

BLG311 Biçimsel Diller ve Otomatlar

Sonlu Durumlu Makineler

A.Emre Harmancı Tolga Ovatman Berk Canberk

2017

İçerik

- 1 Tanımlar ve Modeller (Mealy ve Moore)
- 2 Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

Hesaplayan Makineler

Bilgisayar

Bilgisayar, programlanarak bir dizi aritmetik ya da mantıksal işlemlerin(*hesaplama*) yapılmasına olanak sağlayan bir *makine*dir.

Hesaplayan Makineler

Makine

Makine, genel tanımıyla, bir veya daha fazla hareket eden parçadan oluşan ve belirli bir amaca yönelik çalışan bir gereçtir. Elektronik teknolojisinde yaşanan gelişmeler fiziksel olarak hareket etmeyen gereçlerin de makine olarak kullanımına olanak sağlamıştır.

Hesaplayan Makineler

Soyut Makine

Soyut makine, bir bilgisayar donanımını ya da yazılımının çalışmasını teorik olarak temsil eden bir modeldir.

Sonlu Durumlu Makine-Finite State Machine(FSM)

FSM, bir beşli $(S, I, O, \delta, \omega)$ ile tanımlanan bir matematik modele sahiptir.

- S : Durum kümesi.
- I : Giriş alfabesi (sonlu, boş olmayan bir sembol kümesi)
- O : Çıkış alfabesi (sonlu, boş olmayan bir sembol kümesi)
- $\delta: I \times S \rightarrow S$ üzerine tanımlı bir geçiş fonksiyonu
- $\omega: S \rightarrow O$ veya $I \times S \rightarrow O$ üzerine tanımlı bir çıkış fonksiyonu

FSM özellikleri

Bir FSM aşağıdaki özellikleri taşır

- 1 Sonlu bir giriş ve çıkış alfabesi bulunur
- 2 Gerekircidir. (Deterministik)

Deterministik Makine

Şimdiki giriş ve durum, sonraki durumu ve çıkışı belirler. Gerekirci olmayan sistemlerde belirli bir giriş - durum çiftine birden fazla sayıda çıkış ve sonraki durum değeri karşı düşebilir.

FSM özellikleri

Bir FSM aşağıdaki özellikleri taşır

- 3 Büyüklük dönüştürücü veya “transducer” özelliği.

Dönüştürücü

Bir dönüştürücü makinenin giriş ve çıkış olmak üzere iki alfabesi bulunur. Dönüştürücüler girdilerine çıktılarına *dönüştürürler*.

Dönüştürücü

Dönüştürücüler sayısal devrelerle gerçekleştirirken ayrık zamanlı (discrete-time systems) kullanılır.

Ayrık zaman - Discrete Time

Ayrık zaman, bir fonksiyonun zaman domenini oluşturan değişkenin belirli aralıklarla örneklenerek kullanılması nedeniyle süreksiz biçimde kullanılmasıdır. Ayrık zamanın gerçekleştirilmesinde kullanılan ana bileşen sistem saatidir.

Dönüştürücü

Ardışıl senkron sayısal devrelerde giriş ve çıkış fonksiyonları kombinezonsal devrelerle gerçekleşir. Öte yandan devrenin sonraki durumunu belirlemede, devrede kullanılan flip-flop'un karakteristiği de etkili olur. Daha biçimsel bir ifade ile:

$$S(t^+) = Q(S(t), \delta(S(t), I(t)))$$

- SR tipi: $q^+ = S + R'q$
- D tipi: $q^+ = D$
- JK tipi: $q^+ = Jq' + K'q$
- T tipi: $q^+ = T \oplus q$

Örneğin D-tipi bir flip-flop'ta sonraki durum fonksiyonu

$$S(t^+) = \delta(S(t), I(t))$$

Dönüştürücü

Sayısal ayrık-zamanlı sistemlerde dönüştürücüler aşağıdaki özellikleri taşır.

- Sekans: Sıralı simge dizisi (Bu bağlamda sıra zamanı belirler). n sekans uzunluğudur.
- $[\Lambda]$: boş katarı içine alan “singleton” yani tek elemanlı küme.
- I^* : giriş sekansı kümesi : $I^* = [\Lambda] \cup I \cup I^2 \cup \dots \cup I^n \dots$
- O^* : çıkış sekans kümesi : $O^* = [\Lambda] \cup O \cup O^2 \cup \dots \cup O^n \dots$
- Dönüştürücünün $w = f(x)$ dönüşümünü gerçekleştirdiği; $w \in O$ ve $x \in I$ olduğu kabul edilirse, f fonksiyonu aşağıdaki özellikleri taşımalıdır:
 - Uzunluğun korunması: $|w| = |x| = n; n \in \mathbb{N}$
 - Önek içindeliği (prefix inclusivity):

$$(x = x_1x_2) \wedge (w = w_1w_2) \wedge (|x_1| = |w_1|) \Rightarrow w_1 = f(x_1)$$

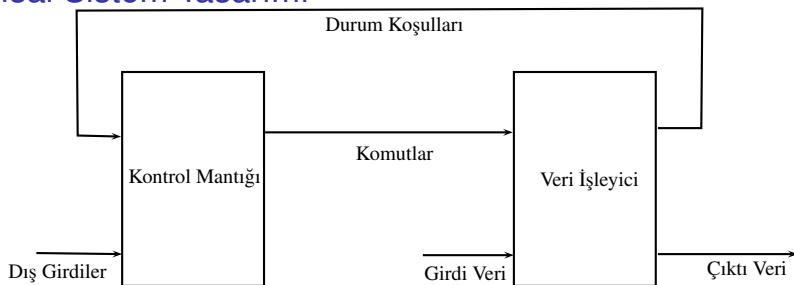
Örnek bir makine

Örneğin bir tuş takımından numerik kodlar okuyarak sadece belirli bir tek kombinasyonu kabul eden bir makine tasarlamak istediğimizi düşünelim. Bu durumda $(S, I, O, \delta, \omega)$ beşlisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

- $I \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Basamak sayısını 4 ile sınırlamak isteyebiliriz: $1234 \in I^4$
- S : Her tuş basımında doğru rakamın girildiğini kontrol etmeliyiz. Bizim durumumuzda $|S| = 5$ or $s_i \in S : 0 \leq i \leq 4$
- $O = \{open, closed\}$ çıkış alfabesidir.
- Makinemiz 4 doğru giriş ardından girilen kodu kabul edecektir. Son durum $F = s_4$. şimdilik, yanlış girişleri göz ardı ederek devam edelim.
- Sadece tek doğru kombinasyonumuz olduğu için δ aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$\begin{aligned} \delta : (s_0, 1) &\rightarrow s_1 \\ (s_1, 9) &\rightarrow s_2 \\ (s_2, 0) &\rightarrow s_3 \\ (s_3, 3) &\rightarrow s_4 \end{aligned}$$
- Çıkış fonksiyonumuzun ω yaptığı eşleme $s_i \rightarrow closed$. Bu durumda $0 \leq i \leq 3$ ve $s_4 \rightarrow open$

Sayısal Sistem Tasarımı

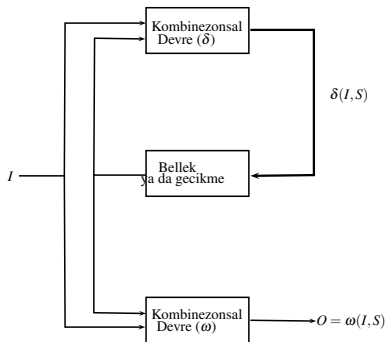


- Sayısal devre tasarlamada genel bir yaklaşım veri işleme ve kontrol işlemlerinin ayrı ayrı ele alınmasıdır.
- Kontrol mantığı ve veri işleme işlemleri algoritmaları donanımsal olarak gerçekleştirilir.
- Bu algoritmalar akış diyagramları benzeri yapılarla temsil edilebilirler.

Makine Tipleri

Mealy tipi makine¹ çıkış değerleri hem o andaki durumu hem de o andaki giriş değerleri ile belirlenen sonlu durumlu makinedir.

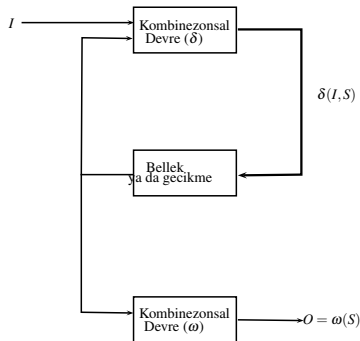
$$I \times S \rightarrow O.$$



¹Mealy makinesi, George H. Mealy tarafından 1955 yılında yayınlanan "A Method for Synthesizing Sequential Circuits" isimli makalede tanımlanmıştır.

Makine Tipleri

Moore tipi makine² çıkış değerleri sadece o andaki durumu ile belirlenen sonlu durumlu makinedir $S \rightarrow O$.



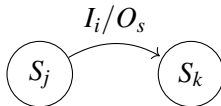
²Moore makinesi, Edward F. Moore tarafından 1956 yılında yayınlanan “Gedanken-experiments on Sequential Machines” isimli makalede tanımlanmıştır.

FSM Modelleme

FSM modellemede aşağıda verilen diyagramlar kullanılır:

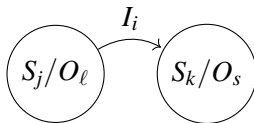
Mealy Makinesi

	I_1	...	I_i	...	I_m
S_1					
...					
S_j			S_k/O_s		
...					
S_n					



Moore Makinesi

	I_1	...	I_i	...	I_m	O
S_1						O_1
...						...
S_j			S_k			O_l
...						...
S_n						O_p



Örnek

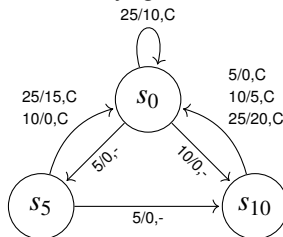
Bir kahve makinesi 5, 10 ve 25 kuruşluk madeni paraları kabul ediyor ve 15 kuruşa bir kahve vererek para üstünü geri veriyor. Bu makinenin Mealy ve Moore tipi modelleri:

Mealy modeli, $S_x/i,j$: x şimdiye kadar atılan parayı gösterir, i para üstünü ve j çıktıyı gösterir. C kahve verildiği, $-$ çıktı verilmediği anlamında kullanılmıştır.

Durum tablosu:

	5	10	25
S_0	$S_5/0,-$	$S_{10}/0,-$	$S_0/10,C$
S_5	$S_{10}/0,-$	$S_0/0,C$	$S_0/15,C$
S_{10}	$S_0/0,C$	$S_0/5,C$	$S_0/20,C$

Durum diyagramı:



Örnek

Moore modelindeki durum sayısı, en az Mealy modelindeki farklı durum/çıkış sayısı kadar olmalıdır. Durumlar atılan para ile ilişkilendirilmemelidir. Para atılmadığında mevcut durum korunur. Buna göre:

Durum tablosu:

	5	10	25	Output
S_0	S_5	S_{10}	S_{25}	0,-
S_5	S_{10}	S_{15}	S_{30}	0,-
S_{10}	S_{15}	S_{20}	S_{35}	0,-
S_{15}	S_5	S_{10}	S_{25}	0,C
S_{20}	S_5	S_{10}	S_{25}	5,C
S_{25}	S_5	S_{10}	S_{25}	10,C
S_{30}	S_5	S_{10}	S_{25}	15,C
S_{35}	S_5	S_{10}	S_{25}	20,C

Mealy modeli geçişleri ile
Moore makinesi durumları
aşağıdaki gibi eşlenebilir

$$S_5/0, - \rightarrow S_5$$

$$S_{10}/0, - \rightarrow S_{10}$$

$$S_0/0, C \rightarrow S_{15}$$

$$S_0/5, C \rightarrow S_{20}$$

$$S_0/10, C \rightarrow S_{25}$$

$$S_0/15, C \rightarrow S_{30}$$

$$S_0/20, C \rightarrow S_{35}$$

Durum eşdeğerliği

Tasarlanması öngörülen bir devrenin ya da sistemin işlevlerinin sözle anlatımından giderek ortaya çıkarılan durum tablosunda eşdeğerli ya da birbirleriyle uyuma gösteren durumlar olabilir. Bu özelliği taşıyan durum sınıflarını ortaya çıkarıp, durum tablosunu daha az durumu olan başka bir tabloya dönüştürme işlemine durum indirgenmesi adı verilir.

Eşdeğerlik Bağıntısı

Bir ikili bağıntı \sim , S kümesi üzerinde tanımlı olsun. Bu bağıntı sadece ve sadece yansımali, bakışlı ve geçişli ise eşdeğerlik bağıntısıdır. Bir başka deyişle, $\forall s_i, s_j, s_k \in S$:

- $s_i \sim s_i$
- $s_i \sim s_j \Rightarrow s_j \sim s_i$
- $s_i \sim s_k \wedge s_k \sim s_j \Rightarrow s_i \sim s_j$

Durum eşdeğerliği

Eşdeğerliğin matematiksel tanımı kullanılarak bir makinenin durum kümesi eşdeğer sınıflara bölünebilir. Eşdeğer sınıflar aşağıdakileri içermelidir

- Eşdeğerliliği açıkça beliren durumlar
- Eşdeğerliliği başka durum çiftlerinin eşdeğerliliğini gerektiren durum çiftleri.

Durum Eşdeğerliği Koşulları

Aynı makinenin iki durumunun eşdeğerli olması için gerek ve yeter koşullar, durum tablosunda her giriş için bu iki duruma ilişkin

- Çıkışların eşit olması ve
- Gelecek durumların
 - doğrudan ya da karşılıklı olarak eşdeğerlik göstermesi
 - eşdeğerliği için doğrudan ya da dolaylı olarak eşdeğerliliği gereken durum çiftleri varsa bunların arasında çıkışta eşdeğerliliği sağlamayan durum çiftinin olmamasıdır.

Gerektirmelerin sağlaması yönlendirilmemiş bağıntı grafindan ve gerektirme merdiveni adını alan tablodan yararlanılarak sağlanır. İndirgenmemiş durum tablosu aşağıdaki gibi verilmiş bir sistem olsun:

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

Durum bağımlılıklarına göre adım adım bir bağımlılık tablosu oluşturabiliriz.

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2							
S_3							
S_4							
S_5							
S_6							
S_7							
S_8							

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3							
S_4							
S_5							
S_6							
S_7							
S_8							

- └ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

- └ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X						
S_4	(2,7)-(4,5)-(1,3)						
S_5							
S_6							
S_7							
S_8							

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X						
S_4	X						
S_5	(2,6)						
S_6							
S_7							
S_8							

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	(2,7)(4,6)					
S_4	X	X					
S_5	(2,6)	X					
S_6	X	○					
S_7	(1,8)(2,7)(4,5)(1,3)						
S_8	(2,6)						

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	(2,7)(4,6)					
S_4	X	X					
S_5	(2,6) \circ	X					
S_6	X	\circ					
S_7	(1,8)(2,7)(4,5)(1,3)						
S_8	(2,6) \circ						

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	(2,7)(4,6)X					
S_4	X	X					
S_5	(2,6) ○	X					
S_6	X	○					
S_7	(1,8)(2,7)(4,5)(1,3)X	X					
S_8	(2,6) ○						

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	(2,6) \circ	X	X				
S_6	X	\circ	(2,3)(6,7)(2,4)				
S_7	X	X					
S_8	(2,6) \circ	X					

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	$(1,5)(6,7)(\mathbf{3,5})$			
S_6	X	\circ	X				
S_7	X	X	X				
S_8	$(2,6) \circ$	X	X				

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X			
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$			
S_8	$(2,6) \circ$	X	X				

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X			
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$			
S_8	$(2,6) \circ$	X	X	$(1,8)(7,6)(4,5)$			

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X	X		
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$	$(5,8)(4,5)(6,7)(3,5)$		
S_8	$(2,6) \circ$	X	X	X			

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X	X		
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$	X		
S_8	$(2,6) \circ$	X	X	X	$(1,5) \circ$		

└ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

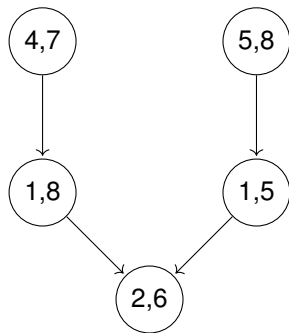
└ Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi

S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

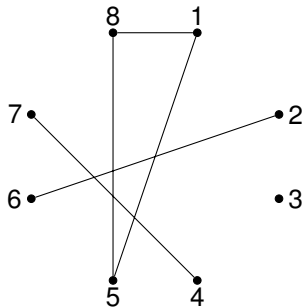
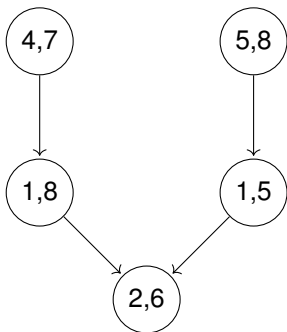
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X	X		
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$	X	X	
S_8	$(2,6) \circ$	X	X	X	$(1,5) \circ$	X	$(6,7)(4,5)(1,3)$

Aşağıdaki tablode bazı durumların eşdeğerliğinin diğer durumlara bağlı olduğu görülebilir. Bu bağımlılıkları içeren bir yönlü graf çizilebilir.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
S_2	X						
S_3	X	X					
S_4	X	X	X				
S_5	$(2,6) \circ$	X	X	X			
S_6	X	\circ	X	X	X		
S_7	X	X	X	$(1,8) \circ$	X	X	
S_8	$(2,6) \circ$	X	X	X	$(1,5) \circ$	X	X

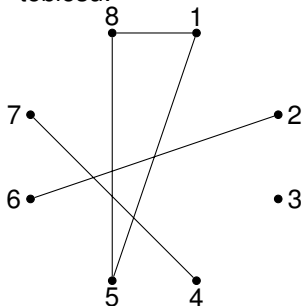


Yönlü bağımlılıklar kullanılarak yönsüz bir bağımlılık grafi çizilebilir ve bu graftaki bağlı bileşenler bulunabilir. Bulunan klikler birleştirilerek eşdeğer durum kümeleri bulunabilir.



S/I	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	$S_1/0$	$S_2/1$	$S_5/1$	$S_1/0$
S_2	$S_2/1$	$S_2/0$	$S_6/0$	$S_3/0$
S_3	$S_3/1$	$S_7/0$	$S_4/0$	$S_3/0$
S_4	$S_1/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_5	$S_5/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_5/0$
S_6	$S_2/1$	$S_6/0$	$S_2/0$	$S_3/0$
S_7	$S_8/0$	$S_7/1$	$S_4/1$	$S_3/0$
S_8	$S_8/0$	$S_6/1$	$S_5/1$	$S_1/0$

Bulunan eşdeğerlik sınıfları kullanılarak oluşturulan durum geçiş
teblosu:



		I_1	I_2	I_3	I_4
S'_1	(S_1, S_5, S_8)	$S'_1/0$	$S'_2/1$	$S'_1/1$	$S'_1/0$
S'_2	(S_2, S_6)	$S'_2/1$	$S'_2/0$	$S'_2/0$	$S'_3/0$
S'_3	(S_3)	$S'_3/1$	$S'_4/0$	$S'_4/0$	$S'_3/0$
S'_4	(S_4, S_7)	$S'_1/0$	$S'_4/1$	$S'_4/1$	$S'_3/0$

Durum uyuşması

Bir makine zaman zaman eksik bilgi nedeniyle ya da özellikle *eksik* tanımlanabilir. Eksik tanımlı FSM geçişlerinde bazı girdiler tanımsız durumlara geçişe neden olabilir ya da tanımsız çıktılar üretilmesine neden olur. Bu gibi makinelerdeki gereksiz durumları elemek için *uyuşma bağıntısı* kavramı kullanılabilir.

Uyuşma bağıntısı

Bir ikili γ bağıntısı S kümesi üzerinde tanımlı olsun. Bu bağıntı sadece ve sadece yansımali, bakışlı ve geçişsiz ise uyuma bağıntısıdır.

Örneğin $d(x, y)$ bağıntısı x ve y noktaları arasındaki uzaklığı temsil etsin. $R_\gamma = \{(a, b) \mid d(a, b) \leq 2, a, b \in \mathbb{N}\}$ şeklinde bir bağıntı tanımlansın.

Bu bağıntının $1\gamma 3$ ve $3\gamma 5$ elemanları olmasına rağmen $1\gamma 5$ elemanı değildir. Öte yandan $1\gamma 2$ ve $2\gamma 3$ gibi geçişli çiftler de bulunabilir. γ bir uyuma bağıntısıdır.

Uyuşanlar sınıfı

Uyuşma bağıntısı tanımlandığı küme üzerinde uyuşanlar sınıflarını oluşturur. Uyuşanlar sınıfının her eleman çifti arasında ikişer ikişer uyuşma vardır. Diğer bir deyişle uyuşanlar sınıfı içinde geçiş özelliği vardır. İki uyuşanlar sınıfının kesişimi boş olmayabilir.

En üst uyuşanlar sınıfı

Bir uyuşanlar sınıfının tanımlandığı küme içinde kendini içine alan daha üst bir sınıf bulunamıyorsa, söz konusu uyuşanlar sınıfına en üst uyuşanlar sınıfı denir. En üst uyuşanlar sınıfı, klik adını da alır. Grafi tam graftır..

Örneğin aşağıdaki uyuşanları sınıfları için

$(a, b, c, d) \supseteq (a, b, c) \supseteq (a, b)$ olduğundan (a, b, c, d) en üst uyuşanlar sınıfıdır.

- └ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

- └ Durum uyuşması, uyuma bağıntısı ve tümüyle tanımlanmamış durum tabloların indirgenmesi

Örtü

Elemanlarının bileşimi, tanımlandığı kümenin tüm elemanlarını içine alan uyulan sınıfları kümesine verilen ad.

Tam örtü

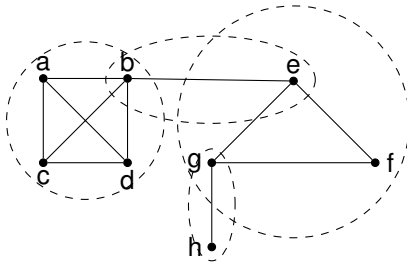
Bir küme üzerinde bir uyuma bağıntısının oluşturduğu en üst uyulan sınıfları kümesidir.

Örnek

γ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlı olsun

$$R_\gamma = \{a\gamma b, a\gamma c, a\gamma d, b\gamma c, b\gamma d, c\gamma d, b\gamma e, e\gamma f, e\gamma g, g\gamma f, g\gamma h\}$$

Bağıntı grafi.



Bu grafin tam örtüsü: $\{\{a, b, c, d\}\{b, e\}\{e, f, g\}\{g, h\}\}$. Bu örnek için $\{b, e\}$ içermeyen bir örtü bulunamaz ancak tam örtü $\{b, e\}$ 'yi de içermelidir.

Uyuşan durumlar

s_i ve s_j durumları sadece ve sadece, uygulanabilir bütün giriş sekansları belirsiz çıkışlar dışında aynı çıkış sekansını üretiyorsa uyuşan durumlardır. Uyuşan durumlar $s_i \gamma s_j$ ile gösterilir.

Aşağıdaki üç durumu ele alalım

$$s_1 = ab\emptyset ef$$

$$s_2 = a\emptyset fef$$

$$s_3 = acfef$$

İki uyuşan sınıf bulunur: s_1, s_2 ve s_2, s_3 .

Durum Uyuşma Koşulları

Aynı makinanın iki durumunun uyuşması için gerek ve yeterli koşullar, her giriş için bu iki duruma ilişkin:

- Çıkışların uyuşma göstermesi
- Gelecek durumların
 - doğrudan ya da karşılıklı olarak uyuşma göstermesi
 - uyuşma göstermesi için doğrudan ya da dolaylı olarak uyuşmaları gereken durum çiftleri varsa, bunların arasında çıkışta uyuşma sağlamayan durum çiftinin olmamasıdır.

Tam örtünün herhangi bir sınıfına yeni bir durum atayıp indirgenmiş makina elde edilebilir, ancak bu makina çoğu kere en iyi indirgenmiş makina olmaz. Optimal çözümü bulmak için kapalı örtü tanımı geliştirilmiştir.

Dolaylı uyuma

i girişine karşılık, S durum kümesi R durum kümesine geçişi sağlıyor olsun ve R durum kümesi S 'nin sonraki durum kümesine dahil olsun. Eğer S kümesi uyumalar sınıfı ise R kümesi i girişi için S kümesinin dolaylı uyumalar sınıfıdır.

Tam örtünün herhangi bir sınıfına yeni bir durum atayıp indirgenmiş makina elde edilebilir, ancak bu makina çoğu kere en iyi indirgenmiş makina olmaz. Optimal çözümü bulmak için kapalı örtü tanımı geliştirilmiştir.

Kapalı örtü

Bu örtüden bir uyuşanlar sınıfına ait bir durum çiftinin uyuşması için diğer durum çiftlerinin uyuşması gerekiyorsa, bu durum çiftlerinin her biri kapalı örtünün herhangi bir uyuşanlar sınıfı içinde yer almalıdır. Tam örtü her zaman kapalı bir örtüdür.

Minimal kapalı örtü

En az sayıda uyuşanlar sınıfı ile örtme ve kapalılık özelliklerini taşıyan uyuşanlar sınıfları kümesidir.

- └ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

- └ Durum uyuşması, uyuma bağıntısı ve tümüyle tanımlanmamış durum tabloların indirgenmesi

Örnek

Aşağıdaki eksik tanımlı durum tablosunu ele alalım:

	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	-	-	$S_5/1$	-
S_2	-	$S_5/1$	$S_4/-$	-
S_3	$S_3/0$	$S_2/1$	-	$S_1/0$
S_4	$S_3/0$	$S_1/1$	$S_4/0$	-
S_5	$S_4/0$	$-/1$	$S_3/-$	$S_4/-$

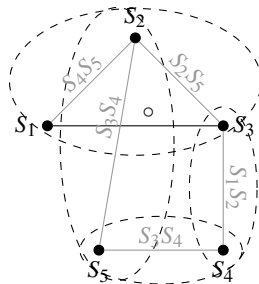
Bu tablonun bağımlılık tablosu:

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_2	$S_4 - S_5$			
S_3	\circ	$S_2 - S_5$		
S_4	\times	$S_1 - S_5 \times$	$S_1 - S_2$	
S_5	$S_3 - S_5 \times$	$S_3 - S_4$	$S_3 - S_4, S_1 - S_4 \times$	$S_3 - S_4$

Örnek

Durum uyuşmalarına dair bağıntı grafi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.
Ayrıtlar uyuma bağımlılıkları ile adlandırılmıştır

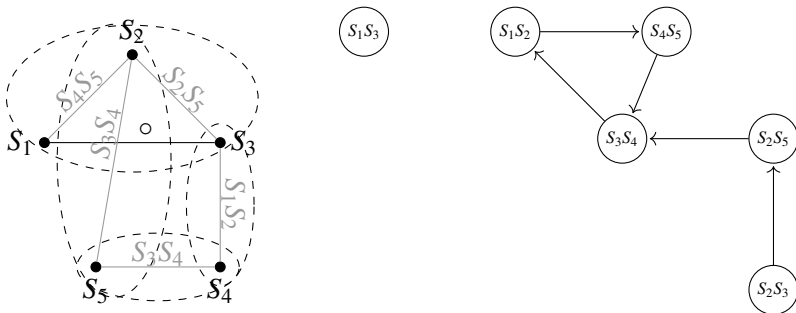
	S_1	S_2	S_3	S_4
S_2	$S_4 - S_5$			
S_3	o	$S_2 - S_5$		
S_4	X	$S_1 - S_5X$	$S_1 - S_2$	
S_5	$S_3 - S_5X$	$S_3 - S_4$	$S_3 - S_4, S_1 - S_4X$	$S_3 - S_4$



En üst uyuşanlar sınıfları aşağıdaki gibi bulunabilir
 $\{(S_1, S_2, S_3), (S_3, S_4), (S_2, S_5), (S_4, S_5)\}$

Örnek

Buna göre indirgenmiş makinada 4 adet durum bulunur.



Ancak gerektirme grafında (S_1, S_2) , (S_3, S_4) ve (S_4, S_5) 'in kapalılık ve örtme özelliği olan uyuşanlar sınıfları kümesi olduğu görülebilir.

- └ Durum Eşdeğerliği, Durum Uyuşması ve Durum İndirgeme

- └ Durum uyuşması, uyuma bağıntısı ve tümüyle tanımlanmamış durum tablolarının indirgenmesi

Örnek

Buna göre indirgenmiş makinaların yeni durum tabloları aşağıdaki gibi bulunur:

	I_1	I_2	I_3	I_4
S_1	-	-	$S_5/1$	-
S_2	-	$S_5/1$	$S_4/-$	-
S_3	$S_3/0$	$S_2/1$	-	$S_1/0$
S_4	$S_3/0$	$S_1/1$	$S_4/0$	-
S_5	$S_4/0$	$-/1$	$S_3/-$	$S_4/-$

Mealy modeli indirgenmiş makine

		I_1	I_2	I_3	I_4
(S_1, S_2)	a	-	c/1	c/1	-
(S_3, S_4)	b	b/0	a/1	b,c/0	a/0
(S_4, S_5)	c	b/0	a/1	b/0	b,c/-

Moore modeli makine

		I_1	I_2	I_3	I_4	O
u	(a/1)	-	z	z	-	1
v	(a/0)	-	z	z	-	0
w	(b/0)	w	u	w	v	0
z	(c/1)	w	u	w	w	1