Seri, Paralel ve Kompleks Sistemlerin Güvenilirlik Analizi

Kapsamlı Teorik ve Pratik Rehber

KISIM I: OLASILIK TEORİSİ TEMELLERİ

1. Olasılık Aksiyomları (Kolmogorov)

Bir Ω örneklem uzayı ve $\mathcal{F}$ sigma-cebiri üzerinde tanımlı P olasılık ölçüsü için:

1. **Negatif olmama**: $P(A) \geq 0$, her $A \in \mathcal{F}$ için
2. **Normalleştirme**: $P(\Omega) = 1$
3. **Sayılabilir toplamsal**: Ayrık $A_1, A_2, \ldots$ olayları için: $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)

2. Temel Olasılık Kuralları

Tümleyen Kuralı

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Toplama Kuralı (Genel)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Koşullu Olasılık

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Çarpım Kuralı (Genel)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Toplam Olasılık Teoremi

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ tam bir bölüntü ise:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayes Teoremi

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

3. Bağımsızlık Kavramı

İki Olayın Bağımsızlığı

A ve B olayları **bağımsızdır** ancak ve ancak:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Eşdeğer ifadeler:

- $P(A|B) = P(A)$ (B'nin olması A'yı etkilemez)
- $P(B|A) = P(B)$ (A'nın olması B'yi etkilemez)

n Olayın Karşılıklı Bağımsızlığı

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ olayları **karşılıklı bağımsızdır** ancak ve ancak her $k \leq n$ ve her $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ alt kümesi için:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

Önemli: İkişerli bağımsızlık, karşılıklı bağımsızlığı garanti ETMEZ!

Örnek: İkişerli Bağımsız ama Karşılıklı Bağımsız Değil

İki adil zar atılsın:

- A: İlk zar çift
- B: İkinci zar çift
- C: Toplam çift

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$

İkişerli kontrol:

- $P(A \cap B) = 1/4 = P(A) \cdot P(B)$ ✓
- $P(A \cap C) = 1/4 = P(A) \cdot P(C)$ ✓
- $P(B \cap C) = 1/4 = P(B) \cdot P(C)$ ✓

Üçlü kontrol:

- $P(A \cap B \cap C) = 1/4$ (her ikisi çift ise toplam çift)
- $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/8$
- $1/4 \neq 1/8$ ✗

Sonuç: İkişerli bağımsız ama karşılıklı bağımsız değil!

KISIM II: GÜVENİLİRLİK TEORİSİ TEMELLERİ

1. Temel Tanımlar

Güvenilirlik Fonksiyonu (Survival Function)

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

- T: Arızaya kadar geçen süre (rastgele değişken)
- $F(t)$: Birikimli dağılım fonksiyonu (CDF)
- $R(t)$: Sağkalım fonksiyonu

Özellikler:

- $R(0) = 1$ (başlangıçta sistem çalışıyor)
- $R(\infty) = 0$ (sonunda her sistem arızalanır)
- $R(t)$ azalan bir fonksiyondur

Güvensizlik Fonksiyonu (Unreliability)

$$Q(t) = P(T \leq t) = F(t) = 1 - R(t)$$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF)

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Tehlike Oranı Fonksiyonu (Hazard Rate)

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln R(t)$$

Fiziksel yorum: $Z(t) \cdot \Delta t \approx P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$

Yani, t anına kadar sağ kalmış bir sistemin, sonraki Δt sürede arızalanma olasılığı.

Birikimli Tehlike Fonksiyonu

$$H(t) = \int_0^t Z(u)\, du = -\ln R(t)$$

$$R(t) = e^{-H(t)} = \exp\left(-\int_0^t Z(u)\, du\right)$$

Ortalama Arızaya Kadar Süre (MTTF)

$$MTTF = E[T] = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty R(t)\, dt$$

2. Üstel Dağılım (Sabit Tehlike Oranı)

Parametrelendirme: θ = ortalama ömür (MTTF)

Fonksiyonlar

Fonksiyon	Formül
PDF	$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$
CDF	$F(t) = 1 - e^{-t/\theta}$
Güvenilirlik	$R(t) = e^{-t/\theta}$
Tehlike Oranı	$Z(t) = \frac{1}{\theta}$ (SABİT)
MTTF	$E[T] = \theta$
Varyans	$Var(T) = \theta^2$

Hafızasızlık Özelliği

Üstel dağılımın en önemli özelliği **hafızasızlık**tır:

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

İspat:

$$P(T > t + s | T > t) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{e^{-(t+s)/\theta}}{e^{-t/\theta}} = e^{-s/\theta} = P(T > s)$$

Yorum: Sistem t süre çalıştıysa, bundan sonra ne kadar çalışacağı t'den bağımsızdır. Sistem "eskimez" - yeni gibidir!

Örnek: Elektronik Bileşen

Bir elektronik bileşenin ortalama ömrü $\theta = 10000$ saat.

a) 1000 saat çalışma olasılığı:

$$R(1000) = e^{-1000/10000} = e^{-0.1} = 0.9048$$

b) 5000 saat çalıştıktan sonra 1000 saat daha çalışma olasılığı:

$$P(T > 6000|T > 5000) = P(T > 1000) = 0.9048$$

(Hafızasızlık nedeniyle aynı!)

c) İlk 1000 saatte arızalanma olasılığı:

$$Q(1000) = 1 - R(1000) = 1 - 0.9048 = 0.0952$$

3. Weibull Dağılımı (Değişken Tehlike Oranı)

3-parametreli Weibull: $T \sim Weibull(\beta, \theta, \gamma)$

- β: Şekil parametresi (shape)
- θ: Ölçek parametresi (scale)
- γ: Konum parametresi (location/threshold)

Fonksiyonlar

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^{\beta}\right], \quad t > \gamma$$

$$Z(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t-\gamma}{\theta}\right)^{\beta-1}$$

Tehlike Oranı Davranışı

β **değeri**	$Z(t)$ **davranışı**	**Yorum**
$\beta < 1$	Azalan	Erken arızalar (infant mortality)
$\beta = 1$	Sabit	Üstel dağılım (rastgele arızalar)
$\beta > 1$	Artan	Yaşlanma/aşınma (wear-out)

Küvet Eğrisi (Bathtub Curve)

Gerçek sistemler genellikle üç fazdan geçer:

```
Z(t)
 │
 │ ╲            ╱
 │  ╲          ╱
 │   ╲        ╱
 │    ╲══════════════════╱
 │
 └──────────────────────────── t
  Faz I    Faz II    Faz III
 (Erken) (Rastgele) (Yaşlanma)
 β < 1    β = 1      β > 1
```

KISIM III: SERİ SİSTEMLER

1. Tanım ve Yapı

Seri sistemde **tüm bileşenlerin çalışması** gerekir. Tek bir bileşenin arızası sistemi durdurur.

Blok Diyagramı

```
   ┌───┐    ┌───┐    ┌───┐       ┌───┐
───┤ 1 ├────┤ 2 ├────┤ 3 ├─ ... ─┤ n ├───
   └───┘    └───┘    └───┘       └───┘
```

Yapı Fonksiyonu

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Burada $x_i \in \{0, 1\}$ (0: arızalı, 1: çalışıyor)

2. Bağımsız Bileşenler Durumu

Temel Formül

Bileşenler bağımsız ise, kesişim olasılığı çarpıma eşittir:

$$R_{sys}(t) = P(T_1 > t \cap T_2 > t \cap \cdots \cap T_n > t)$$

Bağımsızlık varsayımı ile:

$$R_{sys}(t) = P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \cdots P(T_n > t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

Tehlike Oranı (Bağımsız Bileşenler)

$$Z_{sys}(t) = -\frac{d}{dt}\ln R_{sys}(t) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\ln R_i(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(t)$$

Önemli sonuç: Seri sistemde tehlike oranları TOPLANIR!

Üstel Dağılım için

Her bileşen θ_i ortalama ömre sahipse:

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-t/\theta_i} = \exp\left(-t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)$$

Sistem de üstel dağılımlıdır:

$$\theta_{sys} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/\theta_i}$$

$$MTTF_{sys} = \theta_{sys} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)^{-1}$$

Örnek 1: Basit Seri Sistem

Üç bileşenli seri sistem: $R_1 = 0.95, R_2 = 0.90, R_3 = 0.85$

$$R_{sys} = 0.95 \times 0.90 \times 0.85 = 0.7268$$

Yorum: En düşük güvenilirlik 0.85 iken, sistem güvenilirliği 0.7268'e düştü!

Örnek 2: n Özdeş Bileşen

Her bileşenin güvenilirliği $R = 0.99$:

n	$R_{sys} = R^n$	**Güvenilirlik Kaybı**
1	0.9900	-
5	0.9510	%4.9
10	0.9044	%9.5
50	0.6050	%39.5
100	0.3660	%63.4
500	0.0066	%99.3

Örnek 3: Üstel Dağılım

Üç bileşen: $\theta_1 = 1000$ saat, $\theta_2 = 2000$ saat, $\theta_3 = 5000$ saat

$$\frac{1}{\theta_{sys}} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{5000} = 0.001 + 0.0005 + 0.0002 = 0.0017$$

$$\theta_{sys} = \frac{1}{0.0017} = 588.2 \text{ saat}$$

$t = 100$ saat için:

$$R_{sys}(100) = e^{-100/588.2} = e^{-0.17} = 0.8437$$

Örnek 4: Seri Sisteme Bileşen Eklemenin Etkisi
Mevcut sistem: $R_{sys} = 0.95$

Yeni bileşen eklenirse ($R_{new} = 0.98$):

$$R_{sys,new} = 0.95 \times 0.98 = 0.931$$

Sonuç: Her yeni bileşen güvenilirliği AZALTIR!

3. Bağımlı Bileşenler Durumu

Neden Bağımlılık Oluşur?

1. **Ortak stres**: Aynı ortam koşulları (sıcaklık, titreşim, nem)
2. **Ortak neden arızaları (CCF)**: Tek bir olay birden fazla bileşeni etkiler
3. **Yük paylaşımı**: Bir bileşen arızalandığında diğerlerine yük biner
4. **Kaskad arızalar**: Bir arıza diğerlerini tetikler
5. **Ortak tedarikçi**: Aynı üreticiden gelen kusurlu parti

Matematiksel İfade
Bağımlı durumda:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Bunun yerine:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Korelasyon ile Modelleme
İki bileşen arasındaki korelasyon ρ ile:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) + \rho \cdot \sqrt{P(A)(1 - P(A))P(B)(1 - P(B))}$$

Örnek 5: Pozitif Korelasyonlu Seri Sistem
İki bileşen: $R_1 = R_2 = 0.90$, korelasyon $\rho = 0.3$

Bağımsız varsayım:

$$R_{sys,ind} = 0.90 \times 0.90 = 0.81$$

Bağımlı hesap: $Q_1 = Q_2 = 0.10$

Arıza olasılıkları için:

$$P(Q_1 \cap Q_2) = Q_1 \cdot Q_2 + \rho \cdot \sqrt{Q_1(1 - Q_1)Q_2(1 - Q_2)}$$

$$= 0.01 + 0.3 \times \sqrt{0.09 \times 0.09} = 0.01 + 0.3 \times 0.09 = 0.037$$

Sistem güvensizliği (inclusion-exclusion):

$$Q_{sys} = Q_1 + Q_2 - P(Q_1 \cap Q_2) = 0.10 + 0.10 - 0.037 = 0.163$$

$$R_{sys,dep} = 1 - 0.163 = 0.837$$

Karşılaştırma: $R_{sys,dep} = 0.837 > R_{sys,ind} = 0.81$

Yorum: Pozitif korelasyon seri sistemde güvenilirliği ARTIRIR! Çünkü bileşenler birlikte arızalanma eğiliminde, yani biri çalışıyorsa diğeri de muhtemelen çalışıyordur.

Ortak Neden Arızaları (CCF) - Beta Faktör Modeli

Toplam arıza oranı iki kısma ayrılır:

- Bağımsız arızalar: $(1 - \beta) \cdot Z_i(t)$
- Ortak neden arızaları: $\beta \cdot Z_{CCF}(t)$

β tipik olarak 0.01 - 0.10 arasındadır.

Örnek 6: CCF ile Seri Sistem
İki özdeş bileşen: $\theta = 10000$ saat, $\beta = 0.05$

Bağımsız arıza oranı: $(1 - 0.05)/10000 = 0.000095$ /saat CCF oranı: $0.05/10000 = 0.000005$ /saat

Sistem arıza oranı:

$$Z_{sys} = 2 \times 0.000095 + 0.000005 = 0.000195 \text{ /saat}$$

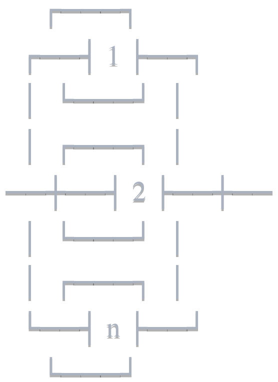
(Bağımsız varsayımda $Z_{sys} = 2/10000 = 0.0002$ /saat olurdu)

KISIM IV: PARALEL SİSTEMLER

1. Tanım ve Yapı

Paralel sistemde **en az bir bileşenin çalışması** yeterlidir.

Blok Diyagramı



Yapı Fonksiyonu

$$\phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

2. Bağımsız Bileşenler Durumu

Temel Formül

Sistem ancak TÜM bileşenler arızalandığında arızalanır:

$$Q_{sys}(t) = P(T_1 \leq t \cap T_2 \leq t \cap \cdots \cap T_n \leq t)$$

Bağımsızlık ile:

$$Q_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) = \prod_{i=1}^{n}[1 - R_i(t)]$$

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - R_i(t)]$$

Örnek 7: Basit Paralel Sistem

Üç bileşenli paralel sistem: $R_1 = 0.90, R_2 = 0.85, R_3 = 0.80$

$$Q_{sys} = (1 - 0.90)(1 - 0.85)(1 - 0.80) = 0.10 \times 0.15 \times 0.20 = 0.003$$

$$R_{sys} = 1 - 0.003 = 0.997$$

Yorum: En yüksek güvenilirlik 0.90 iken, sistem 0.997'ye çıktı!

Örnek 8: n Özdeş Bileşen

Her bileşenin güvenilirliği $R = 0.80$:

n	$R_{sys} = 1 - (1 - R)^n$	İyileşme
1	0.8000	-
2	0.9600	+20%
3	0.9920	+24%
4	0.9984	+25%
5	0.9997	+25%

Tehlike Oranı (Paralel Sistem)

Üstel bileşenler için bile sistem tehlike oranı sabit DEĞİLDİR:

$$Z_{sys}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i(t) \cdot \prod_{j \neq i} Q_j(t)}{\prod_{i=1}^{n} Q_i(t) - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t) + R_{sys}(t)}$$

Bu karmaşık ifade, paralel sistemlerin analizinin seri sistemlerden daha zor olduğunu gösterir.

MTTF (Özdeş Üstel Bileşenler)

$$MTTF_{sys} = \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \theta \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Örnek 9: MTTF Karşılaştırması

$\theta = 1000$ saat olan bileşenler:

n	MTTF (saat)	Çarpan
1	1000	1.00
2	1500	1.50
3	1833	1.83
4	2083	2.08
5	2283	2.28
10	2929	2.93

3. Bağımlı Bileşenler Durumu

Pozitif Korelasyonun Etkisi

Paralel sistemde pozitif korelasyon güvenilirliği AZALTIR!

Örnek 10: Pozitif Korelasyonlu Paralel Sistem

İki bileşen: $R_1 = R_2 = 0.90$, korelasyon $\rho = 0.3$

Bağımsız varsayım:

$$R_{sys,ind} = 1 - (0.10)(0.10) = 0.99$$

Bağımlı hesap:

$$P(Q_1 \cap Q_2) = 0.01 + 0.3 \times 0.09 = 0.037$$

$$R_{sys,dep} = 1 - 0.037 = 0.963$$

Karşılaştırma: $R_{sys,dep} = 0.963 < R_{sys,ind} = 0.99$

Yorum: Pozitif korelasyon paralel sistemde güvenilirliği AZALTIR! Çünkü biri arızalandığında diğeri de muhtemelen arızalanır - yedeklilik amacı boşa çıkar.

Korelasyonun Seri vs Paralel Etkisi

Korelasyon	Seri Sistem	Paralel Sistem
$\rho > 0$ (pozitif)	Güvenilirlik ARTAR	Güvenilirlik AZALIR
$\rho = 0$ (bağımsız)	Temel formül	Temel formül
$\rho < 0$ (negatif)	Güvenilirlik AZALIR	Güvenilirlik ARTAR

Sezgisel Açıklama

Seri sistemde (hepsinin çalışması lazım):

- Pozitif korelasyon: "Biri çalışıyorsa hepsi çalışıyor" → İYİ
- Negatif korelasyon: "Biri çalışıyorsa diğeri arızalı" → KÖTÜ

Paralel sistemde (birinin çalışması yeterli):

- Pozitif korelasyon: "Biri arızalıysa hepsi arızalı" → KÖTÜ
- Negatif korelasyon: "Biri arızalıysa diğeri çalışıyor" → İYİ

Örnek 11: CCF ile Paralel Sistem

İki özdeş bileşen: $\theta = 10000$ saat, $\beta = 0.05$ (CCF faktörü)

Bağımsız model:

$$R_{sys,ind}(t) = 1 - (1 - e^{-t/10000})^2$$

$t = 1000$ saat için: $R_{sys,ind} = 0.9909$

CCF modeli (basitleştirilmiş): Ortak neden arızası olasılığı: $Q_{CCF} = 1 - e^{-\beta t/\theta} = 1 - e^{-0.05 \times 1000/10000} = 0.005$

$$R_{sys,CCF} \approx R_{sys,ind} \times (1 - Q_{CCF}) = 0.9909 \times 0.995 = 0.986$$

CCF, paralel sistemin avantajını önemli ölçüde azaltır!

KISIM V: k-out-of-n SİSTEMLER

1. Tanım

n bileşenden **en az k tanesinin çalışması** gereken sistem.

Gösterim: k/n veya k-out-of-n:G (G = Good, çalışan)

Özel Durumlar

Sistem	k değeri	Eşdeğer
Paralel	k = 1	1-out-of-n
Seri	k = n	n-out-of-n
Oylama	k = ⌈n/2⌉	Çoğunluk

2. Bağımsız Özdeş Bileşenler

Binom Dağılımı ile Hesap

$$R_{sys} = P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} R^j (1-R)^{n-j}$$

Burada X = çalışan bileşen sayısı, $X \sim Binomial(n, R)$

Örnek 12: 2-out-of-3 Sistem

$R = 0.90$ için:

$$R_{sys} = \binom{3}{2}(0.9)^2(0.1)^1 + \binom{3}{3}(0.9)^3(0.1)^0$$

$$= 3 \times 0.81 \times 0.1 + 1 \times 0.729 \times 1$$

$$= 0.243 + 0.729 = 0.972$$

Örnek 13: Uçak Motor Sistemi

4 motorlu uçak, farklı gereksinimler için:

Gereksinim	k	R_{sys} (R=0.95)
En az 1 motor	1	0.99999
En az 2 motor	2	0.99945
En az 3 motor	3	0.98598
Tüm motorlar	4	0.81451

Örnek 14: Oylama Sistemi (TMR - Triple Modular Redundancy)

3 bilgisayar, çoğunluk oyu ile karar (2-out-of-3):

$R_{computer} = 0.99$ için:

$$R_{TMR} = 3(0.99)^2(0.01) + (0.99)^3 = 0.0297 + 0.9703 = 0.999973$$

Tek bilgisayara göre iyileşme: $0.999973/0.99 = 1.0101$ (küçük ama önemli!)

3. Farklı Güvenilirlikli Bileşenler

Bileşenler özdeş değilse, durum uzayı (state enumeration) metodu kullanılır.

Örnek 15: 2-out-of-3, Farklı Güvenilirlikler

$R_1 = 0.95, R_2 = 0.90, R_3 = 0.85$

Başarılı durumlar (en az 2 çalışıyor):

Durum	1	2	3	Olasılık
111	✓	✓	✓	$0.95 \times 0.90 \times 0.85 = 0.72675$
110	✓	✓	✗	$0.95 \times 0.90 \times 0.15 = 0.12825$
101	✓	✗	✓	$0.95 \times 0.10 \times 0.85 = 0.08075$
011	✗	✓	✓	$0.05 \times 0.90 \times 0.85 = 0.03825$

$$R_{sys} = 0.72675 + 0.12825 + 0.08075 + 0.03825 = 0.974$$

4. Bağımlı Bileşenlerle k-out-of-n

Örnek 16: Pozitif Korelasyon Etkisi

2-out-of-3 sistem, $R_i = 0.90$, çiftler arası $\rho = 0.2$

Bu durumda multinomial/copula modelleri gerekir. Basitleştirilmiş yaklaşım:

Bağımsız: $R_{sys,ind} = 0.972$

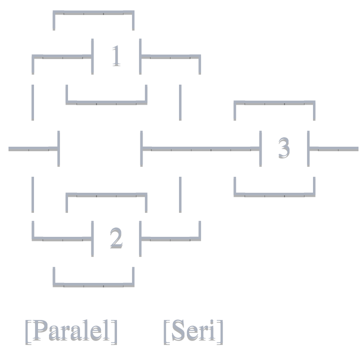
Pozitif korelasyon genellikle k-out-of-n sistemlerde güvenilirliği AZALTIR (paralel sisteme benzer etki).

KISIM VI: SERİ-PARALEL KOMBİNE SİSTEMLER

1. Çözüm Stratejisi

1. Sistemi içten dışa doğru analiz et
2. Önce en iç paralel/seri grupları tek bileşene indirge
3. Adım adım dışa doğru ilerle

2. Seri-Paralel Yapı



Örnek 17

$R_1 = 0.90, R_2 = 0.85, R_3 = 0.95$

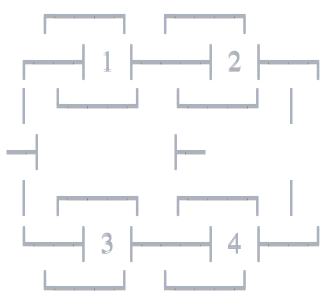
Adım 1: Paralel grup (1,2):

$$R_{12} = 1 - (1 - 0.90)(1 - 0.85) = 1 - 0.015 = 0.985$$

Adım 2: Seri bağlantı:

$$R_{sys} = R_{12} \times R_3 = 0.985 \times 0.95 = 0.936$$

3. Paralel-Seri Yapı



Örnek 18

Tüm bileşenler $R = 0.90$

Adım 1: Seri gruplar:

- Üst dal: $R_{12} = 0.90 \times 0.90 = 0.81$
- Alt dal: $R_{34} = 0.90 \times 0.90 = 0.81$

Adım 2: Paralel bağlantı:

$$R_{sys} = 1 - (1 - 0.81)(1 - 0.81) = 1 - 0.0361 = 0.964$$

4. Çok Aşamalı Sistem

Örnek 19: Beş Aşamalı Üretim Hattı

```
  ┌───┐  ┌───┐  ┌───┐  ┌───┐  ┌───┐
  │   │  │ B │  │ C │  │ E │  │   │
──┤ A ├──┤ B ├──┤ C ├──┤ E ├──┤ G ├──
  │   │  │ B │  │ C │  │ E │  │   │
  └───┘  └───┘  └───┘  └───┘  └───┘
  n=1    n=2    n=3    n=2    n=1
```

$R_A = 0.95, R_B = 0.85, R_C = 0.80, R_E = 0.90, R_G = 0.95$

Çözüm:

- Aşama A: $R_A = 0.95$
- Aşama B (2 paralel): $R_{BB} = 1 - (0.15)^2 = 0.9775$
- Aşama C (3 paralel): $R_{CCC} = 1 - (0.20)^3 = 0.992$
- Aşama E (2 paralel): $R_{EE} = 1 - (0.10)^2 = 0.99$
- Aşama G: $R_G = 0.95$

$$R_{sys} = 0.95 \times 0.9775 \times 0.992 \times 0.99 \times 0.95 = 0.866$$

KISIM VII: KOMPLEKS SİSTEMLER

1. Tanım

Basit seri-paralel indirgeme ile çözülemeyen sistemler **kompleks sistem** olarak adlandırılır.

Klasik Örnek: Köprü (Bridge) Yapısı

```
     1
  A●───────●C
   │＼   ／│
   │ ＼ ／ │
 2 │ ＼5／ │ 4
   │  ╳  │
```

```
|  /\  |
| /  \ |
B●──────●D
  3
```

Bu yapı, bileşen 5 nedeniyle basit seri-paralel değildir.

2. Çözüm Yöntemleri

Yöntem 1: Decomposition (Ayrıştırma)

Toplam olasılık teoremine dayanır:

$$R_{sys} = R_k \cdot R_{sys|k \text{ çalışıyor}} + Q_k \cdot R_{sys|k \text{ arızalı}}$$

Örnek 20: Köprü Sistemi (Decomposition)
Tüm bileşenler $R = 0.90$

Bileşen 5'i anahtar seç:

Durum 1: 5 çalışıyor ($P = 0.90$)

```
A●──────●C
|    |
| 5  |
| ●  |
|    |
B●──────●D
```

Sol taraf (1 veya 2): $R_L = 1 - (0.1)(0.1) = 0.99$Sağ taraf (3 veya 4): $R_R = 1 - (0.1)(0.1) = 0.99$
$R_{sys|5 \text{ çalışıyor}} = 0.99 \times 0.99 = 0.9801$

Durum 2: 5 arızalı ($P = 0.10$)

```
A●──────●C
|    |
|    |
|    |
B●──────●D
```

Yol 1-4 (seri): $0.90 \times 0.90 = 0.81$Yol 2-3 (seri): $0.90 \times 0.90 = 0.81$Paralel: $R_{sys|5 \text{ arızalı}} = 1 - (0.19)(0.19) = 0.9639$

$$R_{sys} = 0.90 \times 0.9801 + 0.10 \times 0.9639 = 0.8821 + 0.0964 = 0.9785$$

Yöntem 2: Event Space (Durum Uzayı)

Tüm 2^n durumu enumerate et, başarılı olanları topla.

Örnek 21: Köprü Sistemi (Event Space)

5 bileşen → $2^5 = 32$ durum

A'dan D'ye yol var mı? (1-4, 2-3, 1-5-3, 2-5-4 yolları)

Durum	1	2	3	4	5	Yol Var?	Olasılık
11111	1	1	1	1	1	Evet	R^5
11110	1	1	1	1	0	Evet	R^4Q
11101	1	1	1	0	1	Evet	R^4Q
...							
00000	0	0	0	0	0	Hayır	Q^5

Tüm başarılı durumların olasılıkları toplanır.

Yöntem 3: Minimal Yol / Minimal Kesim

Minimal Yol (Minimal Path): Sistemin çalışması için gerekli en küçük bileşen kümesi

Köprü için minimal yollar: $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 5, 3\}, \{2, 5, 4\}$

Minimal Kesim (Minimal Cut): Sistemin arızalanması için yeterli en küçük bileşen kümesi

Köprü için minimal kesimler: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 5, 4\}, \{2, 5, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}$

Sınırlar (Bounds)

Alt sınır (minimal kesimlerden):

$$R_{sys} \geq \prod_j \left(1 - \prod_{i \in C_j} Q_i\right)$$

Üst sınır (minimal yollardan):

$$R_{sys} \leq 1 - \prod_j \left(1 - \prod_{i \in P_j} R_i\right)$$

KISIM VIII: STANDBY (BEKLEME) SİSTEMLERİ

1. Türleri

Tür	Bekleme Durumu	Arıza Oranı	Avantaj/Dezavantaj
Cold Standby	Tamamen kapalı	$Z_s = 0$	En yüksek güvenilirlik, anahtarlama gecikmesi
Warm Standby	Düşük güç	$0 < Z_s < Z$	Orta seviye
Hot Standby	Tam güç	$Z_s = Z$	Hızlı geçiş, paralel sisteme eşdeğer

2. Cold Standby (Mükemmel Anahtarlama)

Güvenilirlik Fonksiyonu

n özdeş üstel bileşen (θ ortalama ömür):

$$R_{sys}(t) = e^{-t/\theta} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t/\theta)^i}{i!}$$

Bu, Poisson dağılımının CDF'idir!

MTTF

$$MTTF_{sys} = n \cdot \theta$$

Örnek 22: Cold Standby vs Paralel

$\theta = 1000$ saat, $n = 3$ bileşen

Paralel sistem:

$$MTTF_{paralel} = 1000 \times (1 + 1/2 + 1/3) = 1833 \text{ saat}$$

Cold standby:

$$MTTF_{cold} = 3 \times 1000 = 3000 \text{ saat}$$

$t = 2000$ saat için güvenilirlik:

Paralel: $R_{par}(2000) = 1 - (1 - e^{-2})^3 = 0.753$

Cold standby: $R_{cold}(2000) = e^{-2}(1 + 2 + 2) = e^{-2} \times 5 = 0.677$

Yorum: Cold standby daha yüksek MTTF verir ama belirli zamanlarda paralel daha iyi olabilir!

3. Kusurlu Anahtarlama

Anahtarlama başarı olasılığı p ise:

$$R_{sys}(t) = R_1(t) + p \cdot \int_0^t f_1(u) R_2(t-u)\, du$$

Örnek 23: %90 Anahtarlama Güvenilirliği

2 bileşenli cold standby, $\theta = 1000$ saat, $p = 0.90$

$$MTTF_{sys} = \theta + p \cdot \theta = 1000 + 900 = 1900 \text{ saat}$$

(Mükemmel anahtarlamada 2000 saat olurdu)

KISIM IX: BAĞIMLILIK ANALİZİ - İLERİ KONULAR

1. Copula Modelleri

Bileşen ömürleri arasındaki bağımlılığı modellemek için copula fonksiyonları kullanılır.

Frank Copula

$$C(u,v) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right)$$

$\alpha > 0$: pozitif bağımlılık $\alpha < 0$: negatif bağımlılık $\alpha \to 0$: bağımsızlık

Örnek 24: Copula ile Paralel Sistem
İki bileşen, üstel marjinaller, Frank copula ($\alpha = 2$)

$$R_{sys}(t) = R_1(t) + R_2(t) - C(R_1(t), R_2(t))$$

2. Ortak Yük (Common Load) Modeli

Bileşenler aynı rastgele yüke maruz kalırsa:

$$R_{sys}(t) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} P(C_i > s) \cdot f_S(s)\, ds$$

Burada C_i bileşen kapasitesi, S ortak yük.

3. Marshall-Olkin Modeli

Üç tür şok:

- Şok 1: Sadece bileşen 1'i etkiler (oran λ_1)
- Şok 2: Sadece bileşen 2'yi etkiler (oran λ_2)
- Şok 12: Her ikisini de etkiler (oran λ_{12})

$$R(t_1,t_2) = \exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12}\max(t_1,t_2))$$

KISIM X: ÖZET VE KARŞILAŞTIRMA

Ana Formüller

Sistem	Bağımsız Güvenilirlik	Bağımlılık Etkisi
Seri	$R_{sys} = \prod_i R_i$	$\rho > 0 \Rightarrow R \uparrow$

Sistem	Bağımsız Güvenilirlik	Bağımlılık Etkisi
Paralel	$R_{sys} = 1 - \prod_i Q_i$	$\rho > 0 \Rightarrow R \downarrow$
k-out-of-n	Binom formülü	$\rho > 0 \Rightarrow R \downarrow$ (genelde)
Cold Standby	Poisson toplamı	Anahtarlama hatası $\Rightarrow R \downarrow$

Tasarım Önerileri

1. **Kritik bileşenleri belirle**: Seri sistemlerde en zayıf halka
2. **Yedeklilik stratejisi**:
   - Bağımsız bileşenler → Paralel tercih et
   - Bağımlı bileşenler → Cold standby düşün
3. **CCF'yi minimize et**: Farklı üreticiler, farklı teknolojiler
4. **Korelasyonu hesaba kat**: Bağımsızlık varsayımı tehlikeli olabilir

Kaynaklar

1. Ebeling, C.E. (2010). *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*
2. Modarres, M. (2006). *Risk Analysis in Engineering*
3. Barlow, R.E. & Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*
4. Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*
5. Hoyland, A. & Rausand, M. (1994). *System Reliability Theory*