Matan (V10)
LAB (#7)

by Кравчук Владислав
ISU[368372]
@uhChainsaws

$$f(x, y) = x^3y^2(4 - x - y)$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Найдём стационарные точки:

$$f'_x = -x^2y^2(4x + 3(y - 4))$$

$$f'_y = x^3y(-2x - 3y + 8)$$

$$\begin{cases} -x^2y^2(4x + 3(y - 4)) = 0 \\ x^3y(-2x - 3y + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} x = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta xy} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta yx} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta xy} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta xy} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -6xy^2(-4 + 2x + y) & x^2(24 - 8x - 9y)y \\ x^2(24 - 8x - 9y)y & -2x^3(-4 + x + 3y) \end{pmatrix}$$

По критерию сильвестра:

$$\Delta_1 = -6xy^2(-4 + 2x + y)$$

$$\Delta_2 = -6xy^2(-4 + 2x + y)(-2x^3(-4 + x + 3y)) - (x^2(24 - 8x - 9y)y)^2$$

Вдоль $y = 0$ можно подойти по $x = \frac{1}{n}$ для $\Delta_1 > 0$ либо $x = -\frac{1}{n}$ для $\Delta_1 < 0$, вдоль $x = 0$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$, кроме $x \in (0, 2)$, там наоборот.

В $(2, \frac{4}{3})$ $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$

ВЫВОД:

Точки $x = 0$, $y = 0$ - седловые. Единственная точка максимума - $(2, \frac{4}{3})$

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Точка локального максимума: $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, 2, \frac{256}{27}\right)$

Стартовая точка должна быть отлична от $(x_0, y_0) = (0, 0)$, я выбрал $(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$

каждое последующее значение вычисляем по $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + a_k \operatorname{grad}(f(x_k, y_k))$

где a_k я попробовал взять в трёх вариантах:

- $a_k = \text{const} = 0.01$
- $a_k = \frac{1}{k+100}$
- $a_k = \frac{1}{\ln(k+100)}$

Возможные условия остановки:

- Если градиент идёт к бесконечностям (поставил ограничение на возможные значения нормы радиус-вектора k-той точки)
- По достижении 1337 итераций
- По малости a_k
- По малости $\varepsilon = \Delta f$
- По малости $\delta = \|p_k - p_{k-1}\|$

Реализация на питоне, с фреймворком `manim`

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА:

Код и видео демонстрации работы метода можно посмотреть на моём гитхабе

Figure 1: Превью

В результате работы скрипта получаем 600 итераций и точку $[1.995676, 1.337316, 9.481329]$ (в идеале получилась бы точка $[2.000000, 1.333333, 9.481481]$)

Это результаты с $a_k = \frac{1}{100+k}$ и условием $\varepsilon < 0.0001$