BLG311 Biçimsel Diller ve Otomatlar

Turing Makineleri ve Hesaplama Kuramına Giriş

A.Emre Harmancı Tolga Ovatman Berk Canberk

2017

Klasik otomatlar (dil tanıyıcılar (DFA,NFA,PDA)) bazen çok basit dilleri tanımakta yetersiz kalırlar(e.g. $a^n b^n c^n : n \geq 0$).
Tekiller zincirleri arasında dönüşüm gerçekleştiren daha genel dil tanıyıcılar da mevcuttur. Turing makinesi bu tip dil tanıyıcılara örnek olarak gösterilebilir.

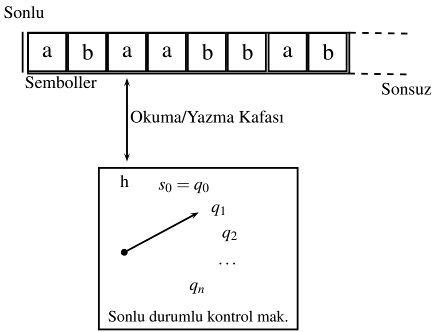
Church-Turing Tezi

Hesaplama kuramında, fonksiyonların doğasında bulunan algoritmik hesaplanabilirlik ile ilgili hipotezlerden oluşan Church-Turing tezine göre bir fonksiyonun algoritmik olarak hesaplanabilir olması için bu hesabı gerçekleyen bir Turing makinesinin bulunması gereklidir.
Başka bir deyişle, Church-Turing teoremine göre eğer bir hesabı yapmakta kullanılabilecek bir algoritma mevcutsa aynı hesap bir Turing makinesi tarafından (ya da özyineli bir fonksiyonla veya bir λ fonksiyonla) da gerçekleştirilebilir.

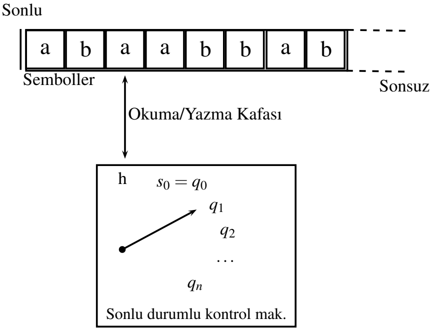
Klasik otomatlar (dil tanıyıcılar (DFA,NFA,PDA)) bazen çok basit dilleri tanımakta yetersiz kalırlar(e.g. $a^n b^n c^n : n \geq 0$).
Tekiller zincirleri arasında dönüşüm gerçekleştiren daha genel dil tanıyıcılar da mevcuttur. Turing makinesi bu tip dil tanıyıcılara örnek olarak gösterilebilir.

Church-Turing Tezi

Church-Turing tezi hesaplamanın doğasını tanımlama üzerine geliştirilmiştir ve biçimsel olarak kanıtlanamamıştır. Her ne kadar bu bağlamda anılan üç tezin eşdeğer olduğu kanıtlanmış olsa da bu tezlerin ardında yatan asıl ifade (bir fonksiyonun etkin olarak hesaplanıp hesaplanamayacağı) daha sezgiseldir. Bu nedenle bu tez bir kestirim(conjecture) olarak anılır.



Okuma/yazma kafası şerit üzerindeki ilgili simgeyi okur ve kontrol makinesinin durumuna göre ya yeni bir simge yazar ya da ya da sola(L) veya sağa(R) bir adım ilerler. Eğer makine en sol simgeden daha sola gitmeye çalışırsa bu makinenin asılı kalması (hang) olarak adlandırılır. Kafa olabildiğince sağa doğru ilerleyebilir.



Simgeler:

- h: Hesaplama sonu(halt). Makine durmuştur. Durma durumu simgesi, giriş, çıkış ve durum alfabesine dahil değilidir.
- #: boşluk simgesi
- L,R: Sola ve sağa hareketi temsil eden simgeler. Bu simgeler giriş veya çıkış alfabesine dahil değildir.
- Geleneksel olarak giriş sözükleri şeritin en solunda yer alır.

Bir TM'nin biçimsel tanımı

Bir Turing Makinesi(TM) dörtlü ile $M = (S, \Sigma, \delta, s_0)$ ifade edilir:

- S: Sonlu, boş olmayan durum kümesi. Genellikle $h \notin S$.
- Σ: Giriş/çıkış alfabesi $\# \in \Sigma$ ama $L, R \notin \Sigma$
- $s_0 \in S$: Başlangıç durumu, S içindedir.
- δ: Durum geçiş fonksiyonu $S \times \Sigma \to S \cup \{h\} \times (\Sigma \cup \{L, R\})$

$q \in S \wedge a \in \Sigma \wedge \delta(q,a) = (p,b)$
$q \to p$

i) (Oku)$a \to b \in \Sigma$ (şeride a üzerine yaz)
ii) $b = L$ (sola ilerle)
iii) $b = R$ (sağa ilerle)

Bir TM'nin biçimsel tanımı

Günümüz bilgisayarlarını Turing makineleri ile özdeşleştirebiliriz; bellek şeride karşılık düşerken, bilgisayar programları durum tablosuna, mikroişlemciler(Giriş çıkış birimleri haricinde) TM'nin kontrol birimine karşılık düşer. Durum tablosu kavramının anlaşılırlığını artırmak için aşağıdaki kavramlar kullanılablir:
$q, \sigma, q', \sigma', HM$ için

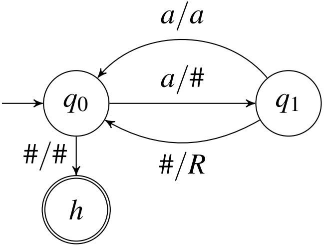
- q makinenin anlık durumu
- q' sonraki durum
- σ okunan simge
- σ' yazılacak simge (eğer yazma yok ise σ file aynı)
- HM kafa hareketi $HM \in -1 : L, 0 : None, 1 : R$ olarak ele alınabilir.

Örnek 1

Şeritteki tüm simgeleri soldan sağa silen makine.

$S = \{q_0, q_1\}$
$\Sigma = \{a, \#\}$
$s_0 = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	$(q_1, \#)$
q_0	$\#$	$(h, \#)$
q_1	a	(q_0, a)[1]
q_1	$\#$	(q_0, R)



[1]: Bu satır fonksiyon olma özelliğinin korunması için eklenmiştir.

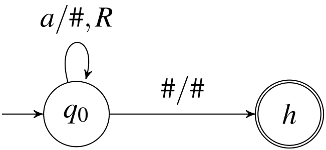
Örnek 1

Şeritteki tüm simgeleri soldan sağa silen makine.

$S = \{q_0, q_1\}$
$\Sigma = \{a, \#\}$
$s_0 = q_0$

Aynı makineyi farklı biçimde oluşturursak

q	σ	$\delta(q,\sigma), HM$
q_0	a	$(q_0, \#), 1$
q_0	$\#$	$(h, \#), 0$

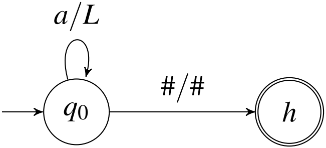


Örnek 2

Sola doğru ilerleyip a simgelerini tanıyan ve ilk boşluk # simgesinde duran bir makine

$S = \{q_0\}$
$\Sigma = \{a, \#\}$
$s_0 = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	(q_0, L)
q_0	$\#$	$(h, \#)$



TM konfigürasyonu

Bir konfigürasyon aşağıdaki kümenin elemanıdır:
$S \cup \{h\} \times \Sigma^* \times \Sigma \times (\Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\Lambda\})$

Örneğin (kafanın altı çizili simge üzerinde olduğunu varsayarak):
(q, aba, a, bab) ya da $(q, aba\underline{a}bab)$
$(h, \#\#, \#, \#a)$ ya da $(h, \#\#\underline{\#}\#a)$
(q, Λ, a, aba) ya da $(q, \Lambda\underline{a}aba)$ or $(q, \underline{a}aba)$
$(q, \#a\#, \#, \Lambda)$ ya da $(q, \#a\#\underline{\#}\Lambda)$ or $(q, \#a\#\underline{\#})$

Aşağıdaki durum konfigürasyon tanımı ile uyumsuzdur:
$(q, baa, a, bc\#)$ ya da $(q, baa\underline{a}bc\#)$

TM konfigürasyonu

TM için tek adımda ilerleme

$(q_1, \omega_1, a_1, u_1) \vdash_M (q_2, \omega_2, a_2, u_2)$
Burada $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ ve $b \in \Sigma \cup \{L, R\}$

1) $b \in \Sigma, \omega_2 = \omega_1, u_2 = u_1, a_2 = b$ (a_2 a_1 üzerine yazılır)
2) $b = L, \omega_1 = \omega_2 a_2; (a_1 = \# \wedge u_1 = \Lambda \Rightarrow u_2 = \Lambda) \vee (a_1 \neq \# \vee u_1 \neq \Lambda \Rightarrow u_2 = a_1 u_1)$. Sola ilerleme: Eğer kafa boşluk üzerindeyse ve sağda başka simge kalmamışsa boşluk silinir.Eğer kafa simge üzerindeyse ve sağda simgeler bulunuyorsa durum korunur.
3) $b = R, \omega_2 = \omega_1 a_1; (u_1 = a_2 u_2) \vee (u_1 = \Lambda \Rightarrow u_2 = \Lambda \wedge a_2 = \#)$. Sağa ilerleme: Eğer sağda başka simge kalmamışsa boşluk yazılır.

Örnek 3

$\omega, u \in \Sigma^*; a, b \in \Sigma$ (u # ile bitemez)

$$\delta(q_1, a) = (q_2, b) \Rightarrow (q_1, \omega\underline{a}u) \vdash_M (q_2, \omega\underline{b}u)$$

$$\delta(q_1, a) = (q_2, L) \Rightarrow i)(q_1, \omega b\underline{a}u) \vdash_M (q_2, \omega\underline{b}au)$$
$$ii)(q_1, \omega b\underline{\#}) \vdash_M (q_2, \omega\underline{b})$$

$$\delta(q_1, a) = (q_2, R) \Rightarrow i)(q_1, \omega\underline{a}bu) \vdash_M (q_2, \omega a\underline{b}u)$$
$$ii)(q_1, \omega\underline{a}) \vdash_M (q_2, \omega a\underline{\#})$$

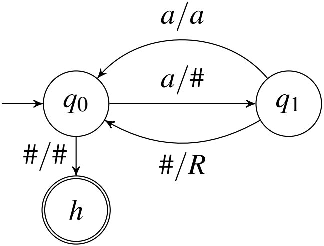
n adımda hesaplama

Uzunluğu n olan bir hesaplama

n adımda hesap aşağıdaki gibi tanımlanabilir:
$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M C_2 \vdash_M \ldots C_{n-1} \vdash_M C_n$

Örnek 1: Şeritteki tüm simgeleri soldan sağa silen makine.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	$(q_1,\#)$
q_0	$\#$	$(h,\#)$
q_1	a	(q_0,a)
q_1	$\#$	(q_0,R)



$(q_0,\underline{a}aaa) \vdash_M (q_1,\underline{\#}aaa) \vdash_M (q_0,\#\underline{a}aa) \vdash_M (q_1,\#\underline{\#}aa) \vdash_M (q_0,\#\#\underline{a}a) \vdash_M$
$(q_1,\#\#\underline{\#}a) \vdash_M (q_0,\#\#\#\underline{a}) \vdash_M (q_1,\#\#\#\underline{\#}) \vdash_M (q_0,\#\#\#\#\underline{\#}) \vdash_M (h,\#\#\#\#\underline{\#})$

Turing Hesapçısı (Turing Computable Function)

Turing Computable Function

Turing hesaplanabilir fonksiyonlar simge katarları üzerinde dönüşüm işlemleri gerçekleştirir.

$M = (S, \Sigma, \delta, s_0)$

Σ_I ile Σ_O'yu giriş ve çıkış alfabesi olarak ayıralım;

$f(\omega) = u \wedge \omega \in {\Sigma_I}^* \wedge u \in {\Sigma_O}^* \subseteq \Sigma^*$ and

$(s_0, \#\omega\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#u\underline{\#}), \# \notin \Sigma_I \wedge \# \notin \Sigma_O$

Örnek 4

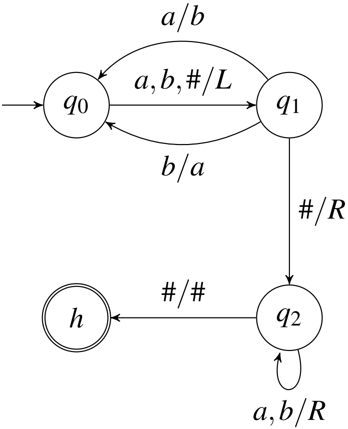
Katar eviren (b yerine a, a yerine b yazar) bir makine

$S = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b, \#\}$

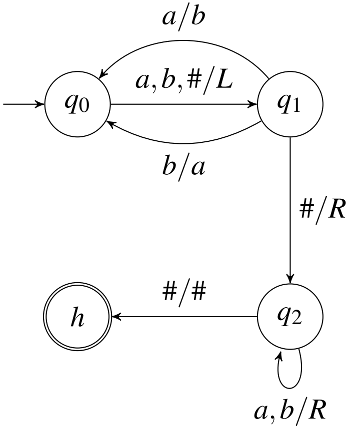
$s_0 = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	(q_1, L)
q_0	b	(q_1, L)
q_0	$\#$	(q_1, L)
q_1	a	(q_0, b)
q_1	b	(q_0, a)
q_1	$\#$	(q_2, R)
q_2	a	(q_2, R)
q_2	b	(q_2, R)
q_2	$\#$	$(h, \#)$



Örnek 4

Katar eviren (b yerine a, a yerine b yazar) bir makine



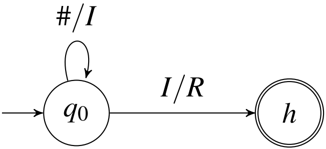
$$
\begin{aligned}
&(q_0, \#aab\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \#aa\underline{b}) \vdash_M \\
&(q_0, \#aa\underline{a}) \vdash_M (q_1, \#a\underline{a}a) \vdash_M \\
&(q_0, \#a\underline{b}a) \vdash_M (q_1, \#\underline{a}ba) \vdash_M \\
&(q_0, \#\underline{b}ba) \vdash_M (q_1, \underline{\#}bba) \vdash_M \\
&(q_2, \#\underline{b}ba) \vdash_M (q_2, \#b\underline{b}a) \vdash_M \\
&(q_2, \#bb\underline{a}) \vdash_M (q_2, \#bba\underline{\#}) \vdash_M \\
&(h, \#bba\underline{\#})
\end{aligned}
$$

Örnek 5

Bir n sayısını n adet I simgesi ile temsil edelim: $III\ldots I$. $f(n) = n+1$ hesabı yapan bir makine tasarlayalım

$S = \{q_0\}$
$\Sigma = \{I, \#\}$
$s_0 = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	I	(h,R)
q_0	$\#$	(q_0,I)



a) $(q_0, \#II\underline{\#}) \vdash_M (q_0, \#II\underline{I}) \vdash_M (h, \#III\underline{\#})$

b) $(q_0, \#I^n\underline{\#}) \vdash_M (h, \#I^{n+1}\underline{\#})$

c) $(q_0, \#\#) \vdash_M (q_0, \#\underline{I}) \vdash_M (h, \#I\underline{\#})$

Turing Kararcısı(Turing Decidable Machine)

Turing Decidable Machine

Σ_0 alfabemiz ve $\# \notin \Sigma_0$ olsun. $L \subseteq {\Sigma_0}^*$ olmak üzere L dili için x_L fonksiyonunu hesaplayabiliyor olmalıyız:

$$\forall \omega \in \Sigma_0^*, F_L(\omega) = \begin{cases} Y \Rightarrow \omega \in L \\ N \Rightarrow \omega \notin L \end{cases}$$

Turing Decidable Machine

Example:

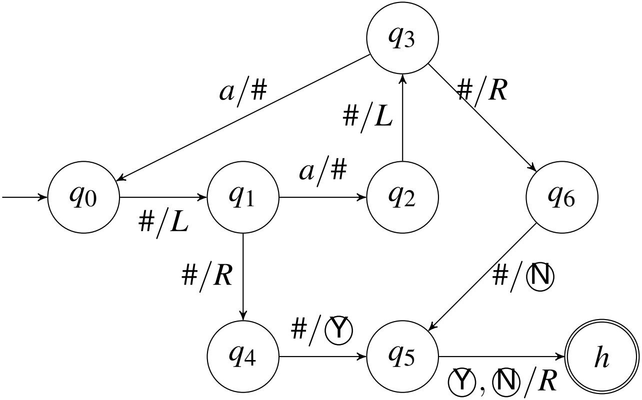
$\Sigma_0 = \{a\}; L = \{\omega \in \Sigma_0{}^* | \ ||\omega||$ even number$\}$

$S = \{q_0, \ldots, q_6\}$

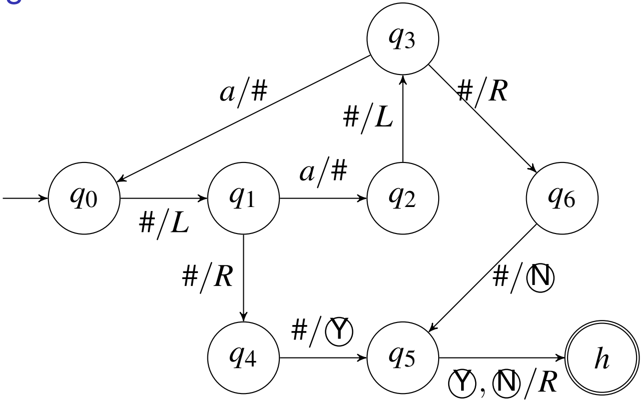
$\Sigma = \{a, Ⓨ, Ⓝ, \#\}$

$s_0 = q_0$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	$\#$	(q_1, L)
q_1	a	$(q_2, \#)$
q_1	$\#$	(q_4, R)
q_2	$\#$	(q_3, L)
q_3	a	$(q_0, \#)$
q_3	$\#$	(q_6, R)
q_4	$\#$	$(q_5, Ⓨ)$
q_5	Ⓨ	(h, R)
q_5	Ⓝ	(h, R)
q_6	$\#$	$(q_5, Ⓝ)$

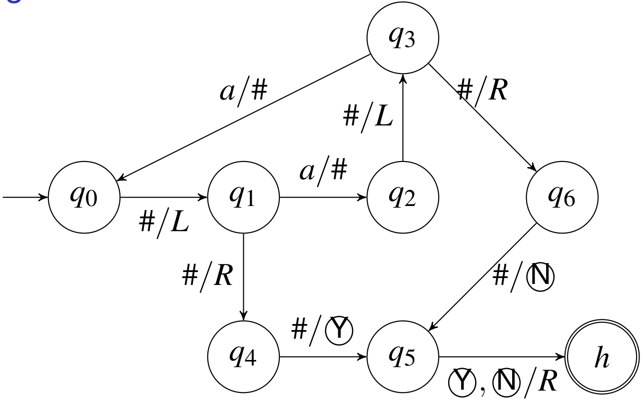


Turing Decidable Machine



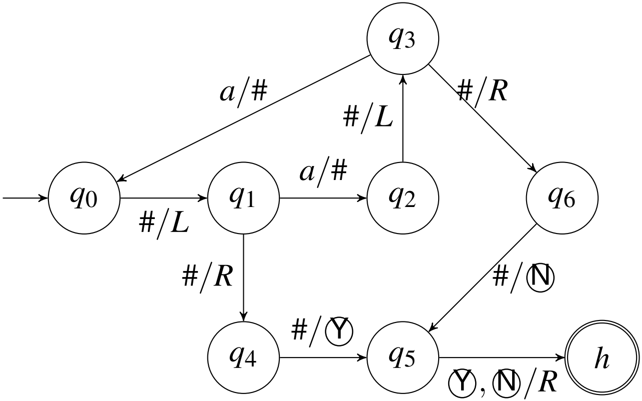
a) $(q_0, \#aa\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \#a\underline{a}) \vdash_M (q_2, \#a\underline{\#}) \vdash_M$
$(q_3, \#\underline{a}) \vdash_M (q_0, \#\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \underline{\#}) \vdash_M$
$(q_4, \#\underline{\#}) \vdash_M (q_5, \#\underline{Y}) \vdash_M (h, \#Y\underline{\#})$

Turing Decidable Machine



b) $(q_0, \#aaa\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \#aa\underline{a}) \vdash_M (q_2, \#aa\underline{\#}) \vdash_M$
$(q_3, \#a\underline{a}) \vdash_M (q_0, \#a\underline{\#}) \vdash_M (q_1, \#\underline{a}) \vdash_M$
$(q_2, \#\underline{\#}) \vdash_M (q_3, \underline{\#}) \vdash_M (q_6, \#\underline{\#}) \vdash_M$
$(q_5, \#\underline{\text{N}}) \vdash_M (h, \#\text{N}\underline{\#})$

Turing Decidable Machine



a) $(q_0, \#a^n\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#\text{Y}\underline{\#}) \Rightarrow n$ is even

b) $(q_0, \#a^n\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#\text{N}\underline{\#}) \Rightarrow n$ is odd

Örnekler

1) $\#\omega\underline{\#} \Rightarrow \#\omega\#\omega\underline{\#}$
2) $\#\omega\underline{\#} \Rightarrow \#\omega\omega^R\underline{\#}$
3) $\#\omega\omega^R\underline{\#} \Rightarrow \#Y\underline{\#}$

Yukarıdaki her bir durum için örnek bir hesap yapalım ve durum geçiş tablosunu oluşturmaya çalışalım.

Örnekler

1)$\#\omega\underline{\#} \Rightarrow \#\omega\#\omega\underline{\#}$

Örnek çalışma:

$\#aba\underline{\#} \rightarrow \#aba\underline{\gamma} \rightarrow \#ab\underline{a}\gamma \rightarrow \ldots \rightarrow \underline{\#}aba\gamma \rightarrow \#\underline{a}ba\gamma \rightarrow \#\underline{\alpha}ba\gamma \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\alpha ba\gamma\underline{\#} \rightarrow \#\alpha ba\gamma\underline{a} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\underline{\alpha}ba\gamma a \rightarrow \#\underline{a}ba\gamma a \rightarrow \#a\underline{b}a\gamma a \rightarrow \#a\underline{\beta}a\gamma a \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#a\beta a\gamma a\underline{\#} \rightarrow \#a\beta a\gamma a\underline{b} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#a\underline{\beta}a\gamma ab \rightarrow \#a\underline{b}a\gamma ab \rightarrow \#ab\underline{a}\gamma ab \rightarrow \#ab\underline{\alpha}\gamma ab \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#ab\alpha\gamma ab\underline{\#} \rightarrow \#ab\alpha\gamma ab\underline{a} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#ab\underline{\alpha}\gamma aba \rightarrow \#ab\underline{a}\gamma aba \rightarrow \#aba\underline{\gamma}aba \rightarrow \#aba\underline{\#}aba \rightarrow \ldots \rightarrow \#aba\#aba\underline{\#}$

Özel bir durum:
Örnek çalışma:
$\#\underline{\#} \rightarrow \#\underline{\gamma} \rightarrow \underline{\#}\gamma \rightarrow \#\underline{\#} \rightarrow \#\#\underline{\#}$

Örnekler

2)$\#\omega\underline{\#} \Rightarrow \#\omega\omega^R\underline{\#}$

Örnek çalışma:

$\#abb\underline{\#} \rightarrow \#ab\underline{b} \rightarrow \#ab\underline{\beta} \rightarrow \#ab\beta\underline{\#} \rightarrow \#ab\beta\underline{b} \rightarrow \#ab\underline{\beta}b \rightarrow \#ab\underline{b}b \rightarrow \#a\underline{b}bb \rightarrow$
$\#a\underline{\beta}bb \rightarrow \#a\beta\underline{b}b \rightarrow \#a\beta b\underline{b} \rightarrow \#a\beta bb\underline{\#} \rightarrow \#a\beta bb\underline{b} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#a\underline{\beta}bbb \rightarrow \#a\underline{b}bbb \rightarrow \#\underline{a}bbbb \rightarrow$
$\#\underline{\alpha}bbbb \rightarrow \#\alpha bbb\underline{b} \rightarrow \#\alpha bbbb\underline{\#} \rightarrow \#\alpha bbbb\underline{a} \rightarrow \#\alpha bbb\underline{b}a \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\underline{\alpha}bbbba \rightarrow \#\underline{a}bbbba \rightarrow \underline{\#}abbbba \rightarrow$
$\#\underline{a}bbbba \rightarrow \ldots \rightarrow \#abbbb\underline{a} \rightarrow \#abb|bba\underline{\#}$

Örnekler

3)$\#\omega\omega^R\underline{\#} \Rightarrow \#\text{Y}\underline{\#}$

Örnek çalışma:

$\#abbbba\underline{\#} \rightarrow \#abbbb\underline{a}\# \rightarrow \#abbb\underline{b} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\underline{\#}abbbb \rightarrow \#\underline{a}bbbb \rightarrow \#\underline{\theta}bbbb \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\theta bbbb\underline{\#} \rightarrow \#\theta bbb\underline{b} \rightarrow \#\theta bb\underline{b} \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\underline{\theta}bbb \rightarrow \#\theta\underline{b}bb \rightarrow \#\theta\underline{\theta}bb \rightarrow \ldots \rightarrow$
$\#\theta\theta b\underline{b} \rightarrow \#\theta\theta bb\underline{\#} \rightarrow \#\theta\theta b\underline{b} \rightarrow \#\theta\theta\underline{b} \rightarrow \#\theta\underline{\theta}b \rightarrow \#\theta\theta\underline{b} \rightarrow \#\theta\theta\underline{\theta}$[1] $\rightarrow$
$\#\theta\theta\underline{\theta} \rightarrow \#\theta\underline{\theta} \rightarrow \#\underline{\theta} \rightarrow \underline{\#} \rightarrow \#\underline{\text{Y}} \rightarrow \#\text{Y}\underline{\#}$

[1] Makine EVET kararı verir

Örnekler

3)$\#\omega\omega^R\underline{\#} \Rightarrow \#Y\underline{\#}$

Örnek çalışma:
$\#\theta\theta bb\underline{b} \rightarrow \#\theta\underline{\theta}bb \rightarrow \#\theta\theta\theta b\underline{\#} \rightarrow \#\theta\theta\theta\underline{b} \rightarrow \#\theta\theta\underline{\theta} \rightarrow \#\theta\theta\theta\underline{\#}$[2] $\rightarrow \#\theta\theta\theta\# \rightarrow$
$\#\theta\theta\underline{\theta} \rightarrow \ldots \rightarrow \#\underline{\theta} \rightarrow \underline{\#} \rightarrow \#N\underline{\#}$

[2]Makine HAYIR kararı verir

Örnekler

3)$\#\omega\omega^R\underline{\#} \Rightarrow \#Y\underline{\#}$

Örnek çalışma:

$\#ab\underline{\#} \rightarrow \#a\underline{b} \rightarrow \#\underline{a} \rightarrow \underline{\#}a \rightarrow \#\underline{a}$[3] $\rightarrow \#a\underline{\#} \rightarrow \#\underline{a} \rightarrow \underline{\#} \rightarrow \#\underline{N} \rightarrow \#N\underline{\#}$

[3] Makine HAYIR kararı verir

Örnekler

3)$\#\omega\omega^R\underline{\#} \Rightarrow \#\text{Y}\underline{\#}$

Örnek çalışma:

$\#aaab\underline{\#} \rightarrow \#aaa\underline{b} \rightarrow \#aa\underline{a} \rightarrow \ldots \rightarrow$

$\underline{\#}aaa \rightarrow \#\underline{a}aa^4 \rightarrow \#aaa\underline{\#} \rightarrow \#aa\underline{a} \rightarrow \#a\underline{a} \rightarrow \#\underline{a} \rightarrow \underline{\#} \rightarrow \#\underline{\text{N}} \rightarrow \#\text{N}\underline{\#}$

4 Makine HAYIR kararı verir