



# Problèmes d'identification paramétrique : vers des approches multiéchelles

Guillaume Puel

## ► To cite this version:

Guillaume Puel. Problèmes d'identification paramétrique : vers des approches multiéchelles. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2013. tel-00950832

**HAL Id: tel-00950832**

**<https://theses.hal.science/tel-00950832>**

Submitted on 22 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :  
**SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan par

**Guillaume PUEL<sup>1</sup>**

Sujet :

**Problèmes d'identification paramétrique :  
vers des approches multiéchelles**

Habilitation soutenue le 22 novembre 2013 devant le jury composé de :

<b>A. CORIGLIANO</b>	Professeur, Politecnico di Milano, Italie	<b>Président</b>
<b>M. BONNET</b>	Directeur de recherche, ENSTA	<b>Rapporteur</b>
<b>A. GRAVOUIL</b>	Professeur, INSA Lyon	<b>Rapporteur</b>
<b>A. POITOU</b>	Directeur de l'École Centrale de Nantes	<b>Rapporteur</b>
<b>D. AUBRY</b>	Professeur, École Centrale Paris	<b>Examineur</b>
<b>C. BOUTIN</b>	Ingénieur divisionnaire des TPE, ENTPE	<b>Examineur</b>
<b>S. COGAN</b>	Chargé de recherche, U. de Franche-Comté	<b>Examineur</b>
<b>P. LADEVÈZE</b>	Professeur, ENS Cachan	<b>Garant</b>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (MSSMat)  
(École Centrale Paris / CNRS UMR8579)  
Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry cedex (France)



*The most exciting phrase to hear in science,  
the one that heralds new discoveries,  
is not 'Eureka!', but rather  
'Hmm... That's funny... '.*

attribué à Isaac Asimov

*Contrary to what Asimov says,  
the most exciting phrase in science,  
the one that heralds new discoveries,  
is not 'Eureka!' or 'That's funny... ',  
it's 'Your research grant has been approved'.*

John Alejandro King

À ma famille  
À Hélène et Timothée

Je réitère ici les remerciements que j'ai exprimés de vive voix le jour de ma soutenance : à Alberto Corigliano pour être venu d'Italie pour assurer la présidence du jury, à Marc Bonnet, Anthony Gravouil et Arnaud Poitou pour le temps passé en tant que rapporteurs à analyser ce mémoire (surtout quand l'impétrant a eu la bonne idée de rédiger un mémoire complet d'une grosse centaine de pages au lieu de proposer une courte synthèse à base d'articles...), et à Claude Boutin et Scott Cogan pour leurs remarques avisées lors de la soutenance. Je remercie également Pierre Ladevèze d'avoir accepté une nouvelle fois de m'avoir pris comme « disciple » pour cette nouvelle étape importante dans ma progression scientifique. Enfin, je remercie bien sûr Denis Aubry sans qui rien ou presque de ce travail n'aurait été possible, et avec qui j'aurai pris beaucoup de plaisir à explorer les différents éléments présentés ici.

Pour les autres remerciements que je n'ai pas encore formulés, je me rends compte maintenant qu'il serait illusoire de vouloir proposer, comme dans mon mémoire de thèse, une liste réputée exhaustive de tous ceux que j'aimerais évoquer : aussi je me contenterai cette fois-ci d'adresser à tous ceux, collègues et amis, qui ont contribué de près ou de loin à tout ce qui suit, un grand :

**MERCI !**

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des illustrations</b>	<b>iii</b>
Figures . . . . .	iii
Tableaux . . . . .	iv
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Identification de paramètres constants pour des problèmes d'évolution</b>	<b>3</b>
1.1 Démarche proposée . . . . .	4
1.1.1 Forme générique du problème direct traité . . . . .	4
1.1.2 Forme générique du problème d'identification . . . . .	5
1.1.3 Minimisation de la fonction coût . . . . .	7
1.2 Identification des paramètres de modèles de cales de châssis automobiles . . . . .	10
1.2.1 Présentation du problème . . . . .	10
1.2.2 Résolution du problème d'identification . . . . .	15
1.3 Identification des paramètres de modèles de suspensions d'une rame de TGV . . . . .	19
1.3.1 Présentation du problème . . . . .	19
1.3.2 Identification paramétrique d'un modèle simplifié de bogie . . . . .	23
1.3.3 Identification paramétrique d'un modèle multicorps de rame de TGV . . . . .	27
1.4 Bilan et perspectives . . . . .	29
1.4.1 Sur l'amélioration de la mise en œuvre numérique . . . . .	29
1.4.2 Sur la question de l'identifiabilité . . . . .	30
1.4.3 Sur l'identification « en ligne » et la maintenance prédictive . . . . .	31
<b>2 Identification de champs de paramètres pour des problèmes stationnaires</b>	<b>33</b>
2.1 Enjeux et difficultés de l'identification de champs spatiaux de propriétés . . . . .	34
2.1.1 Illustration dans le domaine de la biomécanique . . . . .	34
2.1.2 Contexte de ce type d'études . . . . .	36
2.2 Stratégie d'identification basée sur l'utilisation de maillages adaptatifs . . . . .	39
2.2.1 Forme générique du problème continu . . . . .	40
2.2.2 Résolution numérique et stratégie proposée . . . . .	41
2.2.3 Extension : utilisation d'une erreur en quantité d'intérêt . . . . .	46
2.3 Identification de cavités souterraines à l'aide de mesures d'interférométrie radar . . . . .	47
2.3.1 Présentation du problème . . . . .	48
2.3.2 Résultats de l'identification de cavités sur un problème 2D . . . . .	50
2.4 Identification de défauts cristallins à l'aide de clichés MET . . . . .	56
2.4.1 Présentation du problème . . . . .	56
2.4.2 Résultats de l'identification de défauts cristallins sur un problème 2D . . . . .	59
2.5 Bilan et perspectives . . . . .	62
2.5.1 Sur des ajustements possibles de la stratégie adaptative . . . . .	62
2.5.2 Vers une identification multiéchelle . . . . .	64

<b>3</b>	<b>Modèles homogénéisés en temps et identification paramétrique</b>	<b>67</b>
3.1	Méthode d'homogénéisation périodique en temps . . . . .	68
3.1.1	Présentation du contexte . . . . .	68
3.1.2	Bases de la méthode . . . . .	72
3.1.3	Extensions proposées . . . . .	79
3.2	Application : simulation temporelle de la fatigue à cycles combinés . . . . .	82
3.2.1	Barre soumise à un chargement normal bifréquentiel . . . . .	83
3.2.2	Aube de turbine aéronautique en service . . . . .	93
3.2.3	Processus mécanobiologique du remodelage osseux . . . . .	96
3.3	Vers l'identification de paramètres de modèles homogénéisés en temps . . . . .	99
3.3.1	Mise en œuvre sur un exemple simple . . . . .	99
3.3.2	Commentaires et explorations complémentaires . . . . .	103
3.4	Bilan et perspectives . . . . .	105
3.4.1	Sur les performances de la méthode d'homogénéisation périodique en temps . . . . .	106
3.4.2	Sur de possibles cas d'étude à explorer . . . . .	107
	<b>Conclusion</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>
	<b>Publications associées</b>	<b>125</b>

## Figures

1.1	Résultats de simulation d'un modèle multicorps de châssis automobile. . . . .	11
1.2	Cale élastique typique de châssis automobile. . . . .	12
1.3	Modèle RT de cale élastique avec $N$ cellules identiques. . . . .	14
1.4	Réponses du modèle RT pour une sollicitation sinusoïdale. . . . .	14
1.5	Résultats de l'identification paramétrique du modèle RT avec la méthode de quasi-Newton. . . . .	18
1.6	Systèmes de suspension d'une rame de TGV Duplex. . . . .	20
1.7	Dérivées temporelles de la réponse directe du modèle de bogie. . . . .	24
1.8	Calcul de la dérivée partielle de la fonction coût par rapport au paramètre $c_y$ (modèle de bogie). . . . .	25
1.9	Identification des paramètres $c_y$ et $c_z$ de la suspension du bogie pour une méthode de quasi-Newton (BFGS). . . . .	26
1.10	Résultats de l'identification paramétrique sur deux portions de voie (rame de TGV). . . . .	29
2.1	Maillages utilisés pour la stratégie de détection de cavité (cas 2D). . . . .	52
2.2	Résultat de la stratégie de détection de cavité après 6 étapes de raffinement (cas 2D). . . . .	52
2.3	Deux cas supplémentaires de la stratégie de détection de cavité (2D) : champ spatial de module de Young identifié après 6 étapes de raffinement. . . . .	54
2.4	Deux extensions de la stratégie de détection de cavité : champ spatial de module de Young identifié après 6 étapes de raffinement. . . . .	55
2.5	Problème direct de diffusion électronique dans le cas d'une lacune. . . . .	60
2.6	Évolution du maillage $\mathcal{M}_H$ de discrétisation de $\Delta V_H$ et champ de potentiel identifié après 5 étapes de raffinement. . . . .	61
3.1	Barre soumise à un chargement normal bifréquentiel. . . . .	83
3.2	Déformation plastique longitudinale en $x = 0$ (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel). . . . .	86
3.3	Évolutions de la déformation plastique longitudinale pour différentes sollicitations (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel, en quasi-statique). . . . .	88
3.4	Deux diagrammes d'Ashby. . . . .	89
3.5	Influence de l'amortissement dans le cas d'une excitation résonante (barre soumise à un chargement normal bifréquentiel). . . . .	91
3.6	Évolutions « longues » de la déformation plastique longitudinale (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel, dans le cas dynamique). . . . .	92
3.7	Fatigue CCF dans les aubes de turbines aéronautiques. . . . .	94
3.8	Essais de fatigue CCF. . . . .	95



3.9	Simulation des essais de fatigue CCF (100 cycles lents sur éprouvette LEMH).	95
3.10	Simulation <i>in vivo</i> d'un échantillon d'os cortical. . . . .	98
3.11	Évolutions de la déformation plastique longitudinale dans le cadre de l'identification paramétrique d'un modèle de barre homogénéisé en temps. . . . .	102
3.12	Analyse de la réponse homogénéisée et de l'identification paramétrique pour un modèle de barre homogénéisé en temps, avec $\xi = 1/5$ . . . . .	105

## Tableaux

1.1	Identification du modèle RT : évaluation de la fonction coût et de son gradient, et test du produit scalaire pour différentes valeurs du paramètres de lissage. . .	17
3.1	Comparaison des différentes estimations de la déformation plastique longitudinale à l'instant $t = 20$ s (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel). . . . .	86
3.2	Ordres de grandeur des nombres d'onde en fonction du terme d'amortissement, quand $\xi \rightarrow 0$ (barre soumise à un chargement normal bifréquentiel). . . . .	91
3.3	Valeurs des paramètres identifiés après minimisation de $\mathcal{J}^0$ et $\mathcal{J}^{0*}$ (identification d'un modèle de barre homogénéisé en temps). . . . .	103

*We call two problems inverses of one another if the formulation of each involves all or part of the solution of the other. Often, for historical reasons, one of the two problems has been studied extensively for some time, while the other is newer and not so well understood. In such cases, the former is called the direct problem, while the latter is called the inverse problem.*

[Keller 1976] – J. B. Keller. Inverse problems. *The American Mathematical Monthly*, 83(2): 107–118, 1976

Dès lors que l'on cherche à décrire des phénomènes physiques à l'aide de modèles, que ceux-ci soient analytiques ou numériques, la question de la validation reste cruciale. Si l'on met de côté le choix de la forme du modèle, qui peut résulter aussi bien de grands principes fondamentaux que de propositions empiriques, la détermination des paramètres intervenant dans les équations qui le définissent se fait habituellement au travers de la confrontation avec des quantités qui peuvent être mesurées expérimentalement. **Cette identification paramétrique constitue un problème inverse, donc « mal posé » au sens d'Hadamard.** Ce dernier précisait que, pour être « bien posé », un problème devait avoir une solution, qui soit unique, et qui dépende continûment des données le définissant. **C'est donc sur ces trois caractéristiques (existence, unicité, stabilité) qu'il faut intervenir pour espérer résoudre correctement le problème d'identification.**

Assurer l'existence d'une solution est de loin ce qui est le plus aisé : pour cela, le problème est couramment reformulé en un **problème de minimisation d'une « fonction coût »**, caractéristique de l'écart entre les grandeurs mesurées et les quantités équivalentes prédites par le modèle. Les paramètres identifiés correspondront alors au minimum global de cette fonction coût, qui peut être déterminé par diverses méthodes, que nous pouvons très grossièrement classer en deux grands groupes :

- **les méthodes qui ne reposent que sur l'évaluation de la fonction coût** : parmi elles, on trouve notamment d'un côté les techniques dites de *pattern search*, et de l'autre les algorithmes génétiques et de recuit simulé (ou *simulated annealing*) ; ces derniers sont des méthodes plus exploratoires que les premières, mais, dans les deux cas, il n'y a aucune garantie de convergence vers un minimum de la fonction coût, même local ;
- **les méthodes qui se basent sur l'estimation des dérivées successives de la fonction coût** en plus de ses valeurs : les plus couramment utilisées sont les formulations employant une estimation du premier gradient, qui existent sous des formes très diverses (quasi-Newton, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, ...).

Ce sont principalement ces dernières méthodes que nous considérerons dans ce mémoire : plus rapides que les méthodes du premier groupe, elles sont capables de converger vers un minimum de la fonction coût même si celui-ci peut n'être que local finalement.

**Rétablir l'unicité et la stabilité de la solution du problème d'identification s'avère par contre plus délicat**, d'autant plus lorsque la « taille » de l'espace dans lequel sont recherchés les paramètres n'est pas nettement inférieure à la « quantité » des informations expérimentales disponibles. Une première solution peut être de directement **réduire la taille de l'espace des paramètres**, mais ceci peut se faire au détriment de la robustesse du résultat de l'identification. **L'ajout de termes de régularisation**, selon Tikhonov, est également classiquement employé : ces termes visent à apporter par pénalisation des propriétés stabilisantes au processus d'identification des paramètres recherchés, telles que la proximité par rapport à une connaissance *a priori* de ceux-ci, ou encore un « lissage » lorsqu'il s'agit de champs de paramètres. De nombreuses contributions proposent alors divers moyens de régler le « poids » de cette régularisation.

C'est dans ce contexte que **l'objectif de ce mémoire est d'apporter une contribution à la résolution des problèmes d'identification paramétrique, notamment lorsque ces paramètres sont des fonctions de l'espace et/ou du temps**. Il s'agit d'un résumé de travaux réalisés depuis septembre 2005 au sein du Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (MSSMat) de l'École Centrale Paris, UMR 8579 du CNRS.

**Dans un premier chapitre, nous nous intéressons au cadre de l'identification paramétrique de modèles régis par des équations différentielles ordinaires**. Ce chapitre est l'occasion pour nous de proposer une **démarche de base de résolution du problème inverse**, où la fonction coût est minimisée grâce à l'estimation de son gradient, obtenue par la solution d'un problème d'état adjoint. Deux exemples issus du domaine de la simulation multicorps et proposant l'utilisation de données expérimentales transitoires permettent d'illustrer le bien-fondé de cette démarche ainsi que d'exposer quelques pistes de régularisation spécifiques.

**Le second chapitre permet d'aller plus loin dans la complexité de l'identification en proposant d'aborder la détermination de champs spatiaux de paramètres**. Les problèmes s'inscrivant dans ce cadre sont alors régis par des équations aux dérivées partielles, et il devient nécessaire d'avoir accès à des données expérimentales les plus riches possibles, telles que celles que peuvent nous offrir les techniques de mesures de champs. Pour résoudre ce type de problème inverse, nous adjoignons à la démarche du premier chapitre une recherche du champ spatial de paramètres à l'aide d'un maillage spécifique, initialement grossier, et progressivement raffiné selon des techniques d'adaptation de maillage. Ceci permet alors de **développer une stratégie adaptative d'identification**, dont les propriétés de régularisation facilitent la résolution du problème inverse, et qui laisse entr'apercevoir des extensions multiéchelles.

**Le troisième chapitre présente enfin complètement une approche multiéchelle, dans le cadre peu répandu de l'homogénéisation périodique en temps**. Cette dernière permet d'aborder de façon efficace la simulation numérique de l'évolution « lente » d'un système soumis à des sollicitation cycliques « rapides ». Nous proposons alors sur un exemple quelques investigations autour d'une **formulation du problème d'identification paramétrique adaptée à ce cadre multiéchelle**, ainsi que les pistes d'approfondissement que cet exemple a pu susciter.

Dans un dernier temps, nous concluons en résumant les différentes perspectives à court et moyen termes qui auront été données tout au long de ce mémoire.

# Identification de paramètres constants pour des problèmes d'évolution

---

*[Jacques Hadamard] claimed, moreover, that a "well-posed" problem is not only one for which the solution exists and is unique for given data ; the solution must depend continuously on the data. He explains that, if the solution varies considerably for a small variation of the data, it is not actually a solution, in the sense of physics ; since in the physical reality, we never know the data completely, but only with a certain degree of accuracy, so that it would mean that we actually do not know the solution.*

[Mandelbrojt et Schwartz 1965] – S. Mandelbrojt et L. Schwartz. Jacques Hadamard (1865–1963). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(1): 107–129, 1965

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Démarche proposée . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1.1	Forme générique du problème direct traité . . . . .	4
1.1.2	Forme générique du problème d'identification . . . . .	5
1.1.3	Minimisation de la fonction coût . . . . .	7
<b>1.2</b>	<b>Identification des paramètres de modèles de cales de châssis automobiles . .</b>	<b>10</b>
1.2.1	Présentation du problème . . . . .	10
1.2.2	Résolution du problème d'identification . . . . .	15
<b>1.3</b>	<b>Identification des paramètres de modèles de suspensions d'une rame de TGV</b>	<b>19</b>
1.3.1	Présentation du problème . . . . .	19
1.3.2	Identification paramétrique d'un modèle simplifié de bogie . . . . .	23
1.3.3	Identification paramétrique d'un modèle multicorps de rame de TGV . .	27
<b>1.4</b>	<b>Bilan et perspectives . . . . .</b>	<b>29</b>
1.4.1	Sur l'amélioration de la mise en œuvre numérique . . . . .	29
1.4.2	Sur la question de l'identifiabilité . . . . .	30
1.4.3	Sur l'identification « en ligne » et la maintenance prédictive . . . . .	31

---

L'objectif de ce premier chapitre est de présenter quelques résultats autour de l'identification de paramètres constants associés à des modèles de comportement qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires (EDO) dépendant du temps. Tout d'abord, une présentation générale du problème inverse permettra notamment de situer la démarche de résolution proposée dans la littérature existante. Dans un second temps, deux exemples portant sur des modèles de simulation multicorps illustreront les détails de cette démarche ainsi que sa pertinence : en particulier, ils permettront de confirmer l'intérêt des différentes étapes proposées, qui pourront alors être adoptées pour des problèmes plus complexes ou plus spécifiques, comme ceux exposés dans les deux autres chapitres de ce mémoire. Enfin un bilan rapide des points clés abordés lors de ces travaux conclura ce chapitre, et permettra d'énoncer quelques perspectives qui devraient être abordées à moyen terme.

## 1.1 Démarche proposée

### 1.1.1 Forme générique du problème direct traité

**Les problèmes directs que l'on souhaite traiter ici utilisent des modèles qui sont décrits par des équations différentielles ordinaires (EDO).** Dans la majorité des cas envisagés, ces équations différentielles dépendent de la variable de temps  $t$ , mais on peut également traiter de la même façon des exemples où c'est une variable d'espace unidimensionnelle  $x$  qui est considérée : citons notamment les problèmes de statique des poutres, ou encore de diffusion unidirectionnelle, qui entrent dans ce cadre.

**Le problème direct traité est décrit ici sous forme implicite** en introduisant une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  sur un intervalle de temps fixé  $[0; T]$  :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(t), d_t \mathbf{u}(t), d_t^2 \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0; T] \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{U}_0 \quad (1.1b)$$

$$d_t \mathbf{u}(0) = \mathbf{V}_0 \quad (1.1c)$$

où  $d_t$  et  $d_t^2$  désignent les dérivées par rapport au temps  $t$  d'ordre un et deux respectivement.

$\mathbf{u}$  est le vecteur d'état, de taille  $N$ , et contient l'évolution au cours du temps des  $N$  degrés de liberté (DDL) du système étudié. Dans la plupart des cas rencontrés, ces degrés de liberté correspondent à des déplacements, qui peuvent par exemple provenir d'une discrétisation Éléments Finis (EF) ;  $d_t \mathbf{u}$  et  $d_t^2 \mathbf{u}$  contiennent alors les vitesses et les accélérations de ces  $N$  DDL respectivement. En résumé, l'équation d'état (1.1) comporte, en plus de l'EDO, deux conditions initiales : l'une en déplacement initial  $\mathbf{U}_0$  et l'autre en vitesse initiale  $\mathbf{V}_0$ .

Le vecteur  $\mathbf{p}$  quant à lui désigne le vecteur des  $P$  paramètres du modèle décrit par l'équation différentielle proposée. Dans ce qui suit, on suppose que ces  $P$  paramètres sont indépendants du temps, ce qui correspond à la situation des différents exemples proposés dans ce chapitre. L'extension au cas où les paramètres sont des fonctions du temps est envisagée en perspective dans le paragraphe 1.4.3.

### 1.1.2 Forme générique du problème d'identification

Le problème d'identification revient alors à déterminer le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_{opt}$  tel que la solution  $\mathbf{u}(t; \mathbf{p}_{opt})$  de l'équation d'état (1.1) obtenue avec ce jeu de paramètres soit la plus proche possible de la « réalité expérimentale » décrite ci-après.

#### Information expérimentale

Celle-ci consiste généralement en la mesure de l'évolution du déplacement et/ou de la vitesse et/ou de l'accélération en certains points donnés de la structure. Ces mesures sont alors comparées aux grandeurs correspondantes ( $\mathbf{A}\mathbf{u}(t; \mathbf{p}); \mathbf{B}d_t\mathbf{u}(t; \mathbf{p}); \mathbf{C}d_t^2\mathbf{u}(t; \mathbf{p})$ ) calculées avec le modèle direct (1.1), où  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sont des opérateurs de projection qui permettent de sélectionner pour chaque grandeur le DDL le plus proche du point de mesure expérimental.

Afin de rendre les notations plus cohérentes, nous allons supposer que les mesures effectuées proviennent de la projection d'un vecteur d'état expérimental à l'aide de ces mêmes opérateurs : ( $\mathbf{A}\mathbf{u}_{exp}(t); \mathbf{B}d_t\mathbf{u}_{exp}(t); \mathbf{C}d_t^2\mathbf{u}_{exp}(t)$ ). Cette notation ne laisse bien sûr rien présager de la connaissance de l'intégralité de  $\mathbf{u}_{exp}$ .

#### Choix de la fonction coût

Il s'agit maintenant de préciser la fonction coût qui permettra de définir une **norme de l'écart entre les grandeurs calculées avec le modèle direct (1.1) et les grandeurs mesurées expérimentalement**. Bien qu'il soit possible de comparer certains traits caractéristiques de la réponse seulement, il semble préférable d'utiliser l'intégralité de l'information expérimentale pour réduire au maximum le nombre de minima locaux de la fonction coût. Comme l'équation d'état est, dans la majorité des cas, non linéaire, nous choisissons d'exprimer la fonction coût sous la forme d'une **norme  $L^2$  dans le domaine temporel**, à laquelle nous ajoutons un terme classique de régularisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{p}) = & \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{A}(\mathbf{u}(t; \mathbf{p}) - \mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{B}(d_t\mathbf{u}(t; \mathbf{p}) - d_t\mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{C}(d_t^2\mathbf{u}(t; \mathbf{p}) - d_t^2\mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt + \frac{1}{2} \left| \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right|^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}(t; \mathbf{p})$  vérifie l'équation d'état (1.1). Plutôt qu'une norme  $L^2$ , il aurait également été envisageable d'utiliser une norme  $L^1$  de ce même écart ; cependant, la mise en œuvre numérique s'avère plus délicate dans ce cas, et peut nécessiter des méthodes spécifiques, comme celle proposée par [Borsic et Adler 2012].

La solution du problème d'identification est alors le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_{opt}$  qui minimise cette fonction coût :

$$\mathbf{p}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{p}} \mathcal{J}(\mathbf{p}) \quad (1.3)$$

**En ce qui concerne le terme d'écart, de type moindres carrés, seule l'une des trois intégrales de (1.2) est conservée en pratique suivant que l'on souhaite utiliser les déplacements, les vitesses ou les accélérations pour l'identification.** Néanmoins, dans la suite de cet exposé générique, nous garderons dans les expressions les trois opérateurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  afin de montrer simultanément les trois cas possibles.

**Le terme de régularisation dite de Tikhonov permet de remédier au caractère mal posé du problème d'identification** en limitant l'amplitude du vecteur  $\mathbf{p}$  des paramètres identifiés ; selon [Tikhonov 1977], il fait intervenir un vecteur  $\mathbf{p}_0$  de valeurs nominales, qui peuvent être proposées grâce à une certaine connaissance *a priori* des paramètres recherchés, et une matrice diagonale  $\mathbf{R}$  dont les termes constants, à fixer, permettent de modifier le poids de la régularisation associée à chaque paramètre. Différentes méthodes existent pour fixer la valeur de ces termes, comme, par exemple, la méthode détaillée dans [Morozov 1984], qui repose sur une estimation *a priori* du bruit de mesure, et que nous utiliserons dans le paragraphe 2.3.2.

### Autres choix possibles de fonctions coûts

Bien sûr, d'autres choix de fonctions coûts sont envisageables. Plutôt que de comparer les réponses calculées et mesurées sur le domaine temporel tout entier (ce qui peut s'avérer coûteux dans certains cas), **il est possible de ne comparer que des grandeurs « résumant » les réponses temporelles complètes**, comme par exemple les modes issus de la décomposition de Karhunen-Loeve (*proper orthogonal modes* ou POM) ou les modes non linéaires (*nonlinear normal modes* ou NNM). Tandis que [Da Silva *et al.* 2009] comparent différentes possibilités de fonctions coûts sur un même exemple comportant une raideur cubique, [Kerschen *et al.* 2006] présentent un inventaire assez exhaustif de ce qu'il est possible d'utiliser comme fonctions coûts pour l'identification de systèmes dynamiques non linéaires.

D'autres méthodes sont également citées dans cette dernière référence, mais ne seront pas évoquées ici : fortement ancrées dans le domaine de l'analyse modale, elles ont comme principales limitations soit de ne concerner que des systèmes à faible nombre de DDL, soit de ne proposer qu'une identification dont l'interprétation physique n'est pas immédiate.

Plutôt que d'utiliser une fonction coût de type moindres carrés, il est en effet possible de choisir d'autres formulations. Les techniques basées sur les **filtres de Kalman** sont une première alternative, et permettent notamment de prendre en compte une estimation du bruit affectant la mesure afin de gagner en robustesse. Des variantes, comme celles utilisées par [Mariani et Corigliano 2005], existent aussi, et sont plus adaptées aux comportements non linéaires.

Nous pouvons également citer le **concept d'erreur en relation de comportement modifiée**, développé au sein du LMT-Cachan, initialement pour résoudre des problèmes de recalage de modèles de vibrations linéaires : il a notamment été possible dans [Puel 2001] de travailler sur une première extension de ce concept à des modèles non linéaires, en utilisant une approximation au premier harmonique de la réponse temporelle (*harmonic balance method*). **Cette technique s'est montrée la plus efficace dans les comparaisons menées dans le domaine fréquentiel** par [Da Silva *et al.* 2009], et les auteurs concluent que cette méthode serait encore plus performante avec son expression dans le domaine temporel.

Cette remarque est cohérente avec l'**utilisation de ce concept dans le cadre de problèmes d'identification en dynamique transitoire**, d'abord dans le cas de l'élasticité linéaire [Feissel 2003, Feissel et Allix 2007], puis dans les cas de l'endommagement isotrope et de la viscoplasticité à écrouissage non linéaire [Nguyen 2006, Nguyen *et al.* 2008]. **La méthode a montré sa grande efficacité**, notamment en présence de mesures expérimentales fortement bruitées, **mais elle nécessite une mise en œuvre numérique qui se révèle délicate**, car chaque calcul de la fonction coût passe par la résolution d'un problème de minimisation non linéaire sous contrainte dans le domaine temporel. C'est alors la méthode LATIN, développée elle aussi au LMT-Cachan par [Ladevèze 1985 - 1989 - 1996] notamment, qui est utilisée avec succès pour cette tâche.

### 1.1.3 Minimisation de la fonction coût

Comme précisé plus haut, la solution du problème d'identification est le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}_{opt}$  qui minimise la fonction coût choisie. Pour trouver ce minimum, il est possible de se référer à l'abondante littérature sur les méthodes d'optimisation, déjà évoquée précédemment. Des deux grandes familles de méthodes possibles, nous avons préféré nous concentrer ici sur celles qui utilisent les dérivées de la fonction coût. **La question porte alors sur la façon de calculer le gradient requis par ces méthodes.**

**Le choix que nous avons alors adopté consiste à calculer celui-ci à l'aide de l'état adjoint**, formulation initialement proposée dans [Chavent 1974] à partir des travaux sur la théorie du contrôle optimal de [Lions 1968]. Un exemple typique de son application à un problème inverse dans le domaine de la mécanique est notamment proposé dans [Constantinescu et Tardieu 2001] dans le cas de l'identification de paramètres matériau élastoplastiques à partir d'essais d'indentation.

D'autres choix auraient été possibles. Le gradient peut être estimé directement par une formule de différences finies : les principaux inconvénients associés résident alors dans le coût de calcul, qui évolue proportionnellement avec le nombre de paramètres du modèle, et dans le choix du pas de discrétisation associé à la formule utilisée, qui doit tenir compte du pas de temps de l'algorithme d'intégration temporelle utilisé pour la résolution du problème direct. Outre cette solution, il est également envisageable de calculer explicitement le gradient de la fonction coût comme la dérivée d'une fonction composée : par exemple, [Cooreman *et al.* 2007] proposent un tel calcul pour l'identification des paramètres d'un modèle élastoplastique à partir des déformations mesurées lors d'un essai de traction, mais ce calcul, rapidement laborieux, nécessite en outre un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas nécessairement vérifiées de façon rigoureuse dans l'expérimentation.

#### Minimisation sous contrainte

Pour introduire l'état adjoint, nous pouvons suivre la démarche proposée par [Plessix 2006] et partir de la remarque que la minimisation de la fonction coût (1.2) se fait sous la contrainte que  $\mathbf{u}(t; \mathbf{p})$  est la solution du problème direct (1.1). On peut alors introduire le lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{z})$  défini comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{A}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{B}(d_t \mathbf{u}(t) - d_t \mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \mathbf{C}(d_t^2 \mathbf{u}(t) - d_t^2 \mathbf{u}_{exp}(t)) \right|^2 dt + \frac{1}{2} \left| \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right|^2 \\ & - \int_0^T \mathcal{F}(\mathbf{u}(t), d_t \mathbf{u}(t), d_t^2 \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t)^T \mathbf{z}(t) dt \\ & - (\mathbf{u}(0) - \mathbf{U}_0)^T \mathbf{z}(0) - (d_t \mathbf{u}(0) - \mathbf{V}_0)^T d_t \mathbf{z}(0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{z})$  sont considérés indépendants. **Minimiser sous contrainte la fonction coût revient alors à rendre stationnaire le lagrangien par rapport à ses trois arguments**, comme évoqué par [Ciarlet 1989]. L'état adjoint  $\mathbf{z}$  est un multiplicateur de Lagrange, qui permet d'imposer de façon exacte la contrainte d'avoir  $\mathbf{u}(t)$  solution du problème direct (1.1), comme on peut le constater en écrivant la stationnarité du lagrangien vis-à-vis de  $\mathbf{z}$ .



## État adjoint

L'équation différentielle vérifiée par l'état adjoint s'obtient en exprimant la stationnarité du lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{z})$  vis-à-vis de  $\mathbf{u}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta \mathbf{u}(t)^T \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{exp}(t)) \right) dt + \int_0^T \delta d_t \mathbf{u}(t)^T \left( \mathbf{B}^T \mathbf{B}(d_t \mathbf{u}(t) - d_t \mathbf{u}_{exp}(t)) \right) dt \\ + \int_0^T \delta d_t^2 \mathbf{u}(t)^T \left( \mathbf{C}^T \mathbf{C}(d_t^2 \mathbf{u}(t) - d_t^2 \mathbf{u}_{exp}(t)) \right) dt \\ - \int_0^T \left( \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F} \delta \mathbf{u}(t) + \nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F} \delta d_t \mathbf{u}(t) + \nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F} \delta d_t^2 \mathbf{u}(t) \right)^T \mathbf{z}(t) dt = 0 \quad (1.5) \end{aligned}$$

pour tout  $\delta \mathbf{u}(t)$  vérifiant des conditions initiales nulles :  $\delta \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$  et  $\delta d_t \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ . Les termes  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$ ,  $\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}$  et  $\nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F}$  désignent les dérivées directionnelles de  $\mathcal{F}$ , respectivement par rapport à  $\mathbf{u}$ ,  $d_t \mathbf{u}$  et  $d_t^2 \mathbf{u}$ .

La formulation faible que l'on vient d'établir peut être remaniée à l'aide de plusieurs intégrations par parties successives de façon à obtenir finalement une formulation forte du problème adjoint, pour laquelle on a des conditions finales (à  $t = T$ ) :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z} - d_t (\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}) + d_t^2 (\nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}) \\ = \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{exp}) - \mathbf{B}^T \mathbf{B}(d_t^2 \mathbf{u} - d_t^2 \mathbf{u}_{exp}) + \mathbf{C}^T \mathbf{C}(d_t^4 \mathbf{u} - d_t^4 \mathbf{u}_{exp}) \end{aligned} \quad \forall t \in [0; T] \quad (1.6a)$$

$$(\nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z})|_{t=T} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} (d_t^2 \mathbf{u} - d_t^2 \mathbf{u}_{exp})|_{t=T} \quad (1.6b)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z})|_{t=T} - d_t (\nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F}^T \mathbf{z})|_{t=T} \\ = \mathbf{B}^T \mathbf{B} (d_t \mathbf{u} - d_t \mathbf{u}_{exp})|_{t=T} - \mathbf{C}^T \mathbf{C} (d_t^3 \mathbf{u} - d_t^3 \mathbf{u}_{exp})|_{t=T} \end{aligned} \quad (1.6c)$$

**Le problème adjoint est donc régi par une EDO rétrograde en temps, faisant intervenir les sensibilités à l'ordre un du problème direct ( $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$ ,  $\nabla_{d_t \mathbf{u}} \mathcal{F}$  et  $\nabla_{d_t^2 \mathbf{u}} \mathcal{F}$ ), et où des conditions finales sont imposées à  $\mathbf{z}(t)$  et ses dérivées.** La résolution associée nécessitera donc des traitements spécifiques plus ou moins élaborés suivant les cas, comme on le verra notamment dans les exemples des paragraphes 1.2 et 1.3.

L'écart entre les grandeurs mesurées et celles calculées par le modèle, éventuellement dérivé une ou plusieurs fois par rapport au temps, apparaît naturellement aux seconds membres de cette équation différentielle et des conditions finales imposées. Ceci montre que **le choix des grandeurs expérimentales utilisées au cours de l'identification n'est pas innocent**. En effet, il peut être très délicat de calculer la dérivée quatrième du déplacement présente dans (1.6a) si la mesure de ce dernier est perturbée de façon significative par du bruit : **toute dérivation numérique d'une grandeur bruitée aura tendance à amplifier la composante de bruit** et introduire de fortes erreurs dans la procédure d'identification.

Une première solution envisageable pourrait consister à filtrer les données expérimentales afin de supprimer les composantes à hautes fréquences. Cependant, le choix de la fréquence de coupure de ce filtre est délicat, d'autant plus qu'il n'est pas certain que la plage fréquentielle du bruit ne recouvre pas celle de l'information expérimentale « parfaite ».

D'autres pistes ont été explorées. Nous pouvons notamment citer [Lu et Pereverzev 2006], qui ont étudié la question de la dérivation numérique d'une fonction dont on ne connaît pas la régularité et pour laquelle on ne dispose que d'un jeu de valeurs discrètes, mesurées une fois pour toutes : ce cas correspond bien sûr à la situation rencontrée en présence de données expérimentalement mesurées. Cependant, ceci est très défavorable, car il n'est pas possible de « rééchantillonner » la fonction avec un pas de discrétisation différent. Les auteurs proposent alors une méthode de régularisation de Tikhonov itérée avec un choix optimal du paramètre de discrétisation.

Cependant, **même si le caractère mal posé du problème de dérivation numérique peut être contourné, il semble plus aisé de choisir plutôt d'intégrer numériquement** une composante mesurée, si l'on a utilisé des accéléromètres par exemple. Le cas de l'opérateur  $C$  sera donc à proscrire en pratique, comme le confirmera l'étude du paragraphe 1.3.2.

### Conditions d'optimalité pour les paramètres

Une fois le problème adjoint (1.6) résolu, le gradient de la fonction coût vis-à-vis de  $\mathbf{p}$  peut être évalué à l'aide du lagrangien. En effet, lorsque  $\mathbf{u}$  vérifie le problème direct (1.1), le lagrangien et la fonction coût sont identiques, et on peut donc écrire que :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{J}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{u}(t; \mathbf{p}), \mathbf{p}, \mathbf{z}(t)) = \mathbf{R}^T \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \int_0^T \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}(t) dt \quad (1.7)$$

Les conditions d'optimalité correspondent aux « points » de gradient nul, et peuvent alors s'exprimer comme :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R}(\mathbf{p}_{opt} - \mathbf{p}_0) - \int_0^T \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{F}^T \mathbf{z}(t) dt = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

Même si, en pratique, on n'utilisera pas directement cette équation pour résoudre le problème d'identification, il est intéressant de noter que les paramètres optimaux  $\mathbf{p}_{opt}$  dépendent de la moyenne temporelle du produit de l'état adjoint  $\mathbf{z}$  par la sensibilité à l'ordre un  $\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{F}$  de l'équation d'état vis-à-vis du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$ .

### Résolution numérique

Comme annoncé plus haut, **la résolution numérique proposée passe par l'utilisation d'une méthode d'optimisation utilisant le gradient de la fonction coût** : en effet, compte tenu de l'obligation de résoudre une équation différentielle rétrograde en temps pour l'état adjoint (1.6) (tandis que le problème direct est dans le sens « habituel »), il n'est pas possible de traiter la résolution du système complet de manière monolithique, à moins d'employer des méthodes globales telles que la méthode LATIN par exemple, détaillée dans [Ladevèze 1985 - 1989 - 1996], et dont l'une des étapes, linéaire, permet alors d'utiliser la méthode de Riccati pour découpler problème direct et problème adjoint, comme entrepris par [Allix *et al.* 2005].

L'utilisation d'une méthode d'optimisation permet donc d'éviter la résolution monolithique : à chaque fois qu'il est nécessaire de calculer le gradient de la fonction coût, la solution du problème direct (1.1) est calculée (si elle ne l'avait pas déjà été précédemment), puis le problème adjoint (1.6) est résolu après avoir effectué un changement de variable temporelle  $\tau = T - t$ , qui permet de résoudre un problème d'évolution classique avec conditions initiales. Enfin le

gradient est estimé à l'aide de l'expression (1.7). La méthode d'optimisation propose alors une modification du vecteur des paramètres de l'itération courante à partir des évaluations de la fonction coût et de son gradient en divers « points ».

Du point de vue du coût de calcul, il est intéressant de noter la comparaison que l'on peut effectuer avec le cas où l'on évaluerait le gradient de la fonction coût par différences finies. Dans ce dernier cas, lorsque le vecteur des paramètres est de dimension  $P$ , le calcul du gradient passe par l'estimation de la fonction coût en  $P$  « points » supplémentaires, qui correspondent à la perturbation selon chacune des  $P$  composantes du vecteur de paramètres initial. Le coût final s'élève alors à  $P + 1$  résolutions du problème direct (1.1) et à  $P$  estimations d'intégrales temporelles par gradient estimé.

**Lorsque l'on utilise l'estimation à l'aide de l'état adjoint, il n'y a plus que deux résolutions d'EDO à effectuer : celle du problème direct (1.1) et celle du problème adjoint (1.6).** À ces deux résolutions s'ajoutent  $P$  estimations d'intégrales correspondant à l'expression (1.7) du gradient. Le gain est donc d'autant plus appréciable qu'il y a de paramètres à identifier.

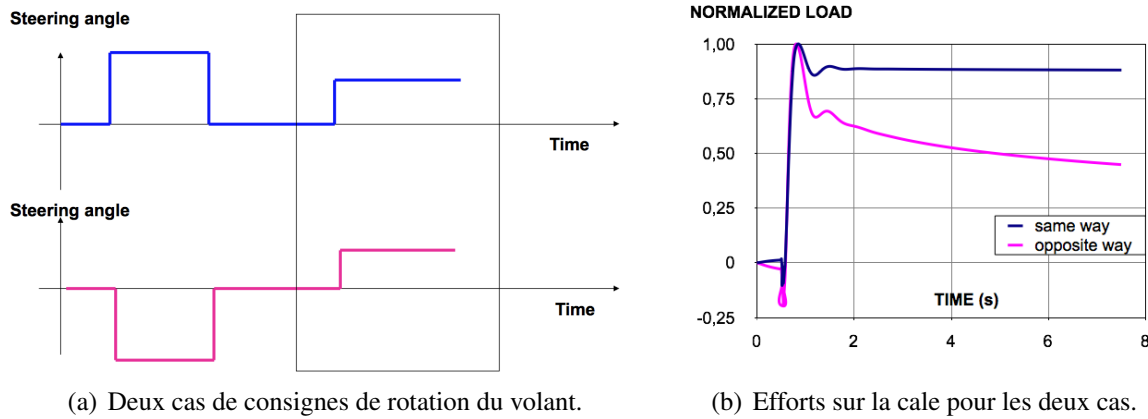
Enfin nous n'insisterons pas sur le fait qu'il est plus facile de contrôler la précision de l'estimation du gradient avec la méthode de l'état adjoint qu'avec les formules de différences finies, pour lesquelles les choix de la formule et du pas de discrétisation influent sur le résultat. Nous verrons ceci dans le paragraphe 1.2.2.

## 1.2 Identification des paramètres de modèles de cales de châssis automobiles

Ce premier exemple correspond aux travaux de thèse de Béatrice Bourgeteau, [Bourgeteau 2009], coencadrés avec Denis Aubry à hauteur de 50%, et qui reposaient sur un contrat CIFRE avec PSA Peugeot-Citroën (Franck Moiriot et Pierre Ferbach, service de conception de la liaison au sol). Ces travaux ont été décrits dans les communications suivantes, [Bourgeteau *et al.* 2007], [Bourgeteau *et al.* 2008, Puel et Aubry 2010] et [Puel et Aubry 2011c], ainsi que dans un article de la revue *Mechanical Systems and Signal Processing*, [Puel *et al.* 2013].

### 1.2.1 Présentation du problème

Les cales élastiques sont des composants très répandus dans les châssis automobiles : leur rôle est de filtrer les vibrations transmises entre les différentes parties du châssis. Toutefois, **le comportement transitoire du véhicule** (et notamment sa maniabilité) **peut être fortement influencé par ces composants**, dont le comportement n'est bien sûr pas purement élastique : le recours à la simulation numérique multicorps est donc de plus en plus fréquent, comme évoqué par [Hegazy *et al.* 2000]. Sur la figure 1.1, on a représenté l'effort dans une cale située dans le train arrière d'une voiture pour deux cas de consignes de rotation du volant du véhicule (simulation effectuée avec le logiciel ADAMS issue de [Bourgeteau 2009]) : suivant que les deux rotations successives se font dans le même sens ou en sens contraires, le phénomène de relaxation est très différent dans la cale considérée, de même que les modifications des angles de pince et de chasse de la roue associée. Ce phénomène est souvent constaté par les pilotes essayeurs, mais la simulation multicorps permet d'obtenir une information quantitative sur le phénomène. Pour que celle-ci soit correcte, il est nécessaire d'avoir des modèles de cales élastiques qui soient représentatifs de la réponse transitoire de ces dernières à des sollicitations variées.



**Figure 1.1** – Résultats de simulation d’un modèle multicorps de châssis automobile [Bourgeteau 2009].

Pour cela, **le choix de la forme du modèle de cale est indissociable de la détermination des valeurs des paramètres**, effectuée par identification à partir de données expérimentales. Ces dernières sont généralement obtenues par des essais spécifiques sur bancs des cales que l’on souhaite modéliser, l’identification « en ligne » sur une suspension complète semblant encore trop délicate à mettre en œuvre ; citons notamment à ce sujet [Meissonnier *et al.* 2006], qui présentent une méthode d’identification des raideurs élémentaires des différentes cales montées dans un châssis testé sur un banc élastocinématique, où la position et l’orientation des différentes pièces sont mesurées au cours de l’essai.

### Cales élastiques et comportement du caoutchouc

Une cale élastique est constituée de deux parties cylindriques coaxiales, en métal ou en plastique, reliées entre elles par un constituant en caoutchouc. Comme on l’aperçoit sur la figure 1.2, qui représente une cale élastique typique, ce constituant intermédiaire (en rouge) présente une géométrie particulière, comportant un certain nombre d’alvéoles et de nervures : ceci a pour but de découpler les comportements de la cale selon les différentes directions de sollicitation, et nous permet donc d’étudier séparément des comportements purement unidimensionnels. Ainsi, plutôt que de mettre en place un modèle EF qui tienne compte de la géométrie de la cale, il est plus simple, et plus efficace, de **choisir, pour chaque direction, un modèle phénoménologique qui reproduise le comportement du matériau qu’est le caoutchouc**. Un tel modèle sera plus aisé à intégrer dans un modèle multi-corps de l’ensemble du châssis du véhicule.

Le comportement mécanique du caoutchouc présente trois grandes caractéristiques élémentaires :

- une **composante élastique non linéaire**, totalement réversible, qui, dans le cas de petites sollicitations, peut être approchée de manière satisfaisante par une raideur linéaire ;
- une **composante hystérétique**, indépendante de la vitesse de sollicitation, due au frottement interne des particules de noir de carbone qui sert de charge dans le caoutchouc ; ces particules sont aussi responsables d’un phénomène appelé « effet Payne » depuis [Payne 1960], qui se traduit par une diminution de la raideur sécante du cycle d’hystérésis quand l’amplitude du déplacement imposé augmente ;
- une **composante viscoélastique**, particulièrement visible lors de la réponse de relaxation de la cale à des échelons de sollicitation, et sensible aussi dans le domaine fréquentiel où l’on constate une rigidification de la cale quand la fréquence de sollicitation augmente.



**Figure 1.2** – Cale élastique typique de châssis automobile.

Tous ces phénomènes doivent être représentés par le modèle direct proposé. On notera qu'un dernier phénomène, classique chez le caoutchouc, l'« effet Mullins » décrit dans [Harwood *et al.* 1965], ne sera pas pris en compte ici, car il disparaît après une phase de « déverminage » des cales montées sur le châssis.

### Choix du modèle de cale

De nombreux modèles ont été proposés pour décrire toutes sortes de composants d'isolation en caoutchouc. Nous nous restreindrons ici à ne citer que quelques exemples qui semblent pertinents vis-à-vis de la problématique associée au travail effectué avec PSA Peugeot-Citroën dans [Bourgeteau 2009]. Notamment, nous n'évoquerons que des modèles phénoménologiques, plus simples et plus efficaces à implémenter dans un code de simulation multicorps que des modèles basés sur les EF, et pour lesquels les possibilités d'identification paramétrique sont bien établies.

Une première possibilité de modélisation repose sur l'**utilisation du concept de dérivée fractionnaire**, introduit dans [Bagley et Torvik 1983], **afin de décrire la composante visco-élastique**. Ceci a été proposé par exemple dans [Sjöberg et Kari 2003] (en conjonction avec un élément de frottement solide généralisé) pour prendre en compte l'évolution de la rigidité dynamique de cales en caoutchouc en fonction de la fréquence et de l'amplitude de l'excitation, ainsi que de la précharge appliquée à la cale. L'effet de mémoire évanescence traduit par la dérivée fractionnaire semble en effet pertinent pour reproduire les effets viscoélastiques du matériau.

Toutefois, **ce type de modèle est délicat à utiliser dans un code de simulation multicorps**, car les algorithmes nécessaires au calcul temporel des forces associées sont généralement coûteux en stockage mémoire, la notion de dérivée fractionnaire nécessitant de connaître l'histoire complète de la fonction à dériver, comme évoqué dans [Diethelm *et al.* 2005]. Il existe des alternatives pour lutter contre cet inconvénient, telles que [Deü et Matignon 2010], mais celles-ci demeurent difficiles à implémenter dans un code numérique. Enfin, l'interprétation physique des paramètres d'un modèle temporel à dérivée fractionnaire reste encore délicate.

Une seconde piste de modélisation consiste à **utiliser, pour décrire la composante hystérétique, le modèle de Bouc-Wen**, dont une synthèse des différentes utilisations dans la littérature est proposée dans [Ismail *et al.* 2009]. Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort, d'un amortisseur visqueux, et d'un composant hystérétique pur dont le comportement est

régi par la résolution d'une EDO non linéaire faisant intervenir cinq paramètres.

**La nature même de ce modèle rend l'identification de ses paramètres délicate** : par exemple, [Ni *et al.* 1998], qui proposent une stratégie d'identification mixte dans les domaines temporel et fréquentiel, constatent que la sensibilité de la réponse à certains paramètres reste faible, rendant leur détermination peu aisée. D'autres auteurs estiment qu'il est nécessaire d'enrichir encore ce modèle pour être effectivement en mesure de décrire correctement le caractère hystérétique de la cale : ainsi, dans [Ok *et al.* 2008, Kim *et al.* 2009], les auteurs proposent d'associer deux modèles de Bouc-Wen en parallèle avec d'autres éléments rhéologiques, portant finalement à seize le nombre de paramètres à identifier. Celle-ci nécessite alors de disposer d'un nombre important d'essais avec des formes de sollicitations variées pour parvenir à faire aboutir l'identification.

Compte tenu de ces constatations, et des modèles habituellement développés chez PSA Peugeot-Citroën, nous avons finalement opté pour le modèle décrit dans le paragraphe suivant, plus simple formellement à utiliser que les deux solutions que nous venons d'évoquer.

### Modèle RT

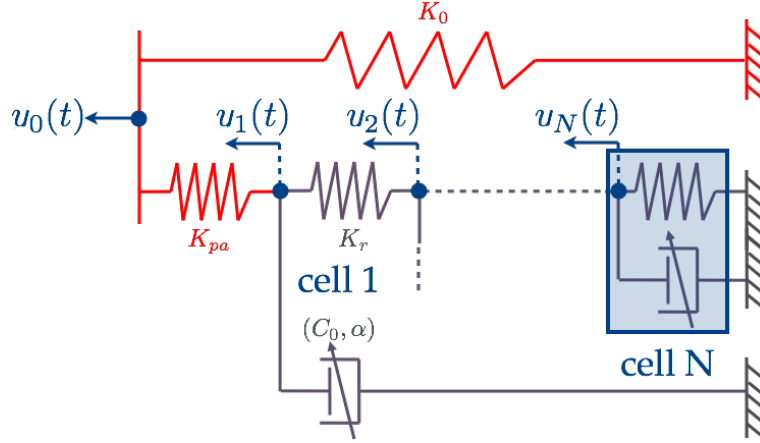
Le modèle phénoménologique proposé pour représenter toutes les caractéristiques énoncées précédemment est le modèle RT (*Rate-dependent Triboelastic model*) proposé dans [Coveney et Johnson 2000]. Il est basé sur une **cellule élémentaire composée d'un élément ressort** (de raideur  $K_r$ ) **et d'un amortisseur non linéaire associés en parallèle**. La loi caractéristique de l'amortisseur fait intervenir deux paramètres notés  $(C_0, \alpha)$  :

$$F_k(t) = C_0 \text{sign}(\dot{u}_k(t)) |\dot{u}_k(t)|^\alpha \quad (1.9)$$

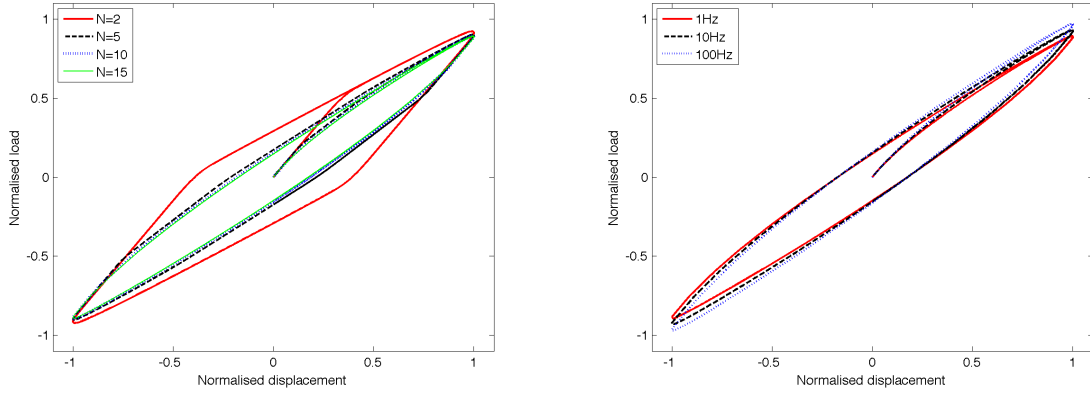
où  $F_k(t)$  est l'effort appliqué sur l'amortisseur quand le DDL associé à celui-ci se déplace à une vitesse  $\dot{u}_k(t)$ . Le paramètre  $\alpha$  est choisi dans  $]0; 1[$ , ce qui permet d'obtenir une gradation entre deux comportements extrêmes : un frotteur solide ( $\alpha = 0$ ) et un amortisseur visqueux linéaire ( $\alpha = 1$ ). C'est grâce à cet élément que les composantes hystérétique et viscoélastique seront modélisées.

Ainsi, le modèle direct de cale proposé est obtenu par l'association d'un certain nombre  $N$  de cellules élémentaires RT en série, complétée par deux ressorts supplémentaires de raideurs respectives  $K_0$  et  $K_{pa}$ . Le modèle est quasi-statique, vu qu'aucun terme de masse n'est introduit. La cale est sollicitée par un déplacement imposé  $u_0(t)$ , alors que le DDL  $N + 1$  est fixe. Les DDL  $u_k$  constituent le vecteur d'état  $\mathbf{u}$ . La figure 1.3 résume l'ensemble des notations.

**Les  $N$  cellules élémentaires RT sont supposées identiques** pour garder un nombre raisonnable de paramètres. De leur nombre  $N$  dépend la finesse de discrétisation de la réponse du modèle, notamment dans le cas d'une sollicitation cyclique. La figure 1.4(a) montre les cycles d'hystérésis obtenus pour différentes valeurs de  $N$  quand une sollicitation sinusoïdale d'amplitude donnée est imposée à la cale. Pour  $N \geq 10$ , on remarque que les courbes d'hystérésis ont convergé vers une courbe limite dont la forme semble suffisamment régulière.  $N = 15$  est finalement retenu afin d'avoir un cycle encore suffisamment régulier dans l'éventualité où le modèle de cale subirait une sollicitation de plus grande amplitude. La figure 1.4(b) montre, pour  $N = 15$ , les réponses du modèle RT à des sollicitations de fréquences croissantes, et illustre effectivement le phénomène de rigidification fréquentielle que l'on doit prendre en compte chez le caoutchouc. D'autres simulations montrent également que **ce modèle permet de tenir compte de tous les effets évoqués précédemment**.



**Figure 1.3** – Modèle RT de cale élastique avec  $N$  cellules identiques.



(a) Influence du nombre  $N$  de cellules élémentaires.

(b) Influence de la fréquence de sollicitation.

**Figure 1.4** – Réponses du modèle RT pour une sollicitation sinusoïdale [Puel *et al.* 2013].

Finalement, le modèle RT comporte 5 paramètres distincts :  $\mathbf{p} = (K_0 \ K_{pa} \ K_r \ C_0 \ \alpha)^T$ , et demande de résoudre le système d'EDO suivant, pour  $1 < k < N$  :

$$\begin{aligned}
 (K_{pa} + K_r)u_1(t) - K_r u_2(t) + C_0 \text{sign}(\dot{u}_1(t))|\dot{u}_1(t)|^\alpha &= K_{pa} u_0(t) \\
 &\vdots \\
 -K_r u_{k-1}(t) + 2K_r u_k(t) - K_r u_{k+1}(t) + C_0 \text{sign}(\dot{u}_k(t))|\dot{u}_k(t)|^\alpha &= 0 \\
 &\vdots \\
 -K_r u_{N-1}(t) + 2K_r u_N(t) + C_0 \text{sign}(\dot{u}_N(t))|\dot{u}_N(t)|^\alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

On suppose que les conditions initiales pour les différents DDL sont nulles. Ce système est résolu à l'aide de la procédure *ode45* de MATLAB, qui utilise une méthode de Runge Kutta imbriquée d'ordres 4 et 5, définie dans [Dormand et Prince 1980].

### 1.2.2 Résolution du problème d'identification

#### Formulation du problème d'identification du modèle de cale

Conformément à la forme générique proposée dans le paragraphe 1.1.2, nous nous proposons de minimiser la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_0^T \left| F(t; \mathbf{p}) - F_{exp}(t) \right|^2 dt + \frac{1}{2} \left| \mathbf{R}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \right|^2 \quad (1.11)$$

qui traduit l'écart entre la force mesurée  $F_{exp}(t)$  et celle prédite par le modèle RT, quand un déplacement donné  $u_0(t)$  est appliqué à la cale,  $F(t; \mathbf{p}) = K_0 u_0(t) + K_{pa}(u_0(t) - u_1(t; \mathbf{p}))$ . Dans le cas présent, les opérateurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont donc nuls, ce qui semble naturel vu le caractère quasi-statique du problème direct considéré.

Le terme de régularisation proposé fait intervenir un vecteur  $\mathbf{p}_0 = (K_0^0 \ K_{pa}^0 \ K_r^0 \ C_0^0 \ \alpha^0)^T$  de valeurs typiques pour les différents paramètres recherchés, ainsi qu'une matrice diagonale  $\mathbf{R} = \text{diag}(R_{K_0}, R_{K_{pa}}, R_{K_r}, R_{C_0}, R_\alpha)$  permettant d'ajuster séparément la régularisation associée à chaque paramètre, ce qui rend possible par exemple la prise en compte des ordres de grandeur nécessairement différents des paramètres.

Le problème d'état adjoint utilisé pour évaluer le gradient de la fonction coût (1.11) consiste à résoudre les EDO suivantes, qui sont rétrogrades en temps :

$$\begin{aligned} & (K_{pa} + K_r)z_1(t) - K_r z_2(t) - C_0 \alpha |d_t u_1(t; \mathbf{p})|^{\alpha-1} d_t z_1(t) \\ & - C_0 \alpha (\alpha - 1) \text{sign}(d_t u_1(t; \mathbf{p})) d_t^2 u_1(t; \mathbf{p}) |d_t u_1(t; \mathbf{p})|^{\alpha-2} z_1(t) = -K_{pa}(F(t; \mathbf{p}) - F_{exp}(t)) \\ & \vdots \\ & -K_r z_{k-1}(t) + 2K_r z_k(t) - K_r z_{k+1}(t) - C_0 \alpha |d_t u_k(t; \mathbf{p})|^{\alpha-1} d_t z_k(t) \\ & - C_0 \alpha (\alpha - 1) \text{sign}(d_t u_k(t; \mathbf{p})) d_t^2 u_k(t; \mathbf{p}) |d_t u_k(t; \mathbf{p})|^{\alpha-2} z_k(t) = 0 \\ & \vdots \\ & -K_r z_{N-1}(t) + 2K_r z_N(t) - C_0 \alpha |d_t u_N(t; \mathbf{p})|^{\alpha-1} d_t z_N(t) \\ & - C_0 \alpha (\alpha - 1) \text{sign}(d_t u_N(t; \mathbf{p})) d_t^2 u_N(t; \mathbf{p}) |d_t u_N(t; \mathbf{p})|^{\alpha-2} z_N(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

pour  $1 < k < N$ . Dans le cas présent, les conditions finales sont simplement  $z_k(T) = 0$  pour  $1 \leq k \leq N$ . La présence des signes moins devant les termes d'« amortissement » (c'est-à-dire contenant le paramètre  $C_0$ ) est cohérente avec le caractère rétrograde des EDO à résoudre. L'estimation du gradient de la fonction coût fait alors intervenir l'état adjoint et la sensibilité à l'ordre un du problème direct par rapport aux différents paramètres du modèle, et est détaillée dans [Puel *et al.* 2013].

#### Calcul et validation de l'état adjoint

**Les premiers résultats associés au calcul de l'état adjoint ont rapidement montré que ce dernier ne pouvait être effectué sans quelques adaptations supplémentaires.** Tout d'abord, comme le paramètre  $\alpha$  est inférieur à 1, les équations (1.12) deviennent singulières dès lors que l'une des vitesses  $d_t u_k$  est nulle. L'ajout d'une petite constante arbitraire à tous les termes de normes de vitesses permet de s'affranchir facilement de ce problème.

Toutefois, la résolution de l'état adjoint conduit encore à des estimations incorrectes du gradient de la fonction coût. La cause de ce phénomène est, dans le modèle RT, l'utilisation de la



loi non linéaire (1.9) pour de faibles valeurs du paramètre  $\alpha$  : en effet, dans ce cas, la loi donne une relation quasiment discontinue entre la force exercée sur l'amortisseur et la vitesse du DDL associé, quand celle-ci change de signe (pour rappel, le cas limite  $\alpha = 0$  correspond au cas du frotteur solide vérifiant une loi de Coulomb discontinue). Le calcul de l'état adjoint faisant intervenir la sensibilité à l'ordre un du problème direct par rapport aux DDL et leurs dérivées temporelles, les équations obtenues peuvent comporter des termes arbitrairement grands.

Cette constatation rejoint les travaux de [Stewart et Anitescu 2009] qui ont étudié le **contrôle optimal de systèmes caractérisés par des EDO avec discontinuités** : ils ont montré que, tandis que la valeur de la fonction coût converge lorsque le pas de temps tend vers zéro, ce n'est pas le cas pour le gradient de la fonction coût (estimé à l'aide de l'état adjoint), sur lequel on commet une **erreur indépendante du pas de temps choisi** pour la résolution des EDO, et ce, quel que soit l'algorithme d'intégration temporelle choisi. On observe alors l'apparition de minima locaux multiples qui, lors de l'identification, vont piéger l'algorithme de minimisation.

**La solution qui est alors proposée par les auteurs consiste à « régulariser » les discontinuités** en les remplaçant par des fonctions plus « lisses ». Dès que le pas de temps devient négligeable devant l'inverse du paramètre caractéristique du lissage, les minima locaux évoqués précédemment disparaissent et l'estimation du gradient est de nouveau satisfaisante. Ceci explique les difficultés que nous avons rencontrées : bien qu'il n'y ait pas de discontinuités au sens strict dans le problème que nous traitons, les EDO sont particulièrement raides, et, à moins de choisir un pas de temps extrêmement fin (ce qui serait prohibitif en termes de temps de calcul), les estimations du gradient restent erronées.

Ainsi, afin de proposer un lissage des différentes équations à résoudre, nous proposons de remplacer dans ces équations les occurrences des fonctions signe et valeur absolue par les expressions :

$$\text{sign}_s(d_t u_k) = \frac{2}{1 + e^{-s d_t u_k}} - 1 \quad (1.13a)$$

$$|d_t u_k|_s = \frac{2}{s} \ln(1 + e^{s d_t u_k}) - d_t u_k \quad (1.13b)$$

respectivement, où  $s$  est un paramètre à fixer : plus  $s$  est petit, plus les fonctions proposées sont lisses. **La fonction  $\text{sign}_s$  est en fait une fonction sigmoïde classique, tandis que  $|\bullet|_s$  en est la primitive** avec le même comportement à l'infini que la fonction valeur absolue.

Le choix du paramètre  $s$  de lissage doit être fait de façon à ne pas modifier de façon trop sensible la résolution du problème direct, mais il doit permettre de corriger les erreurs d'estimation de l'état adjoint constatées précédemment. **Afin de valider le calcul de ce dernier, le test dit du produit scalaire est employé** : celui-ci consiste à déterminer successivement les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  dans les deux équations suivantes, pour un vecteur  $\mathbf{a}$  arbitraire :

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F} \mathbf{b} = \mathbf{a} \quad (1.14a)$$

$$\mathcal{G} \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (1.14b)$$

où  $\mathcal{G}$  désigne l'opérateur associé à l'équation (1.6) de l'état adjoint. Comme, mathématiquement, celui-ci devrait être l'opérateur adjoint de la sensibilité à l'ordre un  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$  du problème direct (1.1), l'égalité des deux produits scalaires suivants devrait être rigoureusement vérifiée (à l'erreur d'arrondi numérique près) :

$$\mathbf{a}^T \mathbf{c} = \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (1.15)$$

Le tableau 1.1 récapitule quelques investigations effectuées pour différentes valeurs du paramètre  $s$  de lissage. La réponse du modèle RT est calculée pour un jeu de paramètres arbitraire, et sert de mesures synthétiques dans le calcul de la fonction coût, effectué pour un autre jeu donné de paramètres. Pour chaque valeur de  $s$ , les deux produits scalaires sont calculés pour comparaison, tandis que le gradient de la fonction coût est estimé à l'aide de l'état adjoint. On constate alors que les deux produits scalaires sont d'autant plus proches l'un de l'autre que  $s$  est petit, c'est-à-dire que le lissage augmente. Inversement, le calcul de la fonction coût donne une valeur de plus en plus éloignée de la référence (la valeur sans lissage) quand  $s$  diminue.

$s$	$\mathcal{J}$	$\nabla_{K_0} \mathcal{J}$	$\nabla_{K_{pa}} \mathcal{J}$	$\nabla_{K_r} \mathcal{J}$	$\nabla_{C_0} \mathcal{J}$	$\nabla_{\alpha} \mathcal{J}$	$\mathbf{a}^T \mathbf{c}$	$\mathbf{b}^T \mathbf{b}$
0,1	921 787,149	-4 752,446	-16,3299	-277,728	49 467,59	-13 149,70	0,021 569	0,021 576
1	888 192,640	-4 665,399	-17,630	-268,873	67 022,15	-13 154,49	0,021 378	0,021 351
10	888 192,739	-4 665,399	-17,735	-285,087	38 570,69	-11 927,34	0,028 785	0,020 740
100	888 192,736	-4 665,399	$-5,6 \cdot 10^9$	$-8,2 \cdot 10^9$	$-1,3 \cdot 10^{13}$	$1,2 \cdot 10^{12}$	$> 3 \cdot 10^7$	0,020 359
sans	888 192,736	-4 665,399	infini	infini	infini	infini	infini	0,020 245

**Tableau 1.1** – Identification du modèle RT : évaluation de la fonction coût et de son gradient, et test du produit scalaire pour différentes valeurs du paramètre  $s$  de lissage [Puel *et al.* 2013].

Le meilleur compromis entre validation de l'état adjoint et estimation de la fonction coût consiste à choisir  $s = 1$ . L'évolution des valeurs des dérivées partielles de la fonction coût dans le tableau 1.1 permet également de comprendre pourquoi, sans lissage, le calcul de l'état adjoint ne permettait pas de fournir des valeurs correctes du gradient à l'algorithme de minimisation.

### Mise en œuvre et résultats de l'identification paramétrique

Nous nous intéressons ici à l'identification des paramètres du modèle RT utilisé pour décrire le comportement de la cale dont nous avons montré sur la figure 1.1 la réponse de relaxation pour deux cas de consignes d'angles sur le volant du véhicule. Les données expérimentales que nous avons à notre disposition proviennent de mesures effectuées sur la cale montée sur un banc d'essai, et sont de deux natures :

- des **mesures en régime quasi-statique** obtenues en appliquant à la cale un déplacement périodique triangulaire à faible vitesse, pour lesquelles le cycle d'hystérésis stabilisé est conservé ;
- des **tests de relaxation**, pour lesquels un échelon de déplacement est imposé à la cale (en fait, l'échelon n'est pas rigoureusement discontinu, et est caractérisé par un temps de montée de 0,1 s), et l'évolution temporelle de l'effort est mesurée.

Nous avons décidé de ne pas utiliser les mesures de relaxation dans la fonction coût destinée à l'identification paramétrique, mais plutôt de conserver ces mesures pour une validation *a posteriori* des paramètres identifiés.

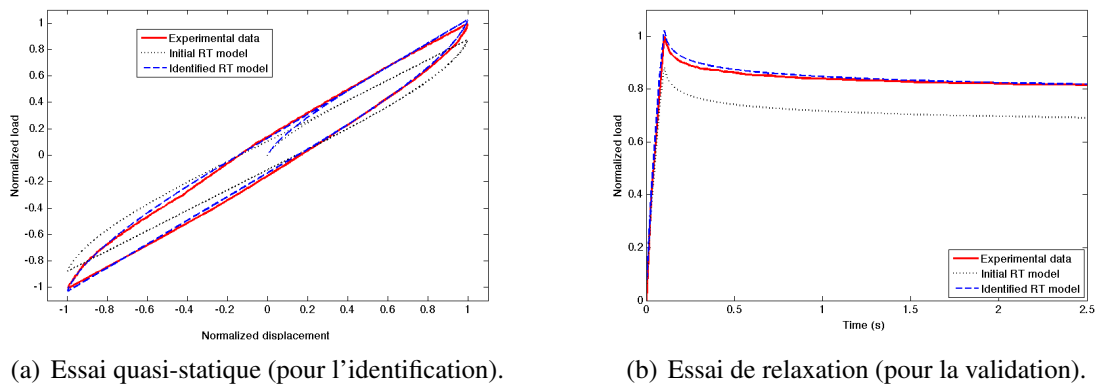
Se pose enfin la question de la régularisation. En effet, plusieurs tests préalables à partir de mesures synthétiques, décrits dans [Puel *et al.* 2013], ont permis de constater que **la fonction coût présente de nombreux minima locaux**, et que la détermination du minimum global nécessite donc un terme de régularisation pertinent. Cependant, il est difficile de choisir des valeurs typiques pour le vecteur  $\mathbf{p}_0 = (K_0^0 \ K_{pa}^0 \ K_r^0 \ C_0^0 \ \alpha^0)^T$  utilisé dans la régularisation selon [Tikhonov 1977], car, même si les paramètres du modèle RT ont une signification physique, ce modèle n'en est pas moins phénoménologique.

Une piste que nous avons exploitée repose sur l'**utilisation d'un modèle de cale simplifié qui est analytiquement inversible** : le modèle STS (*Standard Triboelastic Solid model*, défini

dans [Coveney *et al.* 1995]) est l'analogue du modèle RT, où l'on a remplacé l'amortisseur non linéaire de chaque cellule élémentaire par un frotteur solide d'effort seuil  $F_f = C_0 V_0^\alpha$ , où  $V_0$  est la vitesse moyenne de sollicitation de la cale. À partir de certaines caractéristiques géométriques du cycle d'hystérésis stabilisé (déplacement maximal, force maximale, pentes avant et après les points extrémaux du cycle), il est possible d'avoir les expressions analytiques des paramètres du modèle STS :  $\mathbf{p}_{STS} = (K_0^S K_{pa}^S K_r^S F_f)^T$ . Ces valeurs sont alors utilisées comme valeurs initiales des paramètres pour l'algorithme de minimisation :  $K_0^0 = K_0^S$ ,  $K_{pa}^0 = K_{pa}^S$ ,  $K_r^0 = K_r^S$ ,  $C_0^0 = F_f/V_0^{\alpha^0}$ . En outre, dans la gamme de vitesse des essais quasi-statiques, le choix d'une valeur arbitraire de  $\alpha^0$  (proche de zéro) n'a pas trop d'impact sur la valeur de  $C_0^0$ . Plus de précisions sont données dans [Puel *et al.* 2013].

Par ailleurs, même si la régularisation selon [Tikhonov 1977] avec le vecteur  $\mathbf{p}_0$  ainsi déterminé peut conduire à des résultats satisfaisants pour l'identification, nous nous sommes finalement résolus à ne pas l'utiliser. En effet, comme on le verra sur les résultats de l'identification, **utiliser ce vecteur  $\mathbf{p}_0$  comme vecteur initial pour l'algorithme de minimisation est suffisant pour obtenir de très bons résultats dans l'identification** : ces choix de valeurs semblent avoir permis de **débuter les itérations dans le bassin d'attraction du minimum global de la fonction coût**. Ne pas introduire de terme de régularisation permet ainsi d'éviter un écueil : une dégradation de la précision de la solution du problème inverse, qui aurait été inévitable. En effet, la détermination du vecteur  $\mathbf{p}_0$  est forcément entachée d'erreurs, d'autant plus que les formules d'inversion analytique du modèle STS montrent une grande sensibilité du cycle d'hystérésis à certains paramètres, comme constaté dans [Puel *et al.* 2013]. De plus, le réglage du terme de régularisation à l'aide de la matrice  $\mathbf{R}$  est difficile faute d'informations détaillées sur la précision des mesures effectuées et le bruit qui les affecte : l'emploi de méthodes telles que [Morozov 1984] est donc compromis.

Deux algorithmes de minimisation ont été utilisés dans le cadre de l'*Optimisation Toolbox* du logiciel MATLAB : une méthode de quasi-Newton basée sur la formule BFGS, rappelée dans [Nocedal et Wright 1999], et un algorithme de point intérieur décrit dans [Coleman et Li 1994]. La figure 1.5(a) permet de vérifier la bonne correspondance entre le cycle d'hystérésis expérimental (en rouge) et celui calculé avec les paramètres identifiés avec la méthode de quasi-Newton (en bleu). Sur la figure 1.5(b), on constate que la réponse de relaxation calculée avec les paramètres identifiés (en bleu) est en très bon accord avec la courbe expérimentale (en rouge), alors que l'essai de relaxation n'a pas été utilisé dans le processus d'identification.



**Figure 1.5** – Résultats de l'identification paramétrique du modèle RT avec la méthode de quasi-Newton [Puel *et al.* 2013].

La courbe en pointillés noirs correspond à la réponse de relaxation calculée avec les paramètres initiaux  $p_0$  : celle-ci est nettement en désaccord avec la courbe expérimentale, ce qui **justifie a posteriori le choix de ne pas utiliser  $p_0$  dans un terme de régularisation**. La comparaison des valeurs des paramètres entre les étapes initiale et finale de l'algorithme de minimisation montre d'ailleurs une évolution de 10 à 20% pour tous les paramètres. Pour être complet, nous pouvons ajouter que les valeurs de paramètres identifiées avec l'algorithme de point intérieur sont tout à fait semblables, comme constaté dans [Puel *et al.* 2013].

## 1.3 Identification des paramètres de modèles de suspensions d'une rame de TGV

Ce second exemple correspond aux travaux de thèse de Sönke Kraft, [Kraft 2012], coencadrés avec Denis Aubry à hauteur de 50%, et qui reposaient sur un contrat CIFRE avec la SNCF (Christine Fünfschilling, direction de la recherche). Ces travaux ont conduit aux communications suivantes, [Kraft *et al.* 2008 - 2010, Puel et Aubry 2011c], ainsi qu'à un article de la revue *Vehicle Systems Dynamics*, [Kraft *et al.* 2013].

### 1.3.1 Présentation du problème

La problématique associée à ces travaux concerne la maintenance des éléments de suspension des rames de TGV. Actuellement, chacun de ces éléments est remplacé, sans contrôle préalable particulier, après un certain délai de service, exprimé en temps ou en distance parcourue ; ces délais reposent généralement sur l'expérience acquise à propos de chacun des composants, et ne peuvent donc tenir compte des sollicitations qu'ils ont effectivement subies lors de trajets successifs.

**Une voie d'amélioration en plein essor est d'instrumenter les véhicules avec des capteurs et de faire de la maintenance dite « conditionnelle ».** [Bruni *et al.* 2007] donnent un état de l'art assez récent de ce type de maintenance dans le domaine ferroviaire : ils ont établi que la presque totalité des applications concernait l'utilisation de méthodes de type traitement du signal, dont la portée pouvait s'avérer rapidement limitée.

Quelques applications toutefois s'inspirent de méthodes mieux établies dans d'autres domaines (comme le domaine automobile par exemple, déjà évoqué dans le paragraphe 1.2.1), proposant d'utiliser un modèle dont on va chercher à estimer les paramètres. Par exemple, [Li *et al.* 2007] étudient un modèle plan de la dynamique d'une voiture, et cherchent à identifier les trois paramètres les plus pertinents de la suspension à l'aide d'une méthode de filtre particulaire ; cette dernière, qui est une alternative aux filtres de Kalman, permet d'estimer simultanément le vecteur d'état du modèle ainsi que ses paramètres par une méthode bayésienne.

L'idée du travail [Kraft 2012] est proche de l'exemple précédent : il s'agit de réaliser une identification paramétrique d'un modèle multicorps d'une rame de TGV à partir d'essais en ligne. Pour cela, nous allons une nouvelle fois nous baser sur les principes généraux du paragraphe 1.1.2.

### Description rapide des systèmes de suspension d'une rame de TGV

La rame considérée est un TGV dit « Duplex » : les huit voitures passagers comportent deux étages, et sont encadrées par deux motrices. La particularité principale d'une rame de TGV réside dans le fait qu'il s'agit d'un train articulé où les voitures partagent deux à deux le même bogie, dit « Jacobs » : ceci confère une meilleure stabilité de la rame en cas de déraillement, mais a nécessairement comme conséquence de créer un couplage dynamique fort entre les voitures. Les motrices, par contre, sont désolidarisées des voitures, et possèdent donc chacune deux bogies.

La figure 1.6 permet de visualiser ces deux types de bogies. Dans les deux cas, deux niveaux de suspensions existent : tandis que la suspension primaire relie les essieux au bogie, la suspension secondaire est située entre le bogie et la voiture proprement dite. Plus précisément, dans le cas du bogie Jacobs, la seconde voiture n'est pas directement reliée au bogie, mais à la première voiture par un système de pivots élastiques et d'amortisseurs hydrauliques. Comme on peut le constater sur la figure 1.6, les composants élémentaires utilisés sont extrêmement variés : plus de détails sont donnés dans [Kraft 2012].

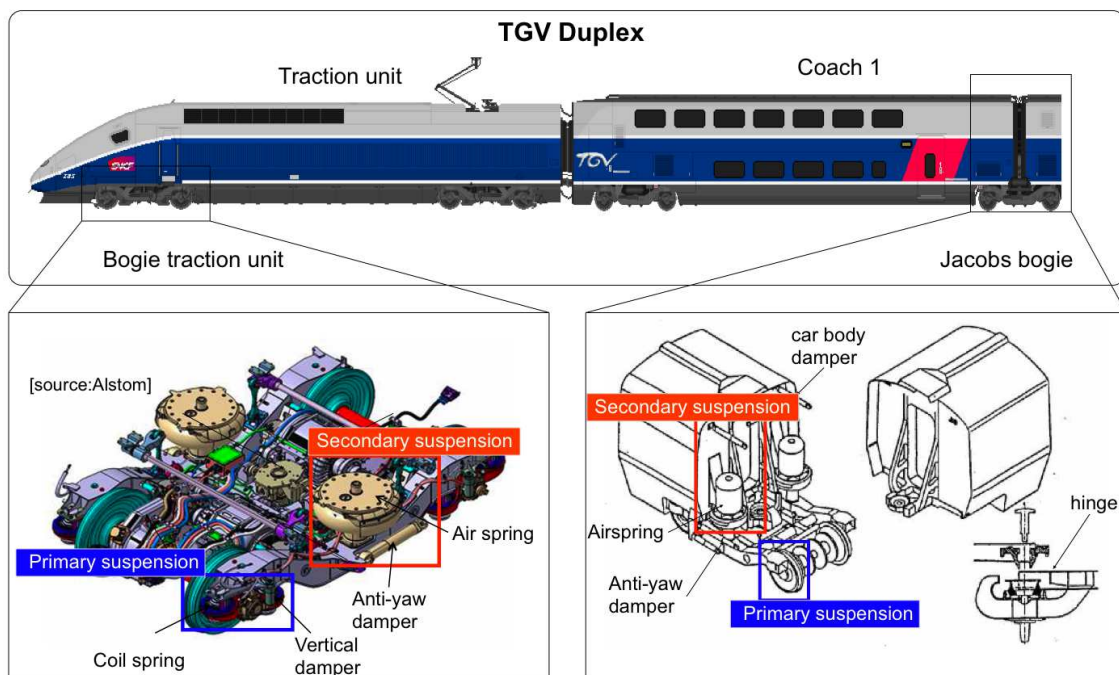


Figure 1.6 – Systèmes de suspension d'une rame de TGV Duplex [Kraft 2012].

### Données expérimentales disponibles

Les données expérimentales proviennent d'une campagne d'essais, menée en 2008, pour laquelle **une rame Duplex d'exploitation a été instrumentée pendant plusieurs semaines pour des mesures en situation** sur la ligne TGV Est. Pour ne citer que ce qui est pertinent pour notre étude, les données mesurées proviennent d'accéléromètres, placés sur les différents grands ensembles de la rame (26 boîtes d'essieux, 13 bogies, 2 motrices et 8 voitures passagers) : il s'agit d'accélérations mesurées suivant les directions verticale et latérale.

De plus, **certains essieux ont été instrumentés afin de fournir une mesure des efforts verticaux et latéraux** : ces efforts donnent *a priori* une indication de ce que sont les forces de contact roue-rail. Ces informations permettent notamment, en utilisant les accélérations des bogies et des voitures, d'évaluer les fonctions de transfert caractéristiques des suspensions primaire et secondaire : en les calculant sur différents tronçons de la voie, on peut constater un comportement non linéaire marqué. Ceci implique donc de traiter l'identification paramétrique dans le domaine temporel plutôt que fréquentiel. Par contre, compte tenu de la façon dont les efforts sont mesurés, nous préférons ne pas les considérer comme données d'entrée du modèle numérique à développer et identifier.

Pour cela, d'autres mesures sont en effet plus pertinentes : **le profil de la voie a été mesuré par une rame de TGV spéciale**, nommée « IRIS 320 », qui dispose d'un essieu équipé d'un système de mesure optique pouvant détecter la position de chaque rail relativement au bogie. La position de ce dernier est donnée par des accéléromètres, ce qui permet de connaître la position absolue de chaque rail en fonction de l'abscisse curviligne le long de la voie (appelée « Point Kilométrique » ou PK).

Plus précisément, le dispositif permet finalement de **connaître les irrégularités de la voie par rapport au tracé théorique** de cette dernière : il s'agit des déplacements vertical et latéral du centre de la voie par rapport à la position théorique, ainsi que la variation de l'écartement de la voie et son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale.

### Modélisation du contact roue-rail

Comme l'abondante littérature sur le sujet permet de le constater, le point crucial dont il faut tenir compte dans la modélisation multicorps d'une rame de TGV réside dans la description correcte et précise du contact entre roue et rail : c'est d'autant plus nécessaire que le modèle construit aura comme données d'entrée les irrégularités mesurées de la voie. Dans le cas courant où la voie est supposée rigide et fixe, **ces irrégularités mesurées servent en effet de conditions aux limites en déplacement**, vu que la majorité des méthodes vont imposer rigoureusement les contraintes cinématiques associées au contact (par des multiplicateurs de Lagrange par exemple).

D'autres méthodes procèdent quelque peu différemment, comme les modèles de force élastique où il y a interpénétration entre les deux solides supposés rigides (ceci afin de représenter l'écrasement élastique qui se produit en fait lors du contact) : le contact est alors caractérisé par cette distance d'interpénétration. Comme exemple d'application de cette dernière méthode, on peut citer [Pombo et Ambrósio 2012], qui présentent le modèle d'une voiture du métro de Lisbonne, dont la réponse est calculée lorsque le véhicule est soumis aux irrégularités de la voie ; toutefois, même si une comparaison avec des données expérimentales est effectuée, aucune procédure d'identification paramétrique du modèle n'est proposée.

Du point de vue des efforts mis en jeu, [Chollet *et al.* 2007] proposent un état de l'art détaillé des théories décrivant le contact roue-rail : ils rappellent que celles-ci prennent toutes comme bases **la théorie de Hertz pour le traitement de l'effort normal et la théorie de Kalker pour la description de l'effort tangentiel**. Certaines adaptations peuvent être ensuite proposées pour traiter des situations non totalement hertziennes, mais, pour plus de concision, nous ne les évoquons pas ici.

La **théorie de Hertz** établit que, sous certaines hypothèses, détaillées par exemple dans [Johnson 1985], le contact entre deux solides se traduit par une surface elliptique, dont les demi-axes  $a$  et  $b$  dépendent des caractéristiques matériau et des rayons de courbure locaux des deux solides en contact, ainsi que de la force normale exercée entre les deux solides.

**La détermination de cette force normale dépend de la méthode de contact utilisée.** Dans le cas où le contact a été imposé de manière rigoureuse, il s'agit du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte cinématique de contact. Dans le cas des modèles de force élastique, la théorie de Hertz permet d'établir que cette force normale  $N$  est telle que :

$$\|N\| = K\delta^{\frac{3}{2}} \quad (1.16)$$

où  $\delta$  est l'interpénétration entre les deux solides, correspondant au rapprochement par déformation élastique des deux solides, par rapport à ce que donnerait un contact purement rigide.  $K$  est un coefficient dépendant encore une fois des caractéristiques matériau et des rayons de courbure locaux des deux solides en contact. Cependant, la théorie de Hertz peut se révéler insuffisante dans certains cas de contact conforme qui peuvent survenir, notamment, quand la roue roule sur le côté du rail plutôt que sur son sommet.

La **théorie de Kalker**, quant à elle, permet de relier l'effort tangentiel au glissement dans la surface de contact. Elle propose différentes descriptions, plus ou moins précises, détaillées dans [Kalker 1990, Vollebregt 2008]. La plus simple est **la théorie linéaire de Kalker dans laquelle les deux composantes de l'effort tangentiel ( $T_L$  et  $T_l$ ) et le moment  $M_N$  autour de la normale au contact sont reliés linéairement aux glissements :**

$$\begin{pmatrix} T_L \\ T_l \\ M_N \end{pmatrix} = -Gab \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23}\sqrt{ab} \\ 0 & -C_{23}\sqrt{ab} & C_{33}ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_l \\ \omega_N \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

où  $v_L$  et  $v_l$  sont les deux composantes de la vitesse de glissement, et  $\omega_N$  la composante normale de vitesse de rotation relative entre la roue et le rail au point de contact ; il faut noter que ces trois composantes sont normées relativement à la vitesse d'avancée de l'essieu sur la voie. Tandis que  $G$  est le module de cisaillement combiné des deux matériaux en contact, les termes  $C_{ij}$  sont des coefficients qui dépendent des coefficients de Poisson des deux matériaux ainsi que du rapport  $a/b$  des demi-axes de l'ellipse de contact.

**Cette forme linéaire n'est valable que pour de faibles valeurs des glissements ;** au fur et à mesure que ces derniers augmentent, une proportion toujours plus grande de la surface de contact est en glissement, jusqu'à ce que la totalité des points glissent. À ce moment, les efforts tangentiels restent constants quelles que soient les valeurs des glissements, en raison de la loi de frottement de Coulomb.

Kalker a également proposé une théorie complète décrivant simultanément les efforts normal et tangentiel, pour des pressions de contact non hertziennes, mais l'implémentation numérique n'est pas utilisée dans les codes de simulation multicorps en raison de son coût de calcul : on lui préfère généralement une théorie « simplifiée », toujours proposée par Kalker, et décrite dans [Kalker 1982], ou encore d'autres théories analogues, comme [Polach 2000], qui sont toutes plus réalistes d'utilisation dans un code numérique.

### 1.3.2 Identification paramétrique d'un modèle simplifié de bogie

Dans un premier temps, l'objectif est de proposer un modèle de bogie, suffisamment simple de manipulation pour pouvoir étudier les principes du paragraphe 1.1.2, tout en décrivant l'ensemble des phénomènes significatifs dans le mouvement du bogie sur la voie.

#### Description du modèle

Le modèle multicorps proposé a été développé dans le logiciel MATLAB, et représente un bogie et ses deux essieux roulant à vitesse constante  $V$  sur une voie rectiligne (avec défauts). Les DDL décrivent le mouvement de ces trois solides dans le référentiel « roulant », c'est-à-dire le référentiel se déplaçant à cette vitesse  $V$ . Les conditions de contact roue-rail sont considérées explicitement : deux équations scalaires contraignent alors les six mobilités de chaque essieu. De plus, comme on considère que le bogie se déplace à vitesse constante, on peut supposer, d'une part, que la translation longitudinale du centre d'inertie de chaque essieu est nulle (par rapport au référentiel « roulant ») et, d'autre part, que la vitesse de rotation propre de chaque essieu est égale à  $V/R$ , où  $R$  est le rayon moyen de la roue. Il ne reste alors que 2 DDL par essieu, auxquels s'ajoutent les 6 DDL du bogie (qui n'est relié aux essieux que par des liaisons élastiques), ce qui fait donc un **total de 10 DDL pour le modèle proposé**.

Chaque rail est supposé fixe et rigide, mais la voie n'est pas parfaite ; les irrégularités définies précédemment sont retenues : déplacements vertical et latéral du centre de la voie, variation d'écartement et angle d'inclinaison de la voie, soit 4 fonctions de l'abscisse parcourue à la vitesse  $V$ . Les profils des rails sont supposés circulaires, tandis que les roues sont coniques. Les efforts au contact roue-rail vérifient la loi de Kalker linéaire (1.17) définie plus haut, et utilisent les dimensions de l'ellipse de contact données par la théorie de Hertz.

Enfin, la suspension primaire, entre le bogie et chaque essieu, est simplement modélisée par trois ressorts ( $c_x, c_y, c_z$ ) et trois amortisseurs visqueux ( $d_x, d_y, d_z$ ) selon les trois directions de référence. En considérant que les deux systèmes de suspension sont identiques pour les deux essieux, on arrive donc à un **total de 6 paramètres pour ce modèle simple**.

Le modèle est en mesure de simuler des comportements typiques observés dans la réalité. Par exemple, si un essieu est translaté latéralement, la différence des rayons de roulement entre les deux roues ainsi que l'écart des efforts tangentiels aux points de contact va créer un mouvement de rappel vers le centre de la voie avec un angle de lacet : l'essieu dépasse ensuite le centre de la voie et un effet similaire est créé dans l'autre sens. On observe alors une oscillation du bogie en termes de translation latérale et angle de lacet (aussi appelé *hunting movement*). Ce mouvement, initialement stable, devient instable quand la vitesse d'avancée du bogie par rapport à la voie dépasse une valeur critique. Le modèle simplifié de bogie permet de rendre compte de cet effet et d'évaluer correctement la valeur de vitesse critique. Nous pouvons donc penser que **les phénomènes prépondérants ont bien été pris en compte par le modèle proposé**.

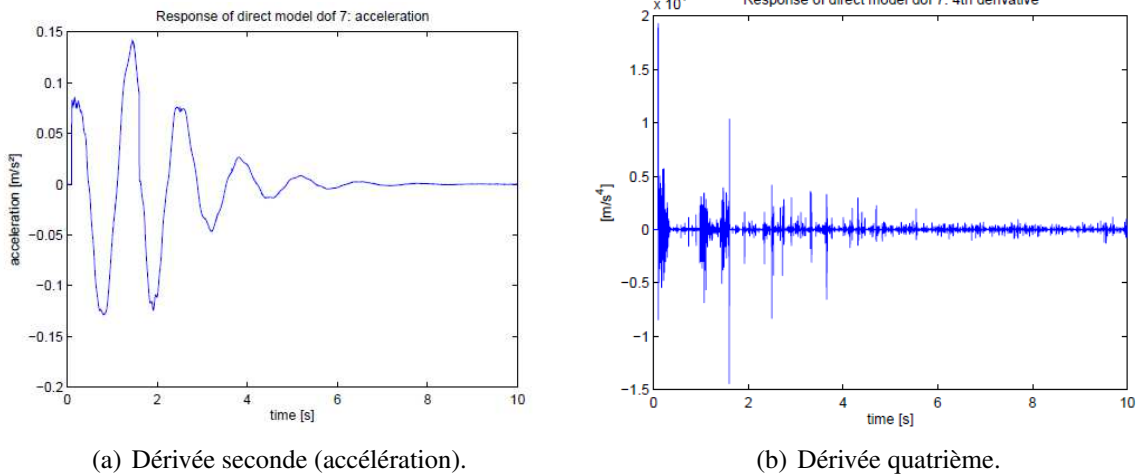
#### Choix des données expérimentales

L'essentiel des mesures effectuées sur la rame de TGV sont des mesures d'accélération grâce à des capteurs disposés sur les essieux, bogies et voitures. Par intégration numérique, il est alors possible de disposer facilement des vitesses et déplacements en ces mêmes points. Le modèle du bogie nous permet alors d'**étudier l'influence du choix du type de données expé-**



**riméntales sur la résolution du problème d'identification**, notamment quant à l'estimation du gradient de la fonction coût.

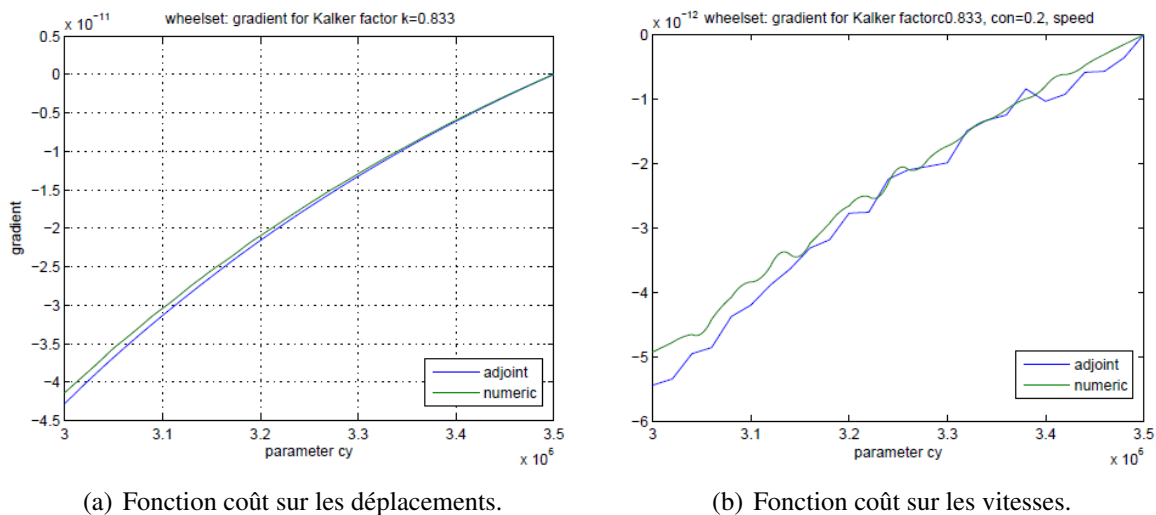
La première phase consiste en la résolution de l'état adjoint : comme vu précédemment, celui-ci vérifie l'EDO (1.6a) rétrograde en temps, avec des conditions finales (1.6b) et (1.6c). Les dérivées temporelles jusqu'à l'ordre quatre sont sources d'instabilités vu qu'elles sont estimées par des formules de différences finies sur des mesures potentiellement bruitées. Même la réponse directe du modèle est concernée par ce phénomène : la figure 1.7 présente les dérivées d'ordre deux (accélération) et d'ordre quatre du déplacement latéral de l'un des essieux, en réponse à un défaut de voie simple. Tandis que l'accélération (figure 1.7(a)) est légèrement perturbée, la dérivée d'ordre quatre (figure 1.7(b)) est complètement parasitée par le bruit amplifié par la dérivation : celui-ci provient du fait que la réponse calculée est soumise à une certaine précision liée à l'algorithme d'intégration temporelle utilisé. Il n'est alors pas possible de calculer correctement l'état adjoint, à moins d'avoir pu opérer au préalable une régularisation de la dérivation numérique comme celle proposée par exemple dans [Lu et Pereverzev 2006], ou d'avoir choisi de lisser les données à l'aide de splines cubiques, comme dans [Gryazin *et al.* 2001]. En pratique, **il semble donc raisonnable de s'abstenir d'utiliser une fonction coût définie avec les accélérations**, c'est-à-dire un opérateur  $C$  non nul dans l'équation (1.2).



**Figure 1.7** – Dérivées temporelles de la réponse directe du modèle de bogie [Kraft 2012].

Dans un second temps, l'estimation du gradient est obtenue avec l'expression (1.7). La figure 1.8 présente les valeurs de la dérivée partielle de la fonction coût par rapport au paramètre de raideur  $c_y$  en fonction des valeurs prises par ce dernier, et permet de comparer les valeurs obtenues avec l'état adjoint (en bleu) avec celles obtenues par différences finies (en vert). **Les écarts, visibles sur la figure 1.8(b), sont plus marqués dans le cas de la fonction coût exprimée avec les vitesses**, mais restent perceptibles dans le cas où l'on utilise les déplacements, comme montré sur la figure 1.8(a). De plus, il faut noter que, pour les résultats présentés ici, on a imposé complètement le mouvement de translation du bogie, de sorte que les deux essieux sont complètement découplés. En effet, si on laisse libres les dix DDL du modèle bogie, les écarts entre les deux estimations sont alors plus grands. Le test du produit scalaire (1.15) de validation de l'état adjoint confirme en effet que ce dernier n'est pas parfaitement calculé dans ce cas.

Il semble que l'on se retrouve une nouvelle fois dans le cas évoqué dans le paragraphe 1.2.2. Les conditions de contact s'expriment sous la forme de deux équations non linéaires pour chaque essieu, et interviennent indirectement dans le calcul des glissements, qui permettent de calculer les efforts tangentiels avec la loi de Kalker (1.17). Même si cette dernière est linéaire, les coefficients  $C_{ij}$  qui interviennent dépendent du rapport  $a/b$  des demi-axes de l'ellipse de contact, qui eux-mêmes sont reliés à la force normale au niveau du contact. **On obtient finalement dans les équations de la dynamique régissant chaque essieu un terme d'amortissement non linéaire, qui varie fortement pour de faibles valeurs de vitesses**, semblable à la loi (1.9) introduite dans le modèle RT de cales élastiques. Cette hypothèse semble être confirmée par la constatation suivante : si l'on diminue fortement d'un même coefficient multiplicatif tous les coefficients  $C_{ij}$  de la loi de Kalker (1.17), l'état adjoint est de nouveau validé par le test du produit scalaire (1.15). Toutefois, **compte tenu de la forme même des lois, il ne semble pas envisageable d'avoir recours à un lissage pour améliorer l'estimation du gradient de la fonction coût**, ce qui engendrera la présence de minima locaux multiples dont il faudra pouvoir s'affranchir.



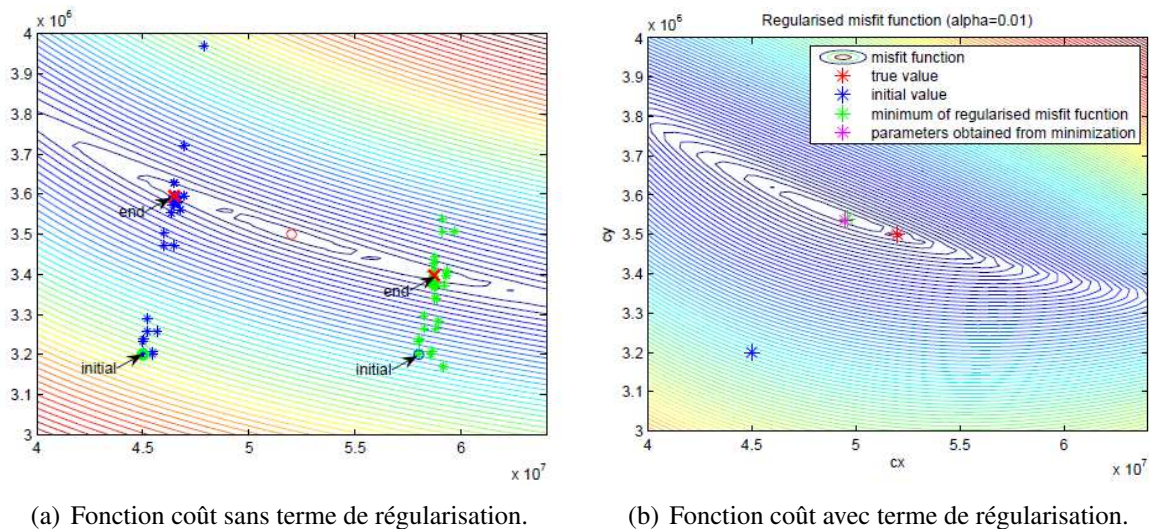
**Figure 1.8** – Calcul de la dérivée partielle de la fonction coût par rapport au paramètre  $c_y$  (modèle de bogie) [Kraft 2012].

## Résultats de l'identification

Vu les résultats de l'étude du gradient effectuée dans le paragraphe précédent, **nous pouvons orienter notre choix vers une fonction coût exprimée à partir des déplacements** plutôt que des vitesses. Pour tester la procédure d'identification, nous avons simulé avec un jeu de paramètres donné la réponse du bogie à un défaut de voie fixé : cette réponse servira de données synthétiques pour la méthode d'identification. Nous considérons également que les dix DDL peuvent être mesurés au cours du temps, et donc utilisés dans la fonction coût. Une étude de sensibilité a montré que ce sont les paramètres de raideur  $c_x$  et  $c_y$  qui sont les plus influents dans la réponse du modèle : **nous nous limiterons donc à l'identification de ces deux paramètres seulement**.

Dans un premier temps, **l'identification est menée à l'aide d'une méthode de quasi-Newton basée sur la formule BFGS**, rappelée dans [Nocedal et Wright 1999], **avec une fonction coût sans terme de régularisation**. L'expression du gradient est fournie, comme prévu, grâce au calcul de l'état adjoint. Sans surprise, les résultats de l'identification montrent que, même pour des valeurs initiales choisies proches des valeurs de paramètres utilisées pour les données synthétiques, **les itérations de l'algorithme finissent par converger vers un minimum local**. La figure 1.9(a) montre les lignes d'isovaleurs de la fonction coût, et les points de calcul de la fonction coût pris au cours de l'algorithme, pour deux jeux de valeurs initiales différents. On voit nettement que l'algorithme a suivi la direction de plus grande pente, mais n'a pas réussi à se rapprocher des paramètres théoriques en continuant sa progression le long de la vallée.

Dans un second temps, **un terme de régularisation**, de type de ceux décrits dans [Tikhonov 1977], **est ajouté à la fonction coût**. Le choix du paramètre de régularisation s'est fait à l'aide du critère de Morozov, détaillé dans [Morozov 1984], en utilisant un ordre de grandeur du bruit de mesure caractéristique des capteurs utilisés sur la rame de TGV. Les lignes de niveau de la fonction coût avec terme de régularisation sont tracées sur la figure 1.9(b) : la vallée est beaucoup moins marquée que dans le cas sans régularisation, et **l'algorithme de quasi-Newton est en mesure de trouver le minimum global de la fonction**. D'autres valeurs initiales conduisent au même résultat.



**Figure 1.9** – Identification des paramètres  $c_y$  et  $c_z$  de la suspension du bogie pour une méthode de quasi-Newton (BFGS) [Kraft 2012].

Toutefois, **le résultat de cette minimisation est fortement conditionné par les valeurs des paramètres  $p_0$**  utilisés dans le terme de régularisation : tout dépend alors de la bonne connaissance des paramètres globaux (raideur et amortissement) des différents éléments utilisés dans la suspension. Comme ceux-ci sont généralement standards, les valeurs fournies par les constructeurs doivent pouvoir être retenues avec confiance.

### 1.3.3 Identification paramétrique d'un modèle multicorps de rame de TGV

Dans ce paragraphe, on se contentera simplement d'un rapide résumé des principaux résultats de [Kraft 2012] sur ce sujet : on se référera à cette référence pour plus de détails, ou encore à l'article [Kraft *et al.* 2013] paru dans *Vehicle System Dynamics*.

#### Description succincte du modèle multicorps

Le modèle multicorps de rame de TGV utilisé par la SNCF a été développé à l'aide du **logiciel Vampire**, qui est essentiellement destiné à la modélisation des véhicules sur rails. Le contact roue-rail est imposé comme une contrainte cinématique, et la description des efforts de contact repose sur la table USETAB, qui contient les résultats de calcul avec la théorie complète de Kalker pour un grand nombre de jeux de paramètres différents : l'interpolation de ces résultats permet d'allier la précision de la théorie complète avec un temps de calcul considérablement réduit, comme précisé dans [Vollebregt 2008]. Plus de détails sur le fonctionnement du logiciel Vampire, et sur la comparaison de ses résultats par rapport à d'autres codes de simulation multicorps, peuvent être trouvés dans [Shackleton et Iwnicki 2008].

Si l'on considère que tous les paramètres d'éléments de même type sont identiques pour deux voitures différentes, le modèle de rame de TGV comporte déjà 117 paramètres ; ce nombre passe à plus de 1000 dans le cas contraire. **Il est donc indispensable de sélectionner les paramètres qui sont les plus influents dans les réponses considérées** ; pour les autres, une valeur forfaitaire, telle que la caractéristique donnée par le fabricant de l'élément, doit être suffisante.

Pour cela, la **méthode de Morris**, détaillée dans [Saltelli *et al.* 2004], est proposée : elle consiste à calculer la fonction coût pour différents jeux de paramètres, en faisant varier à chaque fois un seul paramètre de manière aléatoire sur une grille de valeurs données (*one-factor-at-a-time method*). Une étude statistique est alors effectuée sur les gradients calculés par différences finies à l'aide des valeurs précédemment obtenues, et débouche sur le tracé de graphes {moyenne en abscisse – variance en ordonnée}. Les facteurs les plus influents sont alors rapidement discriminés. De plus, la méthode permet de déterminer quelle est la « portée » de l'influence d'un paramètre : on note ainsi que **la valeur de la raideur verticale de la suspension primaire d'un bogie a un impact fort sur le niveau d'accélération verticale des autres bogies** ; ceci s'explique par le fort couplage créé par les bogies de Jacobs.

#### Deux résultats d'identification

De façon générale, **l'identification paramétrique du modèle de rame de TGV se heurte à deux difficultés majeures** :

- l'utilisation d'un code commercial fait que nous n'avons pas accès aux équations que le logiciel résout pour calculer la réponse directe du modèle, et qu'il n'est pas possible de calculer d'autres types de problèmes : ainsi l'utilisation de l'état adjoint pour le calcul du gradient de la fonction coût se révèle impossible ici ;
- comme constaté déjà dans le paragraphe 1.3.2 pour l'exemple du bogie, la présence de phénomènes quasi-discontinus dans la description du contact vient ajouter à la fonction coût une multitude de minima locaux. Ceux-ci sont d'autant plus difficiles à gérer qu'ils sont également présents au voisinage du minimum global recherché, ce qui rend difficile l'ajout d'un terme de régularisation.

Dans ce contexte, **nous avons fait le choix de nous orienter vers des méthodes de minimisation qui seraient capables de « sortir » du bassin d'attraction du minimum local le plus proche du jeu de paramètres initial.** Pour cela, deux grandes familles de méthodes, décrites dans [Schneider et Kirkpatrick 2006], sont envisageables.

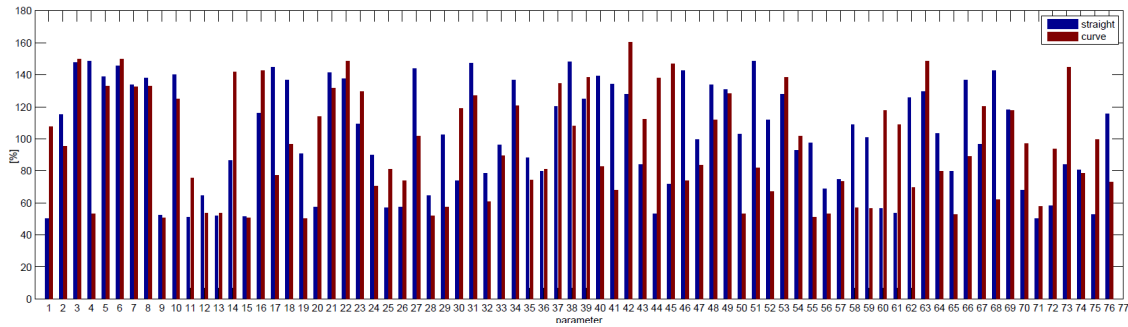
**La première famille est celle des algorithmes génétiques.** Ces méthodes reposent sur des jeux de paramètres qui « obéissent » aux principes de la génétique, à savoir qu'ils peuvent engendrer de nouveaux jeux de paramètres par croisement et mutation. Une sélection avait permis, au préalable, de ne garder que les jeux de paramètres les plus pertinents, c'est-à-dire ceux qui conduisent aux valeurs les plus faibles de la fonction coût. Quelques résultats d'identification avec ces algorithmes sont présentés dans [Kraft 2012].

**Nous évoquons ici quelques résultats obtenus par les méthodes de la seconde famille, à savoir les méthodes de « recuit simulé »** (ou *simulated annealing*). L'algorithme est construit de la façon suivante : à chaque itération, l'algorithme modifie un des paramètres de façon aléatoire, et compare la fonction coût calculée avec la valeur à l'itération précédente. Si cette nouvelle valeur est plus grande, le nouveau jeu de paramètres peut être quand même accepté selon une certaine probabilité, caractéristique de la « température » à l'itération actuelle. C'est ce qui confère à la méthode son caractère exploratoire, vu que **l'algorithme a la possibilité de sortir de minima locaux.** Au fur et à mesure des itérations, la « température » diminue, réduisant petit à petit la probabilité d'acceptation, et transformant donc la méthode en un algorithme purement local.

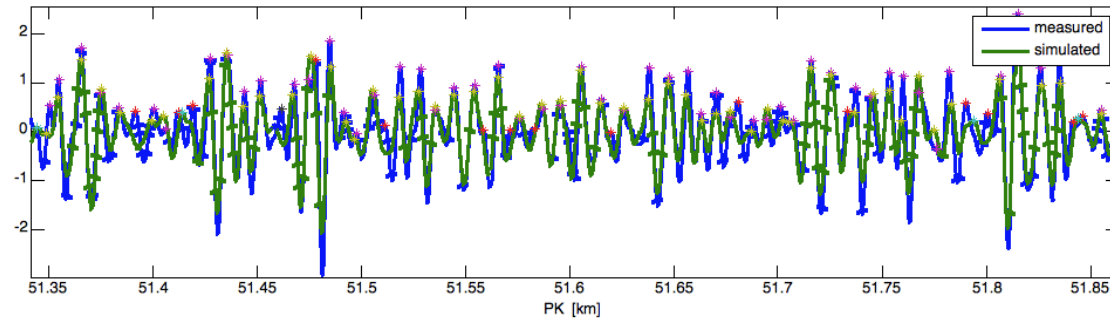
**Deux résultats d'identification sont présentés ici :** ils se basent sur la mesure de l'accélération verticale de l'un des bogies de motrice en trois points différents, pour deux tronçons de voie de mêmes longueurs : un en ligne droite, et un en courbe. Il a été choisi, dans cet exemple, de ne pas sélectionner les paramètres à identifier en fonction des résultats de l'étude de sensibilité : 76 paramètres, correspondant aux différents éléments de suspension de cette motrice, sont donc à identifier. En préalable de l'application de la méthode du recuit simulé, un recalage du PK est effectué en estimant l'intercorrélation entre les réponses mesurées et celles calculées par le modèle.

La figure 1.10(a) présente les valeurs normalisées (en % de la valeur initiale) des paramètres identifiés dans le cas de la ligne droite et de la courbe respectivement. On constate que, pour la plupart des paramètres, **les valeurs identifiées sont proches dans les deux cas, ce qui semble conforter l'idée que le modèle identifié est cohérent.** Ce n'est pas vrai pour certains paramètres, toutefois : dans le cas des paramètres 1 et 4, par exemple, ceci peut se justifier par le fait qu'il s'agit des raideurs longitudinales de deux éléments de suspension qui n'ont que peu d'influence dans la réponse verticale du bogie ; l'étude de sensibilité conforte d'ailleurs cette analyse, puisqu'elle aurait conseillé de ne pas chercher à identifier ces paramètres. Finalement, le modèle identifié est représentatif des données expérimentales, comme on peut le constater sur la figure 1.10(b) pour l'une des accélérations mesurées dans le cas de la ligne droite.

D'autres résultats similaires peuvent également être trouvés dans [Kraft 2012] et [Kraft *et al.* 2013].



(a) Valeurs normalisées des paramètres identifiés respectivement sur les portions de voie rectiligne et courbe.



(b) Accélérations mesurée et simulée après identification sur la portion de voie rectiligne.

**Figure 1.10** – Résultats de l'identification paramétrique sur deux portions de voie (rame de TGV) [Kraft 2012].

## 1.4 Bilan et perspectives

Ce chapitre avait pour but de résumer les travaux qui nous ont permis de valider les étapes d'une **démarche cohérente d'identification paramétrique**, applicable à des problèmes d'évolution de natures variées (en particulier, pour des cas d'étude quasi-statiques et dynamiques).

Si les modèles présentés ici étaient représentés par des EDO, il est possible sans restriction d'étendre cette démarche au cadre des équations aux dérivées partielles et à la résolution de ces dernières par la Méthode des Éléments Finis. **Ces mêmes étapes serviront donc de base pour les stratégies d'identification proposées dans les deux autres chapitres de ce mémoire**, où elles seront complétées d'ajouts spécifiques aux problèmes abordés.

Les paragraphes suivants rappellent les différents points clés des exemples présentés, et proposent des pistes d'investigations complémentaires qui devraient être explorées afin d'approfondir ces conclusions.

### 1.4.1 Sur l'amélioration de la mise en œuvre numérique

Pour l'évaluation du gradient de la fonction coût, les résultats exposés dans ce chapitre ont permis de **confirmer la supériorité de l'utilisation de l'état adjoint sur une simple estimation par différences finies**, aussi bien en termes de coût que de précision. Nous avons vu, toutefois, qu'il était prudent de s'assurer du calcul correct de cet état adjoint à l'aide du test du produit scalaire (1.15) : ce dernier a d'ailleurs pu permettre de choisir judicieusement le paramètre de lissage utilisé dans les équations (1.13).



Pour aller plus loin, **il pourrait être envisageable de calculer la hessienne de la fonction coût** à l'aide de problèmes adjoints complémentaires, comme ce qui est proposé par [Papadimitriou et Giannakoglou 2008] dans le cadre de la mécanique des fluides : ceci permettrait l'utilisation d'algorithmes de minimisation tirant parti d'une évaluation précise et efficace de cette hessienne, comme par exemple les méthodes SQP (*Sequential Quadratic Programming*), ou les algorithmes de gradient conjugué, tous rappelés dans [Nocedal et Wright 1999].

Par ailleurs, il existe une alternative à la résolution de problèmes d'état adjoint qu'il serait intéressant d'étudier : les **techniques de « dérivation automatique »** (*automatic differentiation* ou AD) permettent de calculer de manière systématique les dérivées d'une quantité évaluée par une fonction informatique : le principe associé consiste à partir de la séquence d'opérations élémentaires composant la fonction, et d'appliquer les règles de dérivation composée associées à ces opérations élémentaires. [Giering et Kaminski 1998] détaillent l'implémentation des deux « modes » de fonctionnement possibles, suivant que l'on parcourt la séquence d'opérations dans le sens de la fonction (*direct mode*) ou en sens inverse (*reverse mode*). Il est alors possible de définir des implémentations « automatiques » en différents langages : tandis que [Gockenbach *et al.* 2002] proposent une classe C++ permettant de résoudre des EDO et d'estimer le gradient de fonctions coûts basées sur la réponse de ces EDO, [Neidinger 2010] explique comment implémenter une technique d'AD sous MATLAB.

Comme **ces algorithmes se basent sur des règles exactes de dérivation composée**, l'estimation des gradients, qui se fait simultanément à celle de la réponse calculée par la fonction sur laquelle on applique la technique d'AD, est caractérisée par une précision équivalente : [Heimbach *et al.* 2005] détaillent un exemple d'estimation en modélisation climatique des océans et concluent sur **l'excellente précision de ces techniques, ainsi que leur efficacité en termes de coût de calcul et d'occupation mémoire**. Quelques essais prometteurs ont d'ailleurs été tentés dans [Kraft 2012], et il serait donc intéressant d'étudier plus avant ces techniques.

### 1.4.2 Sur la question de l'identifiabilité

Dans les exemples présentés ici, **la qualité de la détermination des paramètres du modèle utilisé a pu être étudiée**, d'une part avec l'utilisation de mesures synthétiques, pour lesquelles les valeurs des paramètres sont connues, et d'autre part grâce à la confrontation à des données expérimentales réelles (dont certaines n'ont d'ailleurs pas servi dans la procédure d'identification, mais ont servi comme validation *a posteriori* du résultat de l'identification, comme ce qui est montré sur la figure 1.5(b) par exemple).

La question de la **capacité à déterminer le minimum global de la fonction coût** s'est posée dans tous les cas, d'autant plus que cette dernière a généralement exhibé de nombreux minima locaux. Les travaux présentés ont alors permis de montrer différentes pistes de résolution de cette difficulté. Dans le cadre du travail [Bourgeteau 2009], nous avons constaté que la régularisation de type Tikhonov donnait des résultats satisfaisants (moyennant un choix judicieux des valeurs nominales de paramètres contenues dans le vecteur  $p_0$ ), même si une alternative a finalement été proposée, utilisant ces mêmes valeurs comme vecteur initial pour le processus d'identification. En revanche, la régularisation s'est montrée insuffisante pour l'identification paramétrique du modèle multi-corps de TGV proposée dans [Kraft 2012], ce qui nous a conduit à **adopter des méthodes de minimisation spécifiques, afin de pouvoir quitter les bassins d'attraction des minima locaux**.

Les résultats obtenus, d'une part avec les algorithmes génétiques, et d'autre part avec les méthodes de recuit simulé, ont finalement été très similaires : malgré un nombre d'itérations très important, toutes ces méthodes ne garantissent pas d'avoir forcément atteint le minimum global recherché, même si elles permettent d'obtenir de meilleurs résultats que les méthodes basées sur l'estimation du gradient. **Une piste d'amélioration serait vraisemblablement de coupler ces deux grandes familles de méthodes** : plus exploratoires, les algorithmes génétiques et les méthodes de recuit simulé pourraient être utilisés dans un premier temps pour obtenir un jeu de paramètres pertinent qui servirait, dans un deuxième temps, de valeurs initiales pour une méthode de quasi-Newton par exemple. Ceci permettrait d'obtenir une convergence accélérée dans le bassin d'attraction du minimum « sélectionné » par la méthode exploratoire. Bien sûr se posera alors la question délicate, à analyser, de savoir **comment trouver un critère judicieux de passage de l'un à l'autre**.

Par ailleurs, une piste de réflexion supplémentaire consisterait à trouver une « meilleure » fonction coût. Dans le paragraphe 1.3.3, nous avons déjà insisté sur la nécessité d'appliquer des méthodes de sensibilité dans le cas où le nombre de paramètres à identifier est important : **éliminer les paramètres peu influents permet de limiter les phénomènes de « vallées » dans l'évolution des valeurs prises par la fonction coût**, et donc, à cause de la précision de résolution du problème direct, la présence probable de minima locaux.

Une alternative serait de proposer d'autres types de fonctions coûts, comme nous l'avons déjà évoqué dans le paragraphe 1.1.2 : ainsi [Banerjee *et al.* 2013] comparent la fonction coût « classique » (norme de type  $L^2$ ) avec l'erreur en relation de comportement modifiée : cette dernière semble présenter diverses propriétés plus favorables, dont notamment une « meilleure » convexité, même si aucune étude mathématique n'a permis de le prouver rigoureusement. En conséquence, **la convergence avec l'erreur en relation de comportement modifiée est plus rapide, mais aussi plus robuste dans le cas de données expérimentales bruitées**. L'implémentation numérique dans le domaine temporel est, toutefois, plus complexe, comme souligné précédemment.

### 1.4.3 Sur l'identification « en ligne » et la maintenance prédictive

Dans les travaux exposés ici, **la question de la maintenance s'est affirmée comme un enjeu important**, présent seulement en filigrane dans le travail [Bourgeteau 2009], mais clairement exprimé dans le cas de la thèse [Kraft 2012]. L'objectif à court terme est de pouvoir utiliser les résultats de l'identification paramétrique afin de détecter des évolutions significatives de certains paramètres, qui traduiraient par exemple une dégradation du composant associé, et qui donneraient des indications sur sa durée de vie restante et son remplacement éventuel.

Les résultats de [Kraft 2012] montrent que ceci est déjà faisable dans une certaine mesure : même si elle pourrait encore être améliorée avec les pistes proposées dans les paragraphes précédents, **l'identification paramétrique à partir de mesures « en ligne » est satisfaisante**, et il serait donc possible de surveiller l'évolution des valeurs identifiées pour les différents paramètres à partir d'essais réalisés régulièrement. Par rapport aux différentes méthodes exposées dans [Bruni *et al.* 2007], qui sont basées sur les principes du traitement du signal, cette démarche ferait mieux que simplement détecter un écart par rapport au système « sain », pris comme référence, en permettant d'accéder aux valeurs « physiques » et interprétables des paramètres du modèle associé au système.



À moyen terme, il est également envisageable d'aller plus loin en abordant la **question d'une maintenance que l'on pourrait qualifier de prédictive plutôt que conditionnelle**. Le principe consisterait à introduire des paramètres dépendant du temps, et des modèles d'évolution associés pour traduire leurs variations temporelles, comme des modèles d'endommagement par exemple. Dans ce cas, la principale difficulté est liée au fait qu'il est nécessaire de disposer de l'histoire complète des sollicitations vues par le système, et d'alimenter avec celle-ci une simulation numérique des modèles de comportement afin d'évaluer l'évolution des différents paramètres.

Bien sûr, une telle simulation est *a priori* impossible à mener telle quelle, en raison du coût de calcul prohibitif associé à la conjonction de la durée d'étude et des fréquences caractéristiques des sollicitations appliquées. C'est pourquoi **nous nous sommes penchés sur des stratégies d'homogénéisation, telles que l'homogénéisation périodique en temps**, exposée dans le chapitre 3, qui permet de décrire l'évolution du système à une échelle de temps bien plus lente que celle associée aux sollicitations. De plus, il est possible de réduire encore plus le coût de simulation en introduisant trois échelles de temps au lieu de deux, comme précisé dans le paragraphe 3.1.3. Enfin, ce chapitre comporte **quelques pistes concernant l'identification paramétrique de tels modèles homogénéisés**, présentées dans le paragraphe 3.3, qui montrent que cette implémentation serait envisageable.

**Le point dur, toutefois, concernera l'hypothèse de quasi-périodicité (3.3) associée à la méthode**, qui semble au premier abord très restrictive, d'autant plus dans le cas de mesures en ligne où l'on s'attend plutôt à des sollicitations quelconques. Toutefois, il serait vraisemblablement possible d'adapter au cas temporel d'autres méthodes, telles que l'**homogénéisation non périodique en espace** présentée dans [Capdeville *et al.* 2010] dans le cas de modèles unidimensionnels : celle-ci est basée sur l'introduction d'un filtre spatial qui permet la séparation entre les deux échelles. Les résultats sont alors très satisfaisants, à condition d'avoir bien réglé la longueur de coupure de ce filtre, mais la question du coût associé à cette méthode resterait encore à analyser.

# Identification de champs de paramètres pour des problèmes stationnaires

---

*The possibility of determining approximate solutions of ill-posed problems that are stable under small changes in the initial data is based on the use of supplementary information regarding the solution. (...) In the first category of cases, the supplementary information, which is of quantitative nature, enables us to narrow the class of possible solutions (...). In the second category of cases, to find approximate solutions that are stable under small changes in the initial data, we use only qualitative information regarding the solution (for example, information regarding its smoothness).*

[Tikhonov 1977] – A. N. Tikhonov. *Solutions of ill-posed problems*. Winston, 1977

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Enjeux et difficultés de l'identification de champs spatiaux de propriétés . .</b>	<b>34</b>
2.1.1	Illustration dans le domaine de la biomécanique . . . . .	34
2.1.2	Contexte de ce type d'études . . . . .	36
<b>2.2</b>	<b>Stratégie d'identification basée sur l'utilisation de maillages adaptatifs . . .</b>	<b>39</b>
2.2.1	Forme générique du problème continu . . . . .	40
2.2.2	Résolution numérique et stratégie proposée . . . . .	41
2.2.3	Extension : utilisation d'une erreur en quantité d'intérêt . . . . .	46
<b>2.3</b>	<b>Identification de cavités souterraines à l'aide de mesures d'interférométrie radar . . . . .</b>	<b>47</b>
2.3.1	Présentation du problème . . . . .	48
2.3.2	Résultats de l'identification de cavités sur un problème 2D . . . . .	50
<b>2.4</b>	<b>Identification de défauts cristallins à l'aide de clichés MET . . . . .</b>	<b>56</b>
2.4.1	Présentation du problème . . . . .	56
2.4.2	Résultats de l'identification de défauts cristallins sur un problème 2D . .	59
<b>2.5</b>	<b>Bilan et perspectives . . . . .</b>	<b>62</b>
2.5.1	Sur des ajustements possibles de la stratégie adaptative . . . . .	62
2.5.2	Vers une identification multiéchelle . . . . .	64

L'objectif de ce deuxième chapitre est de s'intéresser cette fois-ci à l'identification de champs de paramètres qui dépendent de l'espace. Les problèmes directs considérés sont stationnaires, et caractérisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont résolues après discrétisation par la Méthode des Éléments Finis (MEF). Dans un premier temps, un exemple tiré du domaine de la biomécanique permettra de cerner les enjeux et les difficultés de ce type d'identification. Nous proposerons alors dans un second temps une stratégie générique d'identification de champs spatiaux de paramètres basée sur l'utilisation de maillages adaptatifs, dont l'effet régularisant sera un atout pour faire aboutir l'identification. Ensuite, deux exemples sur des phénomènes d'échelles très différentes permettront d'illustrer les détails de cette stratégie, ainsi que ses possibilités d'amélioration. Nous proposerons enfin une synthèse rapide des éléments majeurs présentés dans ce chapitre avant de proposer des perspectives de recherche associées.

## 2.1 Enjeux et difficultés de l'identification de champs spatiaux de propriétés

### 2.1.1 Illustration dans le domaine de la biomécanique

L'exemple proposé ici est tiré du travail de thèse [Henry 2006], encadré par Denis Aubry et Thierry Hoc, et qui a conduit à une publication dans la revue *Bone*, [Hoc *et al.* 2006]. **Ce travail permet d'illustrer ce qui peut être classiquement proposé pour l'identification des propriétés de matériaux hétérogènes à l'aide de mesures de champs.** Il initiera également la discussion proposée dans le paragraphe 2.1.2.

#### Présentation du contexte

De plus en plus, il devient crucial de pouvoir connaître l'os à l'échelle de sa microstructure, car c'est à cette échelle que se manifestent les phénomènes qui permettent de comprendre certaines maladies osseuses, telle que l'ostéoporose ou la maladie de Paget, ou encore ce qui assurera l'adhésion à long terme de prothèses après implantation.

L'étude [Henry 2006] a porté sur les **propriétés mécaniques locales de l'os cortical** : celui-ci est à la base de la constitution des os longs, et présente un comportement orthotrope, lié à la présence d'ostéons. Ces derniers se présentent sous la forme de cylindres de 300  $\mu\text{m}$  environ de diamètre et de plusieurs millimètres de long : ils sont orientés selon l'axe longitudinal de l'os long, et sont constitués de lamelles concentriques de 2  $\mu\text{m}$  environ d'épaisseur. Ces lamelles, issues du processus de remodelage osseux qui « répare » l'os en permanence, sont faites essentiellement de collagène et de cristaux d'hydroxyapatite. S'ajoute à cette microstructure particulière tout un réseau de canaux et de lacunes (Havers, Volkmann, ...) qui permet l'irrigation sanguine et l'innervation de ce matériau vivant.

#### Résultats expérimentaux

Plusieurs techniques expérimentales de caractérisation ont été appliquées à des échantillons d'os cortical bovin de dimensions millimétriques :

- des **essais de nanoindentation**, qui permettent de mesurer localement la valeur du module de Young à partir de la courbe de raideur mesurée lors de l'indentation et des caractéristiques de la pointe utilisée ;

- des **observations sous microscope électronique à balayage (MEB)** pour de l'imagerie par électrons rétrodiffusés ; cette technique permet de quantifier le contenu minéral local (à savoir, dans notre cas, l'hydroxyapatite) : plus celui-ci est important, plus le pixel de l'image est clair ;
- des **essais de compression *in situ* dans un microscope optique**, qui permettent de disposer d'images de la surface de l'échantillon, à différents pas de chargement, ceci afin de déterminer le champ de déformations expérimental à l'aide d'une technique de corrélation d'images.

La conjugaison des deux premières techniques a permis d'établir dans [Hoc *et al.* 2006] que le module de Young local présentait une corrélation linéaire forte (75%) avec le niveau de gris local de l'image MEB, ce qui indique que **le module est fortement lié au contenu minéral local**. Cette corrélation est à la base de la procédure d'identification résumée dans le paragraphe suivant.

### Procédure d'identification

Le but est d'**identifier le module de Young local à partir du champ de déformations obtenu par corrélation d'images**. Le problème inverse est formulé de façon classique sous la forme de la minimisation d'une fonction coût portant sur les valeurs de déformation longitudinale dans les différents domaines servant à la corrélation. Un modèle EF de la zone observée lors de l'essai *in situ* est créé en s'appuyant sur la géométrie réelle observée, de façon à mailler précisément les parties non lacunaires de l'échantillon. Sur le bord de la zone observée sont appliqués comme conditions limites les déplacements déterminés par la corrélation d'images.

La résolution de ce type de problème d'identification est délicate, en raison de la microstructure très fine du matériau : en effet, dans ce cas, le maillage utilisé est très raffiné, ce qui signifie que **le champ de module de Young est discrétisé sur un grand nombre de nœuds**. Ceci a pour conséquence de rendre le problème inverse extrêmement mal posé, et le choix d'une technique de régularisation adaptée se révèle donc crucial.

Ici, il a été décidé de tirer parti de la corrélation observée expérimentalement entre les valeurs locales du module de Young et du niveau de gris d'une image MEB de l'échantillon. **Le module est donc cherché sous la forme d'une fonction affine du niveau de gris, ce qui revient à identifier deux coefficients constants**. Cette réduction très forte du nombre d'inconnues a l'avantage de régulariser le problème inverse, au point de ne pas avoir besoin d'ajouter un terme de régularisation à la fonction coût, tout en proposant un champ spatialement très hétérogène, et forcément cohérent avec la microstructure observée. Ceci correspond à ce que l'on qualifie de « **régularisation par projection** » dans [Engl *et al.* 1996].

La procédure d'identification se fait alors en deux temps, après avoir reformulé les deux coefficients cherchés en termes de moyenne et d'écart type. Dans un premier temps, la moyenne du module de Young est déterminée à l'aide des mesures de contrainte et de déformation longitudinales macroscopiques. Dans un second temps, l'écart type est identifié comme solution de la minimisation de la fonction coût évoquée plus haut. Par ailleurs, une hypothèse similaire, quoique non confirmée expérimentalement, est faite pour la recherche du coefficient de Poisson.

Finalement, **on observe une correspondance satisfaisante entre déformations calculées et déformations mesurées** dans les domaines de corrélation, sauf pour un certain nombre de zones, caractérisées à chaque fois par la proximité de deux lacunes (typiquement, des canaux

de Havers) ; pour ces zones, les écarts résiduels peuvent s'expliquer par la réunion probable des deux lacunes en profondeur, tandis que le modèle EF est créé comme l'extrusion d'un maillage 2D représentatif de la surface. Plus de détails peuvent être trouvés dans la thèse [Henry 2006], ainsi que dans les communications [Puel *et al.* 2009] et [Puel *et al.* 2010].

Ces résultats démontrent le bien-fondé du choix de représentation du module recherché. Bien sûr, d'autres possibilités auraient été envisageables, comme de supposer le module de Young homogène par ostéon. Toutefois, ce choix n'aurait pas conduit à une forte diminution des inconnues à identifier, et aurait, encore une fois, mené à la question délicate de l'ajout d'un terme de régularisation.

### Travaux complémentaires

Une stratégie similaire, concernant cette fois-ci l'étude de l'os humain, a été adoptée dans les travaux de thèse [Devulder 2009], encadrés par Denis Aubry et Thierry Hoc. Une corrélation expérimentale du même niveau que précédemment a été observée localement entre le module local déterminé par nanoindentation et le niveau de gris d'une image MEB de l'échantillon. Ceci a rendu possible la détermination des champs spatiaux de module de Young et de coefficient de Poisson sur des échantillons testés *in situ*, ce qui a permis d'alimenter un modèle de remodelage osseux mis en œuvre grâce à la méthode d'homogénéisation périodique en temps présentée dans le chapitre 3. De plus, un seuil de déformation longitudinale locale de fissuration a pu être mis en avant à l'aide d'une technique de corrélation d'images. Les communications [Puel *et al.* 2009] et [Puel *et al.* 2010], ainsi qu'un article publié dans la revue *Osteoporosis International*, [Devulder *et al.* 2010b], permettent de trouver plus de précisions à ce sujet.

### 2.1.2 Contexte de ce type d'études

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence sur un exemple précis toute la problématique de l'identification de champs spatiaux de propriétés. Ici, encore plus que pour les problèmes traités dans le chapitre 1, **la question de l'unicité et de la stabilité de la solution du problème inverse nécessitent de pouvoir disposer d'une régularisation efficace, mais aussi d'une information expérimentale aussi riche que possible**. Ces deux points sont discutés un peu plus dans les deux paragraphes qui suivent.

#### Comment poser efficacement le problème inverse ?

Le fait de devoir identifier des fonctions plutôt que de simples paramètres constants ne remet pas en cause les méthodes employées dans le chapitre 1. La régularisation d'après [Tikhonov 1977] reste toujours couramment employée ; dans ce cas, le terme de régularisation peut être gardé identique à celui proposé dans la fonction coût (1.2), ou bien, pour éviter les oscillations parasites dans le champ identifié, qui sont caractéristiques de l'instabilité inhérente du problème inverse, **il est possible d'imposer que le champ recherché soit assez « lisse »**, en pénalisant la norme du gradient spatial par exemple, comme on le verra dans l'étude du paragraphe 2.3.2.

Dans ce contexte, [Bonnet et Constantinescu 2005] proposent un état de l'art détaillé des problèmes inverses dans le domaine de l'élasticité, où il s'agit d'identifier des distributions de modules élastiques ou des objets contrastant avec les propriétés du milieu dans lequel ils sont

présents (tels que des inclusions, des cavités, des fissures). Aux côtés de la méthode de minimisation de la fonction coût avec utilisation de l'état adjoint, que nous avons déjà présentée pour les EDO dans le paragraphe 1.1.3, et de l'erreur en relation de comportement, évoquée dans le paragraphe 1.1.2, figurent également des techniques qui mettent en œuvre la sensibilité de la fonction coût à des variations de formes : ces approches, qui appartiennent au **domaine de l'optimisation de forme** (ou *shape optimization*) peuvent se révéler particulièrement intéressantes, dans le cas de la détection de défaut(s) typiquement. Cependant, même avec ces approches, le minimum global de la fonction coût reste délicat à déterminer, y compris avec des termes de régularisation portant sur le périmètre du défaut, ou la courbure locale de sa frontière.

C'est pourquoi des alternatives ont été proposées, qui étaient initialement destinées à fournir des champs initiaux pertinents pour l'algorithme de minimisation. Le « gradient topologique » (ou *topological derivative*), dont [Bonnet et Constantinescu 2005] dressent un panorama assez complet, est l'une de ces possibilités. L'idée est d'**exprimer la sensibilité de la fonction coût vis-à-vis de l'apparition d'une cavité de dimensions infinitésimales en un point donné** : là où ce gradient topologique prend les valeurs les plus basses (et négatives de surcroît), on peut suspecter la présence d'une cavité. Cette technique donne de bons résultats en élastodynamique et en acoustique, comme évoqué par [Bonnet et Guzina 2004, Bonnet 2006] notamment, et il est en outre possible d'utiliser divers types de fonctions coûts : ainsi, [Bonnet 2010] a montré la faisabilité d'introduire une fonction coût en énergie de déformation, proche de l'erreur en relation en comportement. De plus, un avantage majeur est de ne pas nécessiter d'itérations, vu que l'objectif n'est pas de trouver le minimum de la fonction coût. Il est toutefois envisageable de se servir du gradient topologique comme d'une étape préliminaire : [Carpio et Rapún 2012] proposent que, une fois déterminé le domaine de l'inclusion, une minimisation utilisant le gradient « classique » soit faite vis-à-vis des valeurs des champs de paramètres supposés constants par domaine ; il est même envisageable d'alterner de façon itérative les deux méthodes.

**Une autre façon de tenir compte de la géométrie dans les problèmes de détection de défauts est d'employer des méthodes basées sur les fonctions de niveau** (ou *level set*), introduites par [Osher et Sethian 1988] pour modéliser des frontières en mouvement. [Burger et Osher 2005] font une synthèse des contributions associées, et estiment que l'équation d'évolution de la *level set*, si elle est suffisamment « lisse », peut être une régularisation en soi tout aussi efficace que les régularisations « classiques » ; ceci est confirmé par une étude similaire de [Ben Ameer *et al.* 2004].

Cette utilisation des *level set* est également bien adaptée à la mise en œuvre numérique, avec la méthode des éléments finis étendus (ou X-FEM, initiée notamment par [Moës *et al.* 1999]) dans le cas de la fissuration par exemple : ainsi [Pierrès *et al.* 2011] présentent une première étape vers l'identification de critères de propagation de fissures de fatigue, où des techniques de traitement d'image permettent de reconstituer la fissure qui est ensuite représentée à l'aide d'une *level set* au sein d'une simulation X-FEM destinée à calculer les facteurs d'intensité de contrainte.

Ici, nous n'adopterons pas ces méthodes spécifiques, mais nous détaillerons dans le paragraphe 2.2 une stratégie, qui reste dans les grandes lignes de la méthode présentée dans le chapitre 1, tout en proposant d'utiliser des maillages adaptatifs comme un moyen de régularisation supplémentaire du problème d'identification.

### Comment tirer le meilleur parti de l'information expérimentale ?

Depuis un peu plus d'une dizaine d'années, **il est devenu possible de disposer de données expérimentales extrêmement riches**, avec le développement croissant des techniques de mesures de champs : celles-ci proviennent généralement de méthodes d'imagerie aux résolutions de plus en plus fines, et qui permettent d'avoir accès à toujours plus de grandeurs expérimentales. On trouvera par exemple dans [Rastogi 1999] un panorama assez complet des mesures de champs obtenues à l'aide de techniques optiques.

Il faut donc pouvoir utiliser au mieux ces données dans le problème d'identification. Alors qu'« autrefois » les essais expérimentaux reposaient généralement sur une hypothèse d'homogénéité ou d'évolution simplifiée afin de pouvoir avoir accès aux grandeurs pertinentes, **les mesures de champs permettent désormais d'avoir des informations très détaillées concernant des essais hétérogènes, voire des structures dans leur environnement sous sollicitations de service.**

Les techniques d'identification qui tirent spécifiquement parti de ces mesures sont assez nombreuses : [Avril *et al.* 2008] listent les principales méthodes qui s'appliquent dans le domaine des mesures optiques, même si certaines d'entre elles peuvent s'appliquer également à d'autres cadres voisins : « recalage » de modèles EF (qui correspond en fait à la ligne directrice présentée dans le paragraphe 1.1), erreur en relation de comportement modifiée, méthode des champs virtuels, écart à l'équilibre, écart à la réciprocité.

À ces méthodes encore générales, on peut aussi ajouter tous les algorithmes spécifiques à un processus d'imagerie particulier, dont on peut trouver un aperçu récent dans [Scherzer 2011] : transformée inverse de Radon, méthode de *linear sampling*, transformée de Gabor, segmentation d'images...

De façon générale, **les enjeux actuels concernent également la possibilité d'utiliser simultanément des mesures provenant de techniques utilisant des physiques différentes**, afin de profiter de leur complémentarité. On parle dans ce cas de mesures « multimodales ». Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple qui nous concerne, nous pouvons citer la thèse de Wang Chow, débutée en décembre 2011 et coencadrée avec Véronique Aubin, qui traite de l'identification d'une loi de plasticité cristalline à partir de telles mesures multimodales. Ces dernières se composent de champs de déplacement (et donc de déformation totale) obtenus par corrélation d'images d'une part, et de champs de déformation élastique issus de la diffraction des rayons X et des neutrons d'autre part. L'identification devra alors tirer parti de la complémentarité de ces informations pour être réellement efficace.

Même si nous en reparlerons plutôt dans les perspectives du paragraphe 2.5, **l'utilisation des mesures de champs s'intègre de façon naturelle dans la stratégie exposée dans le reste de ce chapitre.** L'étude présentée dans le paragraphe 2.4 est d'ailleurs un bon exemple d'une façon de traiter le problème inverse de formation d'une « image » à l'aide d'une description des phénomènes physiques associés. On pourrait ainsi repenser de façon similaire tout traitement d'image à des fins d'identification.

## 2.2 Stratégie d'identification basée sur l'utilisation de maillages adaptatifs

L'idée d'utiliser des maillages adaptatifs pour la résolution de problèmes inverses n'est apparue qu'il y a une dizaine d'années, et reste encore relativement marginale aujourd'hui. **Les premiers travaux**, comme [Becker *et al.* 2000] ou [Li *et al.* 2002], **ont d'abord concerné la question de l'estimation d'erreur pour des problèmes de contrôle optimal**, et se sont attachés à définir des estimateurs *a posteriori* portant (en plus de la qualité de l'estimation de l'état direct) sur la qualité de l'estimation du contrôle, du fait de sa discrétisation spatiale. Le raffinement du maillage permet alors d'ajuster simultanément la discrétisation de l'état direct et du contrôle, ce dernier n'étant souvent défini que sur une frontière du domaine. **L'idée est alors d'obtenir la meilleure précision possible sur la résolution du problème de contrôle optimal, pour un coût de calcul raisonnable.**

Du problème de contrôle optimal, certains auteurs sont rapidement passés à la question de l'identification de champs spatiaux de paramètres, qui lui est fortement similaire. Ainsi, [Becker et Vexler 2003 - 2005] **ont proposé des estimateurs d'erreur *a posteriori* qui permettent de juger de la qualité de l'estimation des paramètres à identifier**, relativement à leur discrétisation spatiale. La qualité est jugée par rapport à la fonction coût à minimiser, ou de toute autre fonction objectif. L'idée est toujours la même : avoir le meilleur maillage vis-à-vis du rapport précision – coût numérique.

Par rapport à ces dernières références, **le travail de thèse [Bangerth 2002] se distingue par la proposition d'utiliser un maillage pour la discrétisation du champ spatial recherché différent de celui adopté pour la résolution du problème direct** (et du problème adjoint). Les deux maillages sont alors raffinés séparément en fonction d'estimateurs d'erreur analogues à ceux utilisés précédemment. Là encore, le but principal est de rendre la résolution du problème inverse optimale en termes de coût de calcul, mais aussi, de façon secondaire, de **pouvoir profiter de la régularisation par projection**, évoquée dans le paragraphe 2.1.1 : en effet, il est possible d'utiliser un maillage grossier pour la discrétisation du champ recherché, tandis qu'un maillage plus fin peut servir à la résolution des problèmes direct et adjoint. Un exemple d'application de ce type de stratégie à un problème de tomographie optique à fluorescence, qui détaille en outre de manière précise les gains associés, est donné dans [Bangerth 2008, Bangerth et Joshi 2008].

**Nous souhaitons utiliser cette stratégie avant tout pour l'effet régularisant que peut apporter l'introduction d'un maillage grossier pour la description du champ spatial**, vu que nous nous intéresserons moins à la réduction du coût de calcul apporté par cette méthode. La stratégie est présentée ici dans le cas de l'identification paramétrique d'un problème stationnaire générique, défini par une EDP dont les paramètres à identifier varient spatialement sur le domaine d'étude. Nous adoptons dans les paragraphes suivants une écriture fonctionnelle des différentes équations à résoudre : ceci permettra d'avoir plus de souplesse quand les questions de discrétisations spatiales EF se poseront. Il est intéressant de noter que d'autres possibilités de discrétisation sont envisageables, comme l'utilisation de volumes finis dans [Haber *et al.* 2007], mais nous ne les détaillerons pas ici.



### 2.2.1 Forme générique du problème continu

Ce paragraphe présente le problème d'identification tel qu'il serait posé de manière classique, avant toute discrétisation EF.

#### Présentation du problème direct

Le problème direct consiste à déterminer la variable d'état  $u$ , appartenant à un espace de Hilbert spécifique  $\mathcal{V}$  (comprenant des conditions de régularité et d'éventuelles conditions aux limites « cinématiques » sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ ), telle que :

$$a(u, p)(v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0 \quad (2.1)$$

où  $p$  désigne le champ spatial de paramètres à identifier, défini dans un certain espace  $\mathcal{P}$ , généralement inclus dans  $L^2(\Omega)$ , ou bien encore  $H^1(\Omega)$  si le champ est dérivable. Selon le problème physique traité, il peut être possible d'ajouter des contraintes au champ recherché, comme la stricte positivité par exemple.

Cette EDP stationnaire s'écrit sous forme faible à l'aide de l'application  $a : \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui caractérise le comportement mécanique (ou physique) du domaine  $\Omega$ , et de la forme linéaire  $f : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui représente les chargements appliqués. Enfin,  $\mathcal{V}_0$  désigne le sous-ensemble des fonctions  $v \in \mathcal{V}$  qui vérifient des conditions aux limites cinématiques nulles.

#### Écriture du problème inverse

**Le processus d'identification consiste à résoudre un problème inverse défini de façon analogue à celui proposé pour les EDO** dans le paragraphe 1.1.2. On cherche à minimiser une fonction coût définie comme une norme quantifiant l'écart entre les prédictions du modèle direct et les mesures expérimentales disponibles :

$$\mathcal{J}(p) = \frac{1}{2} \|\mathcal{D}(u^p) - D_{exp}\|_{\Sigma}^2 + \mathcal{R}(p) \quad (2.2)$$

où  $u^p$  est solution du problème direct (2.1) avec pour champ de paramètres  $p$ . Bien sûr, d'autres formes de fonctions coûts sont envisageables, comme ce qui est évoqué dans les paragraphes 1.1.2 et 2.1.2.

Les mesures, qui, dans la plupart des cas abordés, sont de type mesures de champs, sont disponibles sur  $\Sigma$  (qui peut être un sous-ensemble de  $\Omega$ , ou seulement de  $\partial\Omega$ ), et sont désignées par  $D_{exp}$ , tandis que  $\mathcal{D} : \mathcal{V} \rightarrow \Sigma$  est l'opérateur d'observation, qui permet de projeter la variable d'état  $u^p$  sur le domaine  $\Sigma$ , et de comparer ces prédictions avec les données expérimentales au travers de la norme  $\|\cdot\|_{\Sigma}$  définie sur  $\Sigma$ . Enfin,  $\mathcal{R}(p)$  désigne le terme de régularisation que l'on peut ajouter comme proposé dans [Tikhonov 1977].

La solution du problème d'identification est alors le champ de paramètres  $p_{opt}$  qui minimise cette fonction coût :

$$p_{opt} = \arg \min_p \mathcal{J}(p) \quad (2.3)$$

### Utilisation de l'état adjoint

De même que dans le paragraphe 1.1.3, on choisit de résoudre ce problème de minimisation sous contrainte à l'aide du lagrangien :

$$\mathcal{L}(u, p, z) = \frac{1}{2} \|\mathcal{D}(u) - D_{exp}\|_{\Sigma}^2 + \mathcal{R}(p) - (a(u, p)(z) - f(z)) \quad (2.4)$$

où  $z$  est l'état adjoint, défini comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte que  $u$  doit vérifier (2.1). Comme  $(u, p, z)$  sont indépendants dans cette formulation, nous pouvons écrire la stationnarité du lagrangien par rapport à ces trois variables.

La condition de stationnarité par rapport à  $u$  permet alors d'obtenir le problème adjoint sous forme variationnelle :

$$\langle \mathcal{D}(u) - D_{exp}, \delta u \rangle_{\Sigma} - \nabla_u a(u, p)(z, \delta u) = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}_0 \quad (2.5)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\Sigma}$  désigne le produit scalaire défini sur  $\Sigma$ .  $\nabla_u a(u, p)(\bullet, \delta u)$  est la dérivée directionnelle en  $(u, p)$  de  $a$  dans la direction  $\delta u$ . **L'état adjoint  $z$  peut alors être vu comme la solution du problème direct différencié à l'ordre un, avec comme conditions limites sur  $\Sigma$  l'écart entre prédictions et mesures.**

La condition de stationnarité par rapport à  $p$ , quant à elle, permet d'exprimer que le gradient de la fonction coût doit être nul :

$$0 = \nabla_p \mathcal{J}(p) \delta p = \nabla_p \mathcal{R}(p) \delta p - \nabla_p a(u, p)(z, \delta p) \quad \forall \delta p \in \partial \mathcal{P} \quad (2.6)$$

où  $\nabla_p a(u, p)(\bullet, \delta p)$  est la dérivée directionnelle en  $(u, p)$  de  $a$  dans la direction  $\delta p$ , et  $\nabla_p \mathcal{R}$  le gradient du terme de régularisation.  $\partial \mathcal{P}$  désigne l'espace tangent associé à l'espace  $\mathcal{P}$  des paramètres.

### 2.2.2 Résolution numérique et stratégie proposée

Le logiciel COMSOL est utilisé pour l'implémentation numérique de la stratégie : il permet de résoudre des EDP saisies sous forme fonctionnelle en assurant la discrétisation EF. Il est en particulier possible de mettre en place simultanément différents maillages, dont l'un peut être raffiné de façon progressive.

#### Discrétisation EF

Afin de résoudre numériquement l'ensemble des équations précédentes (2.1)–(2.5)–(2.6), la première étape consiste à se placer dans les sous-espaces  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}_{0,h} \subset \mathcal{V}_0$  et  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ , de dimension finie, associés à une discrétisation de type EF sur un maillage noté  $\mathcal{M}_h$ . Le système à résoudre devient alors :

$$a(u_h, p_h)(v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.7a)$$

$$\nabla_u a(u_h, p_h)(z_h, \delta u_h) = \langle \mathcal{D}(u_h) - D_{exp}, \delta u_h \rangle_{\Sigma} \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.7b)$$

$$\nabla_p a(u_h, p_h)(z_h, \delta p_h) = \nabla_p \mathcal{R}(p_h) \delta p_h \quad \forall \delta p_h \in \partial \mathcal{P}_h \quad (2.7c)$$

où l'on recherche les variables discrétisées  $(u_h, z_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{P}_h$ . Par abus de notation, nous appelons toujours  $D_{exp}$  les données expérimentales, sachant que, ici, elles sont évidemment projetées sur le maillage  $\mathcal{M}_h$ .

Contrairement à la mise en œuvre numérique du paragraphe 1.1.3, **il est ici envisageable de résoudre ce système d'EDP de façon monolithique**, puisqu'il s'agit d'un problème stationnaire : ainsi, **le logiciel COMSOL nous permet d'opter pour une méthode de Newton amortie, qui est modifiée selon [Deuffhard 1974] afin de pouvoir traiter le cas de systèmes très mal conditionnés**, comme celui que nous avons ici. À chaque itération de l'algorithme, le logiciel détermine l'expression analytique de la matrice jacobienne du système (2.7), puis l'évalue numériquement en utilisant les valeurs courantes des inconnues. Si cette matrice est très mal conditionnée, l'algorithme lui substitue une matrice « rigoureusement » singulière, dont le pseudo-inverse de Moore-Penrose intervient dans le calcul de la direction de descente optimale. Enfin, la méthode procède à l'estimation du meilleur pas associé à la direction de descente fournie. Le processus s'arrête quand la norme du résidu associé au système (2.7) est en dessous d'une certaine valeur fixée à l'avance.

**Si la résolution monolithique semble effectivement envisageable, elle peut être délicate dans le cas de problèmes à grand nombre de DDL**, en raison du coût numérique associé à la résolution itérative du système complet (2.7). Ainsi, pour ce type de problème, [Bangerth 2008] utilise une **méthode de Gauss-Newton dont la direction de descente est déterminée sur un système de taille plus petite** (liée à celle de  $\mathcal{P}_h$ ), à l'aide du complément de Schur et d'une méthode de gradient conjugué ; la longueur du pas d'itération est ensuite calculée à l'aide d'une fonction basée sur le résidu du système (2.7). Cette philosophie est également adoptée par [Epanomeritakis *et al.* 2008] qui, pour traiter un problème d'identification en sismique, reprennent les points précédents en ajoutant juste un préconditionneur de type BFGS pour la méthode de gradient conjugué ; de plus, ils tiennent également compte de l'aspect temporel, vu que le cas considéré est un problème d'évolution, discrétisé en temps par un schéma explicite de différences centrées.

Néanmoins certains auteurs préfèrent tout de même résoudre le système de façon monolithique, comme [Biros et Ghattas 2005b - a], qui dressent un panorama très complet des différentes alternatives envisageables pour la résolution de systèmes d'EDP correspondant à la forme générique (2.7). Parmi tous ces choix possibles pour la résolution de leur problème de contrôle optimal en mécanique des fluides, ils retiennent une **méthode de Newton amortie pouvant évoluer dans certains cas en une méthode de quasi-Newton de type BFGS**. La détermination de la direction de descente se fait sur le système complet à l'aide d'une méthode de Krylov où l'on utilise comme préconditionneur pour améliorer la convergence la résolution d'un système réduit de type Schur avec une méthode RSQP (*Reduced Sequential Quadratic Programming*).

Pour le moment, nous n'avons pas cherché à optimiser la résolution numérique de notre problème, préférant garder la résolution telle qu'elle est envisageable avec le logiciel COMSOL. Il est bien sûr évident que l'emploi de méthodes telles que celles que l'on vient d'évoquer s'imposera dans le cas de problèmes tridimensionnels par exemple.

### Difficultés de convergence

De façon générale, la résolution du système (2.7) peut échouer, car la convergence n'est pas garantie. En effet, **le problème ainsi défini est difficile à résoudre de façon itérative, même avec la présence du terme de régularisation** : on cherche à identifier un champ spatial discrétisé sur le maillage  $\mathcal{M}_h$ , ce qui revient à déterminer les valeurs nodales associées. Ceci peut représenter un très grand nombre d'inconnues si le maillage est fin, et le problème inverse est alors d'autant plus mal posé que, généralement, les données expérimentales sont moins abondantes : en effet, celles-ci sont généralement connues sur un bord du domaine seulement, ou, dans le cas où elles sont mesurées en volume dans le domaine, c'est souvent avec une résolution spatiale bien moindre que celle du maillage utilisé. Ainsi, le risque est également de trouver un grand nombre de champs spatiaux vérifiant les équations du système (2.7), signifiant par là que **le problème de minimisation n'est pas convexe et peut admettre de nombreux minima locaux**.

Plusieurs possibilités existent pour tenter de rétablir la convergence vers le minimum global de la fonction coût. **Une première technique dite de « saut de fréquence »** (ou *frequency hopping*), initiée par [Chew et Lin 1995] dans le domaine de l'imagerie micro-ondes, et très employée en géophysique, **consiste à faire des identifications successives à l'aide de données expérimentales obtenues pour des fréquences croissantes**, chaque résultat d'identification à une fréquence donnée servant de jeu de paramètres initial pour la fréquence suivante. L'hypothèse sous-jacente réside dans le fait que la résolution est moins grande à faible fréquence, et donc que la donnée du modèle initial est moins critique dans le processus d'identification ; **ceci permet d'espérer se situer, dès le début ou presque, dans le bassin d'attraction du minimum global de la fonction coût, puis d'y rester au fur et à mesure que la fréquence utilisée augmente**.

Plus récemment, [Beilina et Klibanov 2012] proposent une technique de « convergence globale approchée » (ou *approximate global convergence*) dont l'idée en quelques mots consiste à **construire dans un premier temps une approximation du minimum global recherché**, obtenue par la résolution approchée et itérative d'une équation intégral-différentielle équivalente au problème inverse traité, mais avec comme avantage de ne pas faire intervenir le champ inconnu. **Dans un deuxième temps, une méthode basée sur de les techniques d'adaptation de maillage permet de raffiner l'estimation de l'approximation obtenue précédemment**, qui est certaine de se trouver dans le bassin d'attraction du minimum global de la fonction coût.

### Stratégie fondée sur l'utilisation simultanée de deux maillages

La stratégie étudiée ici est de partir de l'idée que **l'on peut régulariser efficacement un problème inverse en limitant la dimension de l'espace de recherche** (comme dans le paragraphe 2.1.1). Nous proposons alors de faire la même chose en choisissant un maillage grossier  $\mathcal{M}_H$  pour la discrétisation du champ de paramètres recherché, tout en gardant le maillage initial  $\mathcal{M}_h$  pour la résolution des problèmes (2.7a) et (2.7b). **Les deux maillages sont ainsi complètement indépendants l'un de l'autre**.

Suivant les problèmes traités, ceci peut d'ailleurs être cohérent physiquement avec les différences de longueurs caractéristiques de variation spatiale des champs considérés : dans des problèmes de propagation d'onde par exemple, suivant les conditions limites, l'onde calculée pour le problème direct peut être à haute fréquence, et se propager dans un milieu dont les propriétés physiques évoluent peu, voire pas du tout si le milieu est homogène.

Enfin, il est important de noter que l'on a choisi le même maillage  $\mathcal{M}_h$  pour le calcul des problèmes direct et adjoint : comme on a préféré discrétiser après avoir écrit les deux problèmes sous forme fonctionnelle, ce choix permet de garantir que les deux problèmes sont adjoints l'un de l'autre d'un point de vue mathématique. En ceci, nous suivons les choix de [Bangerth 2002 - 2008], même si ce dernier impose un certain nombre de propriétés que les maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$  doivent partager, ce qui n'est pas notre cas ici.

Le problème à résoudre consiste alors à déterminer  $(u_h, z_h, p_H) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{P}_H$  tels que :

$$a(u_h, \Pi_h^H p_H)(v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.8a)$$

$$\nabla_u a(u_h, \Pi_h^H p_H)(z_h, \delta u_h) = \langle \mathcal{D}(u_h) - D_{exp}, \delta u_h \rangle_\Sigma \quad \forall \delta u_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.8b)$$

$$\nabla_p a(\Pi_H^h u_h, p_H)(\Pi_H^h z_h, \delta p_H) = \nabla_p \mathcal{R}(p_H) \delta p_H \quad \forall \delta p_H \in \partial \mathcal{P}_H \quad (2.8c)$$

où  $\mathcal{P}_H$  est associé au maillage grossier  $\mathcal{M}_H$ , tandis que  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{V}_{0,h}$  restent liés au maillage fin  $\mathcal{M}_h$ . Enfin,  $\Pi_h^H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{M}_h$  et  $\Pi_H^h : \mathcal{M}_h \rightarrow \mathcal{M}_H$  sont des **opérateurs, respectivement d'extension et de projection**, qui permettent de passer, pour l'un, du maillage grossier au maillage fin, et pour l'autre, du maillage fin au maillage grossier.

Le nouveau système (2.8) est résolu de façon analogue au précédent. En termes de résultats, l'exemple présenté dans le paragraphe 2.3.2 permettra notamment de constater l'effet régularisant d'un maillage grossier pour décrire le champ spatial recherché. Suivant les cas, la précision du champ identifié, en revanche, peut n'être que médiocre en raison du faible nombre de DDL mis en œuvre pour le décrire.

### Stratégie itérative fondée sur l'adaptation de maillage

Afin d'améliorer les résultats d'identification obtenus avec le maillage grossier  $\mathcal{M}_H$ , il semble naturel de chercher à raffiner progressivement ce dernier en utilisant les méthodes standards de maillage adaptatif. Nous choisissons ici comme critère de raffinement une **norme de type  $L^2$  du résidu  $r_H$  associé à l'équation (2.8c)** :

$$\eta_{L^2} = \sqrt{\sum_{e \in \mathcal{M}_H} H^4 \|r_H\|_e^2} \quad (2.9)$$

où  $H$  est une variable caractéristique de la taille locale du maillage  $\mathcal{M}_H$ . Par abus de notation, on ne mentionne que les résidus calculés sur l'élément  $e$ , mais, pour chacun d'entre eux, un terme similaire doit également être calculé sur chaque partie de la frontière  $\partial e$  de l'élément concerné.

**La forme de cet estimateur d'erreur repose sur une estimation de stabilité et une expression de l'erreur d'interpolation qui sont tous les deux classiques quand on ne considère que le problème direct (2.7a)**, comme montré par [Becker et Rannacher 1996]. Même si ces deux résultats ne sont pas acquis dans le cas de l'équation (2.8c), qui fait intervenir sur le maillage  $\mathcal{M}_H$  les solutions des problèmes direct (2.8a) et adjoint (2.8b) résolus sur le maillage  $\mathcal{M}_h$ , on verra sur les exemples des paragraphes 2.3 et 2.4 que ce choix conduit à des résultats satisfaisants.

En pratique, l'évaluation du résidu  $r_H$  de l'équation (2.8c) se fait en résolvant cette dernière sur un maillage s'appuyant sur les noeuds de  $\mathcal{M}_H$ , mais avec des fonctions de forme d'ordre supérieur. La contribution locale pour un élément est alors obtenue en moyennant sur l'élément les valeurs nodales associées à  $r_H$ . **Les éléments dont les contributions locales sont les plus élevées sont raffinés** : l'algorithme les choisit de telle façon qu'à chaque étape de raffinement, un nombre d'éléments égal à peu près aux trois quarts du nombre d'éléments du maillage courant soit ajouté au nouveau maillage.

Ainsi, **à chaque étape de raffinement, le système (2.8) est résolu par la méthode de Newton amortie évoquée plus haut, en prenant comme valeurs initiales pour les champs  $(u_h, z_h, p_H)$  les valeurs obtenues lors de l'étape précédente.** Les raffinements successifs cessent dès lors que l'erreur globale devient inférieure à un seuil fixé à l'avance, qui caractérise la qualité de la résolution de l'équation (2.8c), et donc la précision du champ identifié  $p_H$ .

[Bangerth 2002 - 2008] propose un autre choix d'estimateur d'erreur, basé sur ce que proposent [Becker *et al.* 2000] : ces derniers établissent un **majorant de l'erreur entre la fonction coût « fonctionnelle » et sa version discrétisée par EF**, et ce majorant fait intervenir des produits résidu  $\times$  erreur de discrétisation sur chaque élément  $e$  du maillage  $\mathcal{M}_h$  :

$$|\mathcal{J}(p) - \mathcal{J}(p_h)| \leq \sum_{e \in \mathcal{M}_h} \left( \|r_h^u\|_e \|z - i_h z\|_e + \|r_h^z\|_e \|u - i_h u\|_e + \|r_h^p\|_e \|p - i_h p\|_e \right) \quad (2.10)$$

où  $r_h^u$ ,  $r_h^z$  et  $r_h^p$  désignent les résidus associés aux équations (2.7a), (2.7b) et (2.7c) respectivement, et  $i_h$  désigne l'interpolation réalisée par les fonctions de forme du maillage  $\mathcal{M}_h$ . Toujours par abus de notation, on ne mentionne que les résidus calculés sur l'élément  $e$ . Quant aux termes d'erreurs de discrétisation, qui font intervenir les quantités fonctionnelles  $(u, z, p)$  forcément inconnues, plusieurs possibilités sont proposées dans [Becker et Rannacher 1996] pour les encadrer. De manière équivalente, [Beilina et Johnson 2005] proposent, pour un problème d'acoustique inverse, d'utiliser un majorant de l'erreur entre le lagrangien (2.4) et sa version discrétisée par EF.

Toutefois, [Bangerth 2008] estime que, **pour des problèmes complexes, l'emploi de l'estimateur (2.10) peut s'avérer délicat**, d'autant plus lorsque deux maillages différents sont utilisés (ce qui n'est pas le cas dans [Becker *et al.* 2000]). Dans ce cas, il remarque qu'**il peut être suffisant de lui substituer d'autres expressions, en rapport avec le problème traité**, comme par exemple la norme de la dérivée seconde de la solution  $u_h$  du problème direct, ou encore la norme du gradient du champ de propriétés  $p_H$ . C'est ce choix qui est appliqué dans [Bangerth et Joshi 2008] pour traiter le problème inverse de tomographie optique à fluorescence.

**En ce qui concerne les adaptations de maillages, [Bangerth 2002 - 2008] propose de les effectuer entre deux itérations de la méthode de Gauss-Newton**, lorsque l'une des deux situations suivantes est rencontrée : si l'on a eu une très forte réduction de la fonction coût, ou si au contraire l'algorithme semble stagner. Les deux maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$  sont alors localement raffinés, ou déraffinés, suivant les valeurs des indicateurs d'erreur qu'il a retenus. **Ce processus est plus économique en termes de coût de calcul que le choix que nous avons effectué**, où nous résolvons pour chacun des maillages  $\mathcal{M}_H^k$  successifs le système (2.8) par la méthode de Newton, le raffinement (qui ne porte d'ailleurs que sur  $\mathcal{M}_H$ ) étant effectué entre deux résolutions successives du système (2.8). Toutefois, c'est aussi pour des raisons d'implémentation sous le logiciel COMSOL que nous sommes arrivés à cette procédure. Les deux exemples des paragraphes 2.3 et 2.4 montreront que celle-ci est tout de même pertinente.

### 2.2.3 Extension : utilisation d'une erreur en quantité d'intérêt

Quel que soit l'estimateur d'erreur retenu parmi les possibilités évoquées dans le paragraphe 2.2.2, celui-ci ne porte pas directement sur l'estimation des paramètres à identifier. Ainsi, en ce qui concerne notre choix, il s'agit de raffiner les éléments du maillage  $\mathcal{M}_H$  qui contribuent le plus au non respect de la condition d'optimalité (2.8c) ; dans [Bangerth 2002 - 2008], l'utilisation de l'estimateur (2.10) permet de repérer les éléments de  $\mathcal{M}_H$  qui contribuent le plus à la « mauvaise » évaluation de la fonction coût discrétisée, par rapport à sa référence fonctionnelle. On ne raffine donc pas le maillage  $\mathcal{M}_H$  selon les valeurs d'un estimateur qui majorerait directement l'écart des paramètres  $p_H$  par rapport à  $p$ .

Ceci peut d'ailleurs être un inconvénient, car utiliser un indicateur lié au résidu de l'équation (2.8c) ou à l'estimation de la fonction coût a comme conséquence que, plus les itérations nous approchent de la solution du problème de minimisation, plus la fonction coût est proche de zéro : en conséquence, l'état adjoint et l'équation d'optimalité tendent progressivement vers zéro, entraînant non seulement un ralentissement de la convergence, mais aussi une difficulté d'interprétation des résultats associés à l'estimateur.

L'idée proposée dans [Becker et Vexler 2003 - 2005] est de définir une « quantité d'intérêt », fonction des paramètres à identifier, sur laquelle va porter l'estimation d'erreur *a posteriori*.

#### Erreur en quantité d'intérêt

Ce que l'on appelle « quantité d'intérêt » désigne en fait une fonction  $\mathcal{E}(p)$  qui peut être une **image plus ou moins directe des différents paramètres à identifier**, faisant éventuellement intervenir la solution  $u^p$  du problème direct (2.1). Ici, nous nous limiterons à une dépendance directe vis-à-vis des paramètres  $p$ , ce qui peut alors s'exprimer formellement comme :

$$\mathcal{E}(p) = \int_{\Omega} \langle \chi_{\Omega}, p \rangle_{\Omega} \quad (2.11)$$

où  $\chi_{\Omega}$  est une fonction qui dépend de l'espace, et qui joue le rôle d'une pondération dans la moyenne spatiale ainsi calculée, mais peut aussi servir d'extracteur local en permettant de ne sélectionner que la valeur de  $p$  en certains points donnés.

[Becker et Vexler 2003 - 2005] montrent que l'erreur en quantité d'intérêt peut s'écrire comme :

$$2(\mathcal{E}(p) - \mathcal{E}(p_h)) = (\hat{z} - i_h \hat{z})r_h^u + (\hat{u} - i_h \hat{u})r_h^z + (z - i_h z)r_h^{\hat{u}} + (u - i_h u)r_h^{\hat{z}} \\ + (\hat{p} - i_h \hat{p})r_h^p + (p - i_h p)r_h^{\hat{p}} + R \quad (2.12)$$

où  $R$  est un terme qui, en pratique, peut être négligé, et les termes  $r_h^u, r_h^z, r_h^p$  sont les résidus des équations (2.7a), (2.7b) et (2.7c) respectivement. Par ailleurs, cet estimateur fait intervenir les quantités  $(\hat{u}_h, \hat{z}_h, \hat{p}_h)$  solutions du système :

$$\nabla_u a(u_h, p_h)(\hat{u}_h, v_h) + \nabla_p a(u_h, p_h)(\hat{p}_h, v_h) \quad (2.13a)$$

$$= 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_{0,h}$$

$$\nabla_{uu}^2 a(u_h, p_h)(\hat{u}_h, z_h, v_h) + \nabla_u a(u_h, p_h)(\hat{z}_h, v_h) + \nabla_{up}^2 a(u_h, p_h)(z_h, \hat{p}_h, v_h) \quad (2.13b)$$

$$= \langle \nabla_{uu}^2 \mathcal{D}(u_h)(\hat{u}_h, v_h), \mathcal{D}(u_h) \rangle_{\Sigma} + \langle \nabla_u \mathcal{D}(u_h)(\hat{u}_h), \nabla_u \mathcal{D}(u_h)(v_h) \rangle_{\Sigma} \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_{0,h}$$

$$\nabla_{up}^2 a(u_h, p_h)(\hat{u}_h, z_h, \delta p_h) + \nabla_p a(u_h, p_h)(\hat{z}_h, \delta p_h) + \nabla_{pp}^2 a(u_h, p_h)(z_h, \hat{p}_h, \delta p_h) \quad (2.13c) \\ = \nabla_p \mathcal{E}(p_h)(\delta p_h) \quad \forall \delta p_h \in \partial \mathcal{P}_h$$

et les résidus  $r_h^{\hat{u}}, r_h^{\hat{z}}, r_h^{\hat{p}}$  des équations (2.13a), (2.13b) et (2.13c) respectivement. De manière évidente, les termes  $\nabla_{\bullet\bullet}^2 a(u_h, p_h)$  désignent les dérivées directionnelles d'ordre deux de  $a$  en  $(u_h, p_h)$  par rapport aux variables en indices. Par ailleurs, les termes d'erreurs de discrétisation, faisant intervenir dans l'estimateur (2.12) les quantités  $(u, z, p, \hat{u}, \hat{z}, \hat{p})$ , peuvent toujours être estimés grâce aux techniques proposées dans [Becker et Rannacher 1996].

**Ce système (2.13) est en fait obtenu par dualité du premier système (2.7)**, en écrivant la stationnarité d'un nouveau lagrangien  $\hat{\mathcal{L}}(u_h, p_h, z_h, \hat{u}_h, \hat{p}_h, \hat{z}_h)$  défini comme :

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{E}(p_h) + \nabla_u \mathcal{L}(u_h, p_h, z_h) \hat{u}_h + \nabla_p \mathcal{L}(u_h, p_h, z_h) \hat{p}_h + \nabla_z \mathcal{L}(u_h, p_h, z_h) \hat{z}_h \quad (2.14)$$

**Les quantités  $(\hat{u}_h, \hat{z}_h, \hat{p}_h)$  sont donc les multiplicateurs de Lagrange associés à la stationnarité du lagrangien initial (2.4)**, qui s'exprimait sous la forme du système (2.7). La résolution de ce dernier est donc assurée rigoureusement, et la démarche adoptée semble donc tout à fait naturelle, vu qu'elle revient à mettre en place une estimation d'erreur *a posteriori* à propos d'un problème avec contraintes. Il est également intéressant de constater que le système dual (2.13) fait intervenir les dérivées secondes  $\nabla_{\bullet\bullet}^2 a(u_h, p_h)$ , qui constituent une description du problème plus riche que les seules dérivées premières intervenant dans le système primal (2.7).

### Mise en œuvre

[Becker et Vexler 2003 - 2005] résolvent les deux systèmes d'équations (2.7)-(2.13) de façon à obtenir l'estimateur d'erreur qui pilote le raffinement du maillage  $\mathcal{M}_h$ . Ainsi, **la solution adjointe  $\hat{z}_h$  du problème dual, qui vérifie l'équation (2.13b), ne tend pas vers zéro quand on se rapproche du minimum de la fonction coût**, vu la forme du second membre de cette équation. Suivant le choix de la quantité d'intérêt, on a donc un contrôle plus ou moins direct de l'erreur sur les paramètres à identifier.

**Nous étendons ici cette proposition à l'utilisation de deux maillages différents**, comme précédemment : un maillage fin  $\mathcal{M}_h$  pour la résolution des problèmes directs (2.7a)-(2.13a) et adjoints (2.7b)-(2.13b) des deux systèmes considérés, et un maillage initialement grossier  $\mathcal{M}_H$  pour la discrétisation des deux équations d'optimalité (2.7c)-(2.13c). Pour des raisons d'implémentation, **nous choisissons comme précédemment de piloter le raffinement de maillage par la norme (2.9) de type  $L^2$ , mais en considérant cette fois-ci le résidu  $\hat{r}_H$  de l'équation d'optimalité duale (2.13c)**. Un exemple de résultat associé à cette formulation est proposé dans le paragraphe 2.3.2.

## 2.3 Identification de cavités souterraines à l'aide de mesures d'interférométrie radar

Ce premier exemple correspond à des travaux entrepris avec Denis Aubry, à la suite du mémoire de thèse [Pham 2006], qui concernait la question de la surveillance d'une ancienne mine de sel à l'aide de mesures d'interférométrie radar (thèse en collaboration avec le BRGM). La reprise du contexte de cet exemple a permis d'éprouver la stratégie décrite dans le paragraphe 2.2 sur la thématique de la détection de cavités souterraines, et a donné lieu à de nombreuses communications, [Puel et Aubry 2006 - 2007b], et [Puel et Aubry 2007a, Puel *et al.* 2007, Puel et Aubry 2008 - 2011d], ainsi qu'à un article dans la revue *International Journal for Numerical Methods in Mechanical Engineering*, [Puel et Aubry 2011].



### 2.3.1 Présentation du problème

#### Contexte

Comme précisé ci-dessus, le contexte de cette étude provient d'un problème réel associé à la **surveillance d'une ancienne mine de sel** à Vauvert, dans le Gard, et détaillé dans [Raucoules *et al.* 2003] ; situé à une profondeur comprise entre 1900 m et 2800 m, ce qui n'est plus qu'un ensemble de cavernes remplies de saumure se déforme progressivement sous l'action du poids des couches supérieures. La problématique de la surveillance consiste donc à être capable d'identifier l'évolution de la géométrie de ces cavités au cours du temps.

De ce problème initial, nous avons souhaité conserver la **problématique de la détection d'une cavité**, indépendamment de toute connaissance *a priori* de sa localisation. Même s'il aurait été possible de formuler le problème inverse comme l'identification de la forme d'un défaut, en choisissant parmi un certain nombre de méthodes que nous avons déjà évoquées dans la première partie du paragraphe 2.1.2, nous préférons le poser ici comme la **détermination du champ spatial de module de Young**, ce qui est en accord avec le fil conducteur de ce chapitre.

#### Données expérimentales

Les données expérimentales qui peuvent être utilisées dans le cadre de ce problème sont de type **mesures de champs** et proviennent en pratique d'un **dispositif d'interférométrie radar embarqué sur un satellite**. Ce dernier, par passages successifs au-dessus de la zone à surveiller, permet de déterminer le déplacement des points de la surface du sol entre deux acquisitions. Cette technique expérimentale d'interférométrie radar (*interferometric synthetic aperture radar* ou InSAR), décrite dans [Raucoules *et al.* 2003], permet de connaître le champ de déplacement sur une grille de résolution d'environ une dizaine de mètres, et avec une précision allant jusqu'au millimètre, aussi bien pour la composante horizontale que verticale, d'après une étude de [Ferretti *et al.* 2007].

C'est ce type de mesures que nous souhaitons utiliser pour notre problème de détection de cavités souterraines. Si l'on suppose qu'aucune cavité n'était présente au-dessous de la zone surveillée lors de la première acquisition réalisée, le déplacement mesuré  $\Delta \mathbf{u}_{exp}$  entre les deux acquisitions successives est alors causé par la création d'une ou plusieurs cavités dans le sous-sol. Compte tenu de la résolution spatiale évoquée, **nous considérons par la suite que le champ expérimental  $\Delta \mathbf{u}_{exp}$  est continu** ; sur le plan numérique, cette hypothèse sera valide dès lors que le maillage de la surface du sol est plus grossier que la base de mesure expérimentale.

#### Problème direct

Compte tenu de la façon dont nous avons envisagé le problème de détection de cavité, le problème direct est piloté par le champ spatial de module de Young noté  $E$ , élément d'un espace  $\mathcal{P}$ , et qui dépend de la variable d'espace  $\mathbf{x} \in \Omega$  (où  $\Omega$  désigne la portion de sol considérée). On suppose que la surface du sol est la zone  $\Sigma \subset \partial\Omega$  où sont mesurées les données expérimentales, et que cette zone est libre d'efforts. Sur la partie complémentaire de la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ , on fait l'hypothèse, *a priori* non restrictive, que le déplacement est nul. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , solution du problème direct, vérifie alors :

$$\int_{\Omega} \text{tr} [E \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{v})] d\Omega + \int_{\Omega} \rho g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \quad (2.15)$$

avec  $\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma\}$  (où l'on remarque d'ailleurs que  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0$ ). Tandis que  $\text{tr}$  et  $\varepsilon(\mathbf{u})$  désignent respectivement la trace et le tenseur des petites déformations, l'action de la pesanteur s'écrit en un point comme  $-\rho g \mathbf{e}_z$  (masse volumique  $\rho$ , accélération de la pesanteur  $g$  et vecteur unitaire vertical ascendant  $\mathbf{e}_z$ ).

Le fait de paramétrer le problème par le module de Young  $E$  fait apparaître dans l'équation (2.15) le tenseur d'élasticité « normalisé »  $\mathcal{C}_0$ , qui relie le champ de contraintes  $\sigma$  au champ de déformations  $\varepsilon(\mathbf{u})$  avec la relation  $\sigma = E \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}) = E (\bar{\lambda}(\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}))I + 2\bar{\mu} \varepsilon(\mathbf{u}))$ , où  $\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$  et  $\bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)}$  sont les coefficients de Lamé « normalisés » ( $\nu$  désignant le coefficient de Poisson).

On note  $E_0$  le champ spatial de module de Young associé au sol sans cavité. On suppose qu'il est connu préalablement à l'étude, par une connaissance géologique du terrain, ou suite à différents sondages. Dans la suite, on envisagera le cas d'un sol homogène, où  $E_0$  est donc constant, mais ceci n'est pas restrictif, et on pourrait considérer par exemple que  $E_0$  est constant par morceaux, ce qui correspond au cas d'un sous-sol constitué de couches homogènes. De la même façon, on suppose que l'on connaît le coefficient de Poisson  $\nu_0$  et la masse volumique  $\rho_0$  du sol initial.

Ces trois champs  $(E_0, \nu_0, \rho_0)$  permettent de déterminer le tassement initial de la surface du sol, dû uniquement à l'action de la pesanteur. **Ce tassement calculé est ajouté au champ de déplacement mesuré  $\Delta \mathbf{u}_{exp}$  afin de créer la quantité  $\mathbf{u}_{exp}$ , qui tient donc compte à la fois de l'action de la pesanteur et de la création d'une ou plusieurs cavités.** Cette quantité peut alors être directement comparée à la solution  $\mathbf{u}$  du problème direct (2.15).

### Formulation du problème inverse

Le problème inverse consiste à **déterminer le champ spatial de module de Young  $E$  minimisant la fonction coût** définie de façon classique par :

$$\mathcal{J}(E) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \|\mathbf{u}^E - \mathbf{u}_{exp}\|^2 d\Sigma + \int_{\Omega} \mathcal{R}(E) d\Omega \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{u}^E$  vérifie le problème direct (2.15). Comme il s'agit de la détermination d'un champ spatial, le terme de régularisation  $\mathcal{R}(E)$  peut dépendre directement de  $E$ , ou bien de son gradient spatial  $\nabla E$ . Le choix final de ce terme sera précisé sur l'exemple du paragraphe 2.3.2.

Comme précisé dans le paragraphe 2.2.1, la minimisation de  $\mathcal{J}$  passe par la résolution d'un problème adjoint vérifiant :

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{exp}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Sigma - \int_{\Omega} \text{tr} [E \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{z}) \varepsilon(\delta \mathbf{u})] d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}_0 \quad (2.17)$$

Comme le tenseur d'élasticité  $\mathcal{C}_0$  est symétrique, **l'état adjoint vérifie une formulation qui est similaire à celle du problème direct (2.15)**, excepté la condition limite sur  $\Sigma$  qui fait intervenir l'écart entre les déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}_{exp}$ . Le gradient de la fonction coût peut alors s'exprimer comme :

$$\nabla_E \mathcal{J}(E) \delta E = \int_{\Omega} (\nabla_E \mathcal{R}(E) - \text{tr} [\mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{z})]) \delta E d\Omega \quad \forall \delta E \in \partial \mathcal{P} \quad (2.18)$$

### Problème EF à résoudre

Une fois discrétisé sur les deux maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$ , le problème consiste à déterminer les champs  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h, E_H) \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{P}_H$  tels que :

$$\int_{\Omega} \text{tr} [\Pi_h^H E_H \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h)] d\Omega + \int_{\Omega} \rho_0 g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_h d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.19a)$$

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{exp}) \cdot \mathbf{v}_h d\Sigma - \int_{\Omega} \text{tr} [\Pi_h^H E_H \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{z}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h)] d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.19b)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla_E \mathcal{R}(E_H) - \text{tr} [\mathcal{C}_0 \varepsilon(\Pi_H^h \mathbf{u}_h) \varepsilon(\Pi_H^h \mathbf{z}_h)]) \delta E_H d\Omega = 0 \quad \forall \delta E_H \in \partial \mathcal{P}_H \quad (2.19c)$$

où  $\mathcal{V}_{0,h}$  et  $\mathcal{P}_H$  sont respectivement associés aux maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$ . La stratégie est ensuite appliquée comme ce qui est indiqué dans le paragraphe 2.2.2.

### 2.3.2 Résultats de l'identification de cavités sur un problème 2D

Nous nous intéressons ici à l'exemple de la détection d'une cavité souterraine dans un domaine de sol bidimensionnel, à partir de mesures synthétiques. Nous précisons également que la stratégie d'identification a pu être appliquée dans un cadre tridimensionnel dans [Puel et Aubry 2011], sans difficulté notable.

#### Définition du problème et des données synthétiques utilisées

L'exemple étudié concerne un domaine  $\Omega$ , de forme rectangulaire (de largeur 10 km et de profondeur 5 km), supposé formé d'une seule couche de sol homogène de caractéristiques  $E_0 = 60$  GPa,  $\nu_0 = 0,25$  et  $\rho_0 = 2600$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ . Pour pouvoir apprécier les résultats de l'identification, **des données synthétiques sont créées à l'aide d'une résolution du problème direct sur un maillage très fin  $\mathcal{M}_{hh}$**  : une cavité est introduite dans le sol sous la forme d'un domaine  $\Omega_c$  de forme elliptique (de demi-axes 1000 km et 500 km), dont les propriétés sont homogènes :  $E_c = 0,6$  GPa,  $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_0$  et  $\rho_c = \rho_0$ . Cette cavité est située profondément dans le sous-sol (entre 3 et 4 km de profondeur, en accord avec le cas de l'ancienne mine de Vauvert), ce qui rend *a priori* délicat le problème de sa détection à partir de données en surface. Ces données synthétiques  $\mathbf{u}_{exp}$  que nous utiliserons pour détecter la cavité sont ainsi issues de :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \Omega_c} \text{tr} [E_0 \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}_{exp}) \varepsilon(\mathbf{v}_{hh})] d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Omega_c} \rho_0 g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{hh} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_c} \text{tr} [E_c \mathcal{C}_c \varepsilon(\mathbf{u}_{exp}) \varepsilon(\mathbf{v}_{hh})] d\Omega + \int_{\Omega_c} \rho_c g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}_{hh} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{hh} \in \mathcal{V}_{0,hh} \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{V}_{0,hh}$  est associé au maillage  $\mathcal{M}_{hh}$ . Il est important de noter que ce maillage ne sera plus utilisé dans la suite pour résoudre les problèmes direct (2.19a) et adjoint (2.19b), de façon à éviter d'effectuer un « crime inverse », d'après la terminologie introduite par [Colton et Kress 1998].

#### Choix du terme de régularisation

Préalablement à l'utilisation de la stratégie décrite dans le paragraphe 2.2.2, il est important de choisir le terme de régularisation qui sera le plus efficace pour la résolution du problème inverse. Trois possibilités nous sont apparues :

- **une régularisation « classique », d'après [Tikhonov 1977]** :  $\mathcal{R}(E) = \frac{\alpha}{2}|E - E_0|^2$ , où l'on rappelle que  $E_0$  correspond au module de Young homogène du sol sans cavité ;  $\alpha$  reste une constante à fixer judicieusement ;
- **une régularisation portant sur le carré de la norme euclidienne du gradient du champ recherché** :  $\mathcal{R}(E) = \frac{\beta}{2}\|\nabla E\|^2$ , avec  $\beta$  une constante à fixer ; pour simplifier, nous appellerons dans la suite ce terme « régularisation basée sur le gradient » ;
- **une régularisation portant sur la norme euclidienne du gradient du champ recherché, appelée « variation totale »** (*total variation* ou TV) :  $\mathcal{R}(E) = \gamma\|\nabla E\|$  ; toutefois, comme ce terme n'est pas dérivable en zéro, on préfère souvent substituer le terme suivant à la norme TV :  $\mathcal{R}(E) = \gamma\sqrt{\|\nabla E\|^2 + \eta^2}$ , où  $\gamma$  et  $\eta$  sont des constantes à fixer.

Pour trancher entre ces trois possibilités, **une étude a été menée dans [Puel et Aubry 2011] sur le réglage des paramètres de régularisation respectifs ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\eta$ )** pour voir l'influence des valeurs fixées sur le résultat de l'identification. Nous nous sommes abstenus, dans cette étude, d'appliquer la stratégie avec maillages adaptatifs, et n'avons donc considéré qu'un seul maillage  $\mathcal{M}_h$ . De plus, **la robustesse du choix des valeurs des paramètres de régularisation a été éprouvée en ajoutant un bruit gaussien** conséquent (centré, d'écart type égal à 5 cm) aux données synthétiques.

En résumé, nous pouvons dire que **la régularisation classique n'a pas été retenue** car, quelle que soit la valeur de  $\alpha$ , il n'était pas possible de parvenir à une solution satisfaisante du problème inverse, ce à quoi on pouvait s'attendre vu que cette régularisation tend à chercher un champ proche de celui du sol sans cavité. Les deux autres choix ont ainsi l'avantage de ne pas imposer de valeur *a priori* pour le champ  $E$  identifié, mais cherchent simplement à limiter ses oscillations spatiales. **Tandis que la régularisation basée sur le gradient tend à lisser le champ spatial identifié, la régularisation basée sur la norme TV est plus propice à garder les contrastes**, tout en évitant les oscillations, ce qui la rend très prisée dans les problèmes d'imagerie : c'est d'ailleurs ce constat qui est fait par [Rudin *et al.* 1992]. De même, [Epanomeritakis *et al.* 2008] soulignent que cette régularisation agit comme un opérateur de diffusion non linéaire qui peut lisser les paramètres de Lamé le long des interfaces, tout en rendant possible des sauts de valeurs à leur traversée ; au contraire, loin des interfaces, le comportement redevient isotrope.

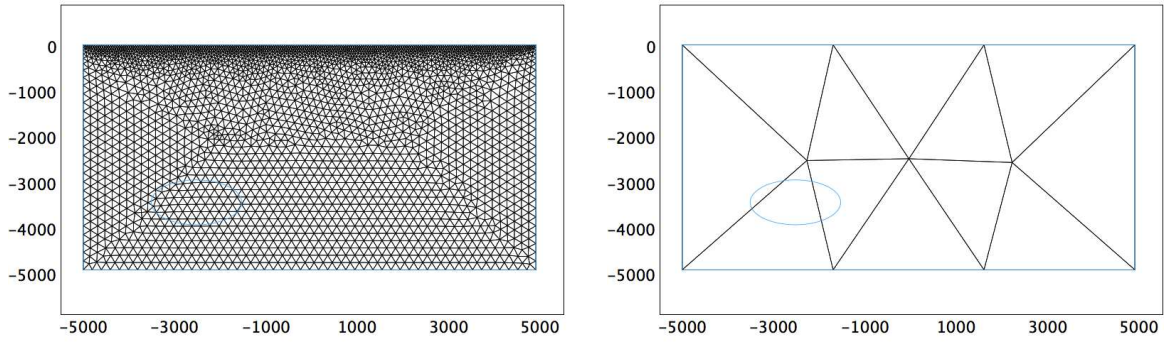
Toutefois, en dépit de ces dernières remarques, **notre choix final s'est finalement porté sur la régularisation basée sur le gradient en raison de la plus grande robustesse du choix du paramètre  $\beta$  en présence de données bruitées** (par l'application du critère de [Morozov 1984]). En cela, nous rejoignons d'ailleurs les conclusions de [Ascher et Haber 2001] qui préfèrent également éviter l'utilisation, jugée trop délicate, de la norme TV ; ces difficultés sont confirmées par [Epanomeritakis *et al.* 2008] qui, pour l'adopter, ont recours à un préconditionneur spécifique, détaillé dans [Biros et Ghattas 2005b]. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Puel et Aubry 2011]. Ainsi, l'équation (2.19c) se réécrit comme :

$$-\int_{\Omega} \text{tr} [\mathcal{C}_0 \varepsilon(\Pi_H^h \mathbf{u}_h) \varepsilon(\Pi_H^h \mathbf{z}_h) \delta E_H] \, d\Omega + \int_{\Omega} \beta \nabla E_H \cdot \nabla \delta E_H \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta E_H \in \partial \mathcal{P}_H \quad (2.21)$$

**D'autres possibilités de régularisation seraient envisageables** : ainsi, [Bangerth et Joshi 2008], qui préfèrent adopter une régularisation « classique », pensent que ce terme ne doit pas être vu comme un moyen d'injecter de l'information *a priori* dans le problème inverse ; ils le complètent donc avec une stratégie qui consiste à borner les valeurs que peut prendre le champ à identifier, à l'aide d'une méthode de type *active set*, comme décrit dans [Bangerth 2008].

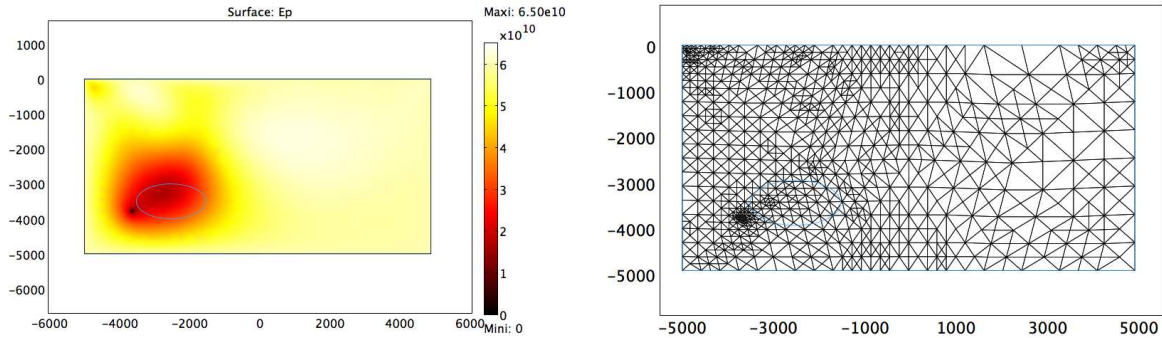
### Application de la stratégie itérative

Le système d'équations (2.19) est résolu à l'aide des maillages représentés sur la figure 2.1 : le maillage fin  $\mathcal{M}_h$ , pour la résolution des problèmes direct (2.19a) et adjoint (2.19b), comprend environ 6000 éléments triangulaires quadratiques (figure 2.1(a)), tandis que le maillage grossier  $\mathcal{M}_H^0$ , pour la discrétisation du champ spatial recherché, ne comporte initialement que 12 éléments triangulaires linéaires (figure 2.1(b)). Dans les deux cas, on a fait figurer sur les maillages la forme elliptique de la cavité introduite pour le calcul (2.20) des données synthétiques.



(a) Maillage fin  $\mathcal{M}_h$  (problèmes direct et adjoint). (b) Maillage grossier  $\mathcal{M}_H^0$  (équation d'optimalité).

**Figure 2.1** – Maillages utilisés pour la stratégie de détection de cavité (cas 2D) [Puel et Aubry 2011].



(a) Champ spatial de module de Young identifié.

(b) Maillage final  $\mathcal{M}_H^6$ .

**Figure 2.2** – Résultat de la stratégie de détection de cavité après 6 étapes de raffinement (cas 2D) [Puel et Aubry 2011].

La figure 2.2(a), quant à elle, présente le champ spatial de module  $E_H$  identifié après 6 étapes, au cours desquelles le maillage grossier initial  $\mathcal{M}_H^0$  a été raffiné 6 fois pour devenir le maillage  $\mathcal{M}_H^6$ . **On constate une détection correcte de la cavité, même si, comme on l'attendait, le champ identifié est lissé de manière sensible.** Un indicateur que l'on peut utiliser pour estimer l'erreur commise est la norme  $L^2$  sur  $\Sigma$  de l'écart données synthétiques – déplacement calculé (divisée par la norme  $L^2$  des données synthétiques, afin d'obtenir une quantité relative) : dans le cas présent, cet indicateur vaut  $e_\Sigma = 0,235\%$ , alors qu'il vaut  $e_\Sigma = 19,0\%$  si on fait l'hypothèse d'un sol sans cavité. Enfin, la figure 2.2(b) permet de constater que **les différents raffinements ont majoritairement eu lieu dans le voisinage de la cavité recherchée**, ce qui confirme la validité de la démarche.

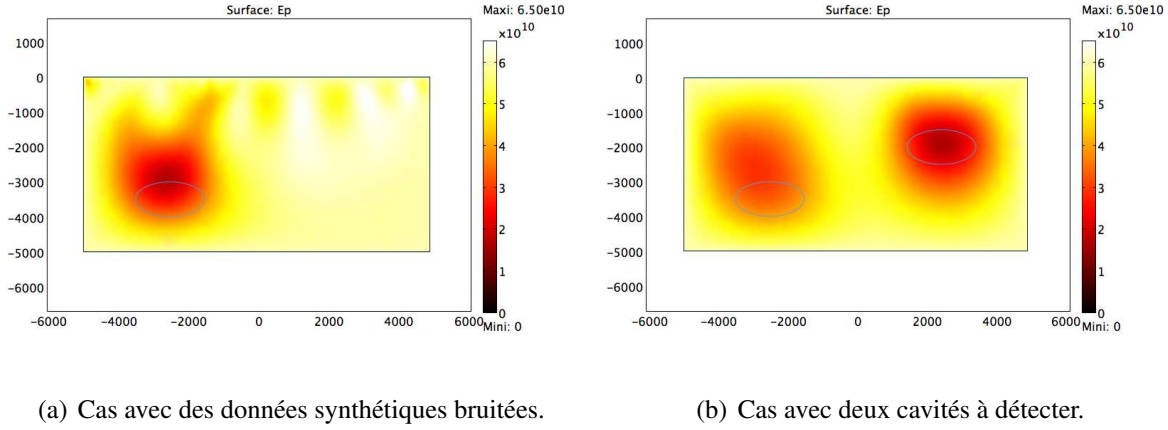
En complément de ce résultat, il est intéressant de noter l'**effet régularisant offert par cette stratégie adaptative**. En effet, lors de la première résolution du système (2.19) à l'aide des maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H^0$ , et quelle que soit la valeur (strictement positive) adoptée pour le paramètre de régularisation  $\beta$ , on parvient à déterminer un champ  $E_H$ , même si celui-ci est évidemment très grossier. Ceci rejoint le commentaire, énoncé dans le paragraphe 2.1.1 et dans [Engl *et al.* 1996], de la régularisation par projection, où, **en réduisant le nombre de DDL à identifier, on parvient à améliorer considérablement la résolution du problème inverse**. Cela aurait été le cas ici si, au lieu de chercher un champ spatial quelconque, on avait cherché la cavité directement sous la forme d'une ellipse de module de Young homogène, égal à  $E_c$  : la recherche aurait alors consisté à déterminer la position et la taille de cette ellipse. Une telle démarche nécessite évidemment une forte connaissance *a priori* de la cavité à identifier, qui est malheureusement rarement disponible. L'utilisation du maillage grossier  $\mathcal{M}_H^0$  est donc un moyen de se passer de ces informations *a priori*, et **l'adaptation de maillage permet alors dans un deuxième temps d'affiner le champ spatial identifié**. De manière similaire, [Ascher et Haber 2001] utilisent des grilles de pas grossiers qu'ils raffinent progressivement, et font les mêmes constatations, même s'ils utilisent la même grille pour résoudre le problème direct et discrétiser le champ spatial recherché.

Enfin, **le fait d'augmenter progressivement le nombre de DDL à identifier est un moyen de rétablir une certaine unicité du problème inverse**, puisque commencer par un maillage grossier nous place d'emblée dans le bassin d'attraction du minimum local le plus proche. Pour peu que le maillage grossier initial  $\mathcal{M}_H^0$  soit pertinent, on peut même s'attendre à être situé dans celui du minimum global recherché, ce qui est manifestement le cas ici. C'est l'optique également adoptée dans [Epanomeritakis *et al.* 2008] dont la méthode, même si elle n'est pas basée sur des techniques d'adaptation de maillages et les estimateurs d'erreur associés, consiste à mettre en place une approche multigrille, proposée initialement par [Bunks *et al.* 1995], et la technique du « saut de fréquence », pour se placer d'office dans le bassin d'attraction du minimum global.

**Quelques résultats complémentaires permettent de constater la robustesse de la stratégie employée.** Dans un premier temps, les données synthétiques  $\mathbf{u}_{exp}$  sont perturbées par un bruit gaussien centré, d'écart type 50 cm : celui-ci est volontairement très fortement surestimé afin de pouvoir juger de la capacité d'identification du module de Young. Finalement, la figure 2.3(a) présente le champ spatial identifié après 6 étapes de raffinement : la détection reste satisfaisante, même si le champ déterminé semble encore un peu plus diffus que celui de la figure 2.2(a). On peut noter également que le maillage  $\mathcal{M}_H^6$  associé a tendance à être plus fin au niveau de la surface du sol que celui obtenu sur la figure 2.2(b), mais ceci ne perturbe manifestement pas le champ spatial identifié. Ainsi, **malgré l'utilisation de données fortement corrompues, la stratégie d'identification semble avoir assuré un filtrage satisfaisant**, même si cela a eu pour conséquence de lisser fortement la solution.

Dans un second temps, de nouvelles données synthétiques  $\mathbf{u}_{exp,2}$  ont été calculées, en supposant cette fois-ci que deux cavités sont présentes dans le sous-sol : la première, identique à celle du cas traité précédemment, et la deuxième, de même dimension, située beaucoup plus près de la surface. Le champ de module de Young identifié après 6 étapes de raffinement est représenté sur la figure 2.3(b) : on constate que **les deux cavités ont été effectivement détectées** (les deux ellipses représentant leurs étendues théoriques respectives étant également tracées). Toutefois, la cavité la plus profonde n'est pas déterminée de façon très précise, le lissage du champ identifié étant plus accentué vraisemblablement en raison de l'influence de la cavité la plus proche

de la surface. **Cet exemple permet tout de même de constater la robustesse de la stratégie, notamment par rapport à une approche avec connaissance *a priori* de la solution** : en effet, si l'on s'était contenté, dans le cas présent, de chercher la cavité sous la forme d'une simple ellipse, ceci n'aurait pas permis d'aboutir.



**Figure 2.3** – Deux cas supplémentaires de la stratégie de détection de cavité (2D) : champ spatial de module de Young identifié après 6 étapes de raffinement [Puel et Aubry 2011].

### Utilisation d'un terme de régularisation « adaptatif »

**Pour essayer de réduire l'effet « lissant » du terme de régularisation basé sur le gradient, nous avons essayé de faire en sorte que l'influence de ce terme puisse décroître au fur et à mesure des étapes de raffinement** : ainsi, autant il est important dans les premières étapes que la régularisation soit suffisante pour pouvoir aboutir à une solution (même grossière, compte tenu de l'utilisation du maillage  $\mathcal{M}_H$ ), autant cette régularisation peut être quelque peu « relâchée » dès lors que les différentes étapes ont conduit à des solutions qui semblent se situer dans le bassin d'attraction du minimum recherché.

Cette idée peut se retrouver par exemple dans la régularisation « évanescence » proposée par [Cimetière *et al.* 2000] : la résolution du problème inverse consiste en plusieurs minimisations successives, mais au lieu du terme classique d'après [Tikhonov 1977], on utilise dans la fonctionnelle à minimiser la norme de l'écart entre la solution à l'itération  $p - 1$  et celle en cours de détermination à l'itération  $p$ , ce terme tendant progressivement vers zéro. Ici, **nous avons voulu profiter de l'adaptation du maillage  $\mathcal{M}_H$  pour obtenir cette décroissance**, et nous avons donc proposé le terme de régularisation suivant, qualifié d'« adaptatif » :

$$\mathcal{R}(E) = \frac{\beta(H)}{2} \|\nabla E\|^2 \quad (2.22)$$

où le paramètre de régularisation  $\beta$  devient une fonction de la taille locale du maillage  $\mathcal{M}_H$  de discrétisation du champ recherché, définie comme suit :

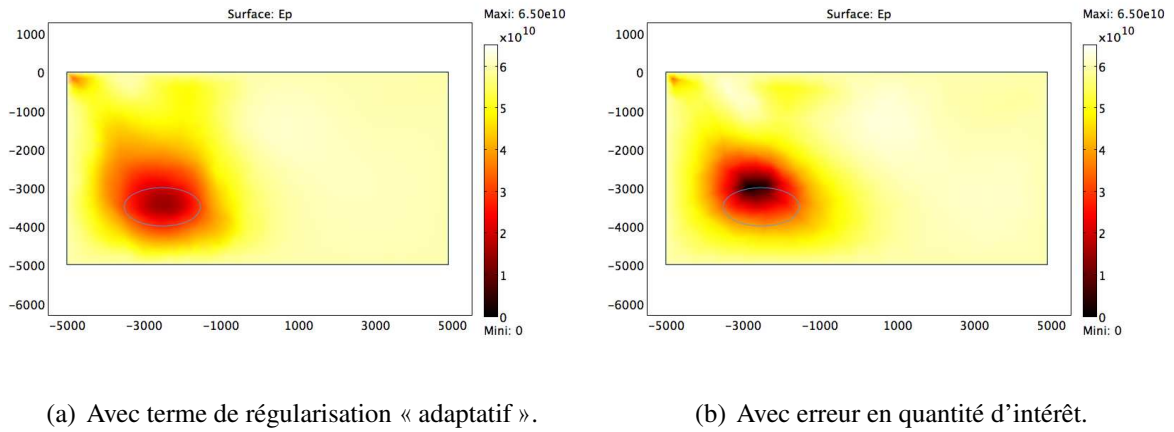
$$\beta(H) = \frac{\|\mathbf{u}_{exp}\|_\infty^2 |\Sigma|}{|E_0|^2 |\Omega|} H^2 \quad (2.23)$$

où  $|\Sigma|$  et  $|\Omega|$  désignent respectivement l'aire de la surface du sol et le volume de sol considéré.

Ainsi définie,  $\beta(H)$  permet d'assurer une forte régularisation quand les éléments de  $\mathcal{M}_H$  sont grands, et voit son effet se réduire (tout du moins localement) au fil des étapes de raffinement du maillage  $\mathcal{M}_H$ . La forme retenue pour  $\beta(H)$  peut se justifier de façon empirique : si l'on estime que, une fois la fonction coût (2.16) minimisée, les deux termes qui la composent ont le même ordre de grandeur, ceci revient à dire que **le gradient de champ spatial autorisé localement est d'environ  $E_0/H$** .

La figure 2.4(a) présente les résultats de l'identification avec le terme de régularisation « adaptatif » : **le champ spatial identifié montre une très bonne détection de la cavité, et est sensiblement moins diffus** que celui de la figure 2.2(a), signe que la régularisation s'est faite moins fortement. De plus, l'indicateur d'erreur introduit précédemment vaut  $e_\Sigma = 0,170\%$ , au lieu de  $e_\Sigma = 0,235\%$  obtenu initialement avec la régularisation « standard », pour des maillages  $\mathcal{M}_H^6$  de tailles équivalentes dans les deux cas : ceci permet de confirmer quantitativement l'impression visuelle laissée par le champ identifié.

Une idée similaire se retrouve dans [Bangerth et Joshi 2008], vu que les auteurs choisissent un paramètre de régularisation qui peut évoluer au fur et à mesure des itérations : un critère heuristique basé sur les ordres de grandeur respectifs dans la fonction coût entre les termes d'écart et de régularisation permet de le faire diminuer progressivement.



**Figure 2.4** – Deux extensions de la stratégie de détection de cavité : champ spatial de module de Young identifié après 6 étapes de raffinement [Puel et Aubry 2011].

### Extension utilisant l'erreur en quantité d'intérêt

Nous souhaitons mettre en pratique sur l'exemple l'extension reposant sur le concept d'erreur en quantité d'intérêt, qui a été exposé dans le paragraphe 2.2.3. Dans le cas présent, nous choisissons comme quantité d'intérêt :

$$\mathcal{E}(E) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} E \, d\Omega \quad (2.24)$$

qui n'est, ni plus ni moins, que la **valeur moyenne du champ de module de Young** sur le domaine  $\Omega$ . L'intérêt de cette quantité réside dans le fait qu'elle ne tendra pas vers zéro au fur et à mesure des étapes de raffinement ; de plus, elle permet d'accéder à une estimation de la taille de la cavité.



En reprenant les équations (2.13) du problème dual introduit dans le paragraphe 2.2.3, et après discrétisation sur les maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$ , on obtient le système d'équations suivant :

$$-\int_{\Omega} \text{tr} \left[ \Pi_h^H \hat{E}_H C_0 \varepsilon(\mathbf{u}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \text{tr} \left[ \Pi_h^H E_H C_0 \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h) \right] d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.25a)$$

$$-\int_{\Omega} \text{tr} \left[ \Pi_h^H \hat{E}_H C_0 \varepsilon(\mathbf{z}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \text{tr} \left[ \Pi_h^H E_H C_0 \varepsilon(\hat{\mathbf{z}}_h) \varepsilon(\mathbf{v}_h) \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}_h d\Sigma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_{0,h} \quad (2.25b)$$

$$-\int_{\Omega} \text{tr} \left[ C_0 \Pi_H^h \varepsilon(\hat{\mathbf{u}}_h) \Pi_H^h \varepsilon(\mathbf{z}_h) + C_0 \Pi_H^h \varepsilon(\mathbf{u}_h) \Pi_H^h \varepsilon(\hat{\mathbf{z}}_h) \right] \delta E_H d\Omega + \int_{\Omega} \beta(H) \nabla \hat{E}_H \cdot \nabla \delta E_H d\Omega = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \delta E_H d\Omega \quad \forall \delta E_H \in \partial \mathcal{P}_H \quad (2.25c)$$

où  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h, E_H) \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{P}_H$  sont les solutions du problème primal (2.19). L'ensemble des deux problèmes primal (2.19) et dual (2.25) est une nouvelle fois résolu de façon monolithique par une méthode de Newton amortie. De plus, les raffinements successifs de  $\mathcal{M}_H$  sont pilotés par l'estimateur d'erreur  $L^2$  associé au résidu de l'équation (2.25c).

La figure 2.4(b) présente le champ spatial identifié après 6 étapes de raffinement : la détection de la cavité est bonne, même si la profondeur de celle-ci est légèrement sous-estimée. **L'indicateur d'erreur montre qu'il s'agit de la meilleure solution de tous les cas étudiés** ( $e_{\Sigma} = 0, 106\%$ ). Il faut d'ailleurs noter que le champ identifié est moins lissé qu'auparavant : ceci est dû à l'expression de la fonction  $\beta(H)$ , qui a pu être choisie 10 fois plus petite que la valeur proposée par la relation (2.23). **Ceci semble montrer une propriété régularisante de la formulation avec l'erreur en quantité d'intérêt**, vu qu'il n'avait pas été possible de choisir une expression aussi faible pour  $\beta(H)$  dans le paragraphe précédent.

## 2.4 Identification de défauts cristallins à l'aide de clichés MET

Ce second exemple correspond à des travaux menés avec Denis Aubry et Ann-Lenaig Hamon, à la suite de leurs investigations au sujet du calcul des orbitales atomiques par la MEF, exposées dans [Aubry et Hamon 2007]. Il a permis d'étudier un cas dont l'échelle est à l'opposé de l'exemple précédent, et qui a débouché sur quelques communications, [Aubry *et al.* 2008 - 2009a, Puel et Aubry 2011d] et [Aubry *et al.* 2009b], et un article dans la revue *European Journal of Computational Mechanics*, [Aubry *et al.* 2010].

### 2.4.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons ici à l'interaction élastique électron-matière telle qu'elle se produit dans un Microscopie Électronique en Transmission (MET). Celui-ci permet d'étudier un matériau à l'échelle atomique à l'aide d'un faisceau incident d'électrons qui sont diffractés par les atomes de l'échantillon étudié. Nous souhaitons alors résoudre le problème inverse associé, qui consiste à **déterminer la structure atomique de l'échantillon à partir du cliché MET obtenu**, c'est-à-dire l'intensité du champ diffracté mesurée sur le capteur de l'appareil. Plus particulièrement, nous souhaitons étudier les possibilités de détection d'un défaut.

Pour cela, comme pour l'exemple de détection de cavité, nous faisons le choix de poser le problème d'identification comme celui de la **détermination du champ spatial du potentiel atomique de l'échantillon**, plutôt que d'utiliser des méthodes classiques de diffraction inverse (ou *inverse scattering*) que nous ne détaillerons pas ici, mais pour lesquelles on pourra trouver plus de références par exemple dans [Potthast 2006].

### Problème direct

En vue d'une discrétisation ultérieure par EF, **le domaine  $\Omega$  dans lequel se propagent les différentes ondes électroniques doit être de dimensions finies**. L'échantillon étudié occupe le domaine  $\Omega_s$ , et est caractérisé par un potentiel  $V$ , associé aux atomes de l'échantillon, qui décroît très rapidement vers zéro en dehors de  $\Omega_s$ .

L'onde électronique incidente est, de manière classique, considérée comme une onde plane qui se propage dans un milieu infini. Sa fonction d'onde, complexe, s'exprime alors, en supprimant le terme harmonique en temps, sous la forme :

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}) \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{k}_i$  est le vecteur d'onde (réel), caractérisant la direction de propagation de l'onde, ainsi que sa fréquence spatiale, et  $\tilde{\psi}_i$  une amplitude constante.

À la suite d'une succession d'hypothèses et d'approximations dont on trouvera le détail dans [Aubry *et al.* 2010], **l'équation de Schrödinger décrivant le système {électron incident+atomes de l'échantillon} peut se simplifier sous la forme de l'équation de Helmholtz suivante :**

$$\frac{1}{2}\Delta\psi_d + E_i\psi_d = V\psi_i \quad (2.27)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien par rapport à la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . Le problème consiste donc à déterminer  $\psi_d$ , qui désigne l'onde électronique diffractée par l'échantillon, tandis que  $E_i = ||\mathbf{k}_i||^2/2$  est l'énergie associée à l'onde électronique incidente  $\psi_i$ . Dans cette formulation, on constate que  **$V$  peut s'interpréter comme le potentiel des atomes tel que « vu » par l'onde  $\psi_i$  incidente.**

Comme l'onde diffractée (de même que l'onde incidente) est oscillante à très haute fréquence, **nous choisissons une approximation paraxiale afin de la représenter ultérieurement avec des EF qui ne nécessitent pas de maillages exagérément raffinés**. Cette approximation revient à chercher l'amplitude complexe  $\tilde{\psi}_d$ , qui est reliée à l'onde diffractée selon l'équation :

$$\psi_d(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}_d(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}) \quad (2.28)$$

Bien sûr, ceci ne suppose en rien que l'onde diffractée  $\psi_d$  se propage dans la direction donnée par  $\mathbf{k}_i$ . Cependant, on constate expérimentalement que, de par les lentilles utilisées dans le MET, les ondes qui arrivent en chaque point du capteur ont des directions qui restent très proches de celle de  $\mathbf{k}_i$ . Ainsi, la quantité  $\tilde{\psi}_d$  calculée n'aura qu'une variation spatiale lente, facilement calculée à l'aide d'EF de tailles « raisonnables », comme on le verra dans le paragraphe 2.4.2.

Ainsi, en utilisant le fait que  $E_i = ||\mathbf{k}_i||^2/2$ , l'approximation paraxiale (2.28) transforme l'équation de Helmholtz (2.27) en l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\Delta\tilde{\psi}_d + i\mathbf{k}_i \cdot \nabla\tilde{\psi}_d = V\tilde{\psi}_i \quad (2.29)$$

où, comme précédemment,  $\nabla$  désigne le gradient par rapport à la variable d'espace  $\mathbf{x}$ .

Enfin, comme nous avons choisi un domaine  $\Omega$  borné, **il est nécessaire d'imposer sur le bord  $\partial\Omega$  des conditions limites « transparentes »** : celles-ci reviennent à imposer que l'onde diffractée soit évanescence, ce qui, dans le cas de l'approximation paraxiale (2.28), revient à écrire comme condition sur  $\partial\Omega$  que :

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_d}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \tilde{\psi}_d \cdot \mathbf{n} = i(|\mathbf{k}_i| - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}_d \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante en tout point de la frontière  $\partial\Omega$ . Finalement, nous pouvons rassembler les deux relations (2.29)-(2.30) en la formulation faible suivante :

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \nabla \tilde{\psi}_d \cdot \nabla v^* + (i\mathbf{k}_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_d - V \tilde{\psi}_i) v^* \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{2} (|\mathbf{k}_i| - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}_d v^* dS = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.31)$$

où  $\mathcal{V}$  est l'espace de Hilbert dans lequel est recherché  $\tilde{\psi}_d$ , tandis que  $\bullet^*$  représente le complexe conjugué.

### Formulation du problème inverse

Les mesures expérimentales fournies par un cliché MET sont les intensités des ondes électroniques  $\psi_m$  parvenues en tout point du capteur dont le support est  $\Sigma$ . **Le problème inverse consiste alors à déterminer le champ de potentiel  $V$  de l'échantillon qui soit tel que l'intensité  $||\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d||^2$  de l'onde totale calculée sur  $\Sigma$  corresponde au mieux à l'intensité mesurée  $||\psi_m||^2$ .** La fonction coût proposée s'écrit alors comme :

$$\mathcal{J}(V) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} \left( ||\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d^V||^2 - ||\psi_m||^2 \right)^2 d\Sigma + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega_v} (V - V_0)^2 d\Omega_v \quad (2.32)$$

où  $\tilde{\psi}_d^V$  vérifie l'équation (2.31) du champ diffracté par l'échantillon de potentiel  $V$ .

Un terme de régularisation « classique », toujours d'après [Tikhonov 1977], est utilisé, où  $V_0$  est le champ de l'échantillon sans défaut, et  $\alpha$  un paramètre à ajuster. Le champ spatial  $V$  n'est pas recherché sur  $\Omega$  tout entier, mais sur un domaine  $\Omega_v$  plus restreint, qui correspond généralement au domaine  $\Omega_s$  associé à l'échantillon. Le terme de régularisation ne porte alors que sur ce domaine  $\Omega_v$ .

En formant le lagrangien comme dans le paragraphe 2.2.1, on aboutit, en écrivant la condition de stationnarité vis-à-vis de la solution du problème direct, à la relation vérifiée par l'état adjoint  $z$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \nabla z \cdot \nabla v^* - i\mathbf{k}_i \cdot \nabla z v^* \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{2} (|\mathbf{k}_i| + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) z v^* dS \\ + \int_{\Sigma} \left( ||\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d||^2 - ||\psi_m||^2 \right) (\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d) v^* d\Sigma = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.33)$$

qui, sous forme forte, se traduit par le système suivant :

$$\frac{1}{2} \Delta z + i\mathbf{k}_i \cdot \nabla z = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} = -i(|\mathbf{k}_i| + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) z \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2.34b)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] = \left( ||\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d||^2 - ||\psi_m||^2 \right) (\tilde{\psi}_i + \tilde{\psi}_d) \quad \text{sur } \Sigma \quad (2.34c)$$

où  $[[\bullet]]$  désigne le saut sur la surface  $\Sigma$ . Le problème adjoint (2.34a) correspond à une équation de propagation d'onde semblable à celle du problème direct (2.31), mais la condition limite (2.34b) permet de voir qu'il s'agit de rétropropagation à partir de la frontière  $\partial\Omega$ . Enfin, l'équation (2.34c) vient du fait que la surface de mesure  $\Sigma$  est intérieure au domaine  $\Omega$  : on a alors un état adjoint qui est discontinu sur cette surface, et son saut est directement relié à l'écart modèle direct – mesures.

Enfin, le gradient de la fonction coût peut s'exprimer sous la forme suivante, où  $\text{Re}$  désigne la partie réelle :

$$\nabla_V \mathcal{J}(V) \delta V = \int_{\Omega_v} \left( \alpha(V - V_0) - \text{Re}(\tilde{\psi}_i^* z^*) \right) \delta V d\Omega_v \quad \forall \delta V \in \partial\mathcal{P} \quad (2.35)$$

### Problème EF à résoudre

La discrétisation EF sur les deux maillages  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{M}_H$  nous invite alors à chercher le triplet  $(\tilde{\psi}_{d,h}, z_h, V_H) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_H$  tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \nabla \tilde{\psi}_{d,h} \cdot \nabla v_h^* + (i\mathbf{k}_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_{d,h} - \Pi_h^H V_H \tilde{\psi}_{i,h}) v_h^* \right) d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{2} (||\mathbf{k}_i|| - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) \tilde{\psi}_{d,h} v_h^* dS = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \end{aligned} \quad (2.36a)$$

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \nabla z_h \cdot \nabla v_h^* - i\mathbf{k}_i \cdot \nabla z_h v_h^* \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{i}{2} (||\mathbf{k}_i|| + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n}) z_h v_h^* dS \quad (2.36b)$$

$$\begin{aligned} + \int_{\Sigma} \left( ||\tilde{\psi}_{i,h} + \tilde{\psi}_{d,h}||^2 - ||\psi_m||^2 \right) (\tilde{\psi}_{i,h} + \tilde{\psi}_{d,h}) v_h^* d\Sigma = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \\ \int_{\Omega_v} \left( \alpha(V_H - V_{0,H}) - \text{Re}(\tilde{\psi}_{i,H}^* \Pi_H^h z_h^*) \right) \delta V_H d\Omega_v \\ = 0 \quad \forall \delta V_H \in \mathcal{P}_H \end{aligned} \quad (2.36c)$$

## 2.4.2 Résultats de l'identification de défauts cristallins sur un problème 2D

Nous nous intéressons ici à la mise en œuvre de la stratégie dans le cas d'un problème bidimensionnel avec données synthétiques : il concerne l'étude d'un échantillon très mince de fer- $\alpha$ . Même si cela n'a pas été testé ici, il ne devrait y avoir aucun obstacle pour reconduire telle quelle la stratégie sur un exemple tridimensionnel.

### Caractéristiques du problème et données synthétiques

L'exemple proposé repose sur la géométrie décrite sur la figure 2.5(a) : le domaine  $\Omega$  considéré est un disque dans lequel l'onde incidente  $\psi_i$  se propage de façon « verticale ». Celle-ci, de vecteur d'onde  $||\mathbf{k}_i|| = 130 \text{ rad} \cdot (\text{u.a.})^{-1}$ , interagit à incidence normale avec un échantillon  $\Omega_s$  d'épaisseur 2 nm, orienté selon la direction [001] ; cette épaisseur est inférieure à ce qui est observé en pratique dans un MET, mais l'idée ici est de n'impliquer que peu d'atomes pour pouvoir juger des capacités de résolution du problème inverse.

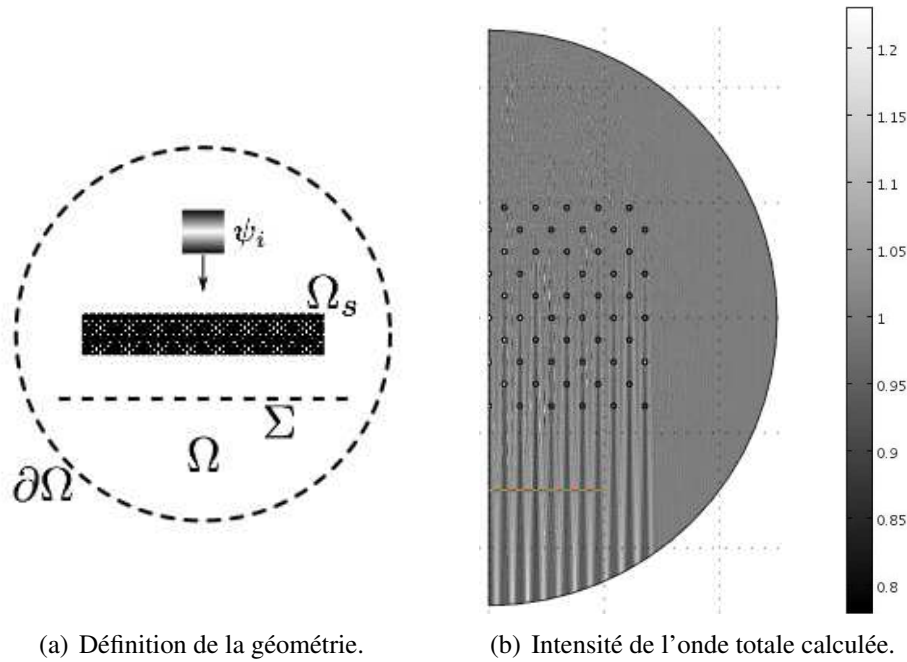
Les données synthétiques proviennent d'un calcul de l'onde diffractée  $\tilde{\psi}_{d,h}$  selon l'équation (2.36a) sur un maillage  $\mathcal{M}_{hh}$  très fin (600 000 DDL) de la moitié du domaine présenté sur la figure 2.5(a). Pour la bonne convergence du calcul, un coefficient d'absorption numérique de  $5 \cdot 10^{-3}$  est introduit. **L'échantillon étudié présente un défaut lacunaire dans sa structure atomique**, ce qui a un impact dans son potentiel  $V_H$  discrétisé. Ici, on a adopté un potentiel de Yukawa, détaillé dans [Ashcroft et Mermin 1976], qui, sous forme continue, vaut :

$$V = \sum_{k=1}^N V_a \frac{\exp(-ar_k)}{r_k} \quad (2.37)$$

où  $r_k$  est la distance du point considéré par rapport au noyau (supposé ponctuel) de l'atome  $k$ , sur  $N$  atomes contenus par l'échantillon.  $V_a$  et  $a$  sont deux constantes à fixer en rapport avec l'élément Fe- $\alpha$ .

On considère que **l'intensité  $||\tilde{\psi}_{i,h} + \tilde{\psi}_{d,h}||^2$  de l'onde totale est mesurée juste à la sortie de l'échantillon**, sur un segment rectiligne  $\Sigma$  parallèle au plan de sortie. Ceci revient à ne pas tenir compte des lentilles électroniques, qui, dans un MET, sont positionnées entre l'échantillon et l'écran récepteur, et donc à négliger les défauts qu'elles peuvent occasionner dans la formation de l'« image ».

La figure 2.5(b) représente l'intensité de l'onde totale en tout point du domaine  $\Omega$ . Puisque l'équation (2.36a) est linéaire par rapport à l'amplitude  $\tilde{\psi}_{i,h}$  de l'onde incidente et à l'amplitude  $V_a$  du potentiel atomique, ces deux quantités sont fixées arbitrairement à 1. Par ailleurs, on a représenté sur la figure 2.5(b) une ligne de niveau du potentiel  $V_H$ , qui permet de situer la position des noyaux des différents atomes de l'échantillon, ainsi que, par défaut, la position de la lacune.



**Figure 2.5** – Problème direct de diffusion électronique dans le cas d'une lacune [Aubry *et al.* 2010].

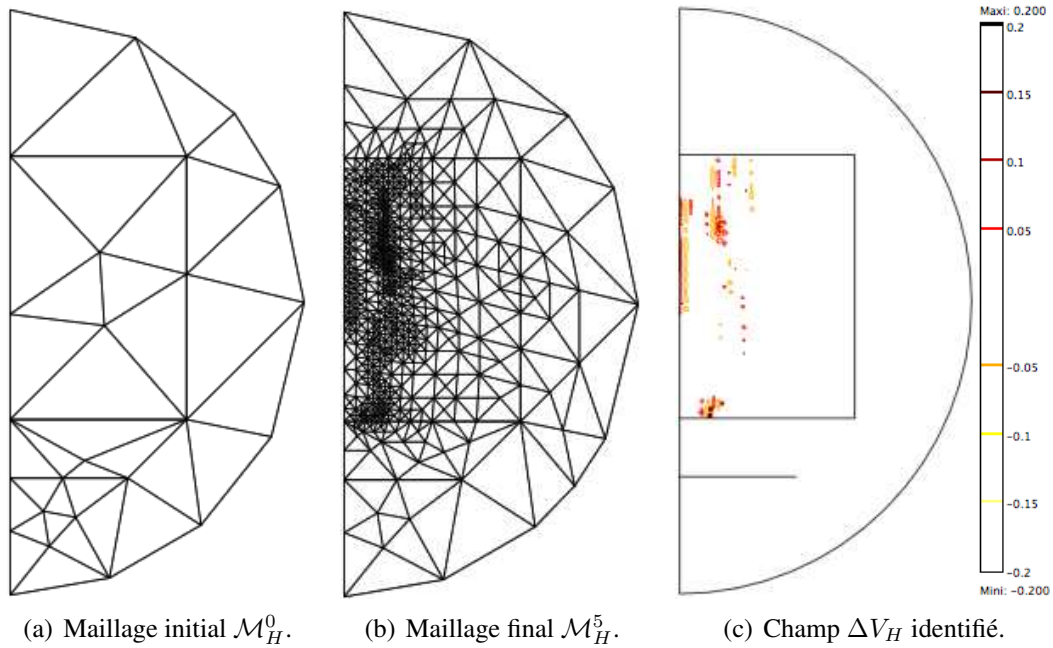
### Application de la stratégie itérative

Pour la résolution du problème inverse, **c'est la différence de potentiel  $\Delta V_H = V_H - V_{0,H}$**  par rapport au potentiel (discrétisé)  $V_{0,H}$  du cristal parfait **qui est recherchée**, plutôt que le potentiel  $V_H$  : comme le potentiel de Yukawa (2.37) est de forme exponentielle, il semble plus raisonnable de rechercher  $\Delta V_H$  dont les variations spatiales sont *a priori* moins importantes dans le cas de défauts localisés. L'utilisation d'un terme de régularisation d'après [Tikhonov 1977] est de plus cohérent avec ce choix. Pour ce terme, le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi de façon à ce que les deux termes de la fonction coût (2.32) soient de même ordre de grandeur :

$$\alpha \approx \frac{|\Sigma| \|\psi_m\|_\infty^4}{2|\Omega_v| \|V_0\|_\infty^2} \quad (2.38)$$

où la norme  $\|V_0\|_\infty$  a effectivement un sens, vu que l'on fait en sorte que le potentiel de Yukawa (2.37) interpolé à l'aide de  $\mathcal{M}_H$  ne prenne que des valeurs finies en chaque nœud du maillage.

En termes de discrétisation, le maillage  $\mathcal{M}_h$  destiné à la résolution des équations (2.36a) et (2.36b) comporte environ 5000 éléments quadratiques. Comme montré sur la figure 2.6(a), le maillage  $\mathcal{M}_H^0$  initialement associé au champ recherché ne comporte quant à lui que 8 éléments linéaires dans la zone  $\Omega_v$  où est recherchée la différence de potentiel  $\Delta V_H$ , et qui est matérialisée par un rectangle sur la figure 2.6(c). Après 5 étapes de raffinement, le maillage a évolué jusqu'à comporter environ 1200 éléments dans  $\mathcal{M}_H^5$ , et c'est essentiellement dans la zone de la lacune recherchée que le maillage a le plus évolué (figure 2.6(b)). Les lignes de niveau du champ  $\Delta V_H$  permettent de constater également, sur la figure 2.6(c), que **c'est au voisinage de la lacune que ce champ montre les plus fortes fluctuations**, indiquant ainsi la localisation probable du défaut.



**Figure 2.6** – Évolution du maillage  $\mathcal{M}_H$  de discrétisation de  $\Delta V_H$  et champ de potentiel identifié après 5 étapes de raffinement [Aubry *et al.* 2010].

Toutefois, ces fluctuations ne permettent pas de reconstituer précisément le défaut recherché, d'autant plus que certaines d'entre elles sont aussi constatées sur certaines frontières de la zone de recherche  $\Omega_v$  du potentiel. Il semble donc que le choix de la régularisation n'est pas pleinement satisfaisant, **les oscillations dans le champ identifié montrant notamment que l'inversion est à la limite de l'instabilité**. Ceci est confirmé par l'utilisation d'un autre jeu de données synthétiques, non montré ici, et obtenu pour une fente plutôt qu'une simple lacune : si ce défaut linéique est bien localisé, le champ identifié est fortement oscillant au niveau de la variation brusque de potentiel due à l'absence de la ligne d'atomes concernés. Cependant, dans ces deux cas, une valeur de  $\alpha$  plus importante ne permet plus d'obtenir l'identification du défaut, le champ obtenu devenant très proche du champ  $V_{0,H}$  associé au cristal parfait.

Ces phénomènes sont probablement dus à des effets de « masquage » liés au fait que l'illumination est parallèle à l'un des plans cristallins. Ainsi, il serait donc intéressant, pour limiter cet effet au maximum, de pouvoir disposer, comme pour la tomographie, de plusieurs angles d'illumination. Ceci devrait notamment être envisagé à court terme dans le cadre d'une étude plus complète utilisant les données effectivement mesurées par un MET à Haute Résolution, prochainement disponible au laboratoire MSSMat grâce à l'obtention de l'Équipement d'Excellence MATMECA.

## 2.5 Bilan et perspectives

Ce chapitre a permis d'explorer la question difficile de l'identification de champs de paramètres dépendant de l'espace. Après en avoir souligné les enjeux et les liens étroits avec les techniques de mesures de champs, nous avons étudié une stratégie d'identification spécifique, introduite par [Bangerth 2002] mais peu utilisée depuis, basée sur l'adaptation de maillage : **l'utilisation d'un maillage spécifique, initialement grossier, pour discrétiser le champ spatial recherché se traduit par une régularisation efficace du problème inverse, et le raffinement progressif de ce maillage permet d'obtenir la précision désirée pour le champ identifié**. Deux exemples, très différents de par les phénomènes qu'ils représentent et les équations associées, ont ensuite illustré cette stratégie. Dans ce qui suit, nous allons revenir sur certaines des conclusions qui ont émergé de ces études, et proposer des pistes d'investigations pour enrichir ces résultats.

### 2.5.1 Sur des ajustements possibles de la stratégie adaptative

Un premier point de discussion concerne l'adaptation du maillage  $\mathcal{M}_H$  utilisée au cours des différentes étapes de la stratégie, et qui repose sur deux éléments distincts. Tout d'abord, **la question de l'estimateur d'erreur permettant de piloter le raffinement de maillage peut être creusée**. Pour des raisons d'implémentation logicielle, nous avons adopté l'**estimateur (2.9) correspondant à la norme  $L^2$  du résidu de la relation (2.8c)**. En plus des résultats obtenus sur les exemples des paragraphes 2.3 et 2.4, ce choix semble raisonnable *a posteriori* compte tenu de la remarque de [Bangerth 2008], qui, s'il propose un estimateur plus rigoureux pour effectuer le raffinement du maillage  $\mathcal{M}_H$ , ne l'utilise finalement pas en raison de sa complexité de mise en œuvre, pour se tourner vers des estimateurs plus heuristiques. Ainsi, il serait intéressant de mieux cerner l'influence du choix de l'estimateur (2.9) en **comparant justement ce dernier aux choix de [Bangerth 2008]**.

Le second élément influant sur l'adaptation de maillage est la **sélection des éléments concernés par le raffinement**. Ici, nous avons choisi de raffiner environ les trois quarts des éléments du maillage à chaque itération de la stratégie, ceci afin de rester raisonnable en termes de coût de calcul en ne multipliant pas trop le nombre d'itérations requises pour une précision d'identification satisfaisante. L'inconvénient de ce choix proposé dans le logiciel COMSOL est qu'il est par contre impossible de déraffiner les éléments qui pourraient l'être. Si une autre possibilité offerte par le logiciel est de recréer le maillage à chaque itération, en se basant sur une carte de dimensions locales déduites de l'estimateur d'erreur (2.9), la restriction sous-jacente est qu'il n'est pas possible de fixer le gradient de taille des éléments du nouveau maillage, ce qui résulte en un maillage assez régulier et joue contre la volonté de n'avoir qu'un nombre d'itérations limité. Pour aller plus loin sur cette question, **il faudrait vraisemblablement externaliser la génération de maillage pour avoir plus de flexibilité dans les options de raffinement**.

Si ceci s'avère faisable, on pourrait alors creuser **d'autres types d'adaptation**, comme l'enrichissement des fonctions de forme par exemple (adaptivité- $p$ ), voire **d'autres types de discrétisation**, avec l'utilisation de méthodes de type X-FEM si l'on cherche à identifier des champs de paramètres discontinus (cas de la détection d'une cavité ou d'une inclusion par exemple). Cependant, comme le maillage concerné est celui qui permet la discrétisation spatiale du champ inconnu à identifier, il est difficile de prédire *a priori* si ces propositions pourraient se traduire en des gains tangibles pour la stratégie.

Dans la même idée de faire évoluer les concepts utilisés, il pourrait également être envisageable d'étudier l'**implémentation de l'erreur en relation de comportement modifiée**, qui a montré ses avantages dans le domaine de l'identification, par exemple dans [Feissel et Allix 2007]. Le concept dans sa forme initiale étant un estimateur d'erreur *a posteriori*, le terme qualifié d'« erreur en modèle » pourrait ainsi piloter le raffinement du maillage tandis que le terme complet de l'erreur est minimisé pour réduire l'écart mesures – expériences. Toutefois, vu le cadre de cette méthode, il faudrait certainement se restreindre à un seul maillage commun pour le problème direct et la discrétisation du champ recherché.

Un deuxième point de discussion à propos de la stratégie adaptative concerne le **choix du terme de régularisation**, dont l'utilisation s'avère nécessaire malgré le caractère régularisant de la méthode constaté dans le paragraphe 2.3.2. Les deux exemples que nous avons traités ici ont montré les inconvénients respectifs de la régularisation « classique » d'après [Tikhonov 1977], d'une part, et de celle basée sur la norme  $L^2$  du gradient du champ spatial d'autre part. Sur le papier, **la régularisation reposant sur la norme TV est la plus séduisante**, en raison de sa capacité à préserver d'éventuels sauts dans le champ à identifier, **mais, en pratique, la convergence de la résolution du système (2.7) est plus délicate**, et demanderait donc d'être améliorée moyennant un traitement numérique plus abouti. Pour cela, une possibilité est proposée par [Borsic et Adler 2012] qui établissent une méthode spécifique de minimisation visant à remplacer la méthode de Gauss-Newton, et traitent avec succès différents cas de fonctions coûts, selon que les termes d'écart et de régularisation employés sont de type  $L^2$  ou TV.

Par ailleurs, d'autres pistes de régularisation pourraient être explorées. Ainsi, dans le cadre d'une stratégie similaire à celle présentée dans ce chapitre, mais reposant sur la méthode des volumes finis, [Haber *et al.* 2007] proposent l'**utilisation d'un terme de régularisation hybride entre la norme  $L^2$  du gradient et la norme TV** : un seuil sur la valeur du gradient du champ spatial permet de passer continûment de l'une à l'autre. Les auteurs concluent alors sur une performance meilleure de ce terme par rapport à l'utilisation exclusive de l'un des deux choix précédents.



Enfin, la régularisation que l'on a qualifié d'« adaptative » mériterait quelques approfondissements, concernant le choix du paramètre évoluant localement avec la taille des éléments du maillage  $\mathcal{M}_H$ , mais aussi en étudiant l'utilisation pour la régularisation d'autres types de normes, comme celles évoquées précédemment.

### 2.5.2 Vers une identification multiéchelle

Les deux exemples exposés dans ce chapitre ont fait intervenir comme données expérimentales (synthétiques en fait) des mesures de champs obtenues sur une frontière, extérieure ou « intérieure » du domaine étudié. Toutefois, **l'utilisation de ces mesures de champs s'est faite de manière transparente dans le cadre de la stratégie adaptative présentée**, sans que l'on cherche réellement à tirer parti de la nature quasi-continue de ces données, qui peuvent être donc considérées à diverses résolutions spatiales. En ce sens, nous souhaitons donc aller plus loin que ce que suggère [Bangerth 2002] : au lieu de considérer deux maillages  $\mathcal{M}_H$  et  $\mathcal{M}_h$  raffinés séparément en fonction des estimateurs d'erreur introduits, nous voudrions **introduire un troisième maillage, qui serait associé aux mesures de champs expérimentales**, dont la finesse serait elle aussi pilotée par un indicateur spécifique. On aurait donc une **utilisation multiéchelles de l'information expérimentale** représentée par ces mesures de champs.

Ainsi, en n'incorporant initialement que de façon grossière les données expérimentales dans le problème d'identification, on peut espérer obtenir un **effet similaire à la technique du saut de fréquence** évoquée par [Bunks *et al.* 1995], à savoir un placement d'emblée de la solution identifiée dans le bassin d'attraction du minimum global recherché, ce qui renforcerait l'effet régularisant associé au maillage  $\mathcal{M}_H$ , et déjà évoqué auparavant. Cette conjecture est d'ailleurs appuyée par les **algorithmes de résolution multigrilles que l'on peut trouver en corrélation d'images**. Ainsi, dans le logiciel Correli par exemple, qui se base sur la MEF pour la définition des zones d'intérêt, une conversion de l'image en un résultat à gros « grains » (ou *coarse-graining process*) est appliquée afin d'éviter les minima locaux lors de l'estimation du champ de déplacement ; son efficacité a été évoquée par [Besnard *et al.* 2006] pour le cas d'une discrétisation avec éléments Q4, et par [Réthoré *et al.* 2007] pour le cas d'une implémentation de type X-FEM. Si, dans ce dernier cas, l'apport est avant tout profitable à la bonne détermination du déplacement, et permet donc, indirectement, une identification paramétrique correcte, le bénéfice de notre approche concernerait dans ce cas directement la détermination du champ spatial de paramètres recherché. Ceci s'inscrit d'ailleurs dans la logique de [Bangerth et Joshi 2008] qui, dans le cas de la tomographie, proposent de traiter séparément les images issues des différents angles d'illumination, et obtiennent donc au final des maillages différents pour chaque condition expérimentale, et donc optimaux à chaque fois, au sens des estimateurs d'erreur employés.

Enfin, **ne pas considérer directement la résolution maximale des données expérimentales disponibles résulte en un coût de calcul moins important**. Considérer des maillages initiaux grossiers pour  $\mathcal{M}_H$  et  $\mathcal{M}_h$  va dans le même sens, et on peut espérer au final avoir un temps de calcul pour la stratégie adaptative complète moins grand que si l'on n'avait directement considéré qu'un seul maillage très fin pour le calcul direct, les mesures de champs et la discrétisation du champ recherché. Si la réduction est appréciable, il sera alors **envisageable de piloter un essai de la meilleure façon possible en vue de la détermination d'un paramètre donné**, tendance vers laquelle se dirige progressivement le pilotage d'essais grâce à la corrélation d'images : le principe de base associé est par exemple donné dans [Fayolle *et al.* 2007].

Dans un autre ordre d'idée, l'implémentation d'une erreur en quantité d'intérêt, présentée dans le paragraphe 2.2.3, a montré des résultats d'identification améliorés sur l'exemple de la détection de cavités du paragraphe 2.3. En effet, ceci permet, d'une part, de piloter le raffinement du maillage  $\mathcal{M}_H$  à l'aide d'une quantité qui ne tend pas vers zéro, et semble, d'autre part, avoir un caractère régularisant plus prononcé que ce que l'on obtient avec la minimisation de la fonction coût « classique ». Il serait intéressant de **réfléchir à différents types de quantités d'intérêt que l'on pourrait mettre en jeu**.

Le choix testé ici correspondait à la valeur moyenne du champ spatial de propriétés à identifier : on a donc **mis en jeu une quantité globale pour la détermination d'un champ local**. Dans le cas extrême où l'on aurait deux échelles spatiales bien séparées (comme pour les matériaux composites par exemple), le problème inverse deviendrait alors l'identification d'un champ de propriétés microscopiques à l'aide d'une quantité d'intérêt macroscopique que l'on cherche à estimer au mieux. **Le rôle de celle-ci dans le cadre plus formel de l'homogénéisation en espace devrait donc être exploré**. Cette proposition pourrait être comparée à la résolution d'un problème d'identification où les fonctions coûts font intervenir des quantités mesurables soit homogénéisées, soit « complètes » : ceci est notamment abordé dans le paragraphe 3.3, dans le cadre de l'homogénéisation périodique en temps, mais il n'y a pas de différence notable dans la démarche lorsqu'il s'agit d'échelles d'espace. **Une application pourrait être l'approfondissement de l'exemple du paragraphe 2.4 à propos de l'identification de défauts à partir de clichés MET** : la structure cristalline de l'échantillon se prête bien au cadre de l'homogénéisation périodique, et il serait possible de comparer les deux approches évoquées, en utilisant de plus des images réelles issues du MET à Haute Résolution, bientôt opérationnel au laboratoire MSSMat, et obtenu dans le cadre de l'Équipement d'Excellence MATMECA.



# Modèles homogénéisés en temps et identification paramétrique

---

*It can be easily shown that the identification problem is, as a rule, unstable. In fact, the homogenisation theory (Bensoussan et al 1978) states that the solution of a PDE with highly oscillatory coefficients is virtually the same as the solution with a very different smooth coefficient.*

[Chung et Kravaris 1988] – C.-B. Chung et C. Kravaris. Identification of spatially discontinuous parameters in second-order parabolic systems by piecewise regularisation. *Inverse Problems*, 4(4): 973–994, 1988

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Méthode d'homogénéisation périodique en temps . . . . .</b>	<b>68</b>
3.1.1	Présentation du contexte . . . . .	68
3.1.2	Bases de la méthode . . . . .	72
3.1.3	Extensions proposées . . . . .	79
<b>3.2</b>	<b>Application : simulation temporelle de la fatigue à cycles combinés . . . . .</b>	<b>82</b>
3.2.1	Barre soumise à un chargement normal bifréquentiel . . . . .	83
3.2.2	Aube de turbine aéronautique en service . . . . .	93
3.2.3	Processus mécanobiologique du remodelage osseux . . . . .	96
<b>3.3</b>	<b>Vers l'identification de paramètres de modèles homogénéisés en temps . . . . .</b>	<b>99</b>
3.3.1	Mise en œuvre sur un exemple simple . . . . .	99
3.3.2	Commentaires et explorations complémentaires . . . . .	103
<b>3.4</b>	<b>Bilan et perspectives . . . . .</b>	<b>105</b>
3.4.1	Sur les performances de la méthode d'homogénéisation périodique en temps	106
3.4.2	Sur de possibles cas d'étude à explorer . . . . .	107

---

L'objectif de ce troisième chapitre est de considérer une nouvelle classe de problèmes d'évolution, qui s'inscrivent dans la tendance actuelle de la communauté de mécanique numérique de développer des méthodes basées sur des algorithmes de réduction de modèle, telles que la *Proper Generalized Decomposition* (ou PGD), décrite par exemple dans [Chinesta *et al.* 2010], ou la méthode LATIN, déjà évoquée dans le paragraphe 1.1.2. La question de l'identification est bien entendu toujours présente, et doit tirer parti de la forme réduite des modèles considérés.

Toutefois, plutôt que d'utiliser les algorithmes que nous venons de citer, nous préférons traiter ici des modèles qui ont été obtenus à la suite d'une procédure d'homogénéisation périodique en temps, qui est parfaitement adaptée aux cas d'études que nous souhaitons aborder. Après avoir détaillé la méthode de façon théorique dans un premier temps, nous présenterons des exemples concernant la simulation de la fatigue à cycles combinés. Nous montrerons enfin des premières pistes d'explorations sur comment identifier cette classe de modèle avec le même type d'approche que dans le paragraphe 1.1, avant de finir par les nombreuses perspectives que ce dernier point suscite.

## 3.1 Méthode d'homogénéisation périodique en temps

### 3.1.1 Présentation du contexte

La méthode d'homogénéisation périodique en temps s'inspire des principes développés pour l'homogénéisation périodique en espace, notamment dans [Bensoussan *et al.* 1978] et [Sanchez-Palencia 1980]. Comme pour cette dernière, **la séparation des échelles s'effectue à l'aide d'un développement asymptotique selon les puissances d'un petit paramètre  $\xi$**  qui caractérise le rapport entre les deux échelles du problème. [Guenouni et Aubry 1986, Guennouni 1988] ont alors proposé une formulation permettant de séparer deux échelles de temps dans le cadre d'un problème élasto-viscoplastique en quasi-statique.

#### Motivations de la méthode

La méthode telle qu'elle est présentée dans [Guenouni et Aubry 1986, Guennouni 1988] a pour but d'étudier l'évolution « lente » d'une structure qui est soumise à des sollicitations cycliques « rapides » : l'idée est de parvenir à calculer efficacement la moyenne du cycle limite ou la durée de vie de la structure, sans être obligé de résoudre le problème d'évolution avec des pas de temps de l'ordre de la période des sollicitations. Les auteurs montrent qu'il est possible d'aboutir à un **problème homogénéisé d'ordre zéro qui, s'il n'est résolu qu'à l'échelle du temps lent, tient compte de façon moyennée de l'effet des cycles rapides.**

Dans le cadre d'un comportement élasto-viscoplastique général, et avec un certain nombre d'hypothèses « classiques », on peut démontrer que, quand la période  $T_r$  des cycles rapides tend vers zéro, les champs de déplacement et de contrainte  $(\mathbf{u}, \sigma)$  tendent vers leurs versions homogénéisées d'ordre zéro selon une convergence de type faible-\* dans les espaces correspondants. On obtient de plus les estimations suivantes :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C\sqrt{T_r} \quad (3.1a)$$

$$\|\sigma - \sigma_0\|_{(L^2(\Omega))_{sym}^9} \leq C\sqrt{T_r} \quad (3.1b)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $T_r$ , et  $(\mathbf{u}_0, \sigma_0)$  désignent respectivement les champs de déplacement et de contrainte à l'ordre zéro, non homogénéisés. Le détail des démonstrations est donné dans [Guenouni 1988].

Dernièrement, deux études nous ont incités à reprendre et étendre la méthode d'homogénéisation périodique en temps :

- la participation au projet européen [PREMECCY 2012], qui a conduit à travailler sur la simulation de la fatigue pour des cycles « combinés » (*Combined Cycle Fatigue* ou CCF), illustrée dans le paragraphe 3.2.2 ; dans ce cadre, les sollicitations sont bifréquentielles, ce qui signifie que l'échelle de temps lente sera naturellement associée à la période de la composante basse fréquence des efforts appliqués ;
- la thèse [Devulder 2009], qui, pour la simulation efficace du remodelage osseux, s'est servie d'une extension de la méthode au cadre de l'endommagement isotrope ; rapidement évoquée dans [Guennouni 1988], celle-ci est présentée en détails dans le paragraphe 3.1.3, et son implémentation est illustrée dans le paragraphe 3.2.3.

Dans ces deux cas d'application, les fondements de la méthode demeurent inchangés même si certaines adaptations spécifiques peuvent être introduites.

### Origine et inspirations

Comme précisé auparavant, **la méthode d'homogénéisation périodique en temps trouve son inspiration dans les travaux concernant les développements asymptotiques à échelles multiples**, notamment [Bensoussan *et al.* 1978] et [Sanchez-Palencia 1980] qui sont, encore aujourd'hui, les deux ouvrages de référence à propos de la théorie de l'homogénéisation périodique en espace. **Ces derniers abordent également de manière spécifique la question de l'introduction de deux échelles de temps différentes, sans toutefois en faire une méthode « à part entière »**. Ainsi, [Bensoussan *et al.* 1978] développent l'étude de problèmes paraboliques et hyperboliques à deux échelles d'espace, et introduisent de façon naturelle deux échelles de temps associées : l'un des exemples concerne l'équation de Klein-Gordon, qui décrit la propagation d'ondes hautes fréquences dans un milieu de propriétés spatiales évoluant périodiquement à l'échelle microscopique. De manière similaire, [Sanchez-Palencia 1980] présente le cas de l'homogénéisation de l'équation des ondes pour des matériaux dont les propriétés spatiales varient rapidement, tandis que [Francfort 1983], pour l'étude de l'homogénéisation périodique en espace des équations de la thermoélasticité, montre qu'il est nécessaire d'introduire une échelle de temps rapide pour décrire l'évolution de la température de façon correcte.

En outre, **l'introduction d'échelles de temps multiples est également un procédé classique pour les études de perturbation de problèmes de vibrations**, bien avant la formalisation des méthodes d'homogénéisation : ainsi, [Sanchez-Palencia 1978] évoque la résolution de problèmes de vibrations libres dont les équations présentent un terme perturbatif qui conduit à une modulation lentement variable de l'amplitude de la réponse vibratoire. Il montre alors que la solution à l'ordre zéro de la décomposition coïncide avec celle obtenue par la méthode de « centrage » (ou *averaging method*), décrite dans [Kryloff et Bogoliuboff 1947], qui permet d'évaluer une fonction qui évolue lentement en fonction du temps à l'aide d'une moyenne temporelle des équations du problème initial.

Malgré ces références, il semble que ce soient [Guennouni et Aubry 1986] qui, les premiers, ont formulé **le cas où l'homogénéisation ne porte que sur deux échelles de temps**, même si le problème traité dans [Sanchez-Palencia 1978] est, comme souligné par l'auteur lui-même, en lien direct avec la résolution du problème des vibrations d'un solide élastique faiblement viscoélastique. Quoiqu'il en soit, on peut souligner deux originalités chez [Guennouni et Aubry 1986] :

- **c’est le chargement extérieur qui est à l’origine de l’introduction de l’échelle de temps rapide**, et non une échelle spatiale microscopique, comme c’est généralement le cas dans les problèmes d’homogénéisation classiquement traités ;
- **un comportement non linéaire d’ordre zéro est abordé**, alors que, pour la plupart des autres travaux, les effets non linéaires sont perturbatifs, donc d’ordre un au moins, réduisant l’étude homogénéisée à l’ordre zéro à un problème linéaire seulement.

#### Travaux associés

Faire une liste exhaustive des travaux concernant la méthode d’homogénéisation périodique en temps s’avère délicat : en effet, les deux auteurs de [Guennouni et Aubry 1986, Guennouni 1988] n’ont plus communiqué à son sujet par la suite, et les contributions ultérieures par d’autres auteurs ne font généralement référence qu’aux deux ouvrages [Bensoussan *et al.* 1978] et [Sanchez-Palencia 1980]. **Il n’existe ainsi pas de liens explicites entre les travaux évoqués ici, d’où la difficulté de constituer une bibliographie complète.**

Nous pouvons évoquer tout d’abord quelques travaux qui se situent dans la lignée directe des deux ouvrages fondateurs que l’on vient de citer, et qui ont exploré l’**homogénéisation périodique en temps et espace couplés**. Ainsi, on trouve dans [Boutin et Wong 1998] et [Auriault *et al.* 2009] l’**étude thermoélastique quasi-statique de milieux biphasiques** soumis à un chargement mécanique périodique : suivant les ordres de grandeur relatifs des termes d’inertie et de conductivité thermiques, il est montré que quatre cas qualitatifs peuvent être considérés, mettant en œuvre à chaque fois une ou deux échelles, aussi bien en temps qu’en espace. La prise en compte de la variabilité des paramètres vis-à-vis de la température est également évoquée.

Plus récemment dans le domaine de l’**acoustique non linéaire**, [Dontsov et Guzina 2011 - 2012] présentent le cas de l’imagerie médicale de tissus viscoélastiques homogènes qui sont sollicités par une onde ultrason dont l’amplitude est modulée très lentement par comparaison avec la fréquence de la porteuse : ils montrent alors la nécessité d’introduire une échelle de temps lente ainsi qu’une échelle d’espace associée pour pouvoir estimer correctement la force de rayonnement acoustique s’exerçant sur le tissu.

Enfin, on peut noter qu’en mécanique des fluides pour la simulation numérique des **écoulements turbulents**, certains modèles, comme ceux de [McLaughlin *et al.* 1985, Rebollo 1988], introduisent à l’instant initial une petite perturbation spatiale qui est alors étudiée sur un intervalle de temps très long par l’intermédiaire d’une séparation d’échelles spatiales et temporelles.

Les travaux que l’on vient de citer ont permis de constater la grande diversité des champs d’application offerts par les techniques de séparation d’échelles, ce qui justifie pourquoi il serait vain de tenter d’en compiler une liste exhaustive. C’est pourquoi nous allons maintenant nous limiter à des travaux ne portant que sur la séparation d’échelles temporelles. **Il semble en effet possible de ne dégager que trois grands groupes de travaux**, classés de façon « géographique » plutôt que chronologique, ce qui permet d’ailleurs de constater la relative ignorance de chaque groupe vis-à-vis de l’existence des deux autres.

**Dans la lignée de [Guennouni et Aubry 1986, Guennouni 1988], nous pouvons tout d’abord trouver des contributions dans le domaine de la mécanique des sols.** Ainsi, [Peker *et al.* 2001] étudient la stabilité d’un massif granulaire sous-marin sous sollicitation sismique : l’homogénéisation en temps permet de calculer efficacement l’évolution de la pression interstitielle, en aboutissant à la résolution d’un problème lent de diffusion dans un milieu poroélastique et d’un problème rapide élastique incompressible.

Plus récemment, [Papon 2010, Papon *et al.* 2012] étudient le comportement cyclique des argiles en vue du dimensionnement des fondations d'ouvrages : des modèles de plasticité spécifiques sont étudiés, ainsi que la prise en compte d'un comportement élastique non linéaire ; les résultats obtenus dans ce dernier cas ne sont pas excellents, mais il semble que ceci provienne de la mise en œuvre numérique qui paraît discutable.

Dans un tout autre domaine, [Lévy 2010, Lévy *et al.* 2011b] ont proposé l'utilisation de la méthode pour modéliser efficacement le **soudage par ultrasons de matériaux composites à matrice thermoplastique** : la modélisation de l'écoulement dans la zone de soudage fait intervenir une loi viscoélastique incompressible de type Maxwell et un problème de thermique instationnaire dont le terme source est d'origine mécanique, et la sollicitation est une condition en déplacement imposé bipériodique, correspondant au déplacement de la sonotrode. Une analyse dimensionnelle est alors proposée pour quantifier l'influence des effets d'inertie et de la dépendance des paramètres mécaniques vis-à-vis de la température, pour permettre d'aboutir, après application de la méthode d'homogénéisation périodique en temps, à trois problèmes : un problème thermique lent, un problème viscoélastique lent et quasi-statique, tous deux nécessitant la résolution d'un problème rapide élastique à chaque pas de temps lent. Les auteurs concluent sur l'efficacité de la stratégie utilisée, et vont alors plus loin dans [Lévy *et al.* 2011a - 2012] en termes de représentation du problème réel en tenant compte de la géométrie réelle et de son évolution à l'aide d'une méthode de type *level set* pour représenter les interfaces respectives entre composite, polymère en écoulement et air.

Parallèlement à ces références françaises, on trouve une « école » russe qui semble provenir directement des travaux de [Kryloff et Bogoliuboff 1947], même si le fil est délicat à suivre du fait que la grande majorité de ces références est rédigée en russe. [Blekhman 2000], qui est la traduction en anglais d'un livre de 1994 du même auteur, permet tout de même d'avoir une vision globale de la **méthode dite de « séparation directe des mouvements »** (ou *method of direct separation of motions*), initiée dans les années quatre-vingts. L'auteur la décrit comme **l'étude du mouvement lent tel que le verrait un observateur sous lumière stroboscopique, qui masquerait les oscillations rapides, mais nécessiterait l'introduction de forces supplémentaires** (qualifiées de *vibrational forces*) qui prendraient en compte l'influence des sollicitations rapides dans l'évolution lente du système. Un cadre mathématique, différent de celui des méthodes de séparation d'échelles, est alors introduit, mais **les résultats obtenus sont semblables à l'ordre zéro de la méthode d'homogénéisation périodique en temps**. Les applications présentées dans [Blekhman 2000] sont alors extrêmement variées, même s'il s'agit essentiellement d'EDO dont la résolution se fait de façon analytique : machines tournantes, milieux granulaires, écoulements turbulents, systèmes électromécaniques, mécanique céleste...

Quelques références plus récentes, en anglais, traitent d'autres problèmes : tandis que [Blekhman 2007] étudie divers cas de comportements matériaux non linéaires unidimensionnels (élastique, viscoélastique) en quasi-statique, [Blekhman et Sorokin 2010] détaillent le cas des vibrations non linéaires de systèmes à quelques DDL, dans le cas d'un contact frottant sec, et parviennent à une loi d'évolution lente équivalente de type frottement visqueux.

Enfin, **des travaux similaires ont été menés aux États-Unis par l'équipe de Jacob Fish**. Initialement, [Chen et Fish 2001] ont constaté que, pour traiter correctement un problème de propagation d'ondes pour un matériau présentant deux échelles spatiales distinctes, il était nécessaire d'introduire une échelle de temps rapide en rapport avec l'échelle d'espace microscopique afin de supprimer des termes séculaires divergents dans la décomposition asymptotique.



Par la suite, [Yu et Fish 2002a] ont étudié le comportement thermo-visco-élastique de composites à microstructure périodique en introduisant là encore deux échelles de temps distinctes pour différents cas de rapport d'échelles spatiales et temporelles. Ceci a conduit les auteurs à poser dans [Yu et Fish 2002b] les bases d'**une véritable méthode d'homogénéisation périodique en temps, en tous points semblable à celle de [Guennouni et Aubry 1986, Guennouni 1988]**, pour des lois respectivement viscoélastique et viscoplastique en quasi-statique.

C'est ensuite le cas de la fatigue qui est abordée de façon similaire, avec l'étude de deux lois différentes dans [Yu et Fish 2002b] (une loi d'endommagement isotrope formellement proche d'une formulation de viscoplasticité, et un modèle de loi cohésive de propagation de fissures) et d'une loi de Gurson dans [Oskay et Fish 2004, Fish et Oskay 2005]. Quelques raffinements sont apportés, comme l'introduction d'une hypothèse de « presque-périodicité » (ou *almost periodicity*) remplaçant la périodicité vis-à-vis de la variable de temps rapide pour la description de l'évolution des variables internes liées à la fatigue : en effet, **le fait de relâcher l'hypothèse de périodicité peut permettre de mieux décrire les phénomènes observés dans certains cas expérimentaux**, et le cadre introduit permet d'éviter que le déroulement de la stratégie en soit réellement changé.

Plus récemment, [Fish *et al.* 2012] s'intéressent au cas de la fatigue des matériaux hétérogènes en revenant à l'introduction simultanée d'échelles de temps et d'espace distinctes avec une loi d'endommagement isotrope.

#### 3.1.2 Bases de la méthode

Nous présentons ici les grandes lignes de l'homogénéisation périodique en temps, telle qu'elle a été proposée dans [Guennouni et Aubry 1986, Guennouni 1988], à ceci près que nous envisageons ici des sollicitations bifréquentielles au lieu de simplement cycliques, et que nous détaillons son extension au cadre dynamique plutôt que de rappeler la formulation quasi-statique initialement proposée dans ces deux références.

##### Hypothèses et notations

L'hypothèse de base de la méthode repose sur le fait que **l'on peut définir deux échelles de temps aisément séparables**. Dans le cas d'une structure soumise à deux sollicitations périodiques (ou à une seule sollicitation bifréquentielle), cela revient à définir les deux échelles de temps suivantes :

- **une échelle de temps lente**, que l'on notera tout de même  $t$  comme le temps courant pour ne pas multiplier les notations ; cette échelle est associée à la basse fréquence notée  $F$  ;
- **une échelle de temps rapide**, notée  $\tau$ , qui est associée à la haute fréquence  $F/\xi$ .

Les deux échelles sont alors reliées par la relation  $\xi = t/\tau$  et peuvent être considérées comme d'autant plus découplées que le rapport  $\xi$  est petit ; à la limite, **on suppose alors que les deux variables de temps sont indépendantes**, ce qui permet d'exprimer la dérivée (totale) par rapport au temps pour toute variable  $\alpha(t, \tau)$  dépendant du temps :

$$d_t \alpha = \partial_t \alpha + \frac{1}{\xi} \partial_\tau \alpha = \dot{\alpha} + \frac{1}{\xi} \alpha' \quad (3.2)$$

où  $\partial_t$  et  $\partial_\tau$  désignent respectivement les dérivées partielles par rapport au temps lent et au temps rapide, reprises par les notations abrégées  $\bullet$  et  $\bullet'$ .

En outre, on suppose que **la variable  $\alpha(t, \tau)$  est périodique par rapport à la variable de temps rapide  $\tau$**  ; évaluée en termes de cette dernière, la période rapide devient alors  $1/F$  et on écrit que :

$$\alpha(t, \tau) = \alpha\left(t, \tau + \frac{1}{F}\right) \quad \forall t, \tau \quad (3.3)$$

Là encore, **cette hypothèse sera d'autant plus juste que le rapport  $\xi$  est petit**. Elle n'est bien sûr correcte que si la composante rapide de la sollicitation est périodique. Il n'est pas requis, par contre, que la sollicitation lente le soit : on verra dans le paragraphe 3.2.1 que, dans le cas extrême d'une sollicitation lente nulle (correspondant au cas de la fatigue à grand nombre de cycles, ou HCF – *High Cycle Fatigue*), les résultats sont encore valides.

Après avoir défini ces deux hypothèses, dites de séparation des échelles (3.2) et de quasi-périodicité (3.3), il reste enfin à définir comment on va passer d'une échelle à l'autre. On introduit pour cela la **moyenne sur une période rapide** :

$$\langle \alpha \rangle = F \int_0^{\frac{1}{F}} \alpha(t, \tau) d\tau \quad (3.4)$$

La quantité  $\langle \alpha \rangle$  ainsi obtenue ne dépend donc plus que du temps lent. Le résidu associé à cette opération est alors noté :  $\alpha^* = \alpha - \langle \alpha \rangle$  et dépend des deux échelles de temps *a priori*. En pratique, l'homogénéisation se fera à l'aide de cette moyenne, et en remarquant que **la propriété de quasi-périodicité (3.3) peut s'écrire de manière équivalente** comme :

$$\langle \alpha' \rangle = 0 \quad (3.5)$$

### Développement asymptotique du problème d'évolution

Le problème que l'on cherche à traiter consiste à déterminer dans le domaine  $\Omega$  les champs de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \tau)$ , de déformation totale  $\varepsilon(\mathbf{x}, t, \tau)$ , de déformation plastique  $\varepsilon^P(\mathbf{x}, t, \tau)$  et de contrainte  $\sigma(\mathbf{x}, t, \tau)$  au cours du temps. Ceux-ci vérifient les équations suivantes :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \sigma + \mathbf{f}_v = \rho d_t^2 \mathbf{u} \quad (3.6a)$$

$$\sigma = \mathcal{C} (\varepsilon - \varepsilon^P) \quad (3.6b)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^T) \quad (3.6c)$$

$$d_t \varepsilon^P = a(\sigma) \quad (3.6d)$$

où  $\text{Div}_{\mathbf{x}}$  et  $\mathbb{D}_{\mathbf{x}}$  désignent respectivement les opérateurs divergence et gradient par rapport à la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . Tandis que  $\rho$ ,  $\mathcal{C}$  et  $a$  caractérisent le matériau (masse volumique, tenseur d'élasticité et loi d'évolution viscoplastique respectivement), les chargements peuvent être de deux natures : une force volumique  $\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t, \tau)$  en tout point de  $\Omega$  et une force surfacique  $\mathbf{f}_s(\mathbf{x}, t, \tau)$  sur sa frontière  $\partial\Omega$  :

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad (3.6e)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire extérieure en chaque point de  $\partial\Omega$ . Bien sûr, il est possible de n'avoir cette force imposée que sur une partie de la frontière, et d'imposer dans ce cas un déplacement sur la partie complémentaire de la frontière : ceci sera d'ailleurs présenté dans les exemples du paragraphe 3.2. Enfin, des conditions initiales nulles sont imposées en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega$ , sans que ceci soit restrictif pour la suite de la méthode :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0, 0) = \mathbf{0} \quad d_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \varepsilon^p(\mathbf{x}, 0, 0) = 0 \quad (3.6f)$$

Nous allons de façon classique **introduire dans le système d'équations (3.6) une décomposition asymptotique de chaque champ inconnu en fonction des puissances du rapport  $\xi$** . Par exemple, pour le champ des contraintes, nous obtenons à l'ordre deux l'expression :

$$\sigma(\mathbf{x}, t, \tau) = \sigma_0(\mathbf{x}, t, \tau) + \xi \sigma_1(\mathbf{x}, t, \tau) + \xi^2 \sigma_2(\mathbf{x}, t, \tau) + O(\xi^3) \quad (3.7)$$

Au préalable, il est important d'adimensionnaliser les équations du système (3.6), de façon à pouvoir équilibrer ordre par ordre les différentes relations. Nous allons détailler ci-dessous les traitements de l'équation d'équilibre dynamique (3.6a) et de l'équation d'évolution (3.6d).

### Équation d'équilibre dynamique (3.6a)

La normalisation de l'équation (3.6a) permet d'écrire que les différentes quantités adimensionnalisées, surmontées du symbole  $\hat{\bullet}$ , vérifient :

$$\text{Div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\sigma} + \frac{f_v L}{\|\mathcal{C}\|} \hat{\mathbf{f}}_v = \frac{\rho L^2 F^2}{\|\mathcal{C}\|} d_t^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

où  $L$  est la taille caractéristique du domaine  $\Omega$ ,  $f_v$  désigne l'ordre de grandeur de la force volumique, et  $\|\mathcal{C}\|$  représente une norme représentative de l'ordre de grandeur du tenseur d'élasticité.

En utilisant la décomposition asymptotique du champ de déplacement adimensionnalisé avec la formule de dérivation temporelle (3.2), le terme d'accélération prend, à l'ordre un, la forme suivante :

$$d_t^2 \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\xi^2} \hat{\mathbf{u}}_0'' + \frac{1}{\xi} \left( 2\hat{\mathbf{u}}_0' + \hat{\mathbf{u}}_1'' \right) + \left( \hat{\mathbf{u}}_0 + 2\hat{\mathbf{u}}_1' + \hat{\mathbf{u}}_2'' \right) + \xi \left( \hat{\mathbf{u}}_1 + 2\hat{\mathbf{u}}_2' + \hat{\mathbf{u}}_3'' \right) + O(\xi^2) \quad (3.9)$$

tandis que, dans le cas courant où l'on a  $f_v L / \|\mathcal{C}\| \leq O(1)$ , le membre de gauche de l'équation (3.6a) ne présente que des termes d'ordre zéro ou plus en  $\xi$ .

Suivant l'ordre de grandeur du terme  $\rho L^2 F^2 / ||C||$ , différentes situations peuvent alors se produire. Si ce dernier est d'ordre inférieur ou égal à un en  $\xi$ , alors le terme en  $1/\xi^2$  dans l'expression de l'accélération doit nécessairement s'annuler, ce qui a comme conséquence que le déplacement à l'ordre zéro ne peut dépendre que du temps lent. Ceci entraîne donc que toutes les quantités à l'ordre zéro ne dépendent également que de la variable  $\hat{t}$ , **ce qui empêche la séparation des échelles**.

Dans ce qui suit, nous serons dans le cas favorable, et courant pour les applications traitées, où l'on peut supposer que :

$$\frac{\rho L^2 F^2}{||C||} = \beta \xi^2 \quad (3.10)$$

où  $\beta \leq O(1)$ . Ceci revient à écrire que  $L/\lambda = \sqrt{\beta}\xi$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde des ondes de fréquence  $F$  se propageant dans le domaine (par exemple, pour des ondes de cisaillement, on prendra pour  $||C||$  la valeur du module de cisaillement). Ainsi, **cette hypothèse est valide si le rapport entre la taille du domaine et la longueur d'onde est d'ordre supérieur ou égal à un en  $\xi$** . Selon la valeur de  $\xi$ , il est alors possible de consulter sur des diagrammes d'Ashby, tels que celui de la figure 3.4(a) (page 89) qui classe masses volumiques et modules de Young, quels matériaux vérifient cette hypothèse, pour une fréquence  $F$  et une taille  $L$  de domaine données.

En utilisant cette hypothèse (3.10), **le second membre de l'équation d'équilibre dynamique (3.6a) s'écrit finalement à l'ordre un comme :**

$$d_t^2 \mathbf{u} = \frac{\beta ||C||}{L^2 F^2} \mathbf{u}_0'' + \xi \frac{\beta ||C||}{L^2 F^2} (2\dot{\mathbf{u}}_0' + \mathbf{u}_1'') + O(\xi^2) \quad (3.11)$$

ce qui entraîne la disparition des termes d'ordres négatifs. L'exemple académique du paragraphe 3.2.1 permettra d'analyser plus avant cette hypothèse. En utilisant l'hypothèse de quasi-périodicité (3.5), on aboutira ultérieurement à l'équation homogénéisée d'ordre zéro (3.16a), qui traduit un problème quasi-statique.

**Ce type d'analyse dimensionnelle est également employé en homogénéisation périodique en espace :** ainsi, [Auriault *et al.* 2009] décrivent la situation analogue d'une barre dont le module de Young présente une variation à l'échelle microscopique, de période  $l_c$ , et concluent que trois cas existent suivant la longueur d'onde  $\lambda$  associée à l'onde parcourant la barre :

- si  $(2\pi l_c/\lambda)^2 \geq O(\xi)$ , alors le problème ne peut pas être homogénéisé, car les deux échelles d'espace ne sont pas séparables dans ce cas, et le calcul doit être mené à l'échelle la plus fine ;
- si  $(2\pi l_c/\lambda)^2 = O(\xi^2)$ , alors le problème d'ordre zéro est dynamique, et c'est ce cas le plus riche qui constitue en fait la limite des situations qui peuvent être homogénéisées ;
- si  $(2\pi l_c/\lambda)^2 \leq O(\xi^3)$ , alors le problème d'ordre zéro est quasi-statique, la propagation d'onde n'apparaissant qu'à l'ordre un en  $\xi$ .

Dans ces expressions,  $\xi$  désigne bien sûr le rapport entre les deux échelles spatiales. On peut noter également que le travail de thèse [Lévy 2010] traite également le cas de la prise en compte des termes d'inertie et de leur ordre de grandeur associé, sans toutefois que ces derniers n'apparaissent à l'ordre zéro, ce qui revient à traiter les équations de cet ordre de façon quasi-statique.

### Équation d'évolution (3.6d)

La même étude dimensionnelle peut être menée sur l'équation (3.6d) : pour la plupart des lois d'évolution, on constate que la relation (3.6d) donne à l'ordre un :

$$\frac{1}{\xi} \dot{\varepsilon}_0^p + (\dot{\varepsilon}_0^p + \varepsilon_1^{p'}) + \xi (\dot{\varepsilon}_1^p + \varepsilon_2^{p'}) + O(\xi^2) = a(\sigma_0) + \xi \sigma_1 D_\sigma a(\sigma_0) + O(\xi^2) \quad (3.12)$$

où  $D_\sigma a(\sigma_0)$  est la dérivée directionnelle en  $\sigma_0$  de  $a$  par rapport à  $\sigma$ .

Le premier ordre à considérer est en  $1/\xi$ , conduisant à  $\dot{\varepsilon}_0^{p'} = 0$ , ou, autrement dit, au fait que la déformation plastique à l'ordre zéro ne peut dépendre que de la variable de temps lent :

$$\varepsilon_0^p(\mathbf{x}, t, \tau) = \varepsilon_0^p(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

Physiquement, ceci revient à dire que **la viscoplasticité est un phénomène qui se développe lentement**, et ce, même si la structure est soumise à un chargement à haute fréquence. **C'est l'ordre suivant qui permet de décrire cette évolution lente** : à l'ordre zéro, l'équation d'évolution (3.6d) donne :

$$\dot{\varepsilon}_0^p + \varepsilon_1^{p'} = a(\sigma_0) \quad (3.14)$$

Si l'on prend la moyenne (3.4) de cette relation, et que l'on utilise simultanément le résultat  $\langle \dot{\varepsilon}_0^p \rangle = \dot{\varepsilon}_0^p$ , conséquence de la relation (3.13), et le fait que  $\langle \varepsilon_1^{p'} \rangle = 0$ , issu de l'hypothèse de quasi-périodicité (3.5), on obtient finalement la relation vérifiée par la déformation plastique d'ordre zéro :

$$\dot{\varepsilon}_0^p = \langle a(\sigma_0) \rangle \quad (3.15)$$

avec une condition initiale nulle. Il est important de souligner que, puisque la loi d'évolution  $a$  n'est pas nécessairement linéaire, on a  $\langle a(\sigma_0) \rangle \neq a(\langle \sigma_0 \rangle)$ . La résolution de la relation (3.15) passera donc par la résolution d'un système d'équations complémentaire au système d'équations homogénéisées, comme on le verra par la suite.

### Problème d'ordre zéro homogénéisé en temps

Finalement, le système d'équations à résoudre à l'échelle de temps lente est le suivant :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \langle \sigma_0 \rangle + \langle \mathbf{f}_v \rangle = \mathbf{0} \quad (3.16a)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle = \mathcal{C} (\langle \varepsilon_0 \rangle - \varepsilon_0^p) \quad (3.16b)$$

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}_0 \rangle + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}_0 \rangle^T) \quad (3.16c)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle \mathbf{n} = \langle \mathbf{f}_s \rangle \quad (3.16d)$$

auquel s'ajoute l'équation d'évolution à l'ordre zéro (3.15). **Le problème à traiter est ainsi un problème quasi-statique**, où les chargements en présence sont les composantes à basse fréquence des forces volumique et surfacique.

Les composantes à haute fréquence de ces forces interviennent bien sûr dans le problème homogénéisé, par l'intermédiaire de l'équation d'évolution (3.15) qui fait intervenir le champ de contraintes « instantané »  $\sigma_0(\mathbf{x}, t, \tau)$ , et non sa version homogénéisée  $\langle \sigma_0 \rangle(\mathbf{x}, t)$ ; en posant conformément aux notations que :

$$\sigma_0(\mathbf{x}, t, \tau) = \langle \sigma_0 \rangle(\mathbf{x}, t) + \sigma_0^*(\mathbf{x}, t, \tau) \quad (3.17)$$

il est nécessaire de calculer le « résidu »  $\sigma_0^*(\mathbf{x}, t, \tau)$ , qui vérifie le système suivant, obtenu par soustraction du système homogénéisé (3.16) au système de référence (3.6) :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \sigma_0^* + \mathbf{f}_v^* = \frac{\beta \|\mathcal{C}\|}{L^2 F^2} \mathbf{u}_0'' \quad (3.18a)$$

$$\sigma_0^* = \mathcal{C} \varepsilon_0^* \quad (3.18b)$$

$$\varepsilon_0^* = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_0^* + \mathbb{D}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{u}_0^*) \quad (3.18c)$$

$$\sigma_0^* \mathbf{n} = \mathbf{f}_s^* \quad (3.18d)$$

$$\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t, 0) \text{ solution « QS » de (3.18), et } \mathbf{u}_0^{*'}(\mathbf{x}, t, 0) = \mathbf{0} \quad (3.18e)$$

Cette fois-ci, **il s'agit bien de résoudre, à l'échelle de temps rapide  $\tau$ , un problème dynamique, mais avec une relation de comportement élastique**. Tout se passe formellement comme si l'on avait classé les phénomènes selon leurs temps caractéristiques : la viscoplasticité du côté de l'échelle de temps lente, et l'effet vibratoire des termes d'inertie du côté de l'échelle de temps rapide. Les deux échelles sont réunies par l'équation d'évolution (3.15) qui prend en compte de façon moyennée à l'échelle de temps lent tous ces effets ensemble.

La question des conditions initiales mérite d'être détaillée un peu. Pour le problème rapide, elles sont liées aux chargements appliqués (surfaciques et volumiques)  $\mathbf{f}_{s,v}^*(\mathbf{x}, t, 0)$  à l'instant rapide  $\tau = 0$ , tandis que la variable de temps lente  $t$  est fixée. Dans le cas quasi-statique, correspondant à  $\beta = 0$  dans l'équation (3.18a), il n'y a alors pas de conditions initiales à proprement parler :  $\mathbf{u}_0^*$  est directement la solution quasi-statique du système (3.18) pour chaque instant rapide  $\tau$ . Dans le cas dynamique, **la condition initiale en déplacement peut en fait s'interpréter comme la solution quasi-statique du système (3.18) correspondant aux chargements initiaux** qui agissent donc comme des précharges :  $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t, 0)$  est alors la solution quasi-statique correspondant aux efforts  $\mathbf{f}_{s,v}^*(\mathbf{x}, t, 0)$ . Pour la condition initiale en vitesse, l'application de la relation (3.2) nous permet de dire immédiatement que  $\mathbf{u}_0^{*'}(\mathbf{x}, t, 0) = \mathbf{0}$ , vu qu'il s'agit du seul terme en  $1/\xi$  dans le développement asymptotique associé. Des raisonnements précédents, on déduit enfin la **condition initiale en déplacement pour le problème lent** :

$$\langle \mathbf{u}_0 \rangle(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, 0, 0) \quad (3.16e)$$

qui est la seule condition requise, vu que le problème homogénéisé d'ordre zéro (3.16) est quasi-statique.

Dans le cas d'un chargement de type CCF, obtenu par superposition de deux sollicitations périodiques (l'une lente, l'autre rapide), il est possible de résoudre de façon indépendante le problème rapide : en effet, comme  $\mathbf{f}_{s,v}(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{f}_{s,v,l}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_{s,v,r}(\mathbf{x}, \tau)$ , les chargements résiduels

ne dépendent que du temps rapide :  $\mathbf{f}_{s,v}^*(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{f}_{s,v}(\mathbf{x}, \tau)$ . La solution du système (3.18) peut donc être calculée une fois pour toutes, et utilisée directement dans la résolution du système (3.16) d'équations homogénéisées.

### Équations d'ordres supérieurs

En continuant d'exploiter les décompositions asymptotiques des différents champs du problème, **on peut établir, si nécessaire, les équations d'ordres supérieurs**. Par exemple, le système homogénéisé d'ordre un demande de résoudre le système suivant :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \langle \sigma_1 \rangle = 0 \quad (3.19a)$$

$$\langle \sigma_1 \rangle = \mathcal{C} (\langle \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_1^p \rangle) \quad (3.19b)$$

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}_1 \rangle + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}_1 \rangle^T) \quad (3.19c)$$

$$\langle \sigma_1 \rangle \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3.19d)$$

$$\langle \mathbf{u}_1 \rangle (\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}, 0, 0) \quad (3.19e)$$

$$\langle \dot{\varepsilon}_1^p \rangle = \langle \sigma_1 \mathbf{D}_{\sigma} a(\sigma_0) \rangle \quad (3.19f)$$

Comme les efforts extérieurs appliqués  $\mathbf{f}_{s,v}$  et les éventuelles conditions limites en déplacements ont été supposés d'ordre zéro, **le problème précédent admet donc comme solution  $\langle \sigma_1 \rangle = 0$** .

De plus, **la déformation plastique à l'ordre un dépend *a priori* des deux variables de temps. Sa détermination nécessite alors la résolution successive de plusieurs équations** : la première consiste en l'équation résiduelle de l'équation (3.14) d'évolution à l'ordre zéro :

$$\varepsilon_1^{p'} = [a(\sigma_0)]^* \quad (3.20)$$

L'intégration de cette équation par rapport à la variable de temps rapide  $\tau$  nous conduit alors à écrire que :

$$\varepsilon_1^p(\mathbf{x}, t, \tau) = \int_0^{\tau} [a(\sigma_0)]^*(\mathbf{x}, t, \theta) d\theta + g(\mathbf{x}, t) \quad (3.21)$$

avec  $g(\mathbf{x}, t)$  une fonction qui ne dépend que du temps lent  $t$  (et de l'espace). En introduisant cette expression dans la relation (3.19f), on obtient que :

$$\dot{g} = \langle \sigma_1 \mathbf{D}_{\sigma} a(\sigma_0) \rangle \quad (3.22)$$

car, ici, la primitive de  $[a(\sigma_0)]^*$  qui s'annule en  $\tau = 0$  est périodique vis-à-vis du temps rapide  $\tau$ , et sa dérivée par rapport au temps lent  $t$  l'est donc également.

Il est alors nécessaire de connaître la contrainte « instantanée » à l'ordre un  $\sigma_1(\mathbf{x}, t, \tau)$ , qui, ici, est égale au résidu  $\sigma_1^*(\mathbf{x}, t, \tau)$  qui intervient dans le système des résidus associés aux équations (3.19) :

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \sigma_1^* = \frac{\beta \|\mathcal{C}\|}{L^2 F^2} (2\dot{\mathbf{u}}_0^{*'} + \mathbf{u}_1^{*''}) \quad (3.23a)$$

$$\sigma_1^* = \mathcal{C} (\varepsilon_1^* - \varepsilon_1^{p*}) \quad (3.23b)$$

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1^* + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_1^{*T}) \quad (3.23c)$$

$$\sigma_1^* \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3.23d)$$

$$\mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}, t, 0) \text{ solution « QS » de (3.23), et } \mathbf{u}_1^{*'}(\mathbf{x}, t, 0) = -\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, t, 0) \quad (3.23e)$$

La résolution conjointe de l'équation (3.22) et du système (3.23) permet alors d'accéder à la connaissance de la déformation plastique à l'ordre un. On constate que, pour cela, la solution à l'ordre zéro intervient directement dans l'équation résiduelle (3.20) de la déformation à l'ordre zéro et dans la version homogénéisée à l'ordre un (3.19f) de la loi d'évolution. Elle intervient également indirectement par l'intermédiaire du résidu (3.23a) de l'ordre un de l'équation d'équilibre dynamique : le déplacement à l'ordre zéro fait office d'excitation volumique dans l'équation élastoviscoplastique dynamique associée au résidu de l'ordre un.

Dans le cas particulier d'un problème quasi-statique, des simplifications supplémentaires sont possibles. En effet, si les efforts extérieurs appliqués et les éventuelles conditions limites en déplacements sont toujours supposés d'ordre zéro, on trouve que le résidu  $\sigma_1^*$  est nul, ce qui entraîne finalement que  $g(\mathbf{x}, t) = 0$ . Un exemple nécessitant l'utilisation de l'ordre un est présenté à la fin du paragraphe 3.3.2.

### 3.1.3 Extensions proposées

Nous donnons ici quelques compléments à propos de deux voies principales d'extension du cadre général décrit juste avant, qui ont permis d'apporter des modifications requises par des applications spécifiques.

#### Utilisation d'un modèle d'endommagement isotrope

La première extension concerne le remplacement de la loi d'évolution viscoplastique par une loi d'endommagement isotrope, cas qui est très brièvement évoqué dans [Guennouni 1988]. Ceci était nécessaire pour pouvoir aborder la simulation numérique du remodelage osseux dans le travail de thèse [Devulder 2009], et a conduit à une publication dans la revue *Computational Mechanics*, [Devulder *et al.* 2010a].

Le modèle d'endommagement isotrope consiste à supposer que **l'état du matériau peut être caractérisé par un champ scalaire  $d(\mathbf{x}, t, \tau)$**  qui représente en chaque point la réduction du module de Young lié à l'endommagement. La relation de comportement peut alors s'écrire en chaque point comme :

$$\sigma(\mathbf{x}, t, \tau) = (1 - d(\mathbf{x}, t, \tau)) E_0(\mathbf{x}) \mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \tau)) \quad (3.24)$$

où  $E_0(\mathbf{x})$  est le champ spatial de module de Young correspondant au matériau non endommagé. Le tenseur  $\mathcal{C}_0$  tel que  $\mathcal{C}_0 \varepsilon(\mathbf{u}) = \bar{\lambda}(\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u})) I + 2\bar{\mu} \varepsilon(\mathbf{u})$  est le tenseur d'élasticité normalisé, où  $\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$  et  $\bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)}$  (avec  $\nu$  le coefficient de Poisson, supposé homogène).

**Le champ  $d(\mathbf{x}, t, \tau)$  vérifie en chaque point  $\mathbf{x}$  de l'espace une EDO qui fait intervenir l'état de contraintes au même point.** Pour décrire l'endommagement de l'os, nous utilisons une loi inspirée de [Fondrk *et al.* 1999] :

$$d_t d = \frac{B}{\varepsilon_I} \left( \frac{\sigma_I}{\sigma_r} \right)^N (1 - d) \quad (3.25)$$

où  $\sigma_r$  est une contrainte caractéristique et  $B$  et  $N$  sont des paramètres dépendant du matériau.  $\sigma_I$  et  $\varepsilon_I$  désignent respectivement la première contrainte principale et la première déformation principale. Cette loi peut se réécrire en fonction de cette dernière seulement :

$$d_t d = \kappa \varepsilon_I^{N-1} (1 - d)^{N+1} \quad (3.26)$$



avec  $\kappa = BE_0^N \left( \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\sigma_r} \right)^N$ , si l'on suppose que les deux autres déformations principales sont négligeables devant  $\varepsilon_I$ . Les autres équations du système (3.6) demeurent inchangées, à condition de remplacer le tenseur d'élasticité par l'expression  $\mathcal{C} = (1 - d(\mathbf{x}, t, \tau)) E_0(\mathbf{x}) \mathcal{C}_0$ ; on considère de plus que les sollicitations sont suffisamment lentes pour se placer dans un cadre quasi-statique.

L'obtention des équations homogénéisées se fait comme dans le cadre général présenté précédemment, et l'équation d'endommagement conduit à des expressions similaires. On trouve notamment que, à l'ordre zéro, **la variable d'endommagement à l'ordre zéro ne peut dépendre que de la variable de temps lente** :

$$d_0(\mathbf{x}, t, \tau) = d_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.27)$$

et que l'équation d'endommagement s'écrit alors comme :

$$\dot{d}_0 = \kappa \langle \varepsilon_{I0}^{N-1} \rangle (1 - d_0)^{N+1} \quad (3.28)$$

La déformation principale d'ordre zéro  $\varepsilon_{I0}$  qui intervient dans l'équation précédente dépend des deux variables de temps, et peut s'écrire formellement comme :

$$\varepsilon_{I0}(\mathbf{x}, t, \tau) = \varepsilon_I(\langle \mathbf{u}_0 \rangle(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t, \tau)) \quad (3.29)$$

où  $\langle \mathbf{u}_0 \rangle$  est la solution d'un système d'équations homogénéisées à l'ordre zéro semblable au système (3.16) (à l'expression du tenseur d'élasticité près) complété de l'équation (3.28).

Contrairement au cadre général, **le résidu  $\mathbf{u}_0^*$  dépend ici des deux variables de temps**, et ce, même si le chargement est du type CCF. En effet, le champ d'endommagement  $d_0(\mathbf{x}, t)$  intervient dans le résidu de l'équation d'équilibre, dont l'expression est semblable à la relation (3.18a). Il devient donc nécessaire de résoudre le système rapide résultant, similaire à (3.18), à chaque pas de temps lent. Le surcoût reste toutefois raisonnable par comparaison avec le problème de référence où les équations sont résolues à chaque pas de temps rapide.

Quelques détails sur la mise en oeuvre numérique et les résultats associés sont donnés dans le paragraphe 3.2.3.

#### Utilisation de trois échelles de temps

Une deuxième extension a été proposée dans [Puel et Aubry 2012] pour le cas de chargements de type CCF, afin de réduire le coût de calcul une fois de plus, avec un gain équivalent à celui obtenu avec l'application de la méthode d'homogénéisation présentée plus haut. **Il s'agit de tirer parti du fait que les chargements lents  $\mathbf{f}_{s,v1}(\mathbf{x}, t)$  sont eux-mêmes périodiques**, ce qui permet d'appliquer de nouveau le principe de l'homogénéisation périodique au système homogénéisé (3.16).

Pour cela, on considère une troisième échelle de temps, représentée par la variable de temps  $\theta$ , que l'on qualifiera de « super lente » faute de qualificatif plus approprié. Pour la définir, on suppose formellement que cette variable peut s'écrire comme :

$$\theta = \eta t \quad (3.30)$$

où  $\eta$  est arbitrairement petit. Comme nous l'avons déjà précisé dans le paragraphe 3.1.1, l'utilisation d'échelles multiples se rencontre notamment dans les problèmes de perturbations : on pourra ainsi trouver dans [Holmes 2013] un certain nombre d'exemples mettant en œuvre trois échelles de temps.

Ici, **plutôt que d'introduire en une seule fois ces échelles, nous préférons appliquer en deux temps la méthode d'homogénéisation périodique** : le point de départ est le système homogénéisé (3.16), qui ne dépend explicitement que de la variable de temps lente  $t$ . La variable  $\theta$  est alors introduite pour faire l'homogénéisation de ce dernier problème. En pratique, il faudra faire en sorte que le système « super homogénéisé » soit résolu pour des pas de temps beaucoup plus grands que ceux qui permettaient de résoudre initialement le système (3.16).

Avec l'hypothèse que les deux variables de temps  $(\theta, t)$  sont indépendantes, une nouvelle relation de séparation des variables peut être établie, en écrivant pour une variable  $\alpha(\theta, t)$  préalablement homogénéisée que :

$$d_t \alpha = \partial_\theta \alpha + \frac{1}{\eta} \partial_t \alpha = \tilde{\alpha} + \frac{1}{\eta} \dot{\alpha} \quad (3.31)$$

Une hypothèse de quasi-périodicité est de nouveau supposée, s'appuyant sur la périodicité des chargements lents  $\mathbf{f}_{s, \text{vl}}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\alpha(\theta, t) = \alpha \left( \theta, t + \frac{1}{F} \right) \quad \forall \theta, t \quad (3.32)$$

qui peut se réécrire, en introduisant la moyenne sur une période lente, comme :

$$[\tilde{\alpha}] = F \int_0^{\frac{1}{F}} \tilde{\alpha}(\theta, t) dt = 0 \quad (3.33)$$

L'homogénéisation est effectuée comme précédemment, en introduisant pour chaque variable homogénéisée du système d'équations (3.16) une décomposition asymptotique en puissances de  $\eta$ , comme, par exemple, pour le champ de contraintes homogénéisé d'ordre zéro :

$$\langle \sigma_0 \rangle(\mathbf{x}, \theta, t) = \sigma_{00}(\mathbf{x}, \theta, t) + \eta \sigma_{01}(\mathbf{x}, \theta, t) + O(\eta^2) \quad (3.34)$$

Sans entrer plus dans les détails, que l'on pourra trouver dans [Puel et Aubry 2012], on peut montrer que **la déformation plastique « super-homogénéisée » d'ordre « zéro-zéro » ne peut dépendre que du temps « super lent »** :

$$\varepsilon_{00}^p(\mathbf{x}, \theta, t) = \varepsilon_{00}^p(\mathbf{x}, \theta) \quad (3.35)$$

et que le système final à résoudre à l'échelle de la variable de temps « super lente »  $\theta$  peut s'écrire comme :

$$\mathbf{Div}_{\mathbf{x}} [\sigma_{00}] + [\langle \mathbf{f}_v \rangle] = \mathbf{0} \quad (3.36a)$$

$$[\sigma_{00}] = \mathcal{C} ([\varepsilon_{00}] - \varepsilon_{00}^p) \quad (3.36b)$$

$$[\varepsilon_{00}] = \frac{1}{2} (\mathbb{D}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}_{00}] + \mathbb{D}_{\mathbf{x}} [\mathbf{u}_{00}]^T) \quad (3.36c)$$

$$[\sigma_{00}] \mathbf{n} = [\langle \mathbf{f}_s \rangle] \quad (3.36d)$$

$$[\mathbf{u}_{00}](\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{u}_{00}^{**}(\mathbf{x}, 0, 0) \quad (3.36e)$$

$$\check{\varepsilon}_{00}^p = [\langle a([\sigma_{00}] + \sigma_{00}^{**} + \sigma_0^*) \rangle] \quad (3.36f)$$

Il faut noter que l'équation d'évolution (3.36f) requiert la résolution d'un système résiduel d'équations obtenu en soustrayant au système homogénéisé initial (3.16) les équations (3.36) que l'on vient d'établir, selon le principe que le déplacement, par exemple, s'écrit comme  $\mathbf{u}_{00}(\mathbf{x}, \theta, t) = [\mathbf{u}_{00}](\mathbf{x}, \theta) + \mathbf{u}_{00}^{**}(\mathbf{x}, \theta, t)$ . Une application sur un cas académique est présentée à la fin du paragraphe 3.2.1.

## 3.2 Application : simulation temporelle de la fatigue à cycles combinés

Une application pour laquelle l'utilisation de la méthode d'homogénéisation périodique en temps se révèle toute indiquée est la simulation numérique de la fatigue vibratoire. En effet, dès lors que les fréquences de sollicitation sont élevées et que les effets d'inertie doivent être pris en compte, **il peut être délicat d'utiliser les méthodes classiques d'estimation de durée de vie à base de formules de cumuls de cycles**, telles que celles évoquées par [Fatemi et Yang 1998]. Ces dernières sont également insuffisantes pour une bonne prise en compte de l'effet d'histoire associé au chargement.

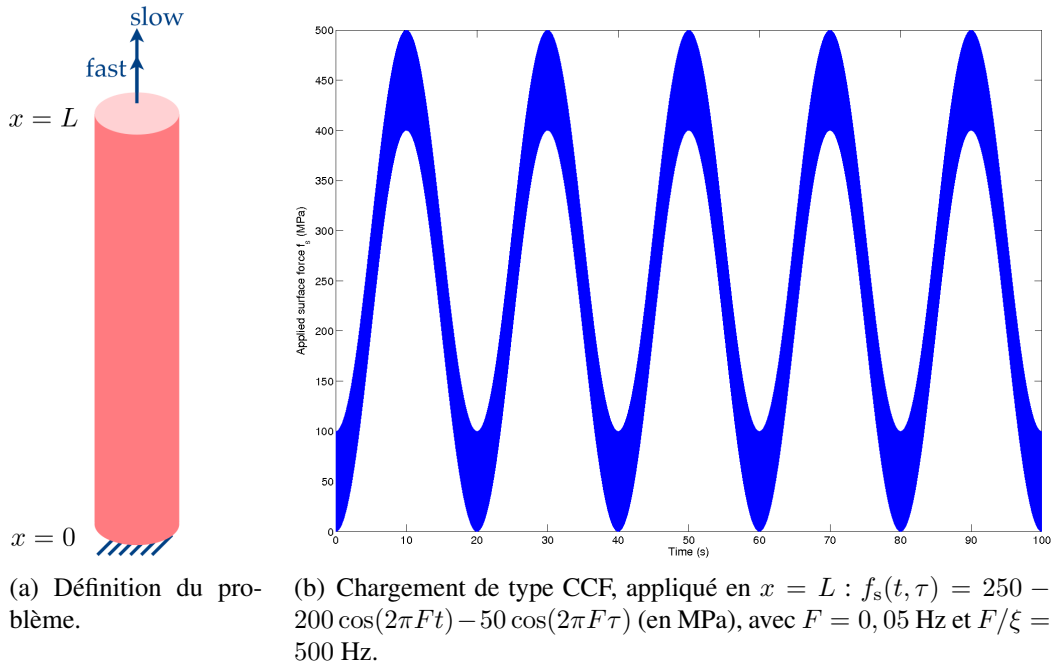
Ainsi, **pouvoir simuler l'évolution temporelle de la structure et de ses variables internes au cours des cycles** devrait permettre une meilleure prise en compte de ces effets. **Le principal inconvénient d'une telle démarche, toutefois, réside naturellement dans le coût de calcul associé** : en effet, en adoptant le critère usuel et empirique de dix pas de temps par cycle de chargement rapide, le nombre de pas de temps à calculer peut devenir astronomique dès que l'on s'intéresse à la durée de vie en fatigue d'une structure. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser la méthode d'homogénéisation périodique en temps pour traiter de tels problèmes.

De plus, outre le fait de réduire le coût de calcul, un avantage majeur de cette méthode est qu'**elle propose un cadre mathématique rigoureux à l'estimation de l'évolution des différentes variables** du problème sur un intervalle de temps long, ce qui n'est pas nécessairement le cas de méthodes alternatives plus simples, telles que les méthodes de « saut de cycle ». Ainsi, [Cojocaru et Karlsson 2006] tentent d'extrapoler un nombre déterminé de cycles rapides à partir de la simulation exacte d'un petit nombre d'entre eux, et, pour fixer ce nombre déterminé, se donnent un critère de précision, qui n'est qu'empirique ; malgré celui-ci, il s'avère que pour des évolutions fortement non linéaires à l'échelle lente, il peut devenir requis de calculer de nombreux cycles rapides, ce qui compromet quelque peu l'efficacité de la méthode.

Dans ce qui suit, nous proposons trois cas d'application qui relèvent de la simulation de la fatigue à cycles combinés, qui met en jeu des sollicitations bifréquentielles.

### 3.2.1 Barre soumise à un chargement normal bifréquentiel

Cet exemple permet de **valider la stratégie d'homogénéisation périodique en temps** en rendant possible la comparaison des résultats obtenus par cette dernière avec ceux issus d'un calcul de référence effectué sur des pas de temps très petits : en effet, dans la plupart des cas présentés ici, le coût de calcul associé à la résolution de ce problème de référence reste suffisamment raisonnable pour qu'il soit effectivement résolu de manière classique. La validation peut alors porter sur les différentes hypothèses effectuées lors de la mise en place de la stratégie.



**Figure 3.1** – Barre soumise à un chargement normal bifréquentiel.

#### Problème de référence

La barre considérée est rectiligne, de longueur  $L = 1$  m et de section constante : elle est encastée à un support fixe en  $x = 0$  et soumise à une force normale surfacique  $f_s$  à son autre extrémité, en  $x = L$ , comme précisé sur la figure 3.1(a). Cette force est caractéristique de ce qui est appliqué dans le cas de la fatigue CCF : elle est la somme de deux sollicitations périodiques, de fréquences lente  $F$  et rapide  $F/\xi$ , et peut donc s'écrire comme :

$$f_s(t, \tau) = f_{sl}(t) + f_{sr}(\tau) = \langle f_s \rangle(t) + f_s^*(\tau) \quad (3.37)$$

Un exemple de ce type de chargement est représenté sur la figure 3.1(b). En outre, aucun effort réparti n'est appliqué à la barre.

Le problème de référence à résoudre concerne alors la détermination du déplacement longitudinal  $u(x, t, \tau)$ , de la contrainte normale  $\sigma(x, t, \tau)$  et de la déformation plastique longitudinale  $\varepsilon^p(x, t, \tau)$  dans toute section d'abscisse  $x \in [0; L]$  de la barre. Le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\partial_x \sigma = \rho d_t^2 u \quad (3.38a)$$

$$\sigma = E (\partial_x u - \varepsilon^p) \quad (3.38b)$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad (3.38c)$$

$$\sigma|_{x=L} = f_s \quad (3.38d)$$

$$u|_{t=0, \tau=0} = 0 = d_t u|_{t=0, \tau=0} \quad (3.38e)$$

$$d_t p = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - k}{K} \right\rangle_+^n \quad (3.38f)$$

$$d_t \varepsilon^p = d_t p \operatorname{sign}(\sigma - X) \quad (3.38g)$$

$$d_t X = \frac{2}{3} C d_t \varepsilon^p - \gamma_0 d_t p X \quad (3.38h)$$

$$d_t R = b(Q - R) d_t p \quad (3.38i)$$

où  $\rho$  et  $E$  sont respectivement la masse volumique et le module de Young, supposés homogènes, du matériau constitutif. Les équations d'évolution (3.38f)-(3.38g)-(3.38h)-(3.38i) correspondent à l'expression uniaxiale d'un **modèle viscoplastique à deux écrouissages** proposé dans [Lemaitre et Chaboche 1990] : elles font intervenir le taux de déformation plastique équivalente  $d_t p(x, t, \tau)$ , et les variables d'écrouissage cinématique  $X(x, t, \tau)$  et isotrope  $R(x, t, \tau)$ , tous initialement nuls, ainsi que des constantes  $k, K, n, C, \gamma_0, b$  et  $Q$  caractéristiques du matériau constitutif. Enfin,  $\langle \alpha \rangle_+$  désigne la partie positive de  $\alpha$ , définie comme  $(\alpha + |\alpha|)/2$ .

### Problème homogénéisé d'ordre zéro

En suivant les mêmes étapes que dans le paragraphe 3.1.2, des équations similaires sont obtenues. En particulier, on établit que **les variables internes  $p_0, \varepsilon_0^p, X_0$  et  $R_0$  associées aux différentes lois d'évolution ne peuvent dépendre que de la variable de temps lente**. En faisant l'hypothèse supplémentaire (3.10) sur les ordres de grandeur relatifs des différents paramètres intervenant dans le problème (avec, ici,  $\|C\| = E$ ), on obtient des équations homogénéisées d'ordre zéro traduisant un **problème d'évolution élastoviscoplastique quasi-statique** :

$$\partial_x \langle \sigma_0 \rangle = 0 \quad (3.39a)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle = E (\partial_x \langle u_0 \rangle - \varepsilon_0^p) \quad (3.39b)$$

$$\langle u_0 \rangle|_{x=0} = 0 \quad (3.39c)$$

$$\langle \sigma_0 \rangle|_{x=L} = \langle f_s \rangle \quad (3.39d)$$

$$\langle u_0 \rangle|_{t=0} = -u_0^*|_{t=0, \tau=0} \quad (3.39e)$$

$$\dot{p}_0 = \left\langle \left\langle \frac{|\sigma_0 - X_0| - R_0 - k}{K} \right\rangle_+^n \right\rangle \quad (3.39f)$$

$$\dot{\varepsilon}_0^p = \left\langle \left\langle \frac{|\sigma_0 - X_0| - R_0 - k}{K} \right\rangle_+^n \operatorname{sign}(\sigma_0 - X_0) \right\rangle \quad (3.39g)$$

$$\dot{X}_0 = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_0^p - \gamma_0 \dot{p}_0 X_0 \quad (3.39h)$$

$$\dot{R}_0 = b(Q - R_0) \dot{p}_0 \quad (3.39i)$$

Les équations résiduelles, qui interviennent dans le calcul de la contrainte normale « instantanée » (3.17) utilisée dans les lois d'évolution (3.39f) et (3.39g), s'écrivent alors sous la forme d'un **problème élastique en dynamique** :

$$\partial_x \sigma_0^* = \frac{\beta E}{L^2 F^2} u_0^{*''} \quad (3.40a)$$

$$\sigma_0^* = E \partial_x u_0^* \quad (3.40b)$$

$$u_0^*|_{x=0} = 0 \quad (3.40c)$$

$$\sigma_0^*|_{x=L} = f_s^* \quad (3.40d)$$

$$u_0^*|_{\tau=0} \text{ solution « QS » de (3.40), et } u_0^*|_{\tau=0}' = 0 \quad (3.40e)$$

Compte tenu du chargement de type CCF, **ces équations ne dépendent que de la variable de temps rapide  $\tau$** , et peuvent donc être résolues indépendamment des équations homogénéisées d'ordre zéro. Ici, la résolution pourrait être explicite, par projection sur la base modale par exemple, mais, dans le cas général, une simulation numérique temporelle ou fréquentielle est requise.

Les calculs de moyenne sur une période rapide, intervenant dans les lois d'évolution (3.39f) et (3.39g), peuvent alors être menés à l'aide d'une formule de quadrature numérique, telle que la **formule des trapèzes** à  $N + 1$  points :

$$\langle \alpha \rangle (t) \approx \frac{1}{N} \left( \frac{\alpha(t, 0)}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \alpha \left( t, \frac{j}{N} \frac{1}{F} \right) + \frac{\alpha(t, \frac{1}{F})}{2} \right) \quad (3.41)$$

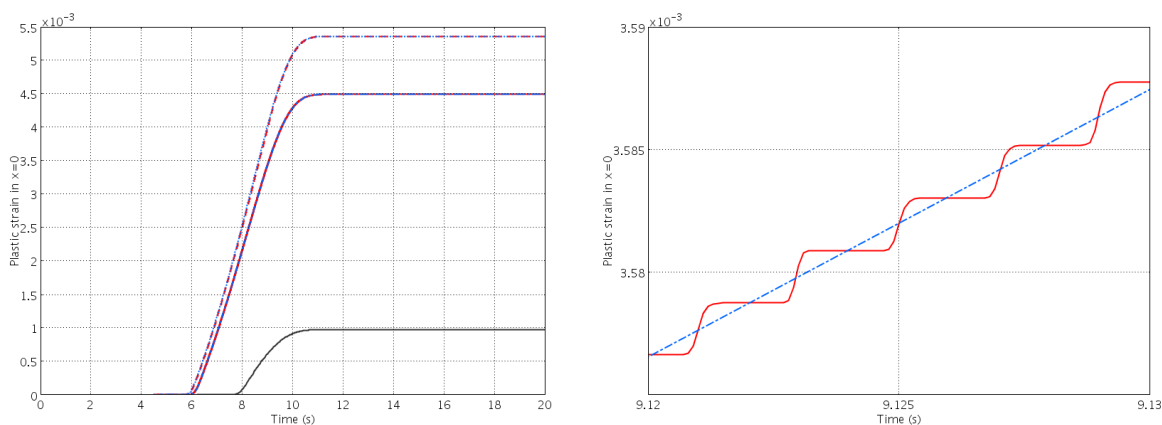
Ce choix, qui semble lié à la simplicité de la formule, peut en fait se justifier par les conclusions de [Weideman 2002] qui montre que la formule des trapèzes converge extrêmement rapidement dans le cas de l'intégration de fonctions périodiques  $C^\infty$ , ce qui est le cas ici, et que, en conséquence, **il n'y aurait pas de gain appréciable à utiliser une formule de quadrature numérique plus élaborée**, telle que la formule de Simpson par exemple, ou encore des formules de Gauss.

### Résultats de validation

Le matériau considéré dans ce qui suit est l'alliage de titane TA6V, dont les propriétés à 350°C sont bien connues et définies dans [Lemaitre et Chaboche 1990] : ce matériau est choisi car il est très proche de l'alliage utilisé dans les aubes de turbines étudiées dans le cadre du projet européen PREMECCY, dont les détails sont donnés dans le paragraphe 3.2.2.

Les calculs de référence consistent à résoudre le système (3.38) sur un intervalle de temps  $[0; 20]$ s correspondant à la première période lente du chargement. **La bonne précision des résultats calculés est garantie par le choix d'un pas de temps très petit** ( $10^{-4}$ s), égal au vingtième de la période de la sollicitation rapide. Le logiciel COMSOL, utilisé ici, propose une méthode implicite basée sur l'algorithme de résolution DASPK, destiné à la résolution d'équations algébriques différentielles (*Differential Algebraic Equation* ou DAE) : celui-ci, basé sur des formules de différenciation arrière (*Backward Differentiation Formula* ou BDF) d'ordres et de pas variables, est détaillé dans [Brown *et al.* 1994].

La résolution du système homogénéisé d'ordre zéro (3.39) est effectuée à l'aide du même algorithme de résolution que précédemment, mais pour des pas de temps imposés de 0,04s, **ce qui représente 400 fois moins d'itérations que pour les calculs de référence**. Les résultats sont comparés sur la figure 3.2(a) où l'on a tracé l'évolution temporelle de la déformation plastique longitudinale en  $x = 0$  pour les cas dynamique et quasi-statique : pour cette dernière situation, on a simplement supposé que  $\rho = 0$  dans l'équation (3.38a) du problème de référence, ce qui revient à considérer que  $\beta = 0$  dans l'équation (3.39a) du problème homogénéisé d'ordre zéro.



(a) Solutions de référence (en rouge) et homogénéisées d'ordre zéro (en bleu) pour les cas dynamique et quasi-statique.

(b) Zoom de la figure 3.2(a) (mêmes conventions).

**Figure 3.2** – Déformation plastique longitudinale en  $x = 0$  (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel).

Dans les deux cas, **la correspondance entre les courbes est excellente**. Le tableau 3.1 permet d'en juger de manière plus précise, de même que la figure 3.2(b) qui est un zoom arbitraire de la figure 3.2(a) ; ce dernier permet notamment de constater que l'évolution de la déformation plastique homogénéisée se fait de façon lisse à l'échelle de temps lente, tandis que la déformation plastique de référence augmente de façon cyclique, à chaque période de la composante rapide de la sollicitation. L'écart entre les courbes est légèrement plus sensible dans le cas dynamique : ceci est probablement dû à la résolution du problème résiduel (3.40) qui, pour des raisons d'implémentation sous COMSOL, se fait dans le domaine fréquentiel ; de fait, la réponse libre du système, qui n'est pas forcément négligeable, n'est pas prise en compte dans l'estimation de la contrainte totale instantanée intervenant dans les équations (3.39f) et (3.39g).

Simulations	$x = 0$	$x = L$
Problème de référence en dynamique	$5,361 \cdot 10^{-3}$	$4,654 \cdot 10^{-3}$
Problème homogénéisé d'ordre zéro en dynamique	$5,389 \cdot 10^{-3}$	$4,595 \cdot 10^{-3}$
Problème de référence en quasi-statique	$4,491 \cdot 10^{-3}$	$4,491 \cdot 10^{-3}$
Problème homogénéisé d'ordre zéro en quasi-statique	$4,493 \cdot 10^{-3}$	$4,493 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 3.1** – Comparaison des différentes estimations de la déformation plastique longitudinale à l'instant  $t = 20$ s (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel).

Enfin, on peut voir, en noir sur la figure 3.2(a), l'évolution de la déformation plastique homogénéisée obtenue lorsque l'on ne considère que la composante lente de la sollicitation dans les équations du problème homogénéisé. Exprimé de façon générique, ceci revient à remplacer l'équation d'évolution homogénéisée (3.15) par  $\dot{\varepsilon}_0^p = a(<\sigma_0>)$ . L'estimation qui en résulte est alors très éloignée du calcul de référence, ce qui montre la **nécessité de prendre en compte, même de façon moyennée, la composante rapide de la sollicitation**.

Ces résultats valident sur un exemple typique la méthode d'homogénéisation périodique en temps, tout en permettant d'apprécier le gain en temps de calcul qui est directement lié à la réduction du nombre de pas de temps. En effet, les seuls surcoûts à la résolution du système homogénéisé d'ordre zéro (3.39) sont le calcul de la solution du problème résiduel (3.40), réalisé une fois pour toutes, et l'estimation des moyennes à l'aide de la formule des trapèzes (3.41).

### Résultats obtenus pour d'autres cas de chargement

D'autres types de chargement sont naturellement envisageables, **à condition d'être compatibles avec l'hypothèse de quasi-périodicité (3.3)**. Ainsi, comme on le verra dans le paragraphe 3.2.2, le chargement envisagé pour les études expérimentales du projet européen PRE-MECCY consiste en la superposition d'un chargement lent de forme trapézoïdale et d'un chargement rapide sinusoïdal, dont l'allure est représentée sur la figure 3.7(b) (page 94).

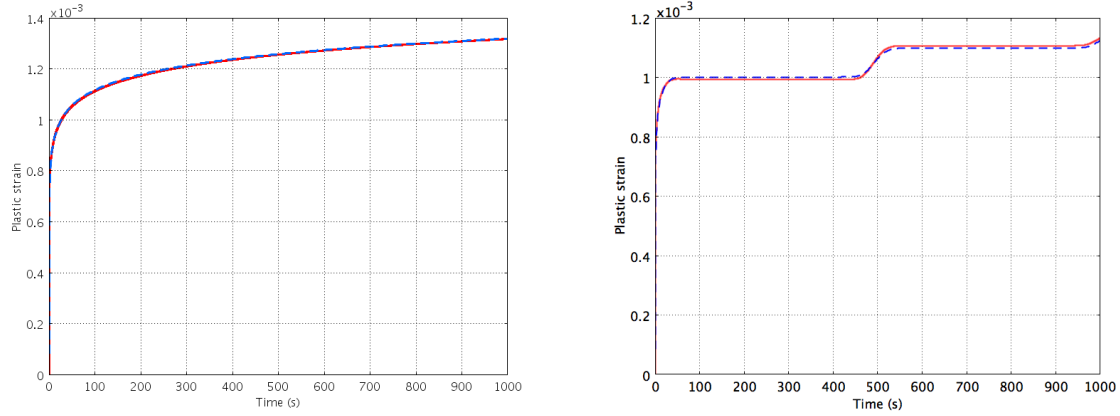
Il est également intéressant de constater qu'**il n'existe pas de limitation concernant l'amplitude de la composante rapide de la sollicitation par rapport à celle de la composante lente** : ainsi, les résultats présentés sur la figure 3.2(a) sont obtenus pour le chargement illustré sur la figure 3.1(b), où le rapport entre les amplitudes des deux composantes est égal à un quart. En fait, il est même possible d'envisager le cas extrême où il n'y a qu'une composante rapide dans le chargement, c'est-à-dire le cas de la **fatigue à grand nombre de cycles** (HCF - *High Cycle Fatigue*). Ceci revient alors à considérer  $<\dot{f}_s> = 0$  dans le système homogénéisé (3.39). Les résultats associés sont donnés sur la figure 3.3(a), où l'on voit la très bonne correspondance entre les deux estimations de la déformation plastique longitudinale, dans le cas quasi-statique, pour  $F/\xi = 10$  Hz.

De façon similaire, un **chargement de type « modulation d'amplitude »**, obtenu comme le produit de deux termes périodiques de fréquences très différentes, est également compatible avec l'hypothèse de quasi-périodicité (3.3). Dans ce cas, on a encore  $<\dot{f}_s> = 0$  dans le système homogénéisé (3.39), mais cette fois-ci, le système résiduel (3.40) fait intervenir un terme  $f_s^*(t, \tau)$  fonction des deux variables de temps. Si la résolution de ce dernier système peut être faite une fois pour toutes dans le cas quasi-statique, elle sera nécessaire à chaque pas de temps lent dans le cas dynamique, mais le surcoût associé reste finalement modéré car le problème est élastique. La figure 3.3(b) permet de constater que la déformation longitudinale plastique homogénéisée d'ordre zéro reste très proche de l'estimation de référence associée, dans le cas quasi-statique, pour des fréquences  $F = 0,001$  Hz et  $F/\xi = 10$  Hz.

### Influence des termes d'inertie

L'objectif de ce paragraphe est d'analyser, sur le problème traité ici, l'hypothèse (3.10) faite sur les ordres de grandeur des différents termes de l'équation d'équilibre dynamique (3.6a). Cette hypothèse nous est alors apparue nécessaire pour effectivement pouvoir séparer les deux échelles de temps lors du processus d'homogénéisation.





(a) Solutions de référence (en rouge) et homogénéisée d'ordre zéro (en bleu) dans le cas d'un chargement de type HCF.

(b) Solutions de référence (en rouge) et homogénéisée d'ordre zéro (en bleu) dans le cas d'un chargement de type « modulation d'amplitude ».

**Figure 3.3** – Évolutions de la déformation plastique longitudinale pour différentes sollicitations (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel, en quasi-statique).

Toutefois, elle a bien été validée plus haut sur l'exemple de la barre, comme l'ont montré les résultats de la figure 3.2(a) et du tableau 3.1 : dans le cas du matériau envisagé ici, la **vitesse de propagation des ondes longitudinales dans la poutre** est  $c = \sqrt{E/\rho}$ , soit environ 5 km/s, ce qui correspond, pour la fréquence  $F$  considérée, à une longueur d'onde de 100 km ; celle-ci, comparée à la longueur  $L = 1$  m de la poutre, permet de vérifier l'hypothèse (3.10). De manière générale, on constate d'ailleurs sur le diagramme d'Ashby de la masse volumique en fonction du module de Young, représenté sur la figure 3.4(a), que la plupart des matériaux courants (les métalliques notamment) présentent des vitesses de propagation de 1 à 10 km/s, ce qui permet, pour des conditions de taille de domaine et de fréquence d'excitation similaires, de supposer l'hypothèse (3.10) dès que le rapport  $\xi$  est supérieur à environ un dix-millième.

Pour donner une **interprétation physique de cette condition**, nous allons nous appuyer sur l'exemple de la barre, mais dans le domaine élastique seulement : en effet, le problème de séparation des échelles temporelles évoqué dans le paragraphe 3.1.2 s'y manifeste également. Pour une excitation  $f_s = f \cos(\omega t)$  en  $x = L$ , on obtient comme expression du déplacement la **superposition de deux ondes progressives** :

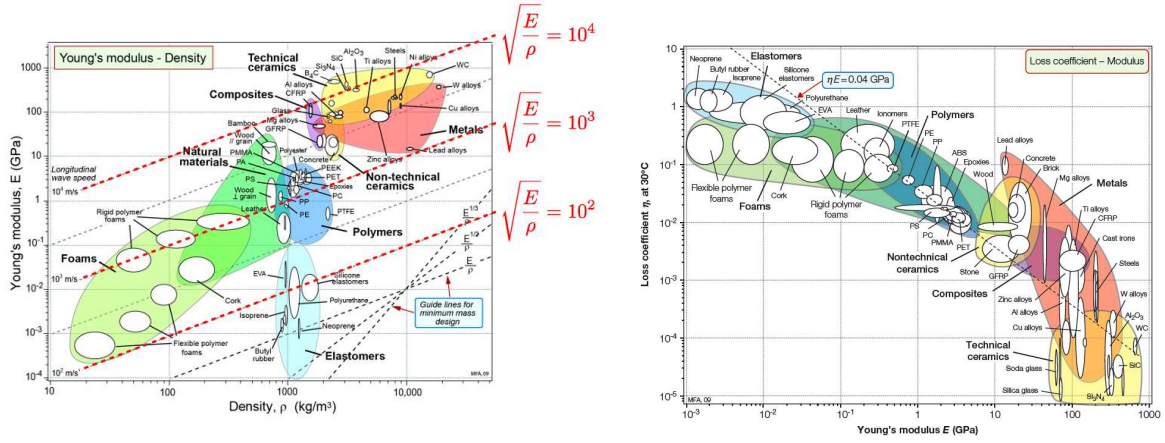
$$u(x, t) = \frac{f}{2Ek \cos(kL)} (\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)) \quad (3.42)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde associé, à condition d'avoir une pulsation d'excitation distincte des pulsations propres de la barre encastree-libre (soit  $\cos(kL) \neq 0$ ).

Dans le cas de la sollicitation bifréquentielle, on retrouve alors dans la réponse des couples de termes sinusoïdaux en  $2\pi F(\hat{t}/F \pm L\hat{x}/c)$  et en  $2\pi F/\xi(\hat{t}/F \pm L\hat{x}/c)$ , après adimensionnalisation. Lorsque l'on souhaite séparer les deux variables de temps en écrivant que  $\hat{\tau} = \hat{t}/\xi$ , introduire l'hypothèse (3.10) permet alors d'obtenir des couples de termes sinusoïdaux respectivement en  $2\pi(\hat{t} \pm \xi\sqrt{\beta}\hat{x})$  et en  $2\pi(\hat{\tau} \pm \sqrt{\beta}\hat{x})$ . **Par cette réécriture, les termes  $\hat{\tau}$  et  $\sqrt{\beta}\hat{x}$  restent du même ordre de grandeur**, quelle que soit la valeur de  $\xi$ , donc la réponse dépend effectivement de la variable de temps rapide  $\hat{\tau}$ .

De plus, la superposition des deux termes harmoniques lents en  $2\pi(\hat{t} \pm \xi\sqrt{\beta}\hat{x})$  dans l'équation (3.42) implique finalement que l'on obtient  $u(x, t) = fx \cos(2\pi Ft)/E$  quand  $\xi \rightarrow 0$  : on a donc la **solution d'un problème de traction quasi-statique, semblable au système (3.39)** dans le cas élastoviscoplastique.

En revanche, considérons maintenant un cas où l'hypothèse (3.10) n'est pas vérifiée, par exemple si  $L/\lambda = \sqrt{\beta}\sqrt{\xi}$ . Dans ce cas, le couple de termes en  $2\pi F/\xi(\hat{t}/F \pm L\hat{x}/c)$  se réécrit comme  $2\pi(\hat{t} \pm \sqrt{\beta}\hat{x}/\sqrt{\xi})$ , ce qui a comme conséquence que  $\hat{t} \pm \sqrt{\beta}\hat{x}/\sqrt{\xi} \sim \pm\sqrt{\beta}\hat{x}/\sqrt{\xi}$  quand  $\xi \rightarrow 0$  : autrement dit, **la variable de temps rapide  $\hat{t}$  n'intervient plus dans la réponse**, et celle-ci ne dépend plus que du temps lent  $\hat{t}$ . Les deux variables de temps ne peuvent donc plus être séparées.



(a) Diagramme masse volumique – module de Young et vitesses de propagation longitudinale associées (en m/s). (b) Diagramme module de Young – facteur d'amortissement.

**Figure 3.4** – Deux diagrammes d'Ashby, d'après [Ashby 2011].

En outre, dans le cas où l'une des deux fréquences de sollicitation est égale à l'une des fréquences propres de la barre encastrée-libre, il devient nécessaire d'introduire de l'amortissement dans le modèle de référence, par exemple sous la forme suivante :

$$\partial_x \sigma + c_K d_t \partial_x \sigma = \rho d_t^2 u \quad (3.43)$$

qui remplace la relation (3.38a). Pour des raisons de simplicité, l'amortissement considéré ici est de type Rayleigh, proportionnel à la raideur, de coefficient  $c_K$  : toutefois, bien que très couramment employé en dynamique des structures, ce type d'amortissement a comme principal inconvénient de croître linéairement par rapport à la fréquence de sollicitation, ce qui n'a pas forcément de justification physique.

**La question de la séparation des variables de temps se pose alors de nouveau.** Si l'on maintient l'hypothèse (3.10) concernant les termes d'inertie, l'ordre de grandeur du terme d'amortissement doit également être étudié. En introduisant dans l'équation d'équilibre dynamique (3.43) les décompositions asymptotiques des différentes variables et l'hypothèse (3.10), on obtient à l'ordre zéro que :

$$\frac{1}{\xi} c_K \partial_x \sigma'_0 + (\partial_x \sigma_0 + c_K \partial_x \dot{\sigma}_0 + c_K \partial_x \sigma'_1) + O(\xi) = \frac{\beta E}{L^2 F^2} u''_0 + O(\xi) \quad (3.44)$$

En conséquence, si l'on suppose que le coefficient d'amortissement proportionnel adimensionné  $Fc_K$  est d'ordre zéro, on obtient que le gradient spatial de la contrainte d'ordre zéro  $\partial_x \sigma_0$  ne peut dépendre que du temps lent  $t$ . L'ordre zéro de l'équation dynamique, après application de la moyenne (3.4) par rapport au temps rapide  $\tau$ , devient alors :

$$\partial_x \sigma_0 + c_K \partial_x \dot{\sigma}_0 = 0 \quad (3.45)$$

qui est une simple EDO de la variable de temps lente  $t$ . En utilisant la condition limite en  $x = L$  et le fait que la contrainte est nulle à l'instant initial, on aboutit facilement à une contrainte d'ordre zéro homogène le long de la poutre, qui s'exprime comme  $\sigma_0(x, t, \tau) = f_s(t, \tau)$ , qui est en fait la solution quasi-statique associée à la sollicitation  $f_s$ . **Il n'y a donc pas de problème de séparation des variables de temps, mais l'amortissement est tel qu'il n'y a plus d'effets dynamiques dans la réponse.**

En revanche, si, comme dans le cadre du projet PREMECCY exposé dans le paragraphe 3.2.2, on observe la réponse résonante de la barre, ceci signifie que l'amortissement réel est plus petit, ce qui peut alors se traduire par une hypothèse supplémentaire :

$$Fc_K = \gamma \xi \quad (3.46)$$

avec  $\gamma \leq O(1)$ . Cette condition est tout à fait envisageable pour les matériaux métalliques : comme on peut le constater sur la figure 3.4(b), les valeurs du facteur d'amortissement  $\eta$  s'étendent de  $10^{-5}$  à  $10^{-1}$ , ce qui, en termes d'amortissement de Rayleigh pour le premier mode de la barre, donne  $c_K \in [10^{-9}; 10^{-5}]$  environ. L'hypothèse (3.46) permet d'aboutir, comme initialement, au système homogénéisé d'ordre zéro (3.39), qui traduit un problème quasi-statique. L'amortissement intervient alors dans le système résiduel (3.40), **le problème traité en dynamique devenant élastique amorti :**

$$\partial_x \sigma_0^* + \frac{\gamma}{F} \partial_x \sigma_0^{*'} = \frac{\beta E}{L^2 F^2} u_0^{*''} \quad (3.47)$$

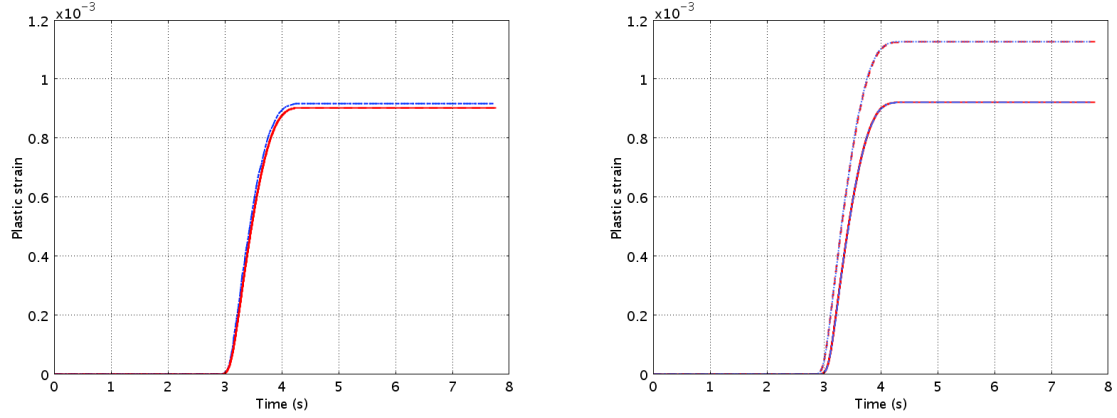
La figure 3.5 permet de constater la bonne correspondance entre les évaluations de référence et homogénéisées de la déformation plastique longitudinale, en  $x = 0$  et en  $x = L$  pour deux valeurs de  $c_K$ . Dans les deux cas, les fréquences de sollicitation choisies sont  $F = 0,129$  Hz et  $F/\xi = 1290$  Hz, cette dernière correspondant à la première fréquence propre de la barre encastree-libre. Pour les tracés de la figure 3.5(a), le terme d'amortissement est d'ordre zéro ( $c_K = 10^{-2}$ ) et on observe une déformation plastique homogène le long de la barre, ce qui traduit, comme prévu, une réponse quasi-statique. Dans le cas d'un terme d'amortissement plus petit ( $c_K = 10^{-5}$ ), vérifiant l'hypothèse (3.46), les effets dynamiques sont mis en évidence par l'hétérogénéité de la déformation, visible sur la figure 3.5(b).

Comme précédemment, une tentative d'interprétation physique peut être proposée dans le cas élastique : dans ce cas, le nombre d'onde est complexe, et vérifie :

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{E(1 + c_K^2 \omega^2)} (-1 + j c_K \omega) \quad (3.48)$$

pour une excitation de pulsation  $\omega$  en  $x = L$ . La réponse associée peut alors s'écrire comme la **somme de deux ondes progressives amorties :**

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{f}{Ek(e^{kL} + e^{-kL})} \left( e^{k_R x} (\cos(\omega t + k_I x) + j \sin(\omega t + k_I x)) - e^{-k_R x} (\cos(\omega t - k_I x) + j \sin(\omega t - k_I x)) \right) \right] \quad (3.49)$$



(a) Solutions de référence (en rouge) et homogénéisée d'ordre zéro (en bleu), en  $x = 0$  et  $x = L$ , avec amortissement d'ordre zéro.

(b) Solutions de référence (en rouge) et homogénéisée d'ordre zéro (en bleu), en  $x = 0$  et  $x = L$ , avec amortissement vérifiant (3.46).

**Figure 3.5** – Influence de l'amortissement dans le cas d'une excitation résonante (barre soumise à un chargement normal bifréquentiel).

où  $f$  est l'amplitude de l'excitation appliquée en  $x = L$ . En introduisant l'hypothèse (3.10) pour les termes d'inertie, on trouve pour les parties réelle et imaginaire de  $k$  respectivement :

$$k_R = \frac{\omega \sqrt{\beta} \xi}{LF \sqrt{1 + c_K^2 \omega^2}} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_K^2 \omega^2}} \quad (3.50a)$$

$$k_I = \frac{\omega \sqrt{\beta} \xi}{LF \sqrt{1 + c_K^2 \omega^2}} \frac{c_K \omega}{\sqrt{-2 + 2 \sqrt{1 + c_K^2 \omega^2}}} \quad (3.50b)$$

**Le comportement de la réponse est obtenu en faisant tendre  $\xi$  vers zéro** : le tableau 3.2 permet de récapituler les ordres de grandeur de  $k_R$  et de  $k_I$  pour les sollicitations lente et rapide, en fonction du terme d'amortissement présent. Quand ce dernier est d'ordre zéro, les nombres d'onde sont d'ordres strictement positifs, et, de façon similaire au cas sans amortissement, on trouve que le déplacement est solution d'un problème de traction quasi-statique, et ce, même pour la sollicitation rapide. Quand le terme d'amortissement vérifie l'hypothèse (3.10), une réponse quasi-statique est toujours obtenue pour la sollicitation lente ; par contre, la sollicitation rapide est à l'origine d'ondes progressives amorties dont le vecteur d'onde est d'ordre zéro, ce qui permet donc d'observer une réponse vibratoire à la fréquence  $F/\xi$ .

Terme d'amortissement	Sollicitation lente		Sollicitation rapide	
	$k_R$	$k_I$	$k_R$	$k_I$
$F c_K = O(1)$	$O(\xi)$	$O(\xi)$	$O(\sqrt{\xi})$	$O(\sqrt{\xi})$
$F c_K = O(\xi)$	$O(\xi^2)$	$O(\xi)$	$O(1)$	$O(1)$

**Tableau 3.2** – Ordres de grandeur des nombres d'onde en fonction du terme d'amortissement, quand  $\xi \rightarrow 0$  (barre soumise à un chargement normal bifréquentiel).

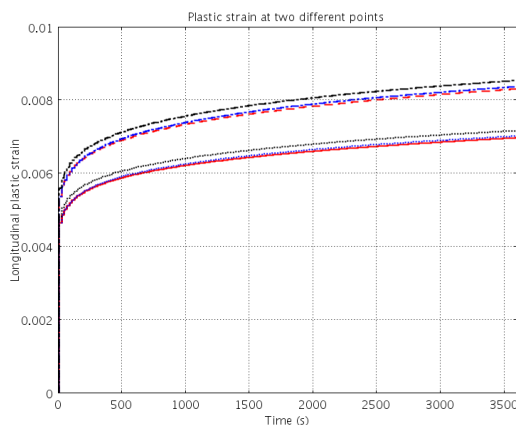
### Coût numérique des simulations et utilisation de trois échelles de temps

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que la méthode d'homogénéisation périodique en temps permettait une réduction conséquente du nombre de pas de temps requis pour la simulation temporelle du problème d'évolution étudié. Il devient alors possible de considérer des durées d'étude qui ne seraient pas envisageables par la résolution directe du problème de référence.

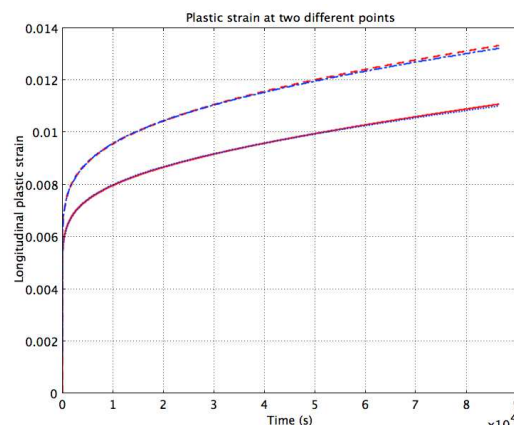
Ainsi, la figure 3.6(a) présente, pour des fréquences  $F = 0,05$  Hz et  $F/\xi = 500$  Hz, l'évolution sur une heure de la déformation plastique longitudinale aux deux extrémités de la barre. Trois estimations homogénéisées sont proposées afin d'évaluer la précision de chacune relativement au pas de temps adopté :

- la première (en rouge) est basée, comme précédemment, sur un pas de temps de 0,04 s et a nécessité 90 000 itérations ;
- la seconde (en noir) a requis 7 200 pas de temps de 0,5 s pour pouvoir traiter l'ensemble de la durée d'étude ;
- la troisième (en bleu) a fait intervenir deux choix de pas de temps successifs : 2 500 de 0,04 s, puis 7 000 de 0,5 s.

Le calcul de référence nécessiterait quant à lui 36 millions de pas de temps de  $10^{-4}$ s, et n'a pas été réalisé. Toutefois, compte tenu des résultats de validation présentés plus haut, nous pouvons considérer que c'est la courbe représentée en rouge sur la figure 3.6(a), correspondant à un pas de temps de 0,04 s, qui peut servir de référence. On constate alors que la solution adoptant un pas de temps plus grossier (de 0,5 s), représentée en noir, montre un décalage sensible vis-à-vis de cette référence ; toutefois, ce dernier semble provenir essentiellement des premiers cycles, où l'évolution de la déformation plastique est la plus importante avec la loi d'évolution retenue. Ceci est confirmé avec un choix « hybride » de pas de temps, où les cinq premiers cycles lents sont estimés avec le pas de temps « fin » de 0,04 s, puis les cycles restants avec le pas de temps « grossier » de 0,5 s : la courbe en bleu, associée à cette solution, est alors bien plus proche de l'estimation (en rouge) prise comme référence. Ainsi, comme on pouvait s'y attendre, la sélection de la valeur du pas de temps pour le calcul homogénéisé n'est pas anodine.



(a) Évolutions sur une heure de solutions homogénéisées d'ordre zéro pour différents choix de pas de temps, en  $x = 0$  et  $x = L$ .



(b) Évolutions sur une journée des solutions homogénéisées d'ordre zéro dans le cas de deux (en rouge) et trois (en bleu) échelles de temps, en  $x = 0$  et  $x = L$ .

**Figure 3.6** – Évolutions « longues » de la déformation plastique longitudinale (cas de la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel, dans le cas dynamique).

L'étape suivante consiste à considérer un **calcul pour une durée d'une journée complète**, c'est-à-dire un peu plus de 4 000 cycles lents. Pour ce cas de figure, le coût du problème homogénéisé n'est pas négligeable, même pour ce simple problème à quelques DDL, et le calcul utilisant le pas de temps de 0,04 s demande déjà un effort considérable avec ses plus de deux millions de pas de temps. Ne parlons pas du calcul de référence, qui aurait donc nécessité plus de 860 millions de pas de temps pour traiter cette durée d'une journée. Ainsi même le coût du problème homogénéisé peut devenir rapidement prohibitif suivant la complexité du problème envisagé, et, pour les simulations présentées dans le paragraphe 3.2.2, qui sont menées sur des géométries tridimensionnelles fines, il est tout de même nécessaire de se restreindre à seulement quelques cycles lents de sollicitation, ou bien de prendre un pas de temps plus grossier quitte à dégrader la précision de l'estimation. Pour l'exemple de la barre, la figure 3.6(b) montre (en rouge) les réponses homogénéisées où l'on a finalement adopté le choix « hybride » de pas de temps évoqué précédemment (0,04 s pour les cinq premiers cycles, puis 0,5 s).

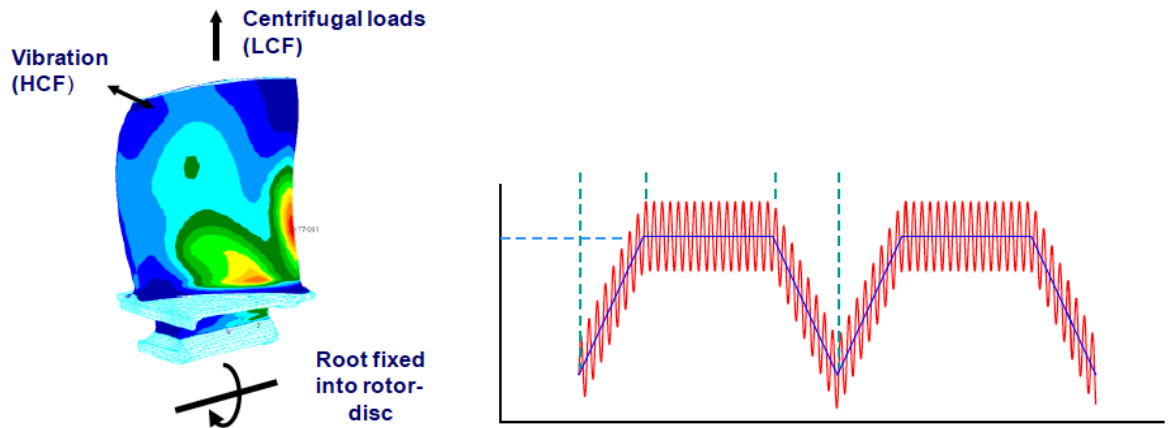
Une piste d'amélioration a donc été proposée dans le paragraphe 3.1.3 et s'applique notamment au cas des chargements de type CCF : comme la composante lente de la sollicitation est périodique, **il est possible de considérer trois échelles de temps distinctes**, dont deux vérifient l'hypothèse de quasi-périodicité. Les résultats associés à la simulation de l'évolution de la déformation plastique longitudinale sont représentés sur la figure 3.6(b), et montrent le très bon accord entre la méthode à deux échelles de temps (en rouge), prise ici comme référence, et celle à trois échelles de temps (en bleu). Cette dernière n'a nécessité que 500 pas de temps environ, **ce qui représente, par rapport au calcul de référence sur cette même période, une réduction du nombre de pas de temps d'un facteur de près de deux millions**.

Encore une fois, il a fallu choisir judicieusement les pas de temps pour que la méthode à trois échelles de temps donne des résultats satisfaisants : ici, la solution a été calculée toutes les deux secondes jusqu'à l'instant  $t = 200$ s, correspondant à la fin du premier cycle lent, puis seulement toutes les deux cents secondes. Conformément à ce que nous avons constaté plus haut, et comme indiqué dans [Puel et Aubry 2012], la nécessité de raffiner les pas de temps en début de simulation semble liée au fait que la déformation plastique évolue très fortement sur le premier cycle lent, à cause des niveaux d'effort considérés vis-à-vis des paramètres caractérisant la loi d'évolution viscoplastique du matériau. **Ceci pose néanmoins quelques questions sur la meilleure façon de choisir les pas de temps pour les calculs homogénéisés, qu'ils soient à deux ou trois échelles de temps.**

### 3.2.2 Aube de turbine aéronautique en service

Cet exemple s'inscrit dans le projet européen PREMECCY (*PREdictive MEthods for Combined CYcle fatigue in gas turbine blades*) associant l'ensemble des motoristes aéronautiques européens ainsi que plusieurs partenaires académiques de 2006 à 2011. Le contexte de ce projet était **l'étude expérimentale de la fatigue à cycles « combinés »** (CCF - *Combined Cycle Fatigue*) **ainsi que sa modélisation numérique** : en effet, les aubes sont soumises en service à deux sollicitations périodiques, illustrées sur la figure 3.7(a), et dont l'évolution temporelle est schématiquement représentée sur la figure 3.7(b). Le rapport de la fréquence caractéristique des phénomènes lents (associés aux efforts centrifuges) sur celle des vibrations rapides (causées par les efforts aérodynamiques) est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Cette fatigue CCF est à l'origine de près de la moitié des problèmes rencontrés en service. Le rapport final [PREMECCY 2012] rappelle les principaux objectifs du projet, ainsi que les résultats obtenus.





(a) Typologie des efforts périodiques exercés sur une aube en service.

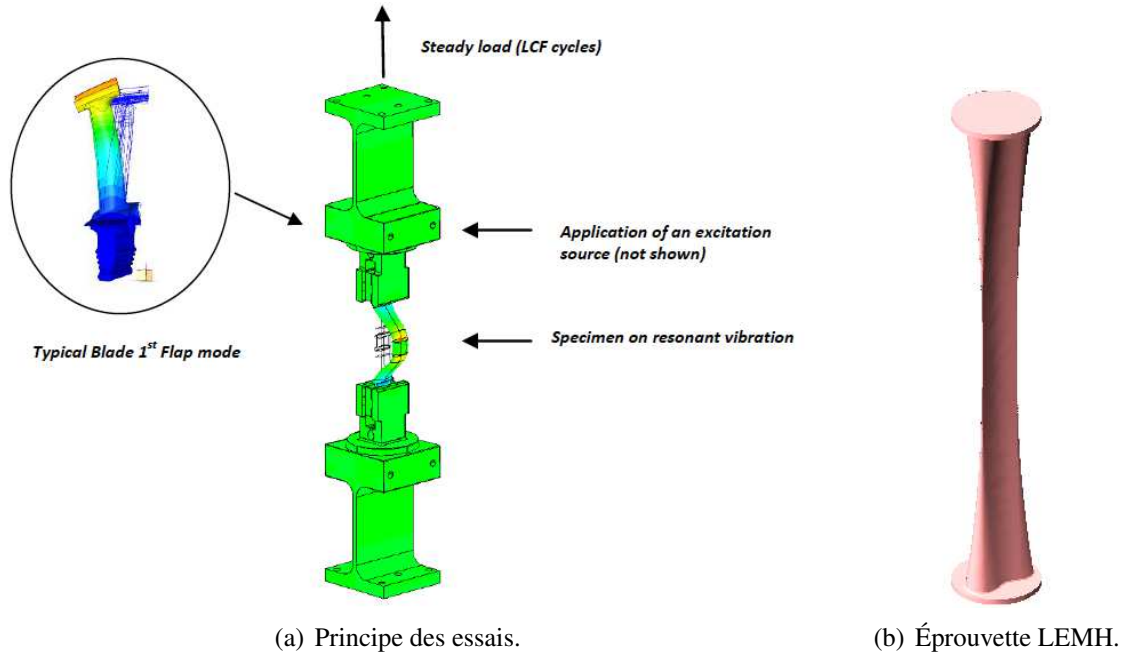
(b) Représentation schématique de l'évolution temporelle des efforts CCF.

**Figure 3.7** – Fatigue CCF dans les aubes de turbines aéronautiques, d'après [PREMECCY 2012].

Pour atteindre ces objectifs de modélisation de la fatigue CCF, une vaste campagne d'essais a été lancée dans le cadre de ce projet. Le parti pris a été de créer et **tester des éprouvettes dont les formes sont inspirées des profils d'aubes réelles** : ainsi, la figure 3.8(b) présente la géométrie de l'un des profils testés, qui affiche des bords d'attaque et de fuite différents. Comme, en outre, les efforts ne sont appliqués que sur l'une des deux extrémités de l'éprouvette, le calcul numérique nécessitera de prendre en compte la géométrie complète. En ce qui concerne les essais proprement dits, ils ont requis la conception de montages utilisant des liaisons souples, en forme de « I », qui permettent de solliciter l'éprouvette en flexion sur l'une de ses fréquences de résonance tout en appliquant la sollicitation lente de traction, comme illustré sur la figure 3.8(a). D'autres montages en forme de croix permettent également de remplacer la sollicitation rapide de flexion par de la torsion. Les résultats expérimentaux obtenus ont bien sûr montré que la superposition des deux sollicitations périodiques dans le cadre de la fatigue CCF peut réduire sensiblement la durée de vie de l'éprouvette par rapport au cas de la seule fatigue HCF.

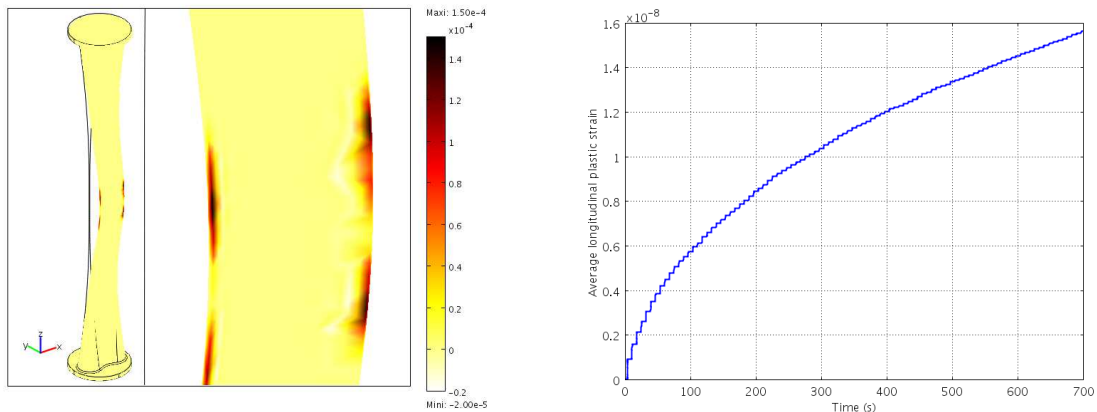
Notre rôle dans le projet a consisté à **proposer une stratégie numérique pour rendre possible la simulation des essais** à 350°C des éprouvettes de type LEMH, dont la zone utile est représentée sur la figure 3.8(b). La méthode d'homogénéisation périodique en temps était toute indiquée pour traiter des chargements de type CCF, car elle propose un cadre mathématique rigoureux à l'estimation de l'évolution des différentes variables du problème sur un intervalle de temps long. Pour traiter le problème de fatigue CCF proposé ici, et, compte tenu du matériau constitutif des éprouvettes (un alliage de titane TI6242) nous avons proposé un modèle 3D de viscoplasticité à deux écrouissages décrit dans [Lemaitre et Chaboche 1990], caractéristique du comportement du TA6V, qui est proche de celui du TI6242. Bien sûr, d'autres lois d'évolution seraient envisageables, notamment à l'échelle des grains, ainsi que des lois d'endommagement, mais le but ici est d'étudier le gain potentiel apporté par la méthode d'homogénéisation périodique en temps.

La mise en œuvre de celle-ci a nécessité d'étendre son cadre à la prise en compte des termes d'inertie ainsi que des effets de l'amortissement, vu que les éprouvettes sont sollicitées à l'une de leurs fréquences de résonance. Ces points précis ont été validés sur un exemple simple dans le paragraphe 3.2.1. Des simulations numériques ont été menées à l'aide du logiciel COMSOL sur la géométrie de l'éprouvette LEMH présentée sur la figure 3.8(b).



**Figure 3.8** – Essais de fatigue CCF, d’après [PREMECCY 2012].

Celle-ci a été sollicitée sur son deuxième mode de flexion, visible sur la figure 3.9(a), et l’évolution de la déformation plastique longitudinale moyenne pour les 100 premiers cycles lents a été tracée sur la figure 3.9(b). Pour cela, les sollicitations retenues sont de fréquences respectives  $F = 0, 14 \text{ Hz}$  et  $F/\xi = 1\,400 \text{ Hz}$  et leurs amplitudes sont telles que l’éprouvette pourrait rentrer localement en plasticité même sans le chargement rapide. Faute de valeurs expérimentales disponibles, la valeur du coefficient d’amortissement proportionnel  $c_K$  a été fixée arbitrairement à  $10^{-5}$ , ce qui correspond à un amortissement modal d’un peu moins de 5%. Des résultats complémentaires peuvent être trouvés dans les références [Aubry et Puel 2010a - b, Puel et Aubry 2011b].



(a) Mode II de flexion à 1 400 Hz et déformation plastique longitudinale finale.

(b) Évolution temporelle de la déformation plastique longitudinale moyenne.

**Figure 3.9** – Simulation des essais de fatigue CCF (100 cycles lents sur éprouvette LEMH).



Pour être plus fidèle aux conditions expérimentales, **la simulation devrait en réalité vérifier un pilotage de l'essai en déplacement transverse au centre de l'éprouvette**, à l'aide d'un vibromètre laser : tandis que l'amplitude de la sollicitation lente de traction est fixée pour toute la durée de l'essai, l'amplitude de la sollicitation rapide de flexion, créée à l'aide d'un pot vibrant, est modulée de façon à ce que l'essai se fasse à déformation totale constante sur une petite zone centrale de l'éprouvette. Ceci n'a pas été implémenté dans nos simulations, mais reste parfaitement envisageable : le calcul numérique nous permettant d'évaluer la déformation plastique sur la petite zone centrale de l'éprouvette, on en déduit par différence la déformation élastique désirée, qui est facilement pilotable grâce à la connaissance de la rigidité globale élastique de l'éprouvette.

Enfin, même si le gain de temps de calcul est conséquent par rapport à la résolution directe du problème de référence, **la simulation de quelques centaines de cycles lents nécessite tout de même plusieurs jours de mobilisation d'une station de calcul de puissance standard**, ce qui peut s'avérer rédhibitoire dès lors qu'un plus grand nombre de cycles doivent être pris en compte, ou qu'un modèle Éléments Finis comportant plus de DDL que celui associé à l'éprouvette LEMH (près de 100 000 DDL) serait requis. C'est pourquoi nous avons orienté notre réflexion sur l'introduction d'une troisième échelle de temps, et les premiers résultats obtenus sur un exemple académique, présentés à la fin du paragraphe 3.2.1, sont prometteurs, et devraient être adaptables sans difficultés majeures à la simulation d'essais tels que ceux du projet PREMECCY.

#### 3.2.3 Processus mécanobiologique du remodelage osseux

Ce paragraphe expose quelques résultats concernant la simulation numérique du processus de remodelage osseux à l'aide de la méthode d'homogénéisation périodique en temps. Comme on l'a déjà évoqué dans le paragraphe 2.1.1, **la compréhension de ce processus biologique est devenue depuis plusieurs années un enjeu majeur de santé publique**, vu qu'elle permettrait de mieux prédire le risque fracturaire associé à diverses pathologies, comme l'ostéoporose. En effet, l'os cortical, qui constitue la partie périphérique des os longs, s'endommage du fait des sollicitations mécaniques répétées qu'il subit au cours du temps. Il est alors remplacé par le renouvellement continu de sa microstructure composée d'ostéons, qui sont des cylindres faits de lamelles concentriques constituées de fibres de collagène et de cristaux d'hydroxyapatite, et qui sont orientés selon la direction prépondérante de sollicitation mécanique, à savoir l'axe longitudinal de l'os long.

La simulation numérique du remodelage osseux passe donc en premier lieu par une bonne description des mécanismes d'endommagement de l'os, qui semblent être les déclencheurs du processus de remodelage proprement dit. Comme précisé dans le paragraphe 3.1.3, un modèle d'endommagement isotrope, inspiré de [Fondrk *et al.* 1999], est retenu. **Les sollicitations mécaniques peuvent être de temps caractéristiques très variés** : ainsi, l'échelle de temps lente est caractérisée par le cycle circadien, qui marque l'alternance des phases de repos (allongé) et des phases d'éveil, tandis que, pendant ces dernières, peuvent se manifester toutes sortes de sollicitations (comme la marche par exemple) qui correspondent alors à une échelle de temps beaucoup plus rapide. Dans cette logique, le travail de thèse [Devulder 2009] a choisi de décrire des phénomènes sinusoïdaux de fréquences respectivement lente  $F = 1 \text{ jour}^{-1}$  et rapide  $F/\xi = 10^4 \text{ jour}^{-1}$ .

Avant d'étudier une microstructure réelle, un exemple plus simple, consistant en une plaque trouée sollicitée en compression bifréquentielle, a été proposé afin de valider la méthode d'homogénéisation périodique en temps dans le cas d'une loi d'endommagement. Comme évoqué dans le paragraphe 3.1.3, le champ de déplacement résiduel  $\mathbf{u}_0^*$  dépend des deux variables de temps, même si le chargement est du type CCF : en effet, le problème qu'il vérifie fait intervenir le champ spatial de module de Young, qui évolue à l'échelle de temps lent comme  $(1 - d_0(\mathbf{x}, t)) E_0(\mathbf{x})$ . Il est alors nécessaire de résoudre le problème rapide à chaque pas de temps lent, mais, du point de vue de l'implémentation, ceci n'est pas possible avec le logiciel COMSOL.

On est alors amené à réécrire quelque peu le problème considéré. Ainsi, en quasi-statique, et dans la situation courante où les chargements rapides appliqués s'expriment comme des produits d'une fonction de l'espace par un terme dépendant du temps  $\mathbf{f}_{s,vr}(\mathbf{x}, \tau) = \alpha_{s,v}(\tau) \boldsymbol{\varphi}_{s,v}(\mathbf{x})$ , le résidu du déplacement peut s'écrire comme :

$$\mathbf{u}_0^*(\mathbf{x}, t, \tau) = \alpha_{s,v}(\tau) \mathbf{u}_{0,\varphi}(\mathbf{x}, t) \quad (3.51)$$

vu que le problème est élastique linéaire à l'instant  $t$  :  $\mathbf{u}_{0,\varphi}(\mathbf{x}, t)$  désigne alors le déplacement obtenu pour un chargement statique  $\boldsymbol{\varphi}_{s,v}(\mathbf{x})$  et un champ de module de Young  $(1 - d_0(\mathbf{x}, t)) E_0(\mathbf{x})$ . La loi d'endommagement (3.28) peut alors se réécrire comme :

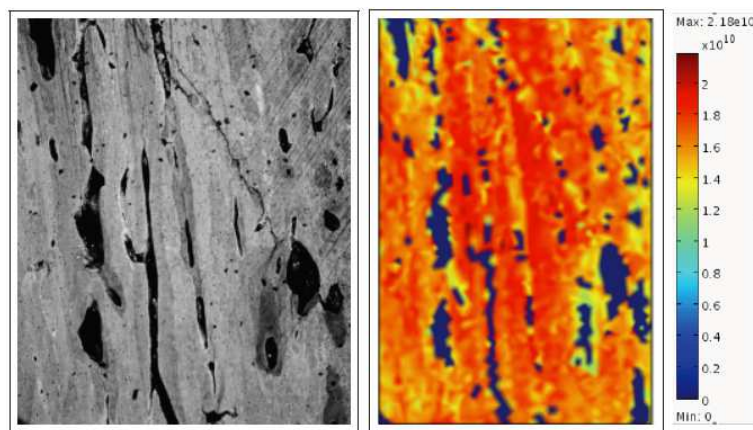
$$\dot{d}_0(t) = \kappa \langle \varepsilon_{I0}(\langle u_0 \rangle(\mathbf{x}, t) + \alpha_{s,v}(\tau) \mathbf{u}_{0,\varphi}(t))^{N-1} \rangle (1 - d_0(t))^{N+1} \quad (3.52)$$

**et l'implémentation est directe maintenant que seule l'échelle de temps lente  $t$  intervient dans les EDP à résoudre**, l'échelle de temps rapide  $\tau$  n'apparaissant qu'au niveau du terme  $\alpha_{s,v}(\tau)$ . La moyenne par rapport au temps rapide peut alors être estimée, comme précédemment, à l'aide de la relation (3.41).

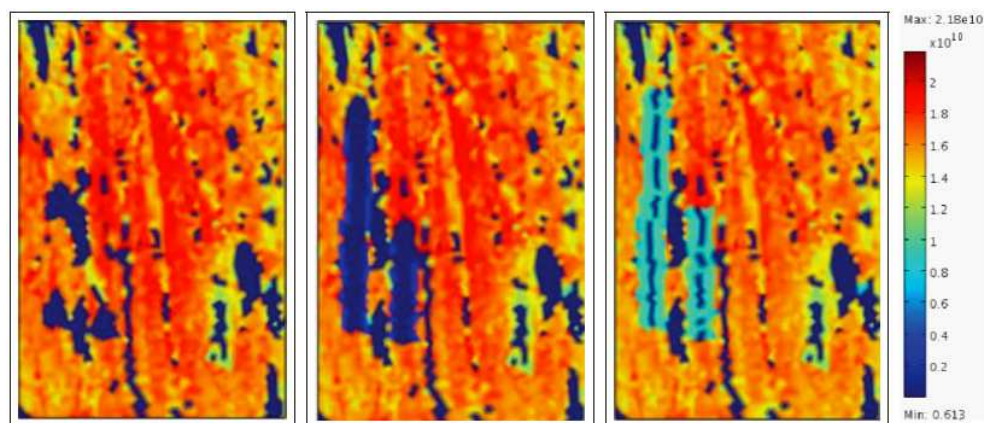
Les résultats de la comparaison entre la solution de référence, obtenue par la résolution du problème initial avec la loi (3.26), et la solution du problème homogénéisé d'ordre zéro sont présentés pour le cas de la plaque trouée dans [Devulder *et al.* 2010a]. La durée d'observation est d'un jour, soit  $10^4$  cycles rapides : **les évolutions de l'endommagement estimées par les deux modèles sont très proches**, validant ainsi la méthode et son implémentation pour ce type de loi.

Cette validation permet d'envisager de façon similaire la **simulation d'une microstructure réelle *in vivo***. Le domaine d'os simulé est bidimensionnel, et directement issu d'une image MEB obtenue par électrons rétrodiffusés d'un échantillon de diaphyse fémorale humaine. Comme illustré sur la figure 3.10(a), cette image permet alors de se donner un champ spatial  $E_0(\mathbf{x})$  pour le matériau non endommagé, grâce à la corrélation linéaire forte (75%) mise en évidence dans [Hoc *et al.* 2006] pour de l'os bovin entre les valeurs locales du module de Young et les niveaux de gris de l'image MEB, et confirmée pour de l'os humain dans [Devulder 2009].

On considère alors que ce petit domaine d'os est soumis à des sollicitations bifréquentielles de compression uniaxiale telles que celles décrites plus haut, et d'amplitudes conformes à ce qui est observé *in vivo* : un calcul quasi-statique avec une hypothèse de déformations planes est alors mené avec la méthode d'homogénéisation périodique en temps et la loi d'endommagement (3.28).



(a) Image MEB et champ de module de Young  $E_0(\mathbf{x})$  estimé.



(b) Évolution du champ de module de Young au cours du remodelage osseux : phases de résorption, d'apposition et de minéralisation (de gauche à droite) pour deux nouveaux ostéons.

**Figure 3.10** – Simulation *in vivo* d'un échantillon d'os cortical.

On fait l'hypothèse que **le remodelage osseux est initié aux points qui dépassent un certain seuil de déformation équivalente** : ce seuil critique est déterminé à partir d'essais de compression *in situ* effectués sur cet échantillon d'os et sur d'autres échantillons similaires, où l'on a estimé les champs de déplacements par corrélation d'images. Dès que le seuil est dépassé, un scénario temporel de remodelage est proposé, caractérisé par l'évolution locale du module de Young au fur et à mesure des différentes phases du processus de création d'un nouvel ostéon (résorption, apposition, minéralisation). La figure 3.10(b) permet de constater cette évolution au cours de ces trois phases pour la création de deux ostéons proches l'un de l'autre.

Pour conclure, nous pouvons dire que cette étude représente un premier pas dans la compréhension du processus de remodelage osseux. **Les résultats obtenus ne sont pas forcément parfaitement représentatifs de ce qui se passe *in vivo*** dans la mesure où le seuil d'activation proposé est issu d'essais *in vitro*, et que la simulation est bidimensionnelle, ne pouvant ainsi parfaitement décrire l'anisotropie de la microstructure osseuse. Néanmoins, les champs de contraintes et déformations estimés au cours de ces simulations numériques ont permis de mieux comprendre les interactions entre les effets mécaniques et biologiques, tout en confirmant que **le remodelage est un processus qui s'autoentretient**, vu que la première phase, dite de résorption, est la source de concentrations de contraintes qui vont accélérer l'endommagement local et, à terme, déclencher de nouveau le processus.

Du point de vue des simulations enfin, il est clair que ces calculs n'auraient pu être menés sans l'utilisation de la méthode d'homogénéisation en temps : en effet, il a fallu pouvoir prendre en compte des durées de 100 jours pour observer le processus de remodelage de manière complète, ce qui n'aurait pas été possible sans une forte réduction des coûts de calculs par rapport à la résolution du problème de référence.

### 3.3 Vers l'identification de paramètres de modèles homogénéisés en temps

La dernière étape de ce chapitre en constitue en fait la finalité du point de vue de l'identification paramétrique, vu que nous allons nous intéresser ici à la question de la formulation et de la résolution de problèmes d'identification portant sur des modèles homogénéisés en temps selon la méthode que nous avons exposée précédemment.

L'idée est toujours de suivre les principes détaillés dans le paragraphe 1.1, et consiste alors à analyser comment tirer parti de la forme du problème direct homogénéisé en temps. En particulier, deux formulations associées à deux points de vue différents peuvent être abordées pour la fonction coût, ce qui oriente par la suite le problème d'état adjoint à résoudre. Ces questions sont illustrées à l'aide d'un exemple simple, proche de celui étudié dans ce qui précède, et ont fait l'objet de deux communications avec actes : [Puel et Aubry 2012b - 2013].

#### 3.3.1 Mise en œuvre sur un exemple simple

##### Présentation du problème

Le problème proposé concerne la barre soumise à un chargement normal bifréquentiel, qui a permis la validation de la méthode d'homogénéisation périodique en temps dans le paragraphe 3.2.1. Toutefois, la loi d'évolution retenue ici est beaucoup plus simple que précédemment :

$$d_t \varepsilon^p = \left( \frac{|\sigma|}{K} \right)^n \quad (3.53)$$

avec  $\varepsilon^p(x, 0) = 0 \ \forall x \in [0; L]$ . Cette **loi viscoplastique de type Norton** fait intervenir deux paramètres constants  $K$  et  $n$ . Elle remplace les équations (3.38f)-(3.38g)-(3.38h)-(3.38i) proposées dans le paragraphe 3.2.1, tandis que les autres relations du système (3.38) demeurent inchangées.

Dans un souci de simplification, on se place dans un **cadre quasi-statique**, et la quantité qui nous intéresse ici, à comparer avec les données expérimentales, est le déplacement en bout de barre  $u(L, t)$ . Comme la contrainte est homogène, et égale au chargement  $f_s(t)$ , il est facile de résumer le système associé au problème de référence sous la forme suivante de l'EDO suivante :

$$\frac{d_t u(L, t)}{L} = \frac{d_t f_s(t)}{E} + \left( \frac{|f_s(t)|}{K} \right)^n \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.54a)$$

$$u(L, 0) = 0 \quad (3.54b)$$

Le chargement appliqué en  $x = L$  est toujours du type CCF, comme représenté sur la figure 3.1(b), avec  $F = 0,05$  Hz et  $F/\xi = 500$  Hz. L'équation du problème homogénéisé d'ordre zéro vient de l'expression à l'ordre zéro du problème direct (3.54), après calcul de la moyenne par rapport à la variable de temps rapide :

$$\frac{\langle \dot{u}_0 \rangle (L, t)}{L} = \frac{\langle \dot{f}_s \rangle (t)}{E} + \left\langle \left( \frac{|f_s(t, \tau)|}{K} \right)^n \right\rangle \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.55a)$$

$$\langle u_0 \rangle (L, 0) = \frac{\langle f_s \rangle (0)L}{E} \quad (3.55b)$$

Finalement, **le déplacement en  $x = L$  peut être reconstruit en ajoutant au déplacement homogénéisé d'ordre zéro le résidu associé  $u_0^*(L, \tau)$** , solution d'un problème de traction élastique, en remplaçant la variable de temps rapide par son expression  $\tau = t/\xi$  :

$$u(L, t) = \langle u_0 \rangle (L, t) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.56)$$

Ici, des pas de temps de 0.01s ont été choisis et permettent d'obtenir une estimation du déplacement parfaitement équivalente à celui de référence, calculé à l'aide de pas de temps de  $10^{-4}$ s.

#### Formulation du problème d'identification

Le problème d'identification associé a pour but d'être capable de déterminer les paramètres  $E$ ,  $K$  et  $n$  des lois de comportement matériau, à l'aide de mesures effectuées sur des intervalles de temps très longs : en effet, dans le cas de la fatigue CCF, il faut généralement solliciter la structure avec un très grand nombre de cycles avant de pouvoir mesurer une évolution notable de la réponse.

On considère que c'est le déplacement longitudinal  $u_{exp}(t)$  en bout de barre (en  $x = L$ ) qui peut être mesuré : en pratique, afin de pouvoir étudier la qualité de l'identification, il s'agit ici de données synthétiques obtenues par résolution de l'EDO (3.54). Le problème inverse est alors formulé comme la minimisation d'une fonction coût, similaire à ce qui a été proposé dans le paragraphe 1.1.2. Dans le cas de l'identification de modèles homogénéisés en temps, **deux possibilités de fonctions coûts semblent envisageables**, suivant le choix de la quantité comparée aux données expérimentales.

Si l'on privilégie l'expression homogénéisée du déplacement, la fonction coût correspondante s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^0(E, K, n) = & \frac{1}{2} \int_0^T | \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t) |^2 dt \\ & + \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

où  $\langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n)$  est la solution du problème direct (3.55) homogénéisé à l'ordre zéro. Ce que l'on a noté ici  $\langle u_{exp} \rangle (t)$  désigne en fait la quantité expérimentale correspondante, obtenue en **calculant la moyenne mobile de  $u_{exp}$** , c'est-à-dire, pour chaque pas de temps  $t_k$  du déplacement homogénéisé, la moyenne sur une période rapide telle que :

$$\langle u_{exp} \rangle (t_k) = \frac{F}{\xi} \int_{t_k}^{t_k + \frac{\xi}{F}} u_{exp}(t) dt \quad (3.58)$$

Un deuxième choix possible de fonction coût revient à **comparer cette fois-ci le déplacement expérimental « complet »  $u_{exp}(t)$  au déplacement reconstruit (3.56) :**

$$\mathcal{J}^{0*}(E, K, n) = \frac{1}{2} \int_0^T | \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} - u_{exp}(t) |^2 dt \quad (3.59)$$

$$+ \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2$$

Une différence majeure entre ces deux choix réside dans la façon de calculer les intégrales définissant les fonctions coûts : tandis que, dans le premier cas, l'intégrale s'évalue sur les pas de temps correspondant à la variable lente seulement, le second cas implique de calculer l'intégrale sur les pas de temps du problème de référence (ou des données expérimentales).

### Problèmes adjoints associés

Le calcul du gradient de chaque fonction coût se fait conformément à la démarche présentée dans le paragraphe 1.1.3, en introduisant les solutions de problèmes adjoints qui servent dans l'estimation des dérivées partielles des fonctions coûts par rapport aux différentes variables.

**Dans le cas de la première fonction coût proposée (3.57),** le problème adjoint à résoudre est le suivant :

$$d_t z^0(t) = (\langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t)) L \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.60a)$$

$$z^0(T) = 0 \quad (3.60b)$$

Il s'agit, comme précédemment, d'une équation différentielle rétrograde en temps, avec une condition finale nulle. Compte tenu du second membre de cette équation, **l'état adjoint  $z^0$  est une quantité qui évolue « lentement »**, à l'échelle du temps lent  $t$ , ce qui permet de le calculer de façon efficace avec des pas de temps similaires à ceux du calcul du problème homogénéisé (3.55).

**Dans le cas de la seconde fonction coût (3.59),** l'état adjoint associé doit vérifier cette fois-ci :

$$d_t z^{0*}(t) = \left( \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} - u_{exp}(t) \right) L \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.61a)$$

$$z^{0*}(T) = 0 \quad (3.61b)$$

À cause du terme rapide en  $t/\xi$ , **il n'est pas intéressant de résoudre directement cette équation**, car on perdrait tout le bénéfice du coût de calcul réduit obtenu avec l'homogénéisation en temps. Il est donc préférable d'appliquer les principes de cette dernière à la résolution de l'équation. On trouve alors que l'état adjoint homogénéisé à l'ordre zéro  $z_0^{0*}$  est une fonction du temps lent  $t$  seulement, et qu'il vérifie l'équation différentielle homogénéisée suivante :

$$\dot{z}_0^{0*}(t) = (\langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) - \langle u_{exp} \rangle (t)) L \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.62a)$$

$$z_0^{0*}(T) = 0 \quad (3.62b)$$

qui s'avère finalement **identique à l'équation différentielle (3.60)**. Les expressions des gradients en fonction des états adjoints sont, de même, équivalentes, et ne diffèrent que par la présence ou non du terme rapide  $f_s^*(t/\xi)$  dans la dérivée partielle par rapport au module de Young  $E$ . Plus de précisions peuvent être trouvées dans [Puel et Aubry 2013].

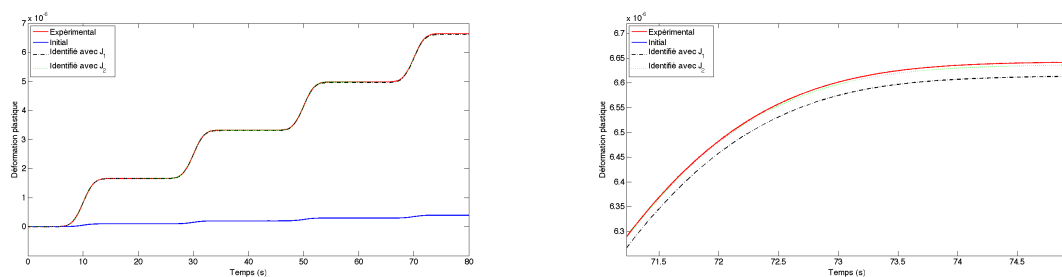
Il est facile de montrer que **la relation (3.60) est l'expression homogénéisée à l'ordre zéro du problème adjoint pour l'identification associée au problème de référence (3.54)**. Ce résultat a déjà été obtenu précédemment dans le cas de l'homogénéisation périodique en espace, pour ce qui constitue les domaines du contrôle optimal homogénéisé et du « contrôle bon marché », comme détaillé par exemple dans [Kesavan et Saint Jean Paulin 1997 - 2001, Saint Jean Paulin et Zoubairi 2004]. Une adaptation spécifique au cas temporel est également fournie dans [Peng 1989] dans le cadre de l'analyse de la perturbation d'un problème de vibrations.

### Résultats de l'identification

Pour illustrer la résolution du problème d'identification avec les deux fonctions coûts proposées précédemment, des données synthétiques  $u_{exp}(t)$  sont créées en résolvant le problème direct de référence (3.54), en choisissant, comme valeurs de paramètres,  $E_{exp} = 200$  GPa,  $K_{exp} = 100 \cdot 10^6$  u.SI et  $n_{exp} = 10$ , et en utilisant la procédure *ode45* de MATLAB, qui, pour rappel, utilise une méthode de Runge Kutta imbriquée d'ordres 4 et 5, définie dans [Dormand et Prince 1980].

Des valeurs  $E_0 = 220$  GPa,  $K_0 = 110 \cdot 10^6$  u.SI et  $n_0 = 11$  sont choisies comme initialisation d'un algorithme de point intérieur, décrit dans [Coleman et Li 1994], afin de minimiser les deux fonctions coûts (3.57) et (3.59) considérées ici sans termes de régularisation.

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.3 et montrent que **la minimisation des deux fonctions coûts conduit à des résultats similaires**, même si la fonction coût  $\mathcal{J}^{0*}$  basée sur les quantités « instantanées » semble un peu meilleure. Les figures 3.11(a) et 3.11(b) montrent la comparaison entre les deux modèles identifiés et la référence synthétique pour l'évolution de la déformation plastique, qui n'est pas directement accessible à l'expérience. Dans les deux cas, **le coût de l'identification est fortement réduit** par rapport à celui qui consisterait à traiter le problème inverse relatif au problème de référence (3.54), vu que seulement 8 000 pas de temps sont mis en œuvre au lieu des 800 000 requis pour le calcul de référence, et ce, pour les deux cas de fonctions coût. En effet, pour réduire le coût du calcul d'intégrale associé à  $\mathcal{J}^{0*}$ , on n'a considéré que les pas de temps  $t_k$  du déplacement homogénéisé, et non l'intégralité des pas de temps rapides, sans que la précision de l'estimation en soit altérée. Ceci semble pouvoir s'expliquer par l'hypothèse de quasi-périodicité, vu qu'ici le résidu d'ordre zéro du déplacement est indépendant du temps lent.



(a) Données synthétiques (en rouge) et simulations avec les paramètres initiaux (en bleu), avec les paramètres identifiés grâce à  $\mathcal{J}^0$  (en noir), et avec les paramètres identifiés grâce à  $\mathcal{J}^{0*}$  (en vert).

(b) Zoom de la figure 3.11(a) (mêmes conventions).

**Figure 3.11** – Évolutions de la déformation plastique longitudinale dans le cadre de l'identification paramétrique d'un modèle de barre homogénéisé en temps.

Fonction coût	Nombre d'itérations	$E_{id}$	$K_{id}$	$n_{id}$
$\mathcal{J}^0$	18	200, 0 GPa	$97, 6 \cdot 10^6$ u.SI	10, 2
$\mathcal{J}^{0*}$	21	200, 0 GPa	$97, 9 \cdot 10^6$ u.SI	10, 1

**Tableau 3.3** – Valeurs des paramètres identifiés après minimisation de  $\mathcal{J}^0$  et  $\mathcal{J}^{0*}$  (identification d'un modèle de barre homogénéisé en temps).

### 3.3.2 Commentaires et explorations complémentaires

L'exemple présenté dans le paragraphe précédent a eu le mérite de montrer la faisabilité d'une démarche qui a simplement consisté à adapter de manière immédiate les concepts présentés dans le paragraphe 1.1. Il reste toutefois à aller plus loin afin d'établir une méthode générale qui ait été éprouvée par de multiples exemples.

#### Approfondissements envisagés

La première extension qui doit être explorée concerne bien sûr le **cadre dynamique** : ceci ne devrait pas entraîner de difficultés supplémentaires, si ce n'est d'implémentation proprement dite : un couplage entre les logiciels COMSOL, pour les simulations EF, et MATLAB, pour l'algorithme de minimisation, devrait être envisagé. Ceci permettra de finalement **considérer un cas d'étude sur des essais de même type que ceux du projet PREMECCY** : l'identification paramétrique de la loi d'évolution retenue pourra s'effectuer à partir de mesures en fatigue à grand nombre de cycles (HCF), dont on a montré la simulation dans le paragraphe 3.2.1. Il sera alors possible de faire des calculs de simulation de durée de vie pour des chargements de type CCF, et l'utilisation de trois échelles de temps présentée précédemment permettra par exemple **d'obtenir à moindre coût les diagrammes de Goodman associés** à ce type de sollicitation : suivant la loi d'évolution et/ou d'endommagement adoptée, ces diagrammes consistent à tracer dans un repère {amplitude de la sollicitation lente} (en abscisse) – {amplitude de la sollicitation rapide} (en ordonnée) des lignes d'isovaleurs de la déformation plastique et/ou de la variable d'endommagement maximale pour un nombre de cycles donné. Ces prédictions pourront alors être validées par comparaison avec les essais expérimentaux effectués.

Un second point qui doit être approfondi est la **définition de la fonction coût**. Deux choix « naturels » ont été adoptés, mais d'autres seraient possibles. Ainsi, dans le domaine de l'homogénéisation périodique en espace, [Fish et Ghouali 2001] proposent une fonction coût qui peut être vue comme un mélange des deux fonctions coûts  $\mathcal{J}^0$  et  $\mathcal{J}^{0*}$  que nous avons testées : en effet, elle s'exprime comme la combinaison linéaire de la norme  $L^2$  de l'erreur sur le déplacement macroscopique et de la norme  $L^2$  de l'erreur sur la déformation microscopique locale. Le deuxième terme, similaire à  $\mathcal{J}^{0*}$ , peut être à ce propos extrêmement coûteux à évaluer, en particulier dans des situations qui requièrent de résoudre le problème microscopique à chaque point de Gauss du problème macroscopique. Les auteurs proposent alors en perspective d'utiliser les principes exposés dans [Fish *et al.* 1997] pour réduire le nombre de points macroscopiques considérés, mais ceci semble difficile à adapter dans notre situation. Pour l'application simple que nous avons présentée, **nous nous étions contentés de ne calculer  $\mathcal{J}^{0*}$  qu'à l'aide des pas de temps lents, sans que l'estimation ne perde en précision, mais cette solution ne sera peut-être pas satisfaisante dans des cas plus généraux.**



Parallèlement au choix de la fonction coût, **la question du terme de régularisation devra également être abordée**. Dans les travaux sur le contrôle optimal homogénéisé en espace tels que [Kesavan et Saint Jean Paulin 1997, Saint Jean Paulin et Zoubairi 2004], il n'est question que d'une régularisation de Tikhonov classique. Lorsque le paramètre de régularisation associé est choisi égal au petit rapport  $\xi$  lui-même, comme dans [Kesavan et Saint Jean Paulin 2001], des résultats de convergence complémentaires sont montrés, pour ce qui constitue alors le domaine du « contrôle bon marché », mais aucune interprétation n'est donnée sur le résultat de ce contrôle optimal. Dans le cas tel que nous l'avons traité ici, ceci reviendrait à utiliser une régularisation de Tikhonov qui serait d'ordre un en  $\xi$ , ce qui ne devrait apporter rien de particulier *a priori* lorsque l'on se limite à l'ordre zéro pour le problème homogénéisé en temps. La question mérite tout de même d'être creusée, car on peut souligner, comme évoqué par [Chung et Kravaris 1988], que **la procédure d'homogénéisation elle-même a un effet régularisant**, et qu'une régularisation d'ordre zéro ne serait en fait pas forcément requise.

Enfin, la prise en compte des ordres supérieurs à zéro peut s'avérer nécessaire dans certains cas. Le paragraphe suivant permet d'étudier succinctement cette situation, toujours pour l'exemple académique étudié précédemment.

### Zoom : influence du paramètre $\xi$

Les résultats montrés jusqu'à présent ont été obtenus pour un rapport  $\xi$  entre les fréquences des sollicitations lente et rapide extrêmement faible (de l'ordre de  $10^{-4}$ ). Ceci explique que, pour les applications présentées ici, il est suffisant de s'arrêter à l'ordre zéro dans la méthode d'homogénéisation. **Dans le cas où le rapport  $\xi$  n'est pas si petit, il peut devenir nécessaire de tenir compte des ordres supérieurs, aussi bien dans le problème direct que dans la formulation de l'identification paramétrique.** Nous allons donner dans ce qui suit quelques éléments succincts concernant la prise en compte d'un ordre supplémentaire, toujours sur l'exemple simple de la barre soumise à un effort normal bifréquentiel.

La figure 3.12(a) montre l'évaluation du déplacement en bout de barre ( $x = L$ ) pour différents ordres considérés, lorsque le rapport  $\xi$  vaut  $1/5$  : comparés au déplacement de référence, représenté en rouge, le déplacement homogénéisé à l'ordre zéro  $\langle u_0 \rangle (L, t)$  (en noir) et le déplacement « instantané » à l'ordre zéro  $\langle u_0 \rangle (L, t) + f_s^*(t/\xi)L/E$  (en bleu) ne sont pas corrects ; l'ajout du terme à l'ordre un  $u_1(L, t, t/\xi)$  permet alors de corriger ce dernier (en vert). Ce terme d'ordre un provient de la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial_\tau u_1(L, t, \tau)}{L} = \left[ \left( \frac{|f_s(t, \tau)|}{K} \right)^n \right]^* \quad \forall t \in [0; T] \quad (3.63a)$$

$$u_1(L, 0, 0) = 0 \quad (3.63b)$$

De manière similaire, le problème d'identification associé nécessite de considérer une reconstruction à l'ordre un de la réponse de la barre dans la fonction coût  $\mathcal{J}^1(E, K, n)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1 = \frac{1}{2} \int_0^T & | \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} + \xi u_1(L, t, t/\xi; E, K, n) - u_{exp}(t) |^2 \quad (3.64) \\ & + \frac{\alpha_E}{2} |E - E_0|^2 + \frac{\alpha_K}{2} |K - K_0|^2 + \frac{\alpha_n}{2} |n - n_0|^2 \end{aligned}$$

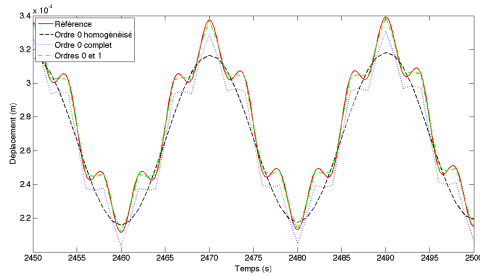
La minimisation de cette fonction coût passe par la résolution d'un deuxième problème d'état adjoint, en complément du problème adjoint (3.62) qui reste inchangé :

$$\frac{d_t z^1(t)}{L} = \langle u_0 \rangle (L, t; E, K, n) + \frac{f_s^*(t/\xi)L}{E} + \xi u_1(L, t, t/\xi; E, K, n) - u_{exp}(t) \quad (3.65a)$$

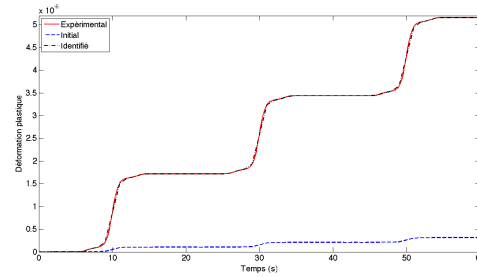
$$z^1(T) = 0 \quad (3.65b)$$

Le gradient de la fonction coût fait alors intervenir les deux état adjoints (3.62) et (3.65), ce dernier pouvant s'interpréter comme le **multiplicateur de Lagrange associé à l'équation résiduelle à l'ordre un de l'équation d'évolution (3.63)**.

Un exemple d'identification a été mené avec des données synthétiques  $u_{exp}(t)$  créées en prenant comme paramètres  $K_{exp} = 100 \cdot 10^6$  u.SI et  $n_{exp} = 10$  et le chargement de la figure 3.1(b). Des valeurs  $K_0 = 110 \cdot 10^6$  u.SI et  $n_0 = 11$  sont choisies comme initialisation de l'algorithme utilisé pour minimiser la fonction coût (3.64) considérée sans régularisation. Après 18 itérations, les valeurs identifiées sont  $K_{id} = 102,0 \cdot 10^6$  u.SI et  $n_{id} = 9,9$ . La figure 3.12(b) permet de constater la bonne évaluation de la déformation plastique, qui n'est pas directement accessible à l'expérience. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Puel et Aubry 2013].



(a) Déplacement en  $x = L$  pour différentes estimations homogénéisées du problème direct.



(b) Identification associée : comparaison des estimations de la déformation plastique longitudinale.

**Figure 3.12** – Analyse de la réponse homogénéisée et de l'identification paramétrique pour un modèle de barre homogénéisé en temps, avec  $\xi = 1/5$ .

## 3.4 Bilan et perspectives

Ce chapitre a posé les bases d'une stratégie d'identification paramétrique pour laquelle le coût numérique a pu être fortement réduit par l'utilisation de modèles homogénéisés en temps, dont la simulation peut être menée aisément sur de grands intervalles de temps. Le formalisme mathématique rigoureux de la méthode d'homogénéisation périodique en temps permet de même d'inscrire le problème inverse dans un cadre précis, dont on peut tirer parti pour l'écriture du problème d'état adjoint introduit. En complément des commentaires évoqués dans le paragraphe 3.3.2, nous donnons dans ce qui suit plusieurs pistes d'investigation pertinentes pour approfondir les études présentées dans ce chapitre.

### 3.4.1 Sur les performances de la méthode d'homogénéisation périodique en temps

Comme nous avons pu le souligner tout au long de ce chapitre, et notamment dans le paragraphe 3.2.1 qui a permis de valider la méthode sur un exemple simple, le fait de pouvoir choisir un pas de temps indépendamment de la période des cycles rapides est un avantage très précieux, mais cette liberté pose tout de même la question de la valeur optimale à adopter. En effet, **la précision atteinte par un calcul homogénéisé en temps repose sur trois éléments à considérer** :

- **la valeur du petit paramètre  $\xi$**  : en fonction de cette valeur, il peut devenir nécessaire de considérer l'ordre un, voire plus ; toutefois, il est facile d'estimer l'ordre de grandeur de la correction apportée par l'ordre  $p$ , vu qu'elle est égale à  $O(\xi^p)$  ;
- **l'estimation de la moyenne sur un cycle rapide** : comme évoqué précédemment, nous avons choisi ici une formule des trapèzes, avec 10 ou 20 points suivant les applications ; quel que soit le nombre de points adoptés, le coût de calcul associé reste bien sûr négligeable, et, à la suite des conclusions de [Weideman 2002], il ne semble pas nécessaire de tester des formules de quadrature numérique plus élaborées ;
- **le choix du pas de temps lent**, qui reste donc la question principale à creuser.

**Cette question n'est pas vraiment explicitée dans les autres travaux** utilisant la méthode d'homogénéisation périodique en temps, sauf peut-être par [Fish *et al.* 2012] qui proposent une estimation qui semble inspirée de la technique de saut de cycle évoquée dans [Cojocaru et Karlsson 2006]. L'idée est d'appliquer une formule d'Euler pour calculer les variables à un pas de temps situé plusieurs cycles lents plus loin que le pas de temps actuel, en utilisant une estimation de la dérivée temporelle de ces variables obtenue à l'aide d'une différence finie entre la fin et le début du cycle lent précédent : ce saut de cycles est alors adapté en fonction d'un critère de respect des différentes équations homogénéisés à chaque pas de temps lent calculé.

Dans nos simulations, nous avons fixé un pas de temps lent par défaut, sachant que **l'algorithme de résolution DASPK utilisé par COMSOL peut raffiner localement ce pas de temps si un critère de précision n'est pas vérifié au cours de la résolution**. Ce critère a pour l'instant été fixé de façon arbitraire, ce qui s'est révélé suffisant dans la plupart des simulations associées à l'exemple de validation exposé dans le paragraphe 3.2.1, mais nous avons effectivement constaté que le choix du pas de temps avait une influence sur la solution calculée, et il serait donc intéressant d'en étudier la portée : plus précisément, il est notamment possible d'affecter une pondération à chaque variable résolue dans l'estimation de cette précision. Des comparaisons avec ce qui est proposé par [Fish *et al.* 2012] sont également à entreprendre. Ceci devrait permettre la proposition d'un choix optimal pour le coût de calcul résultant.

Pour continuer justement dans le sens de la réduction de ce dernier, la démarche d'introduire trois échelles de temps dans le cas de chargements de type CCF devra également être analysée de manière analogue, en termes de choix de pas de temps et de précision de la résolution numérique associée.

En outre, il serait intéressant de **situer les performances de la méthode d'homogénéisation périodique en temps par rapport aux techniques actuellement développées pour la réduction de modèles**, comme la méthode PGD notamment, décrite par exemple dans [Chinesta *et al.* 2010].

Ainsi, [Ammar *et al.* 2012] présentent une **adaptation spécifique de cette dernière méthode au cas de la prise en compte de deux échelles de temps** : celles-ci sont traitées comme deux variables différentes, et ce, même si aucune hypothèse de séparation d'échelles n'est permise. La méthode PGD s'applique alors de manière classique, à ceci près qu'il faut garantir la continuité entre les deux variables de temps, ce qui est fait soit par pénalisation, soit à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Toutefois, **les auteurs n'avancent pas de conclusions en termes de performances**, et il serait donc intéressant de faire la comparaison avec notre méthode dans le cas de chargements périodiques.

De manière similaire, **plusieurs travaux antérieurs, menés au LMT-Cachan sur la méthode LATIN, ont abordé la question de problèmes multiéchelles en temps**. L'introduction d'une représentation dite « radiale » pour les fonctions calculées, ainsi que l'adoption d'une résolution itérative portant à chaque fois sur l'intervalle de temps tout entier, font de la méthode LATIN un précurseur des techniques basées sur la PGD. [Cognard et Ladevèze 1993] appliquent cette méthode dans le cas de la viscoplasticité cyclique en introduisant une discrétisation temporelle à deux échelles de temps : les fonctions recherchées sont périodiques par rapport au temps rapide, et évoluent de façon affine vis-à-vis du temps lent.

D'autres choix sont envisageables : par exemple, [Nouy 2003, Ladevèze et Nouy 2003] traitent la résolution de problèmes d'évolution de structures hétérogènes à l'aide d'échelles multiples d'espace et temps couplés, et la discrétisation temporelle est alors effectuée à l'aide d'un découpage de l'intervalle d'étude en plusieurs sous-intervalles auxquels est associée la variable de temps « macro », qui peut être discontinue entre deux sous-intervalles consécutifs. La séparation des échelles n'est alors opérée qu'au niveau des interfaces résultant de la décomposition en sous-domaines spatiaux. Cette idée est étendue par [Néron et Dureisseix 2008a - b] au cas de problèmes multi-physiques, en considérant cette fois les interfaces spatio-temporelles entre les différentes physiques et en introduisant une discrétisation temporelle pour chacune de ces interfaces. Là encore, **la comparaison en termes de performances avec la méthode d'homogénéisation périodique en temps serait enrichissante**.

### 3.4.2 Sur de possibles cas d'étude à explorer

Une première piste d'exploration peut concerner des **cas d'étude où l'hypothèse (3.10) faite sur l'ordre de grandeur des termes d'inertie n'est pas vérifiée**. Ceci peut se produire quand le rapport entre les deux échelles de temps n'est pas aussi petit que la valeur que l'on a considérée dans les applications de ce chapitre, ou quand le matériau est très souple (par exemple dans le cas d'élastomères, comme on peut le constater sur le diagramme d'Ashby de la figure 3.4(a)). Dans ce cas, on a montré dans le paragraphe 3.2.1 qu'il n'était plus possible de séparer directement les deux échelles de temps.

La solution à envisager dans ce cas est d'**introduire une échelle d'espace microscopique**, car on se rend compte en effet qu'en posant  $y = x/\xi$ , les termes sinusoïdaux qui apparaissent dans l'expression des ondes progressives (3.42) s'expriment comme  $2\pi F(\tau \pm y/c)$ , avec  $\tau$  et  $y/c$  du même ordre de grandeur *a priori*. Ainsi, même si le matériau considéré est homogène, il est nécessaire de distinguer deux échelles d'espace. On est alors en présence d'une **homogénéisation périodique en espace et temps couplés**, telle que celle détaillée par exemple par [Yu et Fish 2002a], sauf que le milieu serait ici homogène selon les deux échelles d'espace, ce qui devrait permettre certaines simplifications intéressantes à étudier.

Les applications que nous avons considérées dans ce chapitre ont toutes porté sur la simulation de la fatigue à grand nombre de cycles, à l'aide de lois de comportement dont les paramètres sont homogènes relativement à la variable d'espace. Il pourrait être enrichissant d'aller vers une **description plus fine en adoptant des lois qui s'expriment à l'échelle mésoscopique, telles que les lois de plasticité cristalline** par exemple. Celles-ci sont formellement proches des lois d'évolution que nous avons considérées ici, ce qui laisse à penser que la méthode d'homogénéisation périodique en temps est adaptée à ce cadre : ceci pourra être testé au sein du laboratoire MSSMat à l'aide du modèle de plasticité cristalline CristalECP, développé par Colette Rey et détaillé par exemple dans [Rey *et al.* 2012], et devrait permettre de remplacer la pratique actuelle d'accélérer empiriquement les évolutions des variables internes pour limiter la simulation à un nombre réduit de cycles.

Ce type de simulation a déjà été envisagé dans [Joseph *et al.* 2010, Chakraborty et Ghosh 2013], où est présentée une comparaison des différentes méthodes permettant de réduire le coût de calcul associé à une telle résolution. Il est d'ailleurs intéressant de noter que les auteurs préfèrent ne pas adopter la méthode d'homogénéisation périodique en temps à cause de son hypothèse de quasi-périodicité, qui peut ne pas être vérifiée dans certains cas de chargement très spécifiques (typiquement, dans le cas de rapports de charge  $R = -1$ ). Ils utilisent alors une **stratégie à base d'ondelettes qui permettent de constituer une base de projection de la solution** qui n'est pas sans rappeler les stratégies PGD ou la décomposition radiale proposée par la méthode LATIN, si ce n'est que la résolution temporelle reste incrémentale. Là encore, aucune comparaison en termes de performances n'est proposée.

Il serait donc instructif d'**explorer l'implémentation de la méthode d'homogénéisation périodique en temps dans ce cas d'étude**. Si l'hypothèse de quasi-périodicité doit être effectivement relâchée, une première piste consistera à adopter l'hypothèse de « presque-périodicité » proposée par [Oskay et Fish 2004, Fish et Oskay 2005]. Une autre piste serait sinon d'envisager l'adaptation de la méthode d'homogénéisation non périodique en espace proposée par [Capdeville *et al.* 2010], et déjà évoquée dans le paragraphe 1.4.3. Il est d'ailleurs intéressant de constater que le filtre servant à séparer les deux échelles est à base d'ondelettes, comme la méthode proposée par [Joseph *et al.* 2010, Chakraborty et Ghosh 2013], sauf que [Capdeville *et al.* 2010] l'utilisent dans le cadre d'une décomposition asymptotique. Dans un deuxième temps, la question de l'identification des paramètres des lois de plasticité cristalline pourra alors être envisagée, en adaptant le schéma proposé dans le paragraphe 3.3 aux deux pistes précédentes.

Enfin, il est instructif de noter également que la méthode d'homogénéisation périodique en temps a été mise en œuvre pour des simulations qui concernent une échelle encore plus fine : [Briani et Monneau 2009] s'intéressent à des modèles de dynamique de densités de dislocations, et montrent que ces dernières vérifient un modèle homogénéisé en temps qui permet notamment d'obtenir une interprétation physique du phénomène de bandes de glissement persistantes.

Pour ce qui concerne la problématique de l'identification paramétrique de modèles homogénéisés en temps, en complément des points déjà évoqués dans le paragraphe 3.3.2, nous pouvons de nouveau évoquer la question de la **maintenance prédictive** abordée en perspective dans le chapitre 1. La démarche proposée dans le paragraphe 3.3 pourrait ainsi être utilisée pour la problématique de l'identification en ligne, et ce, vraisemblablement, même si les sollicitations appliquées à la structures sont aléatoires. En effet, on peut imaginer que l'on puisse **adapter au cas des échelles de temps les techniques adoptées pour faire l'homogénéisation d'un matériau à microstructure aléatoire**, décrites par exemple dans [Sab 1992].

La question majeure sera alors de savoir comment définir un Volume Élémentaire Représentatif (ou VER) pertinent en termes temporels, puis de savoir quelle serait la meilleure stratégie numérique pour obtenir le problème homogénéisé (utilisation d'un seul VER aléatoire de grande taille, ou bien analyse statistique d'un nombre donné de réalisations de VER de plus petite taille).

Par ailleurs, il n'est pas certain que l'on puisse systématiquement faire l'hypothèse que les sollicitations soient purement aléatoires. Dans le cas de l'identification en ligne d'une rame de TGV, présentée dans le paragraphe 1.3, les résultats ont en effet montré une dépendance vis-à-vis de la courbure moyenne de la voie par exemple. Comme la géométrie de celle-ci est connue précisément, il peut être préférable de rester dans le domaine déterministe, et dans ce cas, ceci reviendrait à étudier là encore l'adaptation de la méthode d'homogénéisation non périodique en espace proposée par [Capdeville *et al.* 2010] au cas de deux échelles de temps.



---

## CONCLUSION

---

*The data may not contain the answer. The combination of some data and an aching desire for an answer does not ensure that a reasonable answer can be extracted from a given body of data.*

[Tukey 1986] – J. W. Tukey. Sunset salvo. *The American Statistician*, 40(1): 72–76, 1986

L'objectif de ce mémoire a été de résumer un ensemble de travaux réalisés depuis 2005 au laboratoire MSSMat de l'École Centrale Paris, portant sur la question générale de l'identification paramétrique. Les multiples exemples d'applications exposés tout au long de ces pages ont permis de dégager les enjeux et les difficultés de cette problématique, mais aussi de montrer qu'il était néanmoins possible de proposer une méthodologie générale et efficace pour la résoudre.

Plus précisément, nous nous sommes notamment intéressés à la **régularisation de ces problèmes mal posés**, et à la résolution numérique associée, en mettant en œuvre divers outils et approches :

- **l'ajout de termes de régularisation**, d'après [Tikhonov 1977] par exemple, dans la fonction coût à minimiser : employée classiquement, et particulièrement illustrée dans le chapitre 1, cette approche a montré ses limites dans le chapitre 2 pour l'identification de champs de propriétés dépendant de l'espace ;
- **l'utilisation du cadre de l'adaptation de maillage au sein d'une stratégie spécifiquement dédiée** à l'identification de ces derniers dans le chapitre 2 : le champ spatial de propriétés à déterminer est discrétisé sur un maillage distinct du maillage de « calcul », suffisamment grossier initialement pour faire bénéficier la procédure d'inversion d'un effet régularisant, puis progressivement raffiné pour améliorer la qualité de l'identification ;
- **une procédure de minimisation de la fonction coût reposant sur un gradient estimé à l'aide d'un calcul d'état adjoint**, qui, même s'il ne présente pas d'effet régularisant à proprement parler, participe tout de même à la bonne résolution numérique du problème inverse : celle-ci s'est montrée efficace tout au long des exemples présentés dans les trois chapitres de ce mémoire ;
- **une méthode d'homogénéisation périodique en temps**, dont le but premier était la simulation efficace de l'évolution lente de problèmes directs faisant intervenir des sollicitations cycliques rapides, et pour laquelle nous avons adapté dans le chapitre 3 la procédure d'identification avec calcul de l'état adjoint : même si nous ne l'avons pas vraiment mis en évidence ici, la procédure d'homogénéisation a aussi un effet régularisant dans le processus d'inversion, comme précisé notamment par [Chung et Kravaris 1988].



Ces différents points ont suscité de nombreux commentaires et des pistes d'approfondissements qui ont été évoqués dans les bilans respectifs de chaque chapitre. Pour conclure ce mémoire, nous nous contenterons donc de mettre en exergue quelques perspectives à moyen terme.

En premier lieu, **l'utilisation et l'intégration des mesures de champs au sein de la stratégie d'identification proposée devront être approfondies**. En particulier, nous envisageons la possibilité de dédier un maillage spécifique à la discrétisation des données obtenues par des techniques de mesures de champs, de façon à pouvoir piloter la finesse de ce maillage au sein de la stratégie adaptative décrite dans le chapitre 2. Ceci devrait avoir pour le problème inverse un effet régularisant qui s'ajouterait à celui, déjà évoqué, lié au maillage de discrétisation du champ recherché.

De manière générale, **l'arrivée dans le laboratoire MSSMat d'un MET à Haute Résolution**, obtenu dans le cadre de l'Équipement d'Excellence MATMECA, constituera un support de choix pour ces investigations en fournissant, sur des problématiques de pointe, des données expérimentales très riches. Celles-ci permettront également d'aller plus loin sur la **problématique du traitement des images**, dont le rôle n'est pas neutre dans l'utilisation qui en est faite à des fins d'identification.

**La poursuite des études du processus d'identification dans le cadre de problèmes homogénéisés constitue une deuxième voie de travaux à développer**. Une première possibilité est de poursuivre les études esquissées dans le chapitre 3 dans le cadre de l'homogénéisation périodique en temps, pour permettre notamment de **développer la problématique de la maintenance prédictive**. Pour la plupart des applications probables, l'hypothèse de quasi-périodicité liée à la méthode devra vraisemblablement être abandonnée, ce qui nous obligerait à nous tourner vers des adaptations de la méthode d'homogénéisation non périodique, proposée par [Capdeville *et al.* 2010] dans le cadre de deux échelles d'espace, ou des méthodes d'homogénéisation stochastique telles que décrites par exemple par [Sab 1992].

De manière similaire, **l'identification paramétrique, pour des problèmes d'homogénéisation en espace cette fois-ci, est à envisager**. En plus de la réduction des coûts de calculs en jeu, le gain associé pourrait être lié à la régularisation accrue du problème inverse que l'on est en mesure d'attendre du processus d'homogénéisation. Le recours à la stratégie adaptative, avec la possibilité supplémentaire d'introduire une quantité d'intérêt macroscopique, est aussi un complément à étudier. Là encore, les données prochainement offertes par le MET à Haute Résolution devraient permettre ces explorations.

Enfin, une dernière piste d'investigation, peu évoquée dans ce mémoire, concerne le **passage à des procédures d'identification utilisant des modèles stochastiques**, telles que celles que l'on peut trouver notamment dans l'ouvrage de [Tarantola 2005], qui permettraient de mieux appréhender les incertitudes liées aux problèmes considérés, et d'en tenir compte dans les problèmes inverses associés. Parmi toutes ces méthodes, le cadre bayésien est le plus employé, et on peut citer des applications proches des cas d'études que nous avons traités dans ce mémoire, comme par exemple [Koutsourelakis 2012] dans le domaine de l'élastographie. D'autres méthodes, telles que celle décrite par [Ait Brik *et al.* 2006], sont plus proches de celles que nous avons utilisées, et seraient également intéressantes à explorer. Le recours à des concepts moins classiques, tels que le travail de thèse [Puel 2004], pourrait aussi être envisagé.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Ait Brik *et al.* 2006] – B. Ait Brik, S. Ghanmi, N. Bouhaddi et S. Cogan. Robust design in structural mechanics. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8(1) : 39–49, 2006.
- [Allix *et al.* 2005] – O. Allix, P. Feissel et H. M. Nguyen. Identification strategy in the presence of corrupted measurements. *Engineering Computations*, 22(5-6) : 487–504, 2005.
- [Ammar *et al.* 2012] – A. Ammar, F. Chinesta, E. Cueto et M. Doblaré. Proper Generalized Decomposition of time-multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(5) : 569–596, 2012.
- [Ascher et Haber 2001] – U. M. Ascher et E. Haber. Grid refinement and scaling for distributed parameter estimation problems. *Inverse Problems*, 17(3) : 571–590, 2001.
- [Ashby 2011] – M. F. Ashby. *Materials Selection in Mechanical Design*. Elsevier, 2011.
- [Ashcroft et Mermin 1976] – N. W. Ashcroft et N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt College Publishers, 1976.
- [Aubry et Hamon 2007] – D. Aubry et A.-L. Hamon. Ab-initio computation of crystal using Finite Elements. Dans *9th US National Congress on Computational Mechanics - USNCCM9*, 2007.
- [Auriault *et al.* 2009] – J.-L. Auriault, C. Boutin et C. Geindreau. *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogeneous Media*. John Wiley & Sons, 2009.
- [Avril *et al.* 2008] – S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco et F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) : 381–402, 2008.
- [Bagley et Torvik 1983] – R. L. Bagley et P. J. Torvik. Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, 21(5) : 741–748, 1983.
- [Banerjee *et al.* 2013] – B. Banerjee, T. F. Walsh, W. Aquino et M. Bonnet. Large scale parameter estimation problems in frequency-domain elastodynamics using an error in constitutive equation functional. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253(0) : 60–72, 2013.
- [Bangerth 2002] – W. Bangerth. *Adaptive finite element method for the identification of distributed parameters in partial differential equations*. Thèse de doctorat, Universität Heidelberg, 2002.
- [Bangerth 2008] – W. Bangerth. A framework for the adaptive Finite Element solution of large-scale inverse problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(6) : 2965–2989, 2008.
- [Bangerth et Joshi 2008] – W. Bangerth et A. Joshi. Adaptive Finite Element methods for the solution of inverse problems in optical tomography. *Inverse Problems*, 24(3) : 034011, 2008.

- [Becker *et al.* 2000] – R. Becker, H. Kapp et R. Rannacher. Adaptive Finite Element methods for optimal control of Partial Differential Equations : Basic concept. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(1) : 113–132, 2000.
- [Becker et Rannacher 1996] – R. Becker et R. Rannacher. A feed-back approach to error control in Finite Element methods : Basic analysis and examples. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 4 : 237–264, 1996.
- [Becker et Vexler 2003] – R. Becker et B. Vexler. A posteriori error estimation for Finite Element discretization of parameter identification problems. *Numerische Mathematik*, 96(3) : 435–459, 2003.
- [Becker et Vexler 2005] – R. Becker et B. Vexler. Mesh refinement and numerical sensitivity analysis for parameter calibration of Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 206(1) : 95–110, 2005.
- [Beilina et Johnson 2005] – L. Beilina et C. Johnson. A posteriori error estimation in computational inverse scattering. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15 : 23–37, 2005.
- [Beilina et Klibanov 2012] – L. Beilina et M. V. Klibanov. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems*. Springer, 2012.
- [Ben Ameer *et al.* 2004] – H. Ben Ameer, M. Burger et B. Hackl. Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity. *Inverse Problems*, 20(3) : 673, 2004.
- [Bensoussan *et al.* 1978] – A. Bensoussan, J. L. Lions et G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Elsevier, Burlington, MA, 1978.
- [Besnard *et al.* 2006] – G. Besnard, F. Hild et S. Roux. “Finite-Element” displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin–Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6) : 789–803, 2006.
- [Biros et Ghattas 2005] – G. Biros et O. Ghattas. Parallel Lagrange-Newton-Krylov-Schur algorithms for PDE-constrained optimization. Part II : The Lagrange-Newton solver and its application to optimal control of steady viscous flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(2) : 714–739, 2005.
- [Biros et Ghattas 2005] – G. Biros et O. Ghattas. Parallel Lagrange-Newton-Krylov-Schur methods for PDE-constrained optimization. Part I : The Krylov-Schur solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(2) : 687–713, 2005.
- [Blekhman 2000] – I. I. Blekhman. *Vibrational Mechanics*. World Scientific, 2000.
- [Blekhman 2007] – I. I. Blekhman. On vibratory dynamic materials and composites. *Doklady Physics*, 52(6) : 335–338, 2007.
- [Blekhman et Sorokin 2010] – I. I. Blekhman et V. S. Sorokin. On the separation of fast and slow motions in mechanical systems with high-frequency modulation of the dissipation coefficient. *Journal of Sound and Vibration*, 329(23) : 4936–4949, 2010.
- [Bonnet 2006] – M. Bonnet. Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40) : 5239–5254, 2006.
- [Bonnet 2010] – M. Bonnet. Topological sensitivity of energy cost functional for wave-based defect identification. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(7-8) : 377–389, 2010.

- [**Bonnet et Constantinescu 2005**] – M. Bonnet et A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) : R1, 2005.
- [**Bonnet et Guzina 2004**] – M. Bonnet et B. B. Guzina. Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(13) : 2344–2373, 2004.
- [**Borsic et Adler 2012**] – A. Borsic et A. Adler. A primal-dual interior-point framework for using the L1 or L2 norm on the data and regularization terms of inverse problems. *Inverse Problems*, 28(9) : 095011, 2012.
- [**Bourgeteau 2009**] – B. Bourgeteau. *Modélisation numérique des articulations en caoutchouc de la liaison au sol automobile en simulation multi-corps transitoire*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2009.
- [**Bourgeteau et al. 2007**] – B. Bourgeteau, D. Aubry, F. Moiro et P. Ferbach. Numerical modelling of rubber bushing behaviour in multi-body simulation of a vehicle chassis. Dans *Proceedings of the 5th European Conference on Constitutive Models for Rubber - ECCMR 2007*, 2007.
- [**Boutin et Wong 1998**] – C. Boutin et H. Wong. Study of thermosensitive heterogeneous media via space-time homogenisation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(6) : 939–968, 1998.
- [**Briani et Monneau 2009**] – A. Briani et R. Monneau. Time-homogenization of a first order system arising in the modelling of the dynamics of dislocation densities. *Comptes Rendus Mathématiques*, 347(5-6) : 231–236, 2009.
- [**Brown et al. 1994**] – P. Brown, A. Hindmarsh et L. Petzold. Using Krylov methods in the solution of large-scale differential-algebraic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(6) : 1467–1488, 1994.
- [**Bruni et al. 2007**] – S. Bruni, R. Goodall, T. X. Mei et H. Tsunashima. Control and monitoring for railway vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 45(7-8) : 743–779, 2007.
- [**Bunks et al. 1995**] – C. Bunks, F. Saleck, S. Zaleski et G. Chavent. Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, 60(5) : 1457–1473, 1995.
- [**Burger et Osher 2005**] – M. Burger et S. J. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *European Journal of Applied Mathematics*, 16(02) : 263–301, 2005.
- [**Capdeville et al. 2010**] – Y. Capdeville, L. Guillot et J.-J. Marigo. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 181(2) : 897–910, 2010.
- [**Carpio et Rapún 2012**] – A. Carpio et M.-L. Rapún. Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 28(9) : 095010, 2012.
- [**Chakraborty et Ghosh 2013**] – P. Chakraborty et S. Ghosh. Accelerating cyclic plasticity simulations using an adaptive wavelet transformation based multitime scaling method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(13) : 1425–1454, 2013.
- [**Chavent 1974**] – G. Chavent. *Identification of parameter distributed systems*, chapitre Identification of function parameters in Partial Differential Equations. ASME, 1974.

- [**Chen et Fish 2001**] – W. Chen et J. Fish. A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *Journal of Applied Mechanics*, 68(2) : 153–161, 2001.
- [**Chew et Lin 1995**] – W. Chew et J.-H. Lin. A frequency-hopping approach for microwave imaging of large inhomogeneous bodies. Dans *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1995. AP-S. Digest*, volume 3, pages 1610–1613, 1995.
- [**Chinesta et al. 2010**] – F. Chinesta, A. Ammar et E. Cueto. Proper Generalized Decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) : 1114–1132, 2010.
- [**Chollet et al. 2007**] – H. Chollet, M. Sebes et J. B. Ayasse. Evolution from the Hertzian contact model to non-Hertzian conditions for fast dynamic simulations. Dans *IUTAM Symposium on Computational Methods in Contact Mechanics*, volume 3 de *IUTAM Bookseries*, pages 189–205, 2007.
- [**Chung et Kravaris 1988**] – C.-B. Chung et C. Kravaris. Identification of spatially discontinuous parameters in second-order parabolic systems by piecewise regularisation. *Inverse Problems*, 4(4) : 973–994, 1988.
- [**Ciarlet 1989**] – P. G. Ciarlet. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge University Press, New York, 1989.
- [**Cimetière et al. 2000**] – A. Cimetière, F. Delvare et F. Pons. Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série IIb - Mécanique*, 328(9) : 639–644, 2000.
- [**Cognard et Ladevèze 1993**] – J.-Y. Cognard et P. Ladevèze. A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(2) : 141–157, 1993.
- [**Cojocaru et Karlsson 2006**] – D. Cojocaru et A. Karlsson. A simple numerical method of cycle jumps for cyclically loaded structures. *International Journal of Fatigue*, 28(12) : 1677–1689, 2006.
- [**Coleman et Li 1994**] – T. F. Coleman et Y. Li. On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming*, 67(1-3) : 189–224, 1994.
- [**Colton et Kress 1998**] – D. Colton et R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 1998.
- [**Constantinescu et Tardieu 2001**] – A. Constantinescu et N. Tardieu. On the identification of elastoviscoplastic constitutive laws from indentation tests. *Inverse Problems in Engineering*, 9(1) : 19–44, 2001.
- [**Cooreman et al. 2007**] – S. Cooreman, D. Lecompte, H. Sol, J. Vantomme et D. Debruyne. Elasto-plastic material parameter identification by inverse methods : Calculation of the sensitivity matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 44(13) : 4329–4341, 2007.
- [**Coveney et Johnson 2000**] – V. A. Coveney et D. E. Johnson. Rate-dependent modeling of a highly filled vulcanizate. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(4) : 565–577, 2000.
- [**Coveney et al. 1995**] – V. A. Coveney, D. E. Johnson et D. M. Turner. A triboelastic model for the cyclic mechanical behavior of filled vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 68(4) : 660–670, 1995.

- [**Da Silva et al. 2009**] – S. Da Silva, S. Cogan, E. Foltête et F. Buffe. Metrics for nonlinear model updating in structural dynamics. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31(1) : 27–34, 2009.
- [**Deü et Matignon 2010**] – J.-F. Deü et D. Matignon. Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) : 1745 – 1753, 2010.
- [**Deuffhard 1974**] – P. Deuffhard. A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting. *Numerische Mathematik*, 22 : 289–315, 1974.
- [**Devulder 2009**] – A. Devulder. *Approche micromécanique du remodelage osseux*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2009.
- [**Diethelm et al. 2005**] – K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed et Y. Luchko. Algorithms for the fractional calculus : A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(6-8) : 743–773, 2005.
- [**Dontsov et Guzina 2011**] – E. Dontsov et B. Guzina. Effect of low-frequency modulation on the acoustic radiation force in Newtonian fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(1) : 356–378, 2011.
- [**Dontsov et Guzina 2012**] – E. V. Dontsov et B. B. Guzina. Acoustic radiation force in tissue-like solids due to modulated sound field. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(10) : 1791–1813, 2012.
- [**Dormand et Prince 1980**] – J. Dormand et P. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1) : 19–26, 1980.
- [**Engl et al. 1996**] – H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [**Epanomeritakis et al. 2008**] – I. Epanomeritakis, V. Akçelik, O. Ghattas et J. Bielak. A Newton-CG method for large-scale three-dimensional elastic full-waveform seismic inversion. *Inverse Problems*, 24(3) : 034015, 2008.
- [**Fatemi et Yang 1998**] – A. Fatemi et L. Yang. Cumulative fatigue damage and life prediction theories : a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, 20(1) : 9–34, 1998.
- [**Fayolle et al. 2007**] – X. Fayolle, S. Calloch et F. Hild. Controlling testing machines with digital image correlation. *Experimental Techniques*, 31(3) : 57–63, 2007.
- [**Feissel 2003**] – P. Feissel. *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2003.
- [**Feissel et Allix 2007**] – P. Feissel et O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) : 1968–1983, 2007.
- [**Ferretti et al. 2007**] – A. Ferretti, G. Savio, R. Barzaghi, A. Borghi, S. Musazzi, F. Novali, C. Prati et F. Rocca. Submillimeter accuracy of InSAR time series : experimental validation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(5) : 1142–1153, 2007.
- [**Fish et al. 2012**] – J. Fish, M. Bailakanavar, L. Powers et T. Cook. Multiscale fatigue life prediction model for heterogeneous materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(10) : 1087–1104, 2012.

- [Fish et Ghouali 2001] – J. Fish et A. Ghouali. Multiscale analytical sensitivity analysis for composite materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6) : 1501–1520, 2001.
- [Fish et Oskay 2005] – J. Fish et C. Oskay. A nonlocal multiscale fatigue model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 12(6) : 485–500, 2005.
- [Fish et al. 1997] – J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi et M. S. Shephard. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1-2) : 53–73, 1997.
- [Fondrk et al. 1999] – M. T. Fondrk, E. H. Bahniuk et D. T. Davy. A damage model for nonlinear tensile behavior of cortical bone. *Journal of Biomechanical Engineering*, 121(5) : 533–541, 1999.
- [Francfort 1983] – G. A. Francfort. Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 14(4) : 696–708, 1983.
- [Giering et Kaminski 1998] – R. Giering et T. Kaminski. Recipes for adjoint code construction. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 24(4) : 437–474, 1998.
- [Gockenbach et al. 2002] – M. S. Gockenbach, D. R. Reynolds, P. Shen et W. W. Symes. Efficient and automatic implementation of the adjoint state method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 28(1) : 22–44, 2002.
- [Gryazin et al. 2001] – Y. Gryazin, M. Klibanov et T. Lucas. Numerical solution of a sub-surface imaging inverse problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(2) : 664–683, 2001.
- [Guennouni 1988] – T. Guennouni. Sur une méthode de calcul de structures soumises à des chargements cycliques : l’homogénéisation en temps. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 22(3) : 417–455, 1988.
- [Guennouni et Aubry 1986] – T. Guennouni et D. Aubry. Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargements cycliques. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série II. Mécanique, physique, chimie, sciences de l’univers, sciences de la terre*, 303(20) : 1765–1768, 1986.
- [Haber et al. 2007] – E. Haber, S. Heldmann et U. Ascher. Adaptive finite volume method for distributed non-smooth parameter identification. *Inverse Problems*, 23(4) : 1659–1676, 2007.
- [Harwood et al. 1965] – J. A. C. Harwood, L. Mullins et A. R. Payne. Stress softening in natural rubber vulcanizates - Part II : Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers. *Journal of Applied Polymer Science*, 9(9) : 3011–3021, 1965.
- [Hegazy et al. 2000] – S. Hegazy, H. Rahnejat et K. Hussain. Multi-body dynamics in full-vehicle handling analysis under transient manoeuvre. *Vehicle System Dynamics*, 34(1) : 1–24, 2000.
- [Heimbach et al. 2005] – P. Heimbach, C. Hill et R. Giering. An efficient exact adjoint of the parallel MIT general circulation model, generated via automatic differentiation. *Future Generation Computer Systems*, 21(8) : 1356–1371, 2005.
- [Henry 2006] – L. Henry. *Approche micromécanique de l’os cortical : mesures de champs et simulation numérique*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2006.
- [Hoc et al. 2006] – T. Hoc, L. Henry, M. Verdier, D. Aubry, L. Sedel et A. Meunier. Effect of microstructure on the mechanical properties of Haversian cortical bone. *Bone*, 38(4) : 466–474, 2006.

- [Holmes 2013] – M. H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 2013.
- [Ismail *et al.* 2009] – M. Ismail, F. Ikhouane et J. Rodellar. The hysteresis Bouc-Wen model, a survey. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16 : 161–188, 2009.
- [Johnson 1985] – K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [Joseph *et al.* 2010] – D. S. Joseph, P. Chakraborty et S. Ghosh. Wavelet transformation based multi-time scaling method for crystal plasticity FE simulations under cyclic loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(33-36) : 2177–2194, 2010.
- [Kalker 1982] – J. J. Kalker. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics*, 11 : 1–13, 1982.
- [Kalker 1990] – J. J. Kalker. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [Keller 1976] – J. B. Keller. Inverse problems. *The American Mathematical Monthly*, 83(2) : 107–118, 1976.
- [Kerschen *et al.* 2006] – G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis et J.-C. Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3) : 505–592, 2006.
- [Kesavan et Saint Jean Paulin 1997] – S. Kesavan et J. Saint Jean Paulin. Homogenization of an optimal control problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(5) : 1557–1573, 1997.
- [Kesavan et Saint Jean Paulin 2001] – S. Kesavan et J. Saint Jean Paulin. Quelques problèmes de contrôle bon marché. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série I - Mathématiques*, 332(1) : 67–72, 2001.
- [Kim *et al.* 2009] – H.-J. Kim, W.-S. Yoo, J.-K. Ok et D.-W. Kang. Parameter identification of damping models in multibody dynamic simulation of mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 22(4) : 383–398, 2009.
- [Koutsourelakis 2012] – P.-S. Koutsourelakis. A novel Bayesian strategy for the identification of spatially varying material properties and model validation : an application to static elastography. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(3) : 249–268, 2012.
- [Kraft 2012] – S. Kraft. *Parameter identification for a TGV model*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2012.
- [Kryloff et Bogoliuboff 1947] – N. Kryloff et N. Bogoliuboff. *Introduction to Non-linear Mechanics*. Princeton University Press, 1947.
- [Ladevèze 1985] – P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes rendus de l'Académie des sciences - série 2 : mécanique, physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la Terre*, 300(2) : 41–44, 1985.
- [Ladevèze 1989] – P. Ladevèze. La méthode à large incrément de temps pour l'analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes. *Comptes rendus de l'Académie des sciences - série 2 : mécanique, physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la Terre*, 309(11) : 1095–1099, 1989.
- [Ladevèze 1996] – P. Ladevèze. *Mécanique non linéaire des structures*. Hermès, 1996.



- [Ladevèze et Nouy 2003] – P. Ladevèze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) : 3061–3087, 2003.
- [Lemaitre et Chaboche 1990] – J. Lemaitre et J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [Lévy 2010] – A. Lévy. *Modélisation et simulation d'un écoulement sous vibration. Application au soudage par ultrasons de composites à matrice thermoplastique*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2010.
- [Lévy et al. 2011] – A. Lévy, S. Le Corre, N. Chevaugnon et A. Poitou. A level set based approach for the finite element simulation of a forming process involving multiphysics coupling : Ultrasonic welding of thermoplastic composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(4) : 501 – 509, 2011.
- [Lévy et al. 2012] – A. Lévy, S. Le Corre et A. Poitou. Ultrasonic welding of thermoplastic composites : a numerical analysis at the mesoscopic scale relating processing parameters, flow of polymer and quality of adhesion. *International Journal of Material Forming*, pages 1–13, 2012.
- [Lévy et al. 2011] – A. Lévy, S. Le Corre, A. Poitou et E. Soccard. Ultrasonic welding of thermoplastic composites : modeling of the process using time homogenization. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(1) : 53–72, 2011.
- [Li et al. 2007] – P. Li, R. Goodall, P. Weston, C. S. Ling, C. Goodman et C. Roberts. Estimation of railway vehicle suspension parameters for condition monitoring. *Control Engineering Practice*, 15(1) : 43–55, 2007.
- [Li et al. 2002] – R. Li, W. Liu, H. Ma et T. Tang. Adaptive Finite Element approximation for distributed elliptic optimal control problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(5) : 1321–1349, 2002.
- [Lions 1968] – J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Études Mathématiques. Dunod, 1968.
- [Lu et Pereverzev 2006] – S. Lu et S. V. Pereverzev. Numerical differentiation from a viewpoint of regularization theory. *Mathematics of Computation*, 75(256) : 1853–1870, 2006.
- [Mandelbrojt et Schwartz 1965] – S. Mandelbrojt et L. Schwartz. Jacques Hadamard (1865–1963). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(1) : 107–129, 1965.
- [Mariani et Corigliano 2005] – S. Mariani et A. Corigliano. Impact induced composite delamination : state and parameter identification via joint and dual extended Kalman filters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(50-52) : 5242–5272, 2005.
- [McLaughlin et al. 1985] – D. McLaughlin, G. Papanicolaou et O. Pironneau. Convection of microstructure and related problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 45(5) : 780–797, 1985.
- [Meisssonier et al. 2006] – J. Meisssonier, P. Metz, J.-C. Fauroux, G. Gogu et C. Montezin. Iterative identification of stiffness parameters in a car suspension elastokinematic model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part D : Journal of Automobile Engineering*, 220(11) : 1477–1489, 2006.
- [Moës et al. 1999] – N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. A Finite Element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) : 131–150, 1999.

- [**Morozov 1984**] – V. A. Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. Springer-Verlag New York, 1984.
- [**Neidinger 2010**] – R. Neidinger. Introduction to automatic differentiation and MATLAB object-oriented programming. *SIAM Review*, 52(3) : 545–563, 2010.
- [**Néron et Dureisseix 2008**] – D. Néron et D. Dureisseix. A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6) : 783–804, 2008.
- [**Néron et Dureisseix 2008**] – D. Néron et D. Dureisseix. A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9) : 1053–1084, 2008.
- [**Nguyen 2006**] – H.-M. Nguyen. *Une stratégie d'identification robuste pour la localisation et la rupture*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2006.
- [**Nguyen et al. 2008**] – H.-M. Nguyen, O. Allix et P. Feissel. A robust identification strategy for rate-dependent models in dynamics. *Inverse Problems*, 24(6) : 065006, 2008.
- [**Ni et al. 1998**] – Y. Q. Ni, J. M. Ko et C. W. Wong. Identification of non-linear hysteretic isolators from periodic vibration tests. *Journal of Sound and Vibration*, 217(4) : 737 – 756, 1998.
- [**Nocedal et Wright 1999**] – J. Nocedal et S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Verlag New York, 1999.
- [**Nouy 2003**] – A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2003.
- [**Ok et al. 2008**] – J. K. Ok, W. S. Yoo et J. H. Sohn. New nonlinear bushing model for general excitations using Bouc-Wen hysteretic model. *International Journal of Automotive Technology*, 9(2) : 183–190, 2008.
- [**Osher et Sethian 1988**] – S. Osher et J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) : 12–49, 1988.
- [**Oskay et Fish 2004**] – C. Oskay et J. Fish. Multiscale modeling of fatigue for ductile materials. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(3) : 1–25, 2004.
- [**Papadimitriou et Giannakoglou 2008**] – D. Papadimitriou et K. Giannakoglou. Computation of the Hessian matrix in aerodynamic inverse design using continuous adjoint formulations. *Computers & Fluids*, 37(8) : 1029–1039, 2008.
- [**Papon 2010**] – A. Papon. *Modélisation numérique du comportement des sols sous très grands nombres de cycles - Homogénéisation temporelle et identification des paramètres*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2010.
- [**Papon et al. 2012**] – A. Papon, Z.-Y. Yin, Y. Riou et P.-Y. Hicher. Time homogenization for clays subjected to large numbers of cycles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012.
- [**Payne 1960**] – A. R. Payne. A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 3(7) : 127–127, 1960.
- [**Pecker et al. 2001**] – A. Pecker, J. H. Prevost et L. Dormieux. Analysis of pore pressure generation and dissipation in cohesionless materials during seismic loading. *Journal of Earthquake Engineering*, 5(4) : 441–464, 2001.

- [Peng 1989] – S.-G. Peng. Analyse asymptotique et problème homogénéisé en contrôle optimal avec vibrations rapides. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(4) : 673–696, 1989.
- [Pham 2006] – T. A. Pham. *Assimilation des données interférométriques et géomécaniques et identification des cavités souterraines*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2006.
- [Pierrès *et al.* 2011] – E. Pierrès, M.-C. Baietto et A. Gravouil. Experimental and numerical analysis of fretting crack formation based on 3D X-FEM frictional contact fatigue crack model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(7-8) : 532–551, 2011.
- [Plessix 2006] – R.-E. Plessix. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167(2) : 495–503, 2006.
- [Polach 2000] – O. Polach. A fast wheel-rail forces calculation computer code. *Vehicle System Dynamics*, 33 : 728–739, 2000.
- [Pombo et Ambrósio 2012] – J. Pombo et J. Ambrósio. An alternative method to include track irregularities in railway vehicle dynamic analyses. *Nonlinear Dynamics*, 68 : 161–176, 2012.
- [Potthast 2006] – R. Potthast. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 22(2) : R1, 2006.
- [PREMECCY 2012] – PREMECCY. Predictive methods for combined cycle fatigue in gas turbine blades. Final Project Report AST5-CT-2006-030889, European Commission – 6th RTD Framework Program, 2012.
- [Rastogi 1999] – P. K. Rastogi, éditeur. *Photomechanics*. Springer, 1999.
- [Raucoules *et al.* 2003] – D. Raucoules, C. Maisons, C. Carnec, S. L. Mouelic, C. King et S. Hosford. Monitoring of slow ground deformation by ERS radar interferometry on the Vauvert salt mine (France) : Comparison with ground-based measurement. *Remote Sensing of Environment*, 88(4) : 468–478, 2003.
- [Rebollo 1988] – T. C. Rebollo. Oscillations due to the transport of microstructures. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48(5) : 1128–1146, 1988.
- [Réthoré *et al.* 2007] – J. Réthoré, F. Hild et S. Roux. Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52) : 5016–5030, 2007.
- [Rey *et al.* 2012] – C. Rey, D. Solas et O. Fandeur. *Joints de grains et plasticité cristalline*, chapitre Les joints de grains dans la déformation à froid et à chaud, pages 121–173. Mécanique et Ingénierie des Matériaux. Hermès, 2012.
- [Rudin *et al.* 1992] – L. I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1-4) : 259–268, 1992.
- [Sab 1992] – K. Sab. On the homogenization and the simulation of random materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(5) : 585–607, 1992.
- [Saint Jean Paulin et Zoubairi 2004] – J. Saint Jean Paulin et H. Zoubairi. Etude du contrôle optimal pour un problème de torsion élastique. *Portugaliae Mathematica*, 61(1) : 51–79, 2004.
- [Saltelli *et al.* 2004] – A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo et M. Ratto. *Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models*. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.

- [**Sanchez-Palencia 1978**] – E. Sanchez-Palencia. Justification de la méthode des échelles multiples pour une classe d'équations aux dérivées partielles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 116(1) : 159–176, 1978.
- [**Sanchez-Palencia 1980**] – E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer, 1980.
- [**Scherzer 2011**] – O. Scherzer, éditeur. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Springer, 2011.
- [**Schneider et Kirkpatrick 2006**] – J. J. Schneider et S. Kirkpatrick. *Stochastic optimization*. Springer, Berlin, 2006.
- [**Shackleton et Iwnicki 2008**] – P. Shackleton et S. Iwnicki. Comparison of wheel-rail contact codes for railway vehicle simulation : an introduction to the Manchester Contact Benchmark and initial results. *Vehicle System Dynamics*, 46(1-2) : 129–149, 2008.
- [**Sjöberg et Kari 2003**] – M. Sjöberg et L. Kari. Nonlinear isolator dynamics at finite deformations : An effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model. *Nonlinear Dynamics*, 33(3) : 323–336, 2003.
- [**Stewart et Anitescu 2009**] – D. E. Stewart et M. Anitescu. Optimal control of systems with discontinuous differential equations. *Numerische Mathematik*, 114(4) : 653–695, 2009.
- [**Tarantola 2005**] – A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [**Tikhonov 1977**] – A. N. Tikhonov. *Solutions of ill-posed problems*. Winston, 1977.
- [**Tukey 1986**] – J. W. Tukey. Sunset salvo. *The American Statistician*, 40(1) : 72–76, 1986.
- [**Vollebregt 2008**] – E. A. H. Vollebregt. Survey of programs on contact mechanics developed by J.J. Kalker. *Vehicle System Dynamics*, 46(1-2) : 85–92, 2008.
- [**Weideman 2002**] – J. A. C. Weideman. Numerical integration of periodic functions : A few examples. *The American Mathematical Monthly*, 109(1) : 21–36, 2002.
- [**Yu et Fish 2002**] – Q. Yu et J. Fish. Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem. *International Journal of Solids and Structures*, 39(26) : 6429–6452, 2002.
- [**Yu et Fish 2002**] – Q. Yu et J. Fish. Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading. *Computational Mechanics*, 29(3) : 199–211, 2002.



### Articles dans des revues à comité de lecture

[Aubry *et al.* 2010] – D. Aubry, A.-L. Hamon et G. Puel. Elastic electron scattering using the Finite Element Method : forward and inverse problems. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(1-2-3) : 117–128, 2010. doi :10.3166/ejcm.19.117-128.

[Devulder *et al.* 2010] – A. Devulder, D. Aubry et G. Puel. Two-time scale fatigue modelling : application to damage. *Computational Mechanics*, 45(6) : 637–646, 2010. doi :10.1007/s00466-010-0476-2.

[Devulder *et al.* 2010] – A. Devulder, G. Puel, M. Bensidhoum, L. Sedel et T. Hoc. Determination of the mechanical behaviour of the human cortical bone using micro-extensometry technique. *Osteoporosis International*, 21(6) : 1104–1107, 2010. doi :10.1007/s00198-010-1175-8.

[Kraft *et al.* 2013] – S. Kraft, G. Puel, D. Aubry et C. Fünfschilling. Improved calibration of simulation models in railway dynamics : application of a parameter identification process to the multi-body model of a TGV train. *Vehicle System Dynamics*, 51(12) : 1938–1960, 2013. doi :10.1080/00423114.2013.847467.

[Ladevèze *et al.* 2004] – P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker et T. Romeuf. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(5-6-7) : 571–582, 2004. doi :10.3166/reef.13.571-582.

[Ladevèze *et al.* 2006] – P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker et T. Romeuf. Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(4-6) : 373–393, 2006. doi :10.1016/j.cma.2004.10.011.

[Ladevèze *et al.* 2006] – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40) : 4697–4710, 2006. doi :10.1016/j.cma.2005.10.017.

[Ladevèze *et al.* 2006] – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. On a strategy for the reduction of the lack of knowledge (LOK) in model validation. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(10-11) : 1452–1460, 2006. doi :10.1016/j.ress.2005.11.058.

[Puel et Aubry 2011] – G. Puel et D. Aubry. Using mesh adaption for the identification of a spatial field of material properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(3) : 205–227, 2011. doi :10.1002/nme.3170.

[Puel et Aubry 2012] – G. Puel et D. Aubry. Material fatigue simulation using a periodic time homogenization method. *European Journal of Computational Mechanics*, 21(3-6) : 312–324, 2012. doi :10.1080/17797179.2012.714853.

[Puel *et al.* 2013] – G. Puel, B. Bourgeteau et D. Aubry. Parameter identification of nonlinear time-dependent rubber bushings models towards their integration in multibody simulations of a vehicle chassis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 36(2) : 354–369, 2013. doi :10.1016/j.ymssp.2012.10.021.

**Conférences avec actes**

[Aubry et Puel 2010a] – D. Aubry et G. Puel. CCF modelling with use of a two-timescale homogenization model. Dans *Proceedings of the International Fatigue Conference - Fatigue 2010*, volume Procedia Engineering 2, pages 787–796, Prague, République Tchèque, 2010.

[Aubry et Puel 2010b] – D. Aubry et G. Puel. Two-timescale homogenization method for the modeling of material fatigue. Dans *Proceedings of the 9th World Congress on Computational Mechanics - WCCM9*, volume IOP Conference Series : Material Science and Engineering 10, page 012113, Sydney, Australie, 2010.

[Aubry et al. 2008] – D. Aubry, A.-L. Hamon et G. Puel. Inverse elastic scattering with adaptive regularization and meshes. Dans *Proceedings of the 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice - ICIPE 2008*, volume Journal of Physics : Conference Series 135, Dourdan, France, 2008.

[Aubry et al. 2009a] – D. Aubry, A.-L. Hamon et G. Puel. Calcul par éléments finis de diffusion élastique d'ondes électroniques : problèmes direct et inverse. Dans *Actes du 9e colloque national en calcul des structures - Giens 2009*, Giens, France, 2009.

[Barthe et al. 2003] – D. Barthe, A. Deraemaeker, P. Ladevèze et G. Puel. On a theory of the quantification of the lack of knowledge (LOK) in structural computation. Dans *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference - IMAC XXI*, Kissimmee, États-Unis, 2003.

[Enjalbert et al. 2007] – P. Enjalbert, P. Ladevèze, F. Louf, G. Puel et T. Romeuf. On the Lack-Of-Knowledge (LOK) theory for computational structural elasticity problems. Dans *Proceedings of the 25th Conference & Exposition on Structural Dynamics - IMAC XXV*, Orlando, États-Unis, 2007.

[Kraft et al. 2008] – S. Kraft, C. Fünfschilling, G. Puel et D. Aubry. Identification of nonlinear vibrations in railway vehicles including considerations of track defects. Dans *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering - ISMA 2008*, Louvain, Belgique, 2008.

[Kraft et al. 2010] – S. Kraft, C. Fünfschilling, G. Puel et D. Aubry. Predictive maintenance by identification of suspension parameters from inline acceleration measurements. Dans *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering - ISMA 2010*, Louvain, Belgique, 2010.

[Ladevèze et al. 2003] – P. Ladevèze, A. Deraemaeker, S. Le Loch, G. Puel, T. Romeuf et K. Ma. Validation of structural dynamics models with uncertainties. Dans *Proceedings of the International Conference on Adaptive Modeling and Simulation - ADMOS 2003*, Göteborg, Suède, 2003.

[Ladevèze et al. 2004b] – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. On a strategy of reduction of the lack of knowledge (LOK) in model validation. Dans *Proceedings of the 4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output - SAMO 2004*, Santa Fe, États-Unis, 2004.

[Ladevèze et al. 2004c] – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. On a strategy of reduction of the lack of knowledge of a structural dynamics model. Dans *Proceedings of the 22d International Modal Analysis Conference - IMAC XXII*, Dearborn, États-Unis, 2004.

[Ladevèze et al. 2005a] – P. Ladevèze, G. Puel, P. Enjalbert et T. Romeuf. Theory of the Lack of Knowledge : basic aspects and applications. Dans *Proceedings of the 6th International Symposium on Launcher Technologies*, Munich, Allemagne, 2005.

**[Ladevèze et al. 2005b]** – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. How to reduce the lack of knowledge of an industrial model in structural dynamics. Dans *Proceedings of the 23d International Model Analysis Conference - IMAC XXIII*, Orlando, États-Unis, 2005.

**[Ladevèze et al. 2005c]** – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. Quantifying the lack of knowledge (LOK) of an industrial model in structural dynamics. Dans *Proceedings of the 8th International Conference on Computational Plasticity - Complas VIII*, Barcelone, Espagne, 2005.

**[Ladevèze et al. 2006d]** – P. Ladevèze, P. Enjalbert, G. Puel et T. Romeuf. Extension of the Lack of Knowledge (LOK) theory to force uncertainties. Dans *Proceedings of the 24th Conference & Exposition on Structural Dynamics - IMAC XXIV*, Saint-Louis, États-Unis, 2006.

**[Puel et Aubry 2007a]** – G. Puel et D. Aubry. Régularisation de problèmes inverses par l'utilisation de maillages adaptatifs. Dans *Actes du 8e colloque national en calcul des structures - Giens 2007*, Giens, France, 2007.

**[Puel et Aubry 2008]** – G. Puel et D. Aubry. Identification of a spatial field of material properties with adaptive regularization and meshes. Dans *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences / Computers and Information in Engineering Conference*, pages 1075–1080, New York, États-Unis, 2008.

**[Puel et Aubry 2011b]** – G. Puel et D. Aubry. Méthode d'homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue. Dans *Actes du 10e colloque national en calcul des structures - Giens 2011*, Giens, France, 2011.

**[Puel et Aubry 2011c]** – G. Puel et D. Aubry. Parametric identification of dynamic models including contact-type phenomena. Dans *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics - Eurodyn 2011*, Louvain, Belgique, 2011.

**[Puel et Aubry 2011d]** – G. Puel et D. Aubry. Spatial field identification using adaptive mesh refinement. Dans *Proceedings of the International Conference on Adaptive Modeling and Simulation - ADMOS 2011*, Châtenay-Malabry, France, 2011.

**[Puel et Aubry 2012b]** – G. Puel et D. Aubry. Parameter identification of time-homogenized models describing material fatigue. Dans *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS 2012*, Vienne, Autriche, 2012.

**[Puel et Aubry 2013]** – G. Puel et D. Aubry. Identification paramétrique de modèles à échelles de temps multiples. Dans *Actes du 11e colloque national en calcul des structures - Giens 2013*, Giens, France, 2013.

**[Puel et al. 2003]** – G. Puel, P. Ladevèze, A. Deraemaeker et D. Barthe. Sur une théorie des méconnaissances en calcul des structures. Dans *Actes du 6e Colloque National en Calcul des Structures - Giens 2003*, Giens, France, 2003.

**[Puel et al. 2005a]** – G. Puel, F.-M. Blondel, L. Blanc et E. Dané. Formation pour l'apprentissage de la constitution d'une documentation de spécialiste. Dans *Actes du XVIIe Congrès français de mécanique - CFM 2005*, Troyes, France, 2005.

**[Puel et al. 2005b]** – G. Puel, P. Ladevèze et T. Romeuf. Réduction des méconnaissances d'une structure industrielle. Dans *Actes du 7e Colloque National en Calcul des Structures - Giens 2005*, Giens, France, 2005.

**[Puel et al. 2007]** – G. Puel, B. Tie et D. Aubry. Adaptive approach and choice of norms related to the regularization of inverse problems. Dans *Proceedings of the International Conference on Adaptive Modeling and Simulation - ADMOS 2007*, Göteborg, Suède, 2007.



[Puel *et al.* 2010] – G. Puel, T. Hoc, A. Devulder, L. Henry, D. Aubry, L. Sedel et M. Bensidhoum. Microextensometry measurements and identification of mechanical properties on cortical bone. Dans *Proceedings of the 9th International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering - CMBBE 2010*, Valence, Espagne, 2010.

## Conférences sans actes

[Aubry *et al.* 2009b] – D. Aubry, A.-L. Hamon et G. Puel. Inverse elastic scattering with adaptive FE meshes. Dans *Inverse Problems Symposium - IPS 2009*, Lansing, États-Unis, 2009.

[Bourgeteau *et al.* 2008] – B. Bourgeteau, D. Aubry et G. Puel. Parameters identification for the nonlinear time-dependent model of rubber bushings in multibody simulations. Dans *8th World Congress on Computational Mechanics - WCCM8*, Venise, Italie, 2008.

[Ladevèze *et al.* 2005d] – P. Ladevèze, G. Puel et T. Romeuf. Reduction of the lack of knowledge of an industrial structural dynamics model. Dans *8th US National Congress on Computational Mechanics - USNCCM8*, Austin, États-Unis, 2005.

[Ladevèze *et al.* 2006e] – P. Ladevèze, P. Enjalbert, G. Puel et T. Romeuf. Structural model validation and the lack-of-knowledge theory. Dans *III European Conference on Computational Mechanics*, Lisbonne, Portugal, 2006.

[Puel et Aubry 2006] – G. Puel et D. Aubry. Detection of cavities using interferometric data : adjoint state formulations and adaptive meshing. Dans *7th World Congress on Computational Mechanics - WCCM VII*, Los Angeles, États-Unis, 2006.

[Puel et Aubry 2007b] – G. Puel et D. Aubry. Iterative regularization fo inverse problems using adaptive meshes. Dans *9th US National Congress on Computational Mechanics - USNCCM9*, San Francisco, États-Unis, 2007.

[Puel et Aubry 2010] – G. Puel et D. Aubry. Identification of transient nonlinear models with contact using adjoint state formulations. Dans *IV European Conference on Computational Mechanics - ECCM 2010*, Paris, France, 2010.

## Conférence invitée

[Puel *et al.* 2009] – G. Puel, L. Henry, A. Devulder, D. Aubry, T. Hoc et L. Sedel. Microextensometry measurements and identification of mechanical properties on cortical bone. Dans *Experimental Mechanics in Biological Tissues - BSSM Workshop*, Loughborough, Royaume-Uni, 2009.

## Mémoires

[Puel 2001] – G. Puel. Mise en évidence et recalage des non-linéarités locales en dynamique des structures. Mémoire de DEA, École Normale Supérieure de Cachan, juillet 2001.

[Puel 2004] – G. Puel. *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, décembre 2004.



## Résumé

L'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à la résolution des problèmes d'identification paramétrique, notamment lorsque ces paramètres sont des fonctions de l'espace et/ou du temps.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au cadre de l'identification paramétrique de modèles régis par des équations différentielles ordinaires. Ceci est l'occasion de proposer une démarche de base de résolution du problème inverse, utilisant la solution d'un problème d'état adjoint. Deux exemples issus du domaine de la simulation multicorps et proposant l'utilisation de données expérimentales transitoires permettent d'illustrer le bien-fondé de cette démarche ainsi que d'exposer quelques pistes de régularisation spécifiques.

Dans un deuxième temps, l'identification de champs spatiaux de paramètres est abordée. Les problèmes s'inscrivant dans ce cadre sont alors régis par des équations aux dérivées partielles, et il devient nécessaire d'avoir accès à des données expérimentales les plus riches possibles, telles que celles que peuvent offrir les techniques de mesures de champs. Pour résoudre ce type de problème inverse, nous adjoignons à la démarche présentée précédemment une recherche du champ spatial de paramètres effectuée à l'aide d'un maillage spécifique, initialement grossier, et progressivement raffiné selon des techniques d'adaptation de maillage. Ceci permet alors de développer une stratégie adaptative d'identification, dont les propriétés de régularisation facilitent la résolution du problème inverse, et qui laisse entr'apercevoir des possibilités d'extensions multiéchelles.

Dans un dernier temps, nous présentons enfin une approche complètement multiéchelle, dans le cadre peu répandu de l'homogénéisation périodique en temps. Cette dernière permet d'aborder de façon efficace la simulation de l'évolution « lente » d'un système soumis à des sollicitations cycliques « rapides ». Nous proposons alors sur un exemple quelques investigations autour d'une formulation du problème d'identification paramétrique adaptée à ce cadre multiéchelle.

**Mots clés :** identification, problème inverse, régularisation, mesures de champs, homogénéisation

## Abstract

This work aims at studying specific ways of solving parameter identification problems, especially when these parameters depend on space and/or time.

Firstly, a strategy using an adjoint state formulation is proposed to achieve the parameter identification of models described by ODEs. Different regularization strategies are proposed for specific cases of study, validating the choices made in the strategy.

Secondly, the identification of spatial fields of properties is dealt with, for models described by PDEs. To solve such inverse problems, full-field measurements are crucial to get as much experimental information as possible. Then the strategy described before is improved by the use of a specific mesh for the spatial discretization of the parameter field : this mesh, initially coarse, is progressively refined according to mesh adaption techniques. This iterative strategy provides additional regularization properties, which improve the identification process, and which could tend to be multiscale.

Thirdly, a truly multiscale identification process is proposed in the framework of periodic time homogenization. This latter method allows to efficiently describe the 'slow' variations of a system withstanding 'fast' cyclic loads. Some investigations are proposed on the associated multiscale parameter identification process.

**Keywords :** identification, inverse problem, regularization, full-field measurements, homogenization