.$

$$a_1^2 + a_2^2 \leq 1$$
$$b_1^2 + b_2^2 \leq 1$$
$$0 \leq (a_1 - b_1)^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2$$
$$\forall a_1 ve\ b_1 için.$$
$$2a_1b_1 \leq a_1^2 + b_1^2$$
$$aynı\ şekilde\ \forall a_2 ve\ b_2 için$$
$$2a_2b_2 \leq a_2^2 + b_2^2$$

- <u>Örnek:</u> $S = \left\{(x_1, x_2) : x_2 = \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ *kümesi konveks küme mi?*
  - S kümesi konveks değildir.



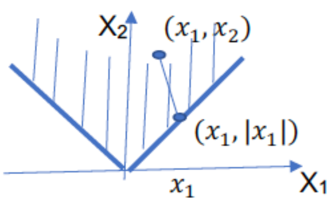
- <u>Örnek:</u> $S = \left\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ *kümesi konveks küme mi?*
  - Evet, S kümesi konvekstir.



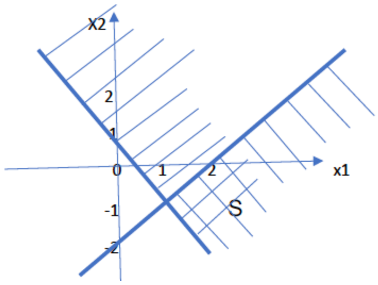
- <u>Örnek:</u> $S = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq |x_1|\}$ *konveks küme mi?*
  - $(x_1, x_2) \in S\ ; (y_1, y_2) \in S\ alalım.\ \lambda \in [0,1] \begin{cases} x_2 \geq |x_1| \\ y_2 \geq |y_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \\ \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \end{vmatrix} \in S\ olduğunu\ gösterelim.$

$$\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \geq |\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1|$$
$$|\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1| \leq |\lambda x_1| + |(1-\lambda) y_1|$$
$$\lambda |x_1| + (1-\lambda)|y_1| \leq \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2$$

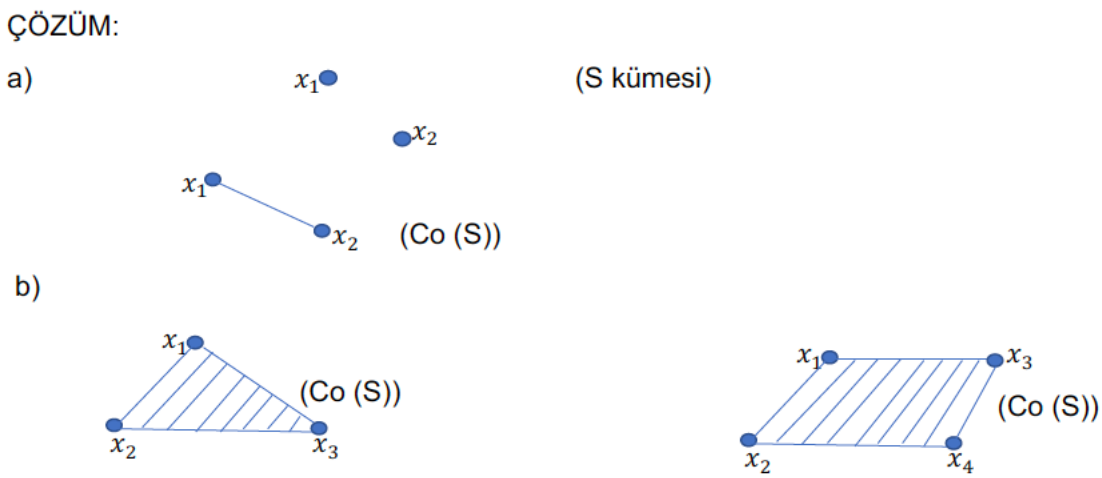
Bu durum kümenin konveks olduğunu göstermektedir.



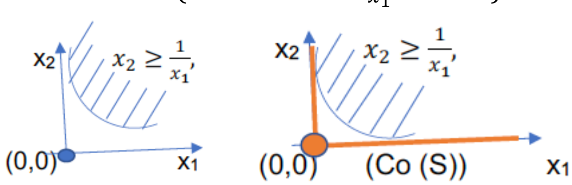
- <u>Örnek:</u> $S = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 = 1\}$ *kümesi konveks midir?*
  - Verilen küme bir doğruyu ifade ediyor. Her doğru uzayı 2'ye bölüyor. Bölünen uzayın her tarafı bir yarıuzaydır. Her yarıuzay da konvekstir. Böylece bir doğru uzayı iki konveks yarıuzaya bölüyor:
    - Afin kümeleri, E^n ve boş küme konveks kümelerdir.
    - B(x, a) kümesi afin olmayan konveks kümedir.
    - Kapalı yarıuzaylar: $\begin{matrix} \{x \in E^n : \langle x_1, x^* \rangle \leq a\} \\ \{x \in E^n : \langle x_1, x^* \rangle \geq a\} \end{matrix}$ konveks kümelerdir.
    - Açık yarıuzaylar: $\begin{matrix} \{x \in E^n : \langle x_1, x^* \rangle < a\} \\ \{x \in E^n : \langle x_1, x^* \rangle > a\} \end{matrix} x^* \in E^n;\ x^* \neq 0; a \in E\ konveks\ kümelerdir.$
- <u>Örnek:</u> $S = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \geq 1\} \cap \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 \geq 2\}$ kümesi konveks mi?
  - $x_2 \leq x_1 - 2\ konvekstir.$



- Teorem: Eğer $S_1, S_2 \subset R^n$ $konveks\ kümeler\ ise\ a)\ S_1 \cap S_2\ de\ konvekstir. b)\ S_1 \pm S_2\ de\ konvekstir.$
    - İspat: Sonlu sayıda yarıuzaylar konveks olduğu için, onların birleşimi de konvekstir. Aynı x ve y hem S_1'in, hem de S_2'nin elemanı olduğu için $S_1 \cap S_2$'nin de elemanı oluyor.
- Tanım: $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X\ noktaları\ verilsin. Eğer\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\ ;\ \lambda_i \geq 0\ ise\ X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\ vektörüne\ x_1, x_2, \ldots, x_p\ vektörünün$ $\boldsymbol{konveks\ kombinasyonu}$ $(konveks\ bileşeni)\ denir.$
- Teorem: Konveks kümenin noktalarının keyfi kombinasyonu bu kümeye dahildir.
- Tanım: $X \subset E^n$ kümesi verilsin. X kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine X'in **konveks kabuğu** (örtüsü) denir ve **Co(X)** şeklinde gösterilir. Bir başka değim ile: Bir kümenin konveks örtüsü, bu kümeyi içeren en küçük konveks kümeye denir.
- $S \subset R^n\ olsun. Bu\ kümenin\ konveks\ örtüsü\ Co(S)\ gibi\ gösterilir. Co(S) = \{x \in E^n: \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$
- Örnek: Aşağıdaki kümelerin konveks örtüsünü gösteriniz. $a)\ S = \{x_1, x_2\}, b)\ S = \{x_1, x_2, x_3\},$ $c)\ S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$



- A şıkkı için iki noktayı birleştiren doğruyu gösterir. B şıkkı için 3 noktayı birleştiren üçgeni gösterir. C şıkkı için 4 noktayı birleştiren dörtgendir.
- Örnek: $S = \{0, 0\} \cup \left\{(x_1, x_2): x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\} kümesinin\ konveks\ örtüsünü\ belirleyiniz.$



    - S kümesi konveks küme değildir, fakat kapalı kümedir. Bu durumda S kümesinin konveks örtüsü: $Co(S) = \{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}\ olacaktır.$

- Teorem: $X \subset E^n\ kümesinin\ konveks\ örtüsü, X'in\ noktalarının\ keyfi\ konveks\ kombinasyonları\ kümesine\ eşittir.$

$$Co(x) = \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i : x_i \in X;\ \lambda_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\ ;\ \forall p\right\}$$

- Teorem (Caretheodory): $X \subset E^n$ $kümesi\ verilsin. Bu\ durumda\ \forall x \in Co(X) için\ öyle\ x_1, x_2, \ldots, x_p \in X, \lambda_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\ vardır\ ki, X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\ ve\ p \leq n+1.$

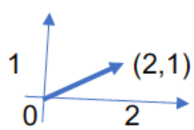
  $X \subset E^n$ $kümesi\ kompakt\ ise\ Co(x)\ kümesi\ de\ kompakt\ kümedir.$
- Tanım: E^n'de sonlu sayıda noktanın konveks örtüsüne **polytop** denir.
- Örnek: a, b, c noktaları verilsin Bu noktalar için polytopu gösterin.
  - Verilen noktaları orijinde birleştirerek vektör şeklinde gösterelim:

  - abc üçgeni bir politopdur.
    - $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_1\}$ vektörleri lineer bağımsız ise, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektörlerine **afin bağımsız vektörler** denir.
    - Eğer $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ vektöründen oluşan küme afin bağımsız ise konveks örtüye **simpleks** denir.
    - $y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n = 0$ (1) eşitliği ancak ve ancak $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ durumunda sağlanıyorsa, o zaman $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.
    - Eğer (1) eşitliği y katsayılarından en az bir tanesinin $\neq 0$ durumu için de sağlanıyorsa, o zaman bu vektörler **lineer bağımlıdır** denir.
- Örnek: Tek vektörden oluşan küme lineer bağımsız mı?
  - $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $vektöründen\ oluşan\ küme\ verilsin. Bu\ kümenin\ lineer\ bağımsız\ olup\ olmadığını\ inceleyelim:$

    $Bunun\ için\ a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ ifadesinin\ sağlanmasının\ bir\ tek\ a$

    $= 0\ durumunda\ gerçekleşmesi\ gerekiyor. Gerçekten\ de\ a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ eşitliği\ bir\ tek\ a$

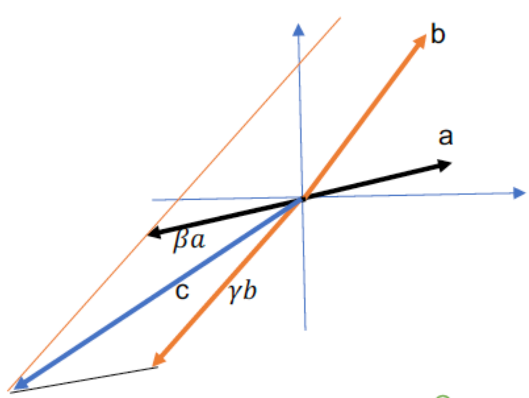
    $= 0\ durumunda\ sağlanıyor. Bu\ ise\ o\ demektir\ ki, tek\ vektörden\ oluşan\ küme\ lineer\ bağımsızdır.$



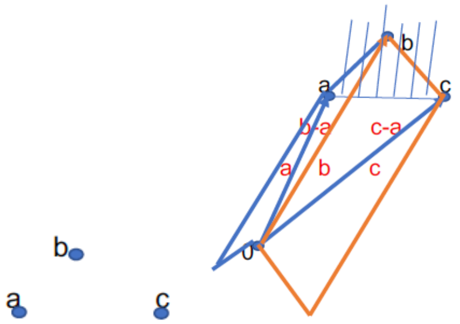
  - Yani, tek vektörden oluşan küme = 0 ise lineer bağımsız, $\neq 0$ ise lineer bağımlıdır.
- Örnek: $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörleri lineer bağımlı mı?
  - $\beta_1 a + \beta_2 b = \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ eşitliği\ bir\ tek\ \beta_1 = \beta_2 =$

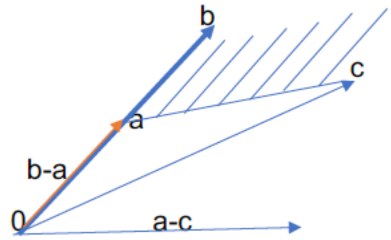
    $0\ durumunda\ sağlandığı\ için\ a\ ve\ b\ vetköleri\ lineer\ bağımsızdır.$

    Eğer (a,b,c) şeklinde 3 vektör verilirse,o zaman c vektörünü her zaman a ve b vektörlerinin lineer birleşimi şeklinde gösterebiliriz. c = βa + y

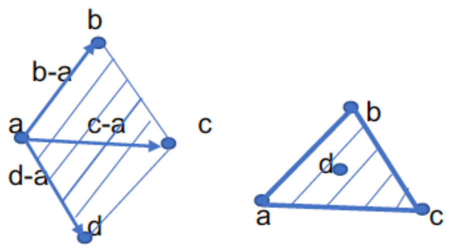


- Örnek: a, b, c noktaları verilsin. Bu noktalar için simpleks'i gösterin.
  - a, b, c noktalarını orijinde birleştirerek vektör şeklinde gösterelim. Bu noktalar için Co(a, b, c) bir simpleks'dir. 3. Durumda da Co(a, b, c) simpleks'dir.

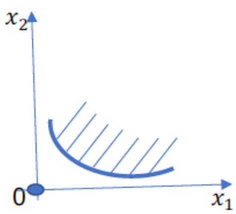




- a, b, c, d vektörleri verilsin. Bu vektörler afindir. O zaman onların birleşiminden oluşan örtü konvekstir, fakat simpleks değildir. Co(a, b, c, d) = Co(a, b, c)



- <u>Soru:</u> Bir kümenin konveks örtüsündeki noktalar, kümenin kaç noktası gösterilerek elde edilebilir?
- <u>Cevap:</u> Carathcodory teoremine göre kümenin konveks örtüsündeki noktaları en fazla n+1 adet nokta göstererek elde edebiliriz.
- <u>Örnek:</u> $S = \{(0,0)\} \cup \left\{(x_1, x_2): x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ *kümesi konveks mi?*
  - S kümesi konveks değil, fakat kapalı kümedir.



<u>Bir Kümenin Kapanışı ve İç Noktaları</u>

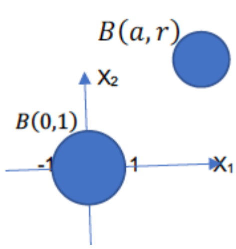
$$X \in R^n\,; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

$B = \{\|X\| \leq 1\}$, *Bu ifade merkezi orijinde, yarıçapı 1 olan daireyi gösteriyor.* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$

B(a, r) olacak şekilde bir yuvar alalım:

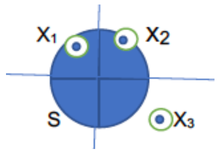
B(a, r) = $\{X \in E^n: \|x - a\| \leq r, r > 0\}$. $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2$

Bu yuvara **a'nın r komşuluğu** denir.



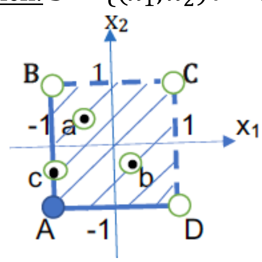
$\bar{x}$ *noktasının* ε *komşuluğu dediğimizde aşağıdaki yuvarın içi anlaşılıyor:* $\forall \varepsilon > 0;\ N_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in E^n: \|x - \bar{x}\|\} < \varepsilon$

- Tanım: Boş olmayan $S \subset E^n$ *kümesi alalım. Eğer* $S \cap N_\varepsilon(\bar{x}) \neq \emptyset$; $\forall \varepsilon > 0$ *ise x noktasına S kümesinin kapanış noktası (kapanışı) denir. Başka bir değimle:* $S \subset E^n$ *kümesi ve* $x \in R^n$ *noktası verilsin.* Eğer x noktasının istenilen komşuluğunun S kümesi ile kesişimi boş küme değilse,x noktasına S kümesinin kapanış noktası denir.
- Örnek: S, yarıçapı 1 olan bir daire olsun ve x_1, x_2, x_3 noktaları aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Bu noktalar S'in kapanış noktaları mı?



  - x_1 noktası A komşuluğu ile S kümesinin içerisinde olduğu için bu noktanın komşuluğu ile S kümesinin kesişimi boş küme değil. Yani, x_1 noktası kapanış noktasıdır.
  - x_2 noktası A komşuluğu ile S kümesinin kesişimi boş küme değil. Yani, x_2 noktası da kapanış noktasıdır.
  - x_3 noktasının A komşuluğu ile S kümesinin kesişimi boş kümedir. Yani, x_3 noktası kapanış noktası değildir.
- S'in tüm kapanış noktalarından oluşan kümeye S'in **kapanış kümesi** denir ve **cl(S)** gibi gösterilir.
- Eğer cl(S) = S ise S'e **kapalı küme** denir.
- (a, b) aralığını alalım. Bu küme uç noktaları olan a ve b noktalarını içermiyor, fakat bu noktaların A komşuluğu kümeyi içerdiği için a ve b noktaları **kapanış noktaları** oluyor. 

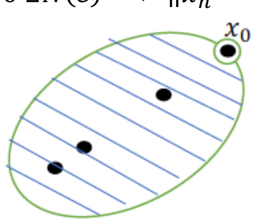
- Tanım: $S \subset E^n$ *ve* $x \in S$ *olsun.* Eğer x noktası belli bir komşuluğu ile S kümesine dahil oluyorsa, bu noktaya S kümesinin **iç noktası** denir. S'in tüm iç noktaları kümesine S'in **iç kümesi** denir ve **int S** gibi gösterilir.
- Örnek: $S = \{(x_1, x_2): -1 \leq x_1 < 1;\ -1 \leq x_2 < 1\}$ kümesini inceleyiniz.



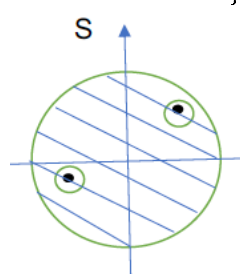
  - Bu kümede A = (-1, 1) noktası kapanış noktasıdır ve A noktası S kümesinin elemanıdır. C = (1, 1) noktasıdır, fakat S kümesinin elemanı değildir.

    int(S) = {(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 1; -1 < x_2 < 1}, cl(S) = {(x_1, x_2): -1 ≤ x_2 ≤ 1; -1 ≤ x_2 ≤ 1}

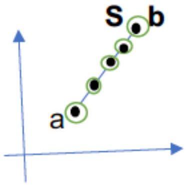
    Burada a ve b noktaları S kümesinin iç noktalarıdır, c noktası ise S kümesinin iç noktası değildir. Eğer S = int(S) ise S'e **açık küme** denir. Başka değimle: $x \in S$ *ve* $\exists \varepsilon > 0$ *için* $N_\varepsilon(x) \subset S$ ise x S'in iç noktasıdır denir.
- Tanım: $\forall \{x_n\} \subset S$ *dizisi verilsin. Böyle ki,* $x_n \to x_0$*. Bu durumda eğer* $x_0 \in S$ *ise, S'e **kapalı küme** denir.*
  - $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \implies \|x_n - x_0\| < \varepsilon$



- Örnek: $S = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ *kümesi verilsin. Bu küme açık küme mi?*

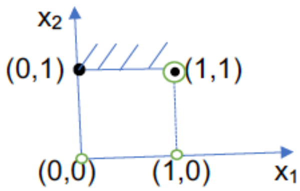


- x_1 *ve* $x_2 \in S$ noktalarına bakalım: x_1 noktası istenilen komşuluğu ile S kümesinin içerisinde yer alıyor. Fakat x_2 noktasının komşuluklarının bir kısmı kümenin dışında kalıyor. Bu ise S kümesinin açık küme olmadığını gösteriyor.
- Örnek: 2 boyutlu uzayda a ve b noktaları verilsin. Bu (a, b) noktalarını birleştiren doğru parçası için ne söyleyebiliriz?

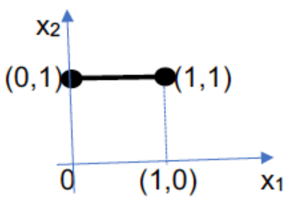


  - S = (a, b) aralığına bakalım: Bu kümede a ve b noktaları kapanış noktalarıdır. Fakat S kümesi kapalı küme değildir, çünkü küme tüm kapanış noktalarını içermiyor (a ve b noktaları kümeye dahil olmadığı için). S kümesinin hiçbir noktası iç nokta değildir. Yani, int S = ∅. Dolayısı ile küme açık küme de değildir.
- Bir boyutlu uzayda (sayı doğrusunda) (a, b) aralığı açık kümedir. Çünkü bir boyutlu uzayda her noktanın istenilen komşuluğu kümeye dahildir. 

- Örnek: $a)\ S_1 = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < 1\ ;\ x_2 = 1\}$
  $b)\ S_2 = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 1\ ;\ x_2 = 1\}$ $bu\ kümeler\ için\ ne\ söyleyebiliriz?$
  - a) Bu S_1 kümesi kapalı küme değildir. Küme açık küme de değil.



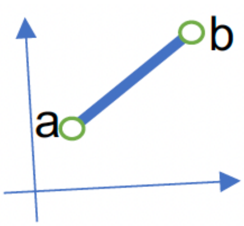
  - b) S2 kümesi kapalı kümedir.



- Tanım: S kümesinin sınır noktaları ∂S ile gösterilir ve $x \in \partial S$ noktası bir ε için hem S'den hem de S'den olmayan noktaları içeriyorsa, ona **sınır noktası** denir. Yani, $\forall \varepsilon\ ve\ x\ \in \partial S\ için\ N_\varepsilon(x) \cap S\ \neq 0\ ve\ N_\varepsilon(x) \cap S^c\ \neq 0$

$$[S^c - S'intamamlayıcı\ kümesidir\ (complement\ of\ S);\ S^c = E^n/S$$
$$[\partial S - S'in\ sınırıdır\ (boundary\ of\ S)]$$

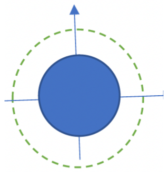
- Örnek: S = (a, b) kümesinin sınır noktaları nedir?
  - Bu kümenin tüm noktaları, a ve b noktaları da dahil olmakla sınır noktalarıdır.



Sınırlı Küme

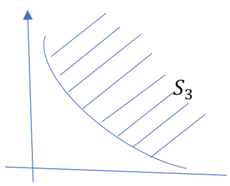
- Tanım: Eğer S kümesi sonlu yarıçapa sahip bir yuvarın içine alınabilirse, ona **sınırlı küme** denir. $\exists M > 0\ sayıs\iota\ varsa\ ki, S\ \subset \{x: \|x - 0\| \leq M\}\ o\ zaman\ sınırlı\ kümedir.$
- Örnek: a) $S_1 = \{(x, y): x^2 + y^2\ \leq 1\}, b)\ S_2 = \{x: x \in (a, b)\}, c)\ S_3 = \left\{(x_1, x_2): x_2\ \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ kümeleri sınırlı kümeler mi?

- a) $S_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 \ \leq 1\}$ *kümesinin geometrik gösterimi yarıçapı* 1 *olan dairedir*. Bu daireyi içine alabilen bir yuvar vardır. Bu sebepten S_1 kümesi sınırlı kümedir.

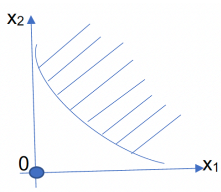


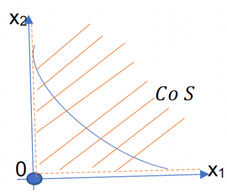
- b) $S_2 = \{x: x \in (a,b)\}$ kümesinin geometrik gösterimi uç noktalarını içermeyen bir doğru parçasıdır. Bu doğru parçası da bir yuvarın içine alınabildiğine göre S_2 kümesi de sınırlı kümedir.

- c) $S_3 = \left\{(x_1, x_2): x_2 \ \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ kümesinin geometrik gösterimi kolları koordinat eksenlerine asimptotik olarak yaklaşan bir hiperboldür. Bu hiperbolü hiçbir yuvarın içine alabilemeyeceğimize göre S_3 kümesi sınırlı küme değildir.

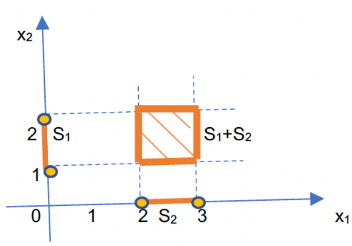


- Tanım: $S \ \subset \ E^n$ olsun Eğer S kümesi hem kapalı hem de sınırlı ise ona **kompakt küme** denir.
- Örnek: $S = \{0,0\} \cup \left\{(x_1, x_2): x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$ *kümesi konveks küme mi?*
  - Bu küme konveks değildir. Küme kapalı kümedir. Şimdi bu kümenin konveks örtüsünü oluşturalım: $Co(S) = \{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\} \cup \{0,0\}$. Bu küme ne açık, ne de kapalı değildir.
  - S_1 ve S_2 konveks kümeler ise, onların toplamı $S_1 + S_2$ de konveks kümedir.



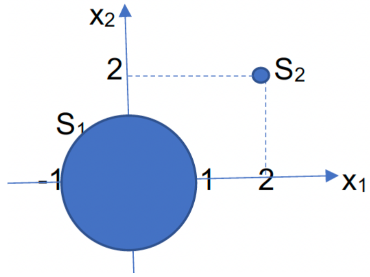


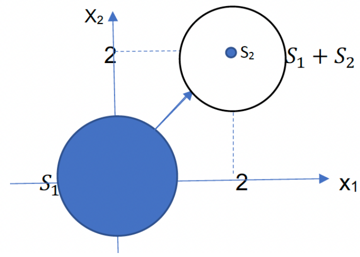
- Örnek: $S_1 = \{(x_1, x_2): x_1 = 0, 1 \leq \ x_2 \ \leq 2\}, S_2 = \{(y_1, y_2): y_2 = 0, 2 \leq y_1 \leq 3\}$ $S_1 + S_2$ *kümesini araştırın.*
  - $S_1 + \ S_2 = \{Z = (z_1, z_2): z_1 = \ x_1 + \ y_1; \ z_2 = x_2 + y_2, \ x \ \in \ S_1, y \ \in \ S_2\} = \{Z = (z_1, z_2): 2 \leq \ z_1 \leq 3, 1 \leq z_2 \leq 2\}$



- S_1 ve S_2 kümeleri açık küme değildir. Her iki küme kapalı kümedir. Her iki küme konveks kümedir, bu kümelerin toplamı da konveks kümedir.
- Örnek: $S_1 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + \ x_2^2 \leq 1\}, S_2 = \{(2,2)\}, S_1 + S_2$ *bulunuz.*
  - $S_1 + \ S_2 = \{y = (y_1 + y_2): (x_1, x_2) \in S_1, y = (x_1, x_2) + (2,2)\} = \{y = (x_1, x_2): y = (x_1 + 2, x_2 + 2); \ x_1, x_2 \ \in S_1\}$

    $\left.\begin{matrix} x_1 + 2 = \ y_1 \\ x_2 + 2 = \ y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 \ = \ y_1 - 2 \\ x_2 \ = \ y_2 - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ (y_1 - 2)^2 + \ (y_2 - 2)^2 \ \leq 1$. Yani, $S_1 + S_2$ merkezi (2, 2) noktasında, yarıçapı 1 olan çemberin içidir. Eğer S kümesi içi boş olmayan konveks küme ise, o zaman onun iç noktalar kümesi (int(S)) de konveks kümedir ve cl(int(S) = cl(s), int(cl(s)) = int(S)





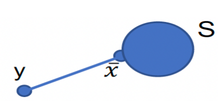
Weierstrass Teoremi

- Sayı doğrusu üzerindeki kümeler için inf, sup, min, max kavramları.
- $I \subset R$ $olsun.$ $a \in I$ ve $x \geq a, \forall x \in I$ $koşulu$ $sağlanıyorsa,$ $a'ya$ I $kümesinin$ $\boldsymbol{minimum\ elemanı}$ $denir.$
- $I \subset R$ $olsun.$ $b \in I$ ve $x \leq b, \forall x \in I$ $koşulu$ $sağlanıyorsa,$ $b'ye$ I $kümesinin$ $\boldsymbol{maksimum\ elemanı}$ $denir.$
- Örnek: I = [a, b] kümesi verilsin. Kümenin en küçük, en büyük, min ve max elemanlarını bulunuz.
  - Bu durumda a I kümesinin en küçük elemanı, b ise I kümesinin en büyük elemanı oluyor. Yani, a = min(I); b = max(I) olur.
- Tanım: $A \subset R, \forall m \subset R \implies m \leq a, \forall a \in A$ için m'e A'nın **alt sınırı** denir. A kümesinin en büyük alt sınırına **inf(A)** denir. Bir başka değimle: Eğer $\forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists a \in A$ $varsa$ $ki,$ $a < a + \varepsilon$ $olsun,$ o $zaman$ a $sayısına$ $A'nın$ $\boldsymbol{inf(A)}$ $\boldsymbol{denir}.$
- Tanım: $Eğer$ $\forall \varepsilon > 0$ $için$ $\exists \beta \in A$ $varsa$ $ki,$ $b - \varepsilon < \beta$ $olsun,$ o $zaman$ b $sayısına$ $A'nın$ $\boldsymbol{sup(A)}$ $denir.$ $Yani,$ b en $küçük$ $üst$ $sınırdır.$ $Eğer$ $a = \min(A)$ ise, o $zaman$ $\inf(A) = \min(A)$.
- Şimdi farklı bir küme alalım: $I = (c, d)$. Bu kümedeki c noktası en küçük eleman değil. Çünkü, kime açık kümedir ve c noktasının yakın komşuluğundan herhangi bir x noktası alırsak, ondan daha küçük en az bir eleman vardır. Bu durumda $c'ye$ I kümesinin $\boldsymbol{inf}$ noktası denir:
  - $\boldsymbol{c = inf(I)}$, $\boldsymbol{c < x}$, $\boldsymbol{\forall x \in I}$
- Aynı şekilde, d noktası da en büyük eleman değil, aynı sebepten d noktası I kümesinin sup noktasıdır.
  - $\boldsymbol{d = \sup(I)}$, $\boldsymbol{x < d}$, $\boldsymbol{\forall x \in I}$
- Eğer bir nokta min ise, bu nokta hem de inf noktadır.
- Eğer bir nokta max ise, bu nokta hem de sup noktadır.- Eğer kümenin min ve max noktaları yoksa, o zaman bu kümenin inf ve sup noktaları vardır.
- Teorem: $X = \{x \in S \colon f(x) \leq 0\} \rightarrow x \neq \emptyset$ kompakt bir küme olsun. (Verilen X kümesi uygun çözümler kümesidir).
- $f_0 : X \rightarrow R \Rightarrow$ amaç fonksiyonu sürekli ise
$$\left.\begin{matrix} f+(x) \rightarrow min \\ f(x) \leq 0, x \in S \end{matrix}\right\} (P)$$
- (P) probleminin, yani, min $\{f+(x)$: $x \in X\}$ probleminin en iyi çözümü vardır. Yani, $\exists \bar{x} \in X : f_0(\bar{x}) \leq f_0(x), \forall x \in X$

Kümelerin Desteklenmesi (Support) ve Ayrılması (Seperation)

- Teorem (Verilmiş bir noktadan konveks kümeye kadar olan en kısa uzaklık hakkında): S boş olmayan, kapalı, konveks bir küme olsun. $S \subset E^n$ ve $y \notin S$ $olsun.$ Bu durumda S kümesinde y'ye yakın olan bir nokta vardır. Yani, $\exists \bar{x} \in$ S var ki, onun y'ye uzaklığı minimumdur.

- $\|y - \bar{x}\| = \min\{\|y - x\| \colon x \in S\}, f_0(x) = \|y - \bar{x}\| \rightarrow \underset{x \in S}{min}, \underset{x \in S}{min} \|y - x\| = \|y - \bar{x}\|$ $\bar{x} \in S$

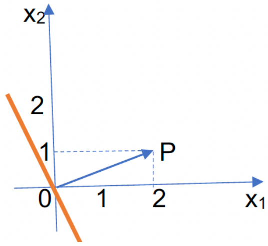


Hiperdüzlem

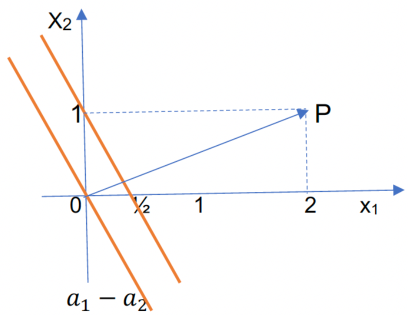
- $P \in E^n$ olan herhangi bir vektör olsun ve $P \neq 0$, $\alpha \in R$ olsun. Bu durumda (P, α) çiftinin tanımladığı hiperdüzlem aşağıdaki gibi gösterilir:

  $H(P, \alpha) = \{x \in E^n : P'x = \alpha\}$
- Buradaki P vektörüne H hiperdüzleminin **normal (dik) vektörü** denir.

- Örnek: $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a = 0 \implies H(P,a) = \left\{ x \in R^2 : (2,1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{(x_1, x_2): 2x_1 + x_2 = 0\}$. Yani, ikiboyutlu uzayda doğru, hiperdüzlemin özel bir halidir.

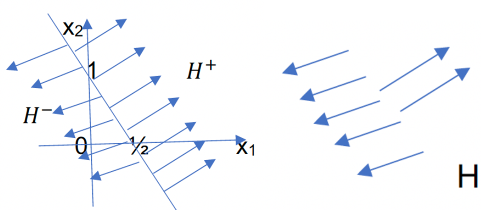


- Örnek: $H(P,1) = \{(x_1, x_2): 2x_1 + x_2 = 1\}$ $P \perp a_1 - a_2$. $\left.\begin{matrix} P' a_1 = a \\ P' a_2 = a \end{matrix}\right\} \implies P'(a_1 - a_2) = 0$

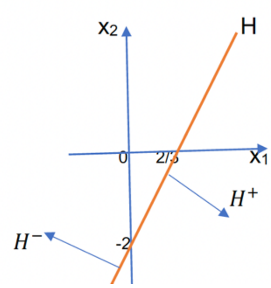


Hiperdüzlemin Tanımladığı Yarıuzaylar

- Tanım: Bir hiperdüzlemin tanımladığı yarıuzaylar aşağıdaki şekilde ifade edilir: $H^+(P,a) = \{x \in E^n : P'x \geq a\}$ ve $H^-(P,a) = \{x \in E^n : P'x \leq a\}$
- Örnek: $H(P, 1) = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \geq 1\}$ yarıuzayları gösteriniz.
  - $x_2 \geq -2x_1 + 1$



- Örnek: $H = \{(x_1, x_2): 3x_1 - x_2 = 2\}$ hiperdüzlemi verilsin. Bu hiperdüzlemin tanımladığı yarıuzayları gösteriniz.
  - $x_2 = 3x_1 - 2, H^+ = \{(x_1, x_2): 3x_1 - x_2 \geq 2\}, x_2 \leq 3x_1 - 2, H^- = \{(x_1, x_2): 3x_1 - x_2 \leq 2\}, x_2 \geq 3x_1 - 2$
- $H^+(P,a) = \{x \in E^n : P'x \geq a\}$, $H^-(P,a) = \{x \in E^n : P'x \leq a\}$
  şeklindeki yarıuzaylara ***kapalı yarıuzaylar****,*
- $H^+(P,a) = \{x \in E^n : P'x > a\}$, $H^-(P,a) = \{x \in E^n : P'x < a\}$
  şeklindeki yarıuzaylara ***açık yarıuzaylar*** *denir.*



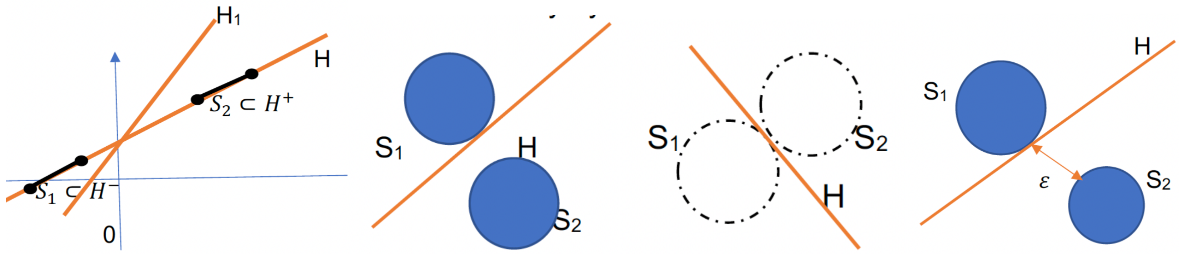
Destek Hiperdüzlemler ve Kümelerin Destek Noktaları

- Tanım: $\emptyset \neq S \subset E^n$ *olsun. Eğer* $S \subset H^+$ $(veya\ H^-)$ *olursa ve* $H \cap cl(S) \neq \emptyset$ *ise, o zaman H hiper düzlemi* S kümesine **destek hiperdüzlem** denir. Boş olmayan kesişimden alınan $\bar{x}$ noktasına, S kümesinin H hiperdüzlemine göre **destek noktası** denir. $\bar{x} \in H \cap cl(S)$. Başka değimle, H hiperdüzlemi $\bar{x}$ noktasında S kümesini destekliyor denir.

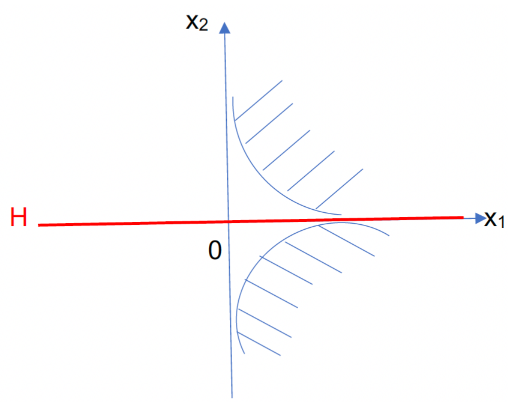
Kümelerin Ayrılması

- Tanım: S_1 *ve* $S_2 \subset E^n$ *boş olmayan alt kümeler olsun ve* $H(P,a) = \{x \in E^n : P'x = a\} \subset E^n$ bir hiperdüzlem olsun.

- Eğer $\left.\begin{matrix} S_1 \subset H^+ \\ S_2 \subset H^- \end{matrix}\right\}$ $yani, \begin{cases} P'x \geq a, \forall x \in S_1 \\ P'y \leq a, \forall y \in S_2 \end{cases}$ $ise\ o\ zaman\ H\ hiperdüzlemi\ S_1\ ve\ S_2$ **kümelerini ayırıyor** denir.
- Buna ek olarak, $S_1 \cup S_2 \not\subset H$ ise H hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini **has ayırıyor** denir. (properly seperation)
- Eğer $\left.\begin{matrix} S_1 \subset H^+ \\ S_2 \subset H^- \end{matrix}\right\}$ $yani, \begin{cases} P'x > a, \forall x \in S_1 \\ P'y < a, \forall y \in S_2 \end{cases}$ $ise\ o\ zaman\ H\ hiperdüzlemi\ S_1\ ve\ S_2$ **kümelerini kesin ayırıyor** denir. (strictly seperation)
- Eğer $\exists \varepsilon > 0\ sayısı\ varsa\ ki, \begin{cases} P'x \geq a + \varepsilon, \forall x \in S_1 \\ P'y \leq a, \forall y \in S_2 \end{cases}$ o zaman H hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini **kuvvetli ayırıyor** denir. (strongly seperation)
- Örnekler: S_1 ve S_2 kümeleri verilsin. a) H hiperdüzlemi bu iki kümeyi ayırıyor. Bu ayırma has ayırma değildir. H_1 hiperdüzlemi de bu iki kümeyi ayırıyor ve has ayırıyor. b) H hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini has ayırıyor, fakat kesin ayırmıyor. $S_1 \subset H^-$; $S_2 \subset H^+$. c) H hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini Has ve kesin ayırıyor. $S_1 \subset H^-$; $S_2 \subset H^+$. d) H hiperdüzlemi S_1 ve S_2 kümelerini has, kesin ve kuvvetli ayırıyor.



- Örnek: $S_1 = \left\{(x_1, x_2): x_2 \geq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}, S_2 = \left\{(x_1, x_2): x_2 \leq \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\right\}$. S_1 ve S_2 kapalı konveks kümelerdir. Bu kümeleri ayıran hiperdüzlem var mı?
  - Bu kümeleri ayıran hiperdüzlem var. Bunu gösterelim:
    - $H = \{(x_1, x_2): x_1 = 0\}$
    - $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a = 0$
    - $\forall x = (x_1, x_2) \in S_1 : P'x > \alpha \Rightarrow x_2 > 0$
    - $\forall x = (x_1, x_2) \in S_2 : P'x > \alpha \Rightarrow x_2'r.$
  - Bu durum kesin ayırmanın tanımına uygundur. H hiperdüzlemi bu kümeleri kuvvetli ayıramaz ve bu kümeleri kuvvetli ayıran hiperdüzlem yoktur. Çünkü, x_1 eksenine ε kadar hareket ettirirsek, eğri ile eksen kesişecektir.

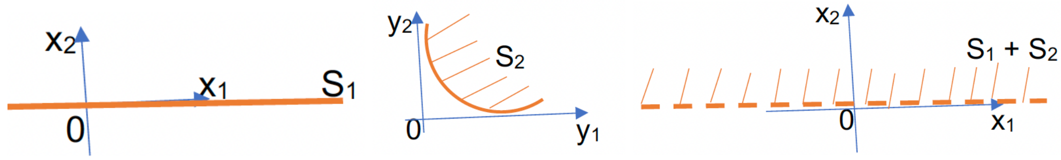


- Teorem: Eğer S_1 ve S_2 konveks, S_1 kompakt, S_2 ise kapalıysa, o zaman $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Bu durumda S_1 ve S_2 kümelerini ayıran bir hiperdüzlem vardır.
- Teorem: $\emptyset \neq S_1, S_2 \subset E^n$ ve S_1 kompakt küme ise, o zaman $S_1 + S_2$ kapalı kümedir.
- Örnek: $S_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2: x_2 = 0\}, S_2 = \{(y_1, y_2) \in R^2: y_2 \geq \frac{1}{y_1}, y_1 > 0\}$. Bu durumda

$$S_1 + S_2 = \{Z = (z_1, z_2): (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)\}$$

$$= \left\{Z = (z_1, z_2): z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2, x_2 = 0, y_1 > 0, y_2 \geq \frac{1}{y_2}\right\} = \{(z_1, z_2): x_2 > 0\}$$

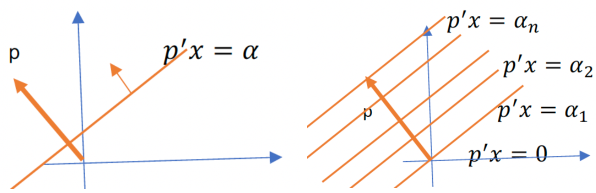
  - S_1 kümesi, S_2 kümesi, $S_1 + S_2$ kümesi



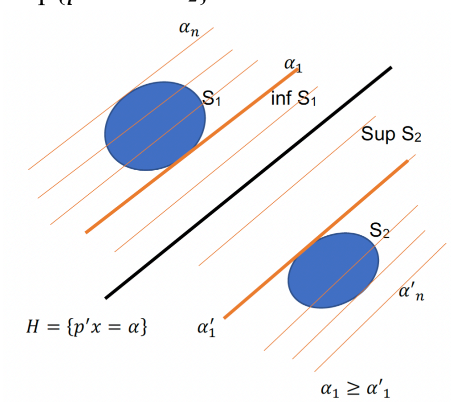
- S_1 ve S_2 kümelerini ayıran bir hiperdüzlem vardır ve bu hiperdüzlem X eksenidir. Yani, S_1 kümesinin kendisidir.

Ayırma Teoremleri

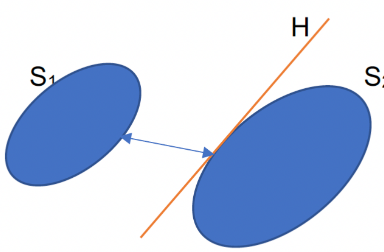
- Teorem: S_1 ve S_2 $\subset E^n$ boş olmayan konveks alt kümeler olsun. Eğer $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ise, o zaman bu iki kümeyi birbirinden ayıran en az bir hiperdüzlem vardır. $\exists p \in E^n, p \neq 0$ vektörü vardır ki, $inf\{p'x: x \in S_1\} \geq sup\ \{p'x: x \in S_2\}$ sağlanıyor.
- Örnek: H = {x: p'x = a} hiperdüzlemini gösteriniz.



- Örnek: S_1 ve S_2 kümeleri verilsin. Bu kümeler için inf ve sup bulunuz.
  - $\alpha_1 = \inf\{p'x: x \in S_1\}$
  - $\alpha_1' = \sup\{p'x: x \in S_2\}$



  - Eğer bir küme konveks ise, onun iç noktaları da, kapanışı da konvekstir.
- Kuvvetli Ayırma Teoremi: S_1 ve S_2 boş olmayan, konveks, sınırlı kümeler olsun ve S_1 kompakt, S_2 kapalı, sınırlı küme ve $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olsun. O zaman bu iki kümeyi birbirinden kuvvetli ayıran bir hiperdüzlem vardır: $\exists p \in E^n, p \neq 0, \exists \varepsilon > 0\ var\ ki, \inf\{p'x: x \in S_1\} \geq \sup\{p'x: x \in S_2\} + \varepsilon, \alpha_1 \geq \alpha_2 + \varepsilon$. Yani, hiperdüzlemle kümelerden birinin arasında küçük de olsa bir mesafe vardır.



Koniler

- Tanım: $K \subseteq E^n, \forall x \in K\ ve\ \forall x \geq 0\ için\ \lambda x \in K\ olursa, K'ya$ tepe noktası orijinde olan **koni** denir.
- Örnek: Aşağıdaki ifadeler birer koni mi?
  - $K_1 = R^n - Konidir$
  - $K_2 = \{(x_1, x_2): x_2 = 0\} - Konidir$
  - $K_3 = \{(x_1, x_2): x_2 = 0,\ x_1 \geq 0\} - Konidir$
  - $K_4 = \{(x_1, x_2): x_2 \geq |x_1|\} - Konidir$
  - $K_5 = \{(x_1, x_2): x_2 = x_1,\ x_1 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2): x_2 = 2x_1,\ x_1 \geq 0\} - Konidir, fakat\ konveks\ değil$

- $K_6 = \{(x_1, x_2): \ x_1 \leq x_2 \leq 2x_1, \ x_1 \geq 0\} - Konidir, konveks \ konidir$
- $K_7 = \left\{(x_1, x_2): \ x_2 \geq \frac{1}{x_1}, \ x_1 \geq 0\right\} - Koni \ değildir. Kapalı, sınırsız, konveks$ $kümedir$
- $K_8 = \{(x_1, x_2): \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} - Koni \ değildir$
- $K_9 = \{(x_1, x_2): \ x_1 - x_2 = -1\} - Koni \ değildir$
- $K_{10} = \{(x_1, x_2): \ x_2 = ax_1\} - Konidir$
- $K_{11} = \{(x_1, x_2): \ x_1 \leq x_2 \leq 2x_1, x_1 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2): \ x_1, x_2 \leq 0\} - Konidir, fakat \ konveks \ değil$

Polyhedral Kümeler

- Sonlu sayıda kapalı yarıuzayların kesişimi şeklinde gösterilebilir kümelere **kapalı polyhedral** kümeler denir.

Uç Noktalar

- $S \subset E^n \ ve \ \bar{x} \in S \ olsun.$ Eğer $\bar{x}$ noktası S kümesinin 2 farklı elemanının konveks birleşimi olarak yazılabiliyorsa, bu noktaya ($\bar{x}$) S kümesinin **uç noktası** denir.
- Örnek: $\{x \in E^n: \ \|x\| \leq 1\}$ kümesinin uç noktaları nedir?
  - Bu kümenin uç noktaları uç noktaları kümesi $\|x\| = 1$ çemberinin kendisidir.
- Örnek: Karenin iç noktalar kümesi var mı?
  - Karenin iç noktalar kümesi, karenin köşe noktalarının kümesidir. Her kapalı konveks küme, onu destekleyen hiperdüzlemlerin oluşturduğu kapalı yarıuzayların kesişimi şeklinde gösterilebilir.

Uç Yön

- $S \subset R^n$ boş olmayan küme olsun, $d \in R^n$ de bir vektör olsun. Eğer, her $x \in S$ için $x + \lambda d$ vektörü her $\forall \lambda \geq 0$ için $S \subset R^n$ kümesinden olursa, o zaman $d \in R^n$ vektörüne S kümesinin bir **yön**ü veya **yön vektörü** denir.
- Eğer bir yön, diğer yönlerin konveks birleşimi şeklinde yazılamıyorsa, o zaman ona bu kümenin **uç yönü** denir.
- Örnek: $S = \{(x_1, x_2): \ x_2 \geq |x_1|\} = \underbrace{\{(x_1, x_2): \ x_2 \geq x_1\}}_{(1,-1)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \leq 0} \cap \underbrace{\{(x_1, x_2): \ x_2 \geq -x_1\}}_{(-1,-1)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \leq 0}$
  - Bu durumda $x_1 - x_2 \leq 0 \ \Rightarrow \ x_1 \leq x_2 \ ve \ \ -x_1 - x_2 \leq 0 \ \Rightarrow -x_1 \leq x_2$ olduğu için $d_1 = (1, 1) \ ve \ d_2 = (-1, 1)$ uç yönler olacaktır. Bu konveks, kapalı, polyhedral kümedir. $S \subset E^n, \ S = \{x \in E^n: \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ verilsin:

$$A_{m*n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \ b \in E^n; \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Burada S , tüm hiperdüzlemlerin kesişimi ile ortaya çıkan bir polyhedral kümedir. $a_1, a_2 \dots, a_m \in E^n$ vektörleri lineer bağımsız vektörlerdir. Yani, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots \lambda_n a_n = 0$ durumu bir tek $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ durumunda gerçekleşebilir. Bir uzaydaki lineer bağımsız vektörlerin sayısı, uzayın boyutu ile bağlantılıdır. $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset V$ vektörler uzayının alt kümesi olsun, $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ vektörleri lineer bağımsız olsun ve uzayın her bir vektörü. O zaman bu vektörler kümesine **taban vektörler kümesi** denir. Taban vektördeki eleman sayısına da **vektör uzayının (V) boyutu** denir. E^n'de her bir taban, tam n tane bağımsız vektörden oluşmaktadır. Eğer E^n'de n'den fazla vektör varsa, o zaman bu vektörler lineer bağımlıdır. Bir matrisin lineer bağımsız satır veya sütun sayısına, bu **matrisin rang'ı** denir. Matrisin bağımsız satır sayısı sütun sayısına eşittir.

- Teorem: $S \subset E^n, \quad S = \{x \in E^n: \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ ve $rank \ (A) = m$ olsun. $m \leq n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; b \in E^n; \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  - Eğer $rank \ (A) = m < n$ ise A matrisinin öyle bir B kare matrisi $(m * m)$ var ki, $\det(B) \neq 0$
- Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bu matrisin rank'ı nedir?
  - Matrisin rank'ı 2 dir.(Lineer bağımsız satır veya sütun sayısı.) Şimdi bu matristen üreyen kare matrislere (yani, (2x2) boyutlu matrislere) bakalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad det = 0; \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad det = 0; \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}; \quad det \neq 0;$$

- Şimdi A matrisini $B\ ve\ N$ matrisleri olarak iki matrise ayıralım:

  $A \begin{array}{l} \to B\ (m*m) \\ \to N(m*(n-n)) \end{array}$

  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
- Bu durumda, $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımladığımız vektör, $B^{-1}b \geq 0$ gibi vektördür. O zaman bu koşulları sağlayan X vektörü, S'in uç noktasıdır. Yukarıda tanımlanan küme $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ kadar uç noktaya sahiptir.

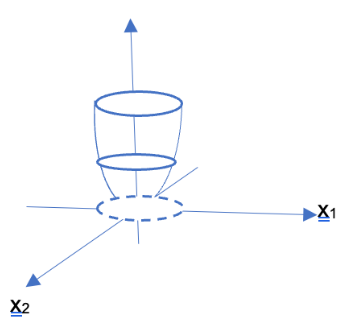
- Örnek: $S \subset E^n$; $S = \{x \in E^n,\ Ax = b;\ \ x \geq 0\}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - Şimdi, determinantı 0'dan farklı ($det \neq 0$) olan herhangi kare matrislere bakalım:

    $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \neq 0$; $N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

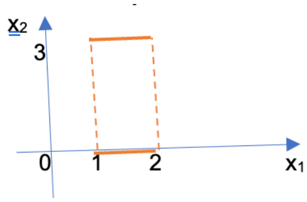
    $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \neq 0$; $N_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$
  - Şimdi B_1 matrisinin ters matrisini tersi.
- Tanım: $BB^{-1} = B^{-1}B = I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ ise, B^{-1} matrisine ters matris denir. Ters matrisin var olması için $\det \neq 0$ olması gerekiyor. B_1 matrisinin determinantını bulalım:

  $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 0 - (-4) = 4 \neq 0 \ \Rightarrow\ B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
- ($2*2$ ölçülü $matrislerin\ tersi$; $\frac{1}{\det(B)}$ 1.köşegendeki elemanların yerini değiştirip,2.köşegenin elemanlarının işaretlerini değiştirerek elde edilir)
- $B^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} > 0. \Rightarrow S$ kümesinin uç noktaları olan $\bar{X}$ vektörü aşağıdaki şekilde olur: $\bar{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
- Teorem: Bir önceki teoremin koşulları aynen geçerlidir. $A = \begin{bmatrix} \underbrace{B}_{m*m} & N \end{bmatrix}$. Burada B $m*m$ boyutlu, tersi olan bir matris olsun. a_j , N matrisinin bir sütunu iken, $\exists B^{-1}a_j \geq 0$ var ise, $\alpha = \begin{bmatrix} -B^{-1}a_j \\ l_j \end{bmatrix}$ vektörü S kümesinin uç yönüdür. $\bar{d} = \lambda d$ de uç yöndür. Buradaki λ bir katsayıdır. Uç yönlerin maksimum sayısı: $\frac{n!}{m!(n-m-1)!}$ Kadardır.
- Teorem: $S \subset E^n$; $S = \{x \in E^n\colon\ Ax = b,\ x \geq 0\}$, $x^1, x^2, \dots, x^k$ uç noktalar, $d^1, d^2, \dots, d^l$ uç yönler olsun.
- Bu durumda S kümesinin her elemanı bu uç noktaların konveks birleşimi ile uç yönlerin pozitif lineer birleşiminin toplamı şeklinde gösterilebilir.

  $\forall x \in S \ \Leftrightarrow\ x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j + \sum_{i=1}^{l} \mu_i d^i,\ \lambda_j \geq 0;\ \ \mu_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$
- Örnek: a) $S = \{(x_1, x_2,\ x_3)\colon\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}$ kümesinin uç ve sınır noktalarını gösteriniz.
  - Küme, kesitleri ve izdüşümü çember olan bir paraboloiddir. Kümenin uç noktaları: $S = \{(x_1, x_2,\ x_3)\colon\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}$; Sınır noktaları: $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ 'dır

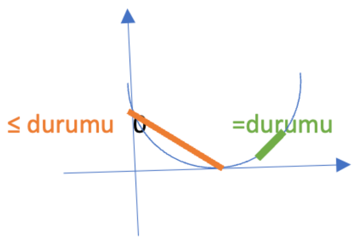


- $S = \{(x_1, x_2)\colon\ 1 \le x_1 \le 2\ ,\ \ x_2 = 3\ \}$ bu konveks kümedir, iç noktaları yoktur, kapanış noktaları kümenin kendisidir. Yani, kapalı kümedir.

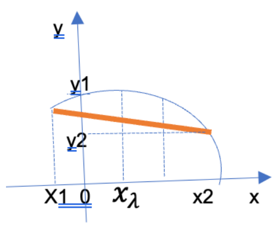


Konveks Fonksiyonlar

- Tanım: $\subset R^n\ ve\ \ f\colon\ S \to R \cup \{+\infty\}$ olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in S\ ve\ \ \forall\lambda \in [0,1]\ için\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ (1)
- Sağlanırsa, f fonksiyonuna S kümesinde **konveks fonksiyon** denir. Konveks fonksiyonun güzel yanı, onların konveks kümelerle birebir karakterize edilmeleri ile görülebilir.
- $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ ifadesi geometrik olarak x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren parçayı gösteriyor. ($\lambda'nın\ farklı\ değerleri\ için.$)
- $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ noktası olsun. (1) eşitsizliğinin sağ tarafı $y_1, y_2\ \ (f(x_1), f(x_2))$ doğru parçasını ifade ediyor. $\lambda[x_{1,}f(x_1)] + (1-\lambda)[x_2, f(x_2)] = [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)]$ ifadesi ise $[x_{1,}f(x_1)]\ ve\ [x_2, f(x_2)]$ noktalarını birleştiren kirişi gösteriyor. Böylece, (1) eşitsizliği aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir. Bir konveks fonksiyonun tanım kümesindeki $\forall x_1, x_2$ noktaları için $\left(x_1, f(x_1)\right)\ ve\ \left(x_2, f(x_2)\right)$ noktaları arasındaki eğri grafiği parçası, bu noktaları bağlayan doğru parçasının alt kısmında kalacaktır. (yani, $\le$)



- Tanım: $S \subset R^n\ ve\ \ f\colon\ S \to R \cup \{-\infty\}$ olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in S\ ve\ \ \forall\lambda \in [0,1]\ için\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ (2) sağlanıyorsa, f fonksiyonuna S kümesinde **konkav fonksiyon** denir. Burada $\left(x_1, f(x_1)\right) ve \left(x_2, f(x_2)\right)$ noktalarını birleştiren kiriş, eğri parçasının alt kısmında kalacaktır.

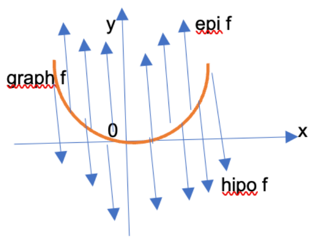


- $f(x_\lambda) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ Bu fonksiyonların tanım kümeleri konveks olmalıdır.
- Örnek: Afin fonksiyonlar konveks mi, konkav mı?
  - Afin fonksiyonlar hem konveks hem de konkav fonksiyonlardır. Bir afin fonksiyon alalım: $f(x) = ax + b$. Burada $x \in R^n\ ve\ \ a \in R^n\ \ vektör,\ \ b \in R\ ise\ sayıdır.$
  - $\forall x_1, x_2 \in S\ \ ve\ \ \lambda \in [0,1]$ için $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = a'[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] + b = \lambda(a'x_1) + (1-\lambda)(a'x_2) + \lambda b + (1-\lambda)b = \lambda(a'x_1 + b) + (1-\lambda)(a'x_2 + b) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
- Örnek: $y = x^2$ fonksiyonunun konveks olduğunu analitik olarak gösteriniz.
  - $y = x^2$ fonksiyonunun konvekstir. Yani, fonksiyon grafiğinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası, grafiğin içinde kalıyor. Bu durumu analitik olarak göstermek için $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \le \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bunun için $\forall x_1, x_2 \in S\ ve\ \lambda \in [0,1]$ seçelim. Bu durumda $(x_1 + x_2)^2 \ge 0\ \ olduğundan\ \ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \ge 0\ \ bu\ ifadeye\ göre\ x_1^2 + x_2^2 \ge 2x_1x_2$ olduğu için $2x_1x_2\ yerine\ x_1^2 + x_2^2$ yazabiliriz koşulunu göz önünde bulundurarak, analitik gösterime başlayabiliriz.

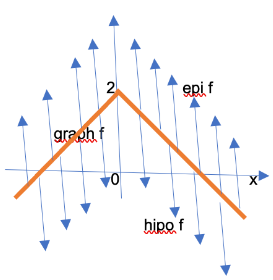
- $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 = \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 \le \lambda^2 x_1^2 + (x_1^2 + x_2^2)\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 x_2^2 = \underline{\lambda^2 x_1^2} + \underline{\underline{(1-\lambda)^2 x_2^2}} + \underline{\lambda x_1^2} - \underline{\lambda^2 x_1^2} + \underline{\underline{\lambda x_2^2}} - \underline{\underline{\lambda^2 x_2^2}} = \lambda\, x_1^2(\lambda + 1 - \lambda) + (1-\lambda)x_2^2(\lambda + 1 - \lambda) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Konveks Fonksiyonlar için Önemli Özellikler

- Eğer f konveks fonksiyon ise, -f konkav fonksiyondur.
- f herhangi bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun grafiğinin üst kısmına fonksiyonun **epigrafı** denir, epi f şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır: $epi\ f = \{(x,\alpha) \in S \times R :\ f(x) \le \alpha\}$
- f fonksiyonunun **grafı** *graph f* gibi gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $graph\ f = \{(x,\alpha) \in S \times R :\ f(x) = \alpha\}$
- f fonksiyonunun **hipografı** *hipograph f* gibi gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $hipo\ f = \{(x,\alpha) \in S \times R :\ f(x) \ge \alpha\}$
- Örnek: $y = x^2$ fonksiyonu için $epi\ f,\ graph\ f\ ve\ hipo\ f'i$ gösteriniz.



  - Fonksiyonun grafiği üzerindeki tüm noktalar (yani, eğrinin grafiği) *graph f* 'dir.
  - Eğri grafiğinin üst kısmında kalan noktalar kümesi *epi f* dir.
  - Eğri grafiğinin alt kısmında kalan noktalar kümesi *hipo f* dir.
  - Bu fonksiyonun epigrafı konveks kümedir.
  - Her konveks fonksiyonun epigrafı konveks kümedir. Bunun tersi de doğrudur. Yani, konveks epigrafı olan fonksiyon konveksdir.
  - Bir fonksiyonun konkav olması için gerekli ve yeterli koşul, onun hipografının konveks küme olmasıdır.
- Örnek: $y = -|x| + 2$



  - Bu fonksiyonun hipografi konveks kümedir.
  - f konveks fonksiyon ise, o zaman *epi f* konveks kümedir.
  - f konkav fonksiyon ise, o zaman *hipo f* konveks kümedir.
- $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ S kümesinde konveks fonksiyonlar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \ge 0$ sayılar olsun. Bu durumda $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ fonksiyonu da konveks fonksiyondur.
- $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ şeklinde tanımlanmış olan f(x) fonksiyonu da konveks fonksiyondur.
- $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\} = \max\limits_{1 \le i \le m} \{f_i(x)\}$ (Noktasal maksimum)
- Sonlu sayıda konveks fonksiyonun noktasal maksimumları da konvekstir.