by Кравчук Владислав ISU[368372] auhChainsaws

Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7);

$$f(x,y) = x^3 y^2 (4 - x - y)$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Найдём стационарные точки:

$$f'_{x} = -x^{2}y^{2}(4x + 3(y - 4))$$

$$f'_{y} = x^{3}y(-2x - 3y + 8)$$

$$\begin{cases}
-x^{2}y^{2}(4x + 3(y - 4)) = 0 \\
x^{3}y(-2x - 3y + 8) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}
x = 0 \\
y = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x = 2 \\
y = \frac{4}{3}
\end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\delta^{2}f}{\delta x^{2}} & \frac{\delta^{2}f}{\delta xy} \\
\frac{\delta^{2}f}{\delta yx} & \frac{\delta^{2}f}{\delta y^{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^{2}f}{\delta x^{2}} & \frac{\delta^{2}f}{\delta xy} \\
\frac{\delta^{2}f}{\delta xy} & \frac{\delta^{2}f}{\delta y^{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -6xy^{2}(-4 + 2x + y) & x^{2}(24 - 8x - 9y)y \\
x^{2}(24 - 8x - 9y)y & -2x^{3}(-4 + x + 3y)
\end{cases}$$

По критерию сильвестра:

$$\Delta_1 = -6xy^2(-4 + 2x + y)$$

$$\Delta_2 = -6xy^2(-4+2x+y)\big(-2x^3(-4+x+3y)\big) - \big(x^2(24-8x-9y)y\big)^2$$

Вдоль y=0 можно подойти по $x=\frac{1}{n}$ для $\Delta_1>0$ либо $x=-\frac{1}{n}$ для $\Delta_1<0$, вдоль x=0 $\Delta_1>0$, $\Delta_2<0$, кроме $x\in(0,2)$, там наоборот.

$$\mathsf{B}\ \left(2,\tfrac{4}{3}\right)\ \Delta_1<0,\Delta_2<0$$

вывод:

Точки x=0, y=0 - седловые. Единственная точка максимума - $\left(2,\frac{4}{3}\right)$

Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7);

численный метод

Точка локального максимума: $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},2,\frac{256}{27}\right)$ Стартовая точка должна быть отлична от $(x_0,y_0)=(0,0)$, я выбрал $(x_0,y_0)=(0.4,0.4)$

каждое последующее значение вычисляем по $\left(x_{k+1},y_{k+1}\right) = (x_k,y_k) + a_k \; \mathrm{grad}(f(x_k,y_k))$

где a_k я попробовал взять в трёх вариантах:

- $a_k = \text{const} = 0.01$
- $\bullet \ a_k = \frac{1}{k+100}$
- $a_k = \frac{1}{\ln(k+100)}$

Возможные условия остановки:

- Если градиент идёт к бесконечностям (поставил ограничение на возможные значения нормы радиусвектора k-той точки)
- По достижении 1337 итераций
- По малости a_k
- По малости $\varepsilon = \Delta f$
- По малости $\delta = \|p_k p_{k-1}\|$

Реализация на питоне, с фреймворком manim

Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) Matan (V10) LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7); LAB (#7);

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА:

Код и видео демонстрации работы метода можно посмотреть на моём гитхабе

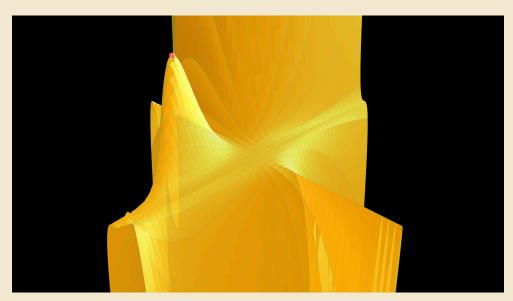


Figure 1: Превью

В результате работы скрипта получаем 600 итераций и точку [1.995676, 1.337316, 9.481329] (в идеале получилась бы точка [2.000000, 1.333333, 9.481481])

Это результаты с $a_k = \frac{1}{100+k}$ и условием arepsilon < 0.0001